

Mes apprentissages en didactique des probabilités et de la statistique

Guy Brousseau

I. Prologue : Apprentissages sauvages sur l'apprentissage

Les remarques qui suivent paraîtront oiseuses à mes lecteurs pressés de me voir exposer mes méthodes, l'origine de mes travaux et mes résultats. Mais dans un domaine nouveau comme celui de la didactique, les articles diffusés ne montrent presque rien des connaissances dont sont surgies celles qui ont été retenues et des moyens qui ont permis de les choisir, de les rédiger et de les croire fondés. Il faut établir tout un réseau de convictions pour pouvoir commencer à les formuler pour ensuite les prouver. C'est en tout cas ce qui a joué un rôle dans cette histoire. Le lecteur peut sauter ces intermèdes pour y revenir à l'occasion plus tard.

1. *La jument Artiguelouve et les paris.*

Je devais avoir 10 ans. Nous étions à Lyon pendant l'occupation et mes parents affrontaient pour la première fois les difficultés posées par une grande ville, et les distractions populaires qu'elle pouvait offrir en compensation : les courses le dimanche, au vélodrome de la tête d'or ou à l'hippodrome de Grand Camp. Mon père s'intéressait à la faune des courses de chevaux, ma mère s'essayait aux paris. Elle ne risquait que des sommes minimes, mais le plus souvent elle disait qu'elle gagnait. Un dimanche, elle me souffla : « voici 1 franc pour toi. Si tu veux, va t'acheter un 'billet placé' sur Artiguelouve, tu es presque sûr de gagner. Sinon garde l'argent. Tu seras content si tu gagnes ? »

Je me suis lancé. Je ne sais pas aujourd'hui comment un guichetier a pu accepter l'enjeu d'un enfant de dix ans, mais à l'époque les enfants étaient considérés sans doute comme des mandataires légitimes de leurs parents. Quand on m'a remis un beau billet de 5 francs, j'ai rougi jusqu'aux oreilles. J'avais honte soudain, comme si j'avais commis quelque mauvaise action. Comment pouvait-on « gagner » tant d'argent sans le gagner ? Sans rien faire ? Cela me parut très immoral. Peut-être était-ce l'effet des enseignements du bouillant père Argoud, au patronage de la Guillotière. Ma mère, quoique protestante, m'y envoyait les jeudis et les dimanches, par respect pour la famille très catholique de mon père, pour sa part plutôt sceptique. Ils m'envoyèrent heureusement aussi à l'école publique Jean Macé à laquelle je m'attachai pour longtemps.

Le souvenir de cette scène ne m'est revenu que très récemment, bien après ceux que je vais rapporter plus loin et bien après avoir réalisé mes expériences. Il m'a frappé comme une révélation. Je me suis souvenu aussi avoir éprouvé, enfant, des rages énormes lorsque je perdais à ces jeux de dé (petits chevaux et autres jeu de l'oie) où il n'y a rien à faire ni rien à comprendre : je pleurais, je me mettais en colère, j'étais impossible ! Entre la rage de perdre et la honte de gagner comment ne pas finir par haïr le hasard, cette baudruche effrayante ?

Bien plus tard, après des années passées à errer dans le labyrinthe des spéculations religieuses, je me suis arraché à la fascination des questions insolubles et des injonctions paradoxales qui tendent à nous incarcérer. Le calcul des probabilités m'a amusé mais c'est sa conséquence, la Statistique, qui m'a vraiment délivré des spéculations sur les faux jeux pour me laisser me consacrer aux incertitudes de la vraie vie. J'ai renoncé au pari stupide, et aux paris tout courts. Ainsi, une honte salutaire et une révolte enfantine m'ont peut-être fait prendre en dégoût, d'abord la participation aux jeux de hasard, puis, plus tard, le concept de « hasard » lui-même. Par contre j'ai beaucoup aimé autopsier le cadavre à l'aide des mathématiques.

2. *Casino populaire et course à pied (premières rencontres avec des enseignements de probabilité)*

a) Cette première rencontre remonte à l'époque où j'étais instituteur dans un petit village de 400 habitants (Varès 47). Mon épouse Nadine, institutrice comme moi, avait 48 jeunes élèves de 5 à 8 ans et moi 33 de 9 à 14, répartis dans chaque classe en quatre sections d'âge.

Respecter les pratiques pédagogiques de l'époque n'était pas encore pour les instituteurs une option intellectuelle appuyée sur le droit à la liberté pédagogique. C'était simplement une question de professionnalisme. Toutefois, grâce aux idées des éducateurs du début du siècle en particulier à Célestin Freinet, l'idée qu'il fallait rester attentif à ce que les enfants pouvaient trouver dans leur milieu avait pénétré jusque dans ma province. Il en résulta ce qui suit.

Lorsqu'il y avait la foire à la ville voisine, deux fois par an, une grande partie des enfants bravaient les lois de la république et suivaient leurs parents pour s'amuser dans les stands et les manèges tandis que leurs condisciples moins heureux restaient tristement avec moi à l'école. Comme on ne pouvait guère aborder de leçons nouvelles, nous révisions les anciennes et nous avions quand même une bonne occasion pour eux et pour moi de rompre avec les rites et les rythmes implacables que je leur imposais ordinairement. Ces moments laissaient apparaître des rapports et des sentiments que Marcel Pagnol aurait certainement su mieux vous présenter que moi. Et le lendemain de la foire, le retour des fêtards continuait un peu cette récréation : ils devaient raconter ce qui les avait frappés devant les autres qui, vengeurs, posaient des questions et jouaient les correcteurs.

Cette année là, certains s'étaient acharnés à une loterie où on pouvait gagner presque à tous les coups, aussi bien - pensaient-ils- un petit crayon, qu'un rasoir électrique pour papa, ou même une petite radio pour maman. Les lots étaient là, devant eux, mélangés. Le scandale était grand ; ils avaient perdu leur argent pour gagner des brouilles sans jamais gagner les bons lots. Et les enfants d'accuser évidemment le tenancier d'être un tricheur, « comme tous les forains ses confrères, et comme les maquignons... »

Les joueurs purent parfaitement me décrire le jeu et la disposition du tapis de mise. Des régions et des couleurs évoquaient une table de roulette. Mais il n'y avait pas de roulette, trop lourde à transporter et d'un équilibre sans doute trop fragile. Le sort était jeté par 6 quilles hexagonales portant chacune sur chaque face un nombre de points de 1 à 6 (des dés auraient été trop suspects). La somme obtenue désignait les cases gagnantes et le lot. La main innocente d'un enfant renversait les quilles.

A 14 ans, à la campagne, mes élèves étaient presque des hommes. Certains avaient déjà des responsabilités sérieuses dans leur ferme. Un discours moral sur les dangers du jeu et sur les préjugés n'aurait servi à rien. Je me suis donc mis à leur expliquer le jeu comme à des adultes : d'abord pourquoi certains nombres sortaient-ils plus souvent que d'autres, et pourquoi, alors, les lots associés au 18 devaient valoir beaucoup moins que les lots associés au 2 ou au 36 (on pouvait même calculer le rapport).

Mais le plus difficile était de comprendre comment la disposition du tapis permettait de convertir discrètement cette distribution non uniforme et trop facilement repérable, en une multitude de choix qui assuraient l'égalité des espérances mathématiques tout en contrariant les analyses et les coalitions de joueurs. Ces réflexions me conduisirent quinze ans plus tard à organiser une expérience destinée à préciser si les élèves reproduisent la distribution des résultats ou sont guidés par l'espérance mathématique¹.

J'essayai de les convaincre finalement que non, le forain n'était pas malhonnête, mais qu'il exploitait habilement le goût du gain facile et l'ignorance de ses clients. J'observais qu'ils

¹ Cette expérience fut montée à Périgueux par Gérard Deramecourt

eurent encore plus de mal à renoncer à leur idée sur le forain qu'à comprendre pourquoi. Et rien n'entamait leur sentiment que leur chance personnelle l'emportait certainement sur ces sombres calculs.

Ce fut la première fois, je ne m'en rendis compte que plus tard, que je tentai d'importer directement des connaissances mathématiques non scolaires auprès de mes élèves. C'était une réponse aux circonstances, et elle n'était assortie d'aucun des indices d'intentions didactiques habituels, comme leçon de vocabulaire, exercices, récitation... Mais mon ardeur didactique avait buté sur des difficultés au dessus de sa compétence. Sans en être tout à fait conscient, j'ai pris ce jour là des souvenirs dont j'ai tiré, bien plus tard, des leçons originales à propos de limites insoupçonnées du projet d'enseignement. Tous mes travaux de didactique ont plongé leurs racines et se sont nourris du riche terreau d'épisodes pédagogiques insolites rassemblés pendant ces années. Je n'en oubliais aucune circonstance ni aucune question.

b) J'eus une autre occasion de braver l'honnête respect que me portaient mes élèves, en me risquant dans la voie d'une sorte de leçon d'épistémologie.

Deux élèves nouveaux, à peu près du même âge, étaient arrivés en cours d'année et se présentaient à mes élèves. Je leur demandai : à votre avis lequel des deux court le plus vite ? Les données morphologiques ont d'abord fusé : « le plus grand, il a des plus grandes jambes ! » « non, les petits tricotent plus vite ! ». Comment savoir vraiment ? L'argument pragmatique l'emporta facilement sur le culte d'Aristote : l'après midi pendant la leçon de gymnastique, une course départagea les concurrents... la cause était entendue. J'avançais alors la provocation probabiliste. « Et à votre avis, lequel des deux est le plus fort à pile ou face ? ». Surprise, les enfants doutent que ce soit la même chose. « Et bien voyons, faisons l'expérience là aussi ». Après le lancer je conclus avec conviction, c'est Jean qui est le plus fort à pile ou face ! Discussion : « mais si on recommence ce ne sera pas pareil avec pile ou face, c'est le hasard, tandis qu'à la course... » « Et bien nous verrons : nous pourrions dire que Jean est plus fort à la course s'il gagne plus souvent à la course qu'à pile ou face » !

C'était en 1954 ou 1955. Pour mes élèves, cette leçon était totalement incompréhensible et inutile. Qui est-ce qui ferait recourir dix fois la finale olympique du cent mètres ? Mais elle fut très instructive pour moi et très utile dix ans plus tard.

Ces deux exemples montrent qu'aujourd'hui, la difficulté n'est pas tant d'exposer et de faire apprendre les résultats du calcul des probabilités que de comprendre et de faire analyser le lacs des pratiques et des concepts socioculturels qui finissent pas les rendre inutiles.

3. Feuilles de Tabac, tambour et lecture du morse (Premières rencontres avec des questions d'apprentissage)

Pendant les vacances scolaires de 1951 je fus engagé par la régie des tabacs comme contrôleur auxiliaire des tabacs. Il s'agissait, de 4 heures du matin à midi, de parcourir, à deux, les champs de tabac, de noter leur développement (attaques de parasites) et de vérifier que les conditions exigées par l'administration pour accepter la récolte ou pour payer les assurances (nombre de pieds, distances, superficie utilisée, nombre de feuilles par pied, etc.) étaient respectées. En 1952 on me confia la responsabilité de reporter sur les registres les résultats de nos observations. Il fallait enregistrer d'innombrables feuilles, d'innombrables pieds poussés ou non dans d'innombrables parcelles, calculer les surfaces, les ratios... Il fallait donc faire d'énormes calculs et accomplir ces prouesses dans la chaleur moite d'un été torride : une erreur d'un pied en fin de semaine vous obligeait à vérifier tous les calculs d'une semaine. Je me croyais armé avec mon passé de bon élève et mon bac de Maths. Mais quand j'ai vu les employés permanents de la régie « descendre » des additions de cinquante nombres de six

chiffres sans cesser de discuter avec leur voisin, et après m'être assuré qu'il ne s'agissait pas d'une intox ironique à l'intention des néophytes prétentieux, j'ai rencontré mon premier problème théorique d'apprentissage.

Mes mécanismes scolaires étaient bien trop lents et ne m'assuraient pas en fin de compte une bien grande fiabilité. Pendant quelque temps, je dus passer ce qui me restait de mes nuits à refaire mes calculs. Après avoir reçu, rouge de honte, l'aide bienveillante de mon père pour me sortir d'affaire, je me mis à l'œuvre pour trouver, pour inventer, la méthode.

Fort heureusement, pour accompagner la fanfarette de l'école, j'avais appris à jouer des RA et des FLA sur un tambour où, comme vous le savez certainement, chaque baguette doit frapper sèchement la peau deux fois de suite. Le chef fait mettre en rond autour de lui ses débutants et tous frappent en même temps leurs deux coups de la droite et deux coups de la gauche sur un rythme lent. Ensuite le rythme commence à s'accélérer et ça devient très dur et douloureux pour les muscles des poignets... Les néophytes abandonnent les uns après les autres. Le chef reste le dernier et fait entendre un roulement continu. Alors on recommence... Et il ne se passe rien. Pendant des semaines, aucun progrès n'est observable. Au contraire, la fatigue survient et gâche les meilleures intentions. Plus vous voulez forcer votre poignet à suivre vos ordres et plus vos muscles se crispent et se révoltent. Et puis, tôt ou tard, vous relâchez le contrôle volontaire et continu de vos muscles entre les deux frappes de la même main, la baguette rebondit d'elle-même et il suffit d'une seule très légère et très économique impulsion pour qu'elle revienne deux fois de suite; et l'autre main suit... Le roulement s'amorce, il suffit d'accepter la vitesse; le rythme boiteux se régularise, puis regagne ce qu'il a perdu momentanément en force... Les baguettes dansent presque toutes seules.

Je savais qu'il me fallait calculer et calculer encore, mais pour me laisser une chance d'« inventer » la méthode (assez vite pour qu'elle me serve suffisamment), j'ai compris qu'il me fallait relâcher sciemment mes mécanismes... scolaires et laisser mon cerveau apprendre à sa façon. Ces mécanismes consistaient à épeler chaque élément d'opération (par exemple ...49 + 3 + 9...): « quarante neuf et trois, cinquante deux », à écouter ce qu'on dit pour le vérifier, puis à recommencer avec l'étape suivante: « cinquante deux et neuf, soixante et un... ». Quelle déperdition de temps et d'énergie dans cette répétition du cinquante deux (trace de l'apprentissage des sommes par paires, et bases de la mémorisation avec la table)! Evitons-là. La deuxième étape consista à ne pas prononcer le chiffre que j'ajoutais, il me suffisait de l'évoquer mentalement. Je n'épelais que le nombre obtenu, et une seule fois, comme des étapes: quarante neuf (mentalement plus trois), cinquante deux... soixante et un. Ensuite je n'ai même plus prononcé ces « étapes », mais seulement le chiffre des unités: « neuf (mentalement plus trois), « deux » (mentalement plus neuf, un... en incrémentant les dizaines à part à mesure. Au début je m'aidais en appuyant un doigt d'une main mais bientôt je me mis « à voir » les dizaines comme sur une règle graduée et ce sont les doigts qui mentalement héritèrent des centaines; un peu plus compliqué que le tambour mais je ne saurais dire ce qui est apparu en premier du raisonnement ci-dessus ou de son évidence pratique.

A la fin de la campagne qui durait un mois, je commençais à bien descendre les colonnes d'additions (presque) comme mes collègues, sans toutefois pouvoir m'interrompre pour discuter avec eux. Il peut sembler que j'avais gagné mon pari d'apprendre à calculer comme eux dans le temps imparti. A cette époque, j'avais une assez bonne opinion de mes capacités pour n'avoir peur d'aucun apprentissage. Mais au début je vérifiais mes résultats avec mes moyens classiques, déjà pas trop fiables. Ce n'est que vers la fin que je pus avoir assez confiance dans ma nouvelle capacité à compter pour me passer de mes béquilles et bénéficier d'un véritable gain de temps et d'une sécurité convenable. Le bilan didactique de l'opération n'était pas nettement positif. Mais l'intérêt que j'avais pris à cet apprentissage m'avait permis de mener à bien une tâche répétitive que j'avais trouvée au début insupportable. En tout cas

les éléments du choix d'une technique ou d'un concept en fonction de son utilisation n'ont jamais cessé d'être présents dans mes réflexions didactiques.

Pour finir, je peux vous assurer que si elle n'est pas entretenue, la capacité de compter ainsi se perd presque aussi vite qu'elle s'acquiert...mais peut-être peut-elle se retrouver, si nécessaire.

Quelques années plus tard, pendant mon service militaire, j'ai dû affronter un problème similaire. On voulait faire de moi un transmetteur de messages radio en morse. Il fallait apprendre à transcrire ou à émettre à toute vitesse, des suites de 5 chiffres dénuées de sens. La méthode était la même que pour le tambour : il fallait répéter jusqu'à satiété des exercices désespérants. La machine commençait assez lentement et accélérait, jusqu'à ce que le transcripteur jette le crayon, les écouteurs, l'éponge et un râle de détresse. Le niveau était jugé sur la vitesse atteinte à ce moment là. Ainsi la fin de tout exercice était un échec ! Apprendre consistait à augmenter sa vitesse et son endurance pour gagner un concours... de décervelage. Peut être la solution résidait dans la reconnaissance globale des groupes de cinq lettres, « comme des mots », mais je n'ai pas eu le temps de réussir ce coup là.

C'est alors qu'on s'aperçoit qu'il vaut mieux libérer notre cerveau, et s'adapter en le soulageant des contraintes et des exigences de contrôle auxquelles notre éducation et notre culture nous ont habitués. Il faut le laisser « connaître » là où il n'y a rien à « savoir ».

4. *Vocation et prémonition*

J'ai ainsi emmagasiné dans ma jeunesse beaucoup d'autres expériences similaires qu'il serait fastidieux d'énumérer si on ne dit pas à quoi elles ont mené. Le goût de réfléchir à ses apprentissages et à ceux d'autrui ne se commande pas. La tendance générale est d'en oublier les conditions pour n'en garder que le résultat. Nous avons totalement oublié quand, comment, et où, nous avons appris la plus grande part de ce que nous savons ; ou du moins nous n'en gardons au mieux que l'accessoire, les circonstances arbitraires ou les moins liées à l'intimité du savoir lui-même.

Ma curiosité pour le « comment apprendre » s'est toujours confondue avec le quoi et le pourquoi de ce qui était appris. Les cours d'analyse que Jean Colmez m'a dispensé plus tard n'ont jamais effacé complètement mes inquiétudes de « contrôleur auxiliaire » sur les approximations : une erreur de un pied sur trente millions peut en cacher une d'un million de pieds : alors, priorité à l'examen des conditions des savoirs... et aux propriétés des fonctions. Mais le désir de me consacrer à l'étude de l'apprentissage des mathématiques m'est venu très tôt. En mars 1952, j'ai averti Mr Duclos, mon professeur de Mathématiques au Lycée Fermat, que j'abandonnais ma bourse après une année de préparation à l'ENS de Saint Cloud. « Pourquoi », me demanda-t-il ? Sa surprise et les raisons – trop flatteuses - qu'il me donna de continuer mes études me surprisent si agréablement que je n'osai pas lui dire que c'était pour me marier². « Finalement je m'intéresse moins aux mathématiques elles-mêmes qu'à leur compréhension et à leur apprentissage ». « Alors il vous faut étudier la psychologie » me dit il. « Non, l'opinion des souris, ce n'est pas exactement ce qui m'intéresse... ». Je vais faire mon métier d'instituteur. J'étais incapable d'en dire davantage.

5. *Les années 50 et les mathématiques modernes*

Après quelques pérégrinations dans le Lot et Garonne, nous avons obtenu un poste double dans le village dont je vous ai parlé. J'y ai de la famille, des amis et des condisciples. Le travail d'un instituteur à cette époque peut largement déborder ses fonctions didactiques et

² Je voulais épouser Nadine Labesque et aucune autre, et je ne croyais pas qu'elle attendrait pendant cinq ou six ans, dans une école de campagne, jusqu'à ce que j'aie terminé mes études. Après 55 ans de vie commune, c'est encore un petit litige entre nous : elle m'affirme que si. Mais si j'ai commis une erreur, je ne la regrette pas.

éducatives. Nous créons une cantine, des équipes de basket, une sorte de club de théâtre et de cinéma... tout ce que souhaitent les paysans pour « garder à la terre » les enfants qu'ils n'envoient pas au collège. J'ai même tenté un « club de mathématiques » où nous étudions divers problèmes posés aux agriculteurs par l'évolution rapide des techniques... Principalement des problèmes d'optimisation (choix sous condition entre les superficies de diverses cultures par exemple... ou position et calcul d'une réserve d'eau...) Mais le projet fut abandonné rapidement : il y avait trop de paramètres qu'on ne pouvait pas connaître, sans compter ceux que les paysans ne voulaient pas donner... Je pus observer que nos difficultés venaient beaucoup plus de leur culture et de leurs habitudes et évidemment de mes capacités didactiques, que de mes difficultés avec le calcul opérationnel. La conscience de ces limites renforça mes convictions sur la nécessité d'une « éducation globale » des membres d'une communauté pour lui permettre de tirer partie de ses ressources. Mais on croyait à l'époque que l'école devait être chargée, par et pour la société et à travers les enfants qui lui étaient confiés, de préparer « un futur meilleur » fait de tous les espoirs et tous les désirs actuels de cette société³.

En 1956, le gouvernement m'offrit une (nouvelle) bourse d'étude sous la forme d'une incorporation dans un régiment de transmission. La chance et ma discipline républicaine me conduisirent à Montargis puis au fort de Bicêtre avec le grade de sous lieutenant. Avant de partir en Algérie, je pus m'inscrire au CNAM et à la Sorbonne, où je suivis quelques cours de Charles Pisot qui introduisait cette année là, pour la première fois, un cours sur les structures dans le programme de licence. A Paris, les mathématiques modernes m'explosèrent au visage. Et le gouvernement prolongea ma bourse en Algérie, sans aucun doute pour favoriser mes méditations sur la façon d'utiliser ces nouvelles mathématiques pour améliorer mon enseignement dans ma classe. De retour à Varès je mis en œuvre un plan compliqué pour essayer des projets différents dans les sections de ma classe et ainsi accumuler les observations.

Ce fut ce qui me permit, en 1960, de proposer mes fiches à Lucienne Félix qui venait de publier son livre « mathématiques modernes inter enseignement élémentaire ». Elle s'y intéressa ce qui détermina le reste de ma vie et de ma carrière.

II. Les années soixante

Le lecteur désireux de me voir aborder le sujet promis devra patienter encore un peu. Car il ne m'est pas possible de montrer et de justifier mes projets pour l'enseignement des statistiques et des probabilités sans en montrer les origines, la genèse et la façon dont ma conviction s'est constituée à travers des expériences diverses et coordonnées. Le projet a profité de l'exploitation opportune du surgissement soudain d'un ensemble de connaissances, d'idées et de méthode issues d'horizons différents. Le plus difficile à montrer est sans doute la transformation progressive de cet improbable concours de circonstance en méthodes de travail rigoureuses et productives.

Pendant huit ans (1961-1969) les principaux instruments théoriques empiriques méthodologiques et expérimentaux se sont dessinés. Ils vont se concrétiser dans les travaux de

³ Je fus longtemps à me laisser bercer par cette erreur. Les membres d'un corps social peuvent s'accorder un moment pour adopter ou rejeter un projet commun – faire la guerre ou la combattre par exemple - et ils peuvent faire de leurs enfants les instruments heureux ou malheureux de leurs projets. Mais dès que ce corps social se divise sur ses projections communes, dès que des factions reprennent leurs droits de satisfaire leurs intérêts à travers leurs enfants, l'école - expression du corps social en entier -, ne peut plus, seule, remplir son rôle éducatif sans être perçue comme l'ennemie de tout le monde. Dans une démocratie l'école ne peut faire que ce à quoi consent la société et donc que ce qu'elle comprend. Les réformes comme la continuité sont un projet didactique global.

1970 à 1975. Je ne cite que pour mémoire les compléments d'études en Mathématiques (J. Colmez), en Psychologie (P. Gréco) qui me furent suggérés par Lichnérowics et par Lucienne Félix. Je les complétais par des études en Sémiologie (C. Metz), en Pédagogie (J. Château, J. Wittwer), et en Sociologie (Boudon), et par la construction du CREM puis par la conception de l'IREM et du COREM. Mes tentatives pour suivre la voie classique : écrire des ouvrages pour l'édification des néophytes (le premier chez Dunod (196) puis plus tard chez Hachette, furent convaincantes : elles m'ont convaincu de ne pas persévérer dans cette voie.

On peut deviner le pourquoi de cette dispersion. Elle était nourrie de toutes les nouveautés, qui, dans tous les domaines, s'offraient à ma boulimie. Mes « bibliographies » de l'époque l'attestent. Cependant la juxtaposition de ces connaissances – probablement assez superficielles - ne suffit pas à expliquer l'édifice qui en a résulté.

Je cherchais à imaginer des leçons, j'essayais de tenir compte de toutes les observations qui dénotaient une difficulté (extensible à une classe de circonstances), je cherchais dans ce qui restait possible une voie praticable et économique que je mettais à l'épreuve des théories connues. Si j'arrivais à un projet compatible je cherchais à le réaliser et observer ce qui se passait. Imaginer des dispositifs originaux n'était pas un but, c'était le résultat d'une tactique qui consistait à éviter les échecs prévisibles. Assez vite cette pratique allait devoir s'adapter et s'ériger en « méthode » pour obtenir les soutiens nécessaires.

1. Préparatifs de réforme de l'organisation didactique des mathématiques

Dans les années 60 à 70, la communauté internationale des professeurs de mathématiques envisage de plus en plus précisément les moyens de réaliser une réforme, projetée depuis plus de 50 ans. La réorganisation des fondements des mathématiques semble alors à peu près achevée. Le vocabulaire nouveau s'est uniformisé et Bourbaki s'est lancé dans l'aventure didactique de réorganiser tout le champ des mathématiques en suivant certains principes épistémologiques exposés entre autre par Cavailles. Les « éléments » veulent la présenter comme un objet enfin unifié, « la » mathématique, qui rassemble tous les résultats jusque là dispersés dans des points de vues et des approches diverses. Cette tentative reprend le projet euclidien et tend à lui substituer une autre solution. Mais si l'organisation des mathématiques change à ce point il n'est plus possible de prévoir où l'enseignement classique se raccordera avec la voie nouvelle.

Pour toutes sortes de raisons auxquelles la presse faisait écho, la réforme semblait bénéfique et même nécessaire au développement d'une société en expansion. Cette réorganisation était concevable, même à un niveau très précoce, car on pensait pouvoir changer l'objet de l'enseignement tout en conservant les moyens didactiques et pédagogiques classiques de son enseignement. Cela coûterait un gros effort de formation des professeurs mais seulement en mathématiques. Dès lors que cette possibilité fut admise, elle parut inéluctable. Elle avait la faveur de la grande majorité des intellectuels de toutes disciplines. En fait il n'y manquait seulement que les moyens financiers, techniques, humains, sociaux et matériels...

Grâce aux événements de 68, on allait les trouver.

La réalisation du projet ne paraissait donc pas dépendre beaucoup des nouveautés pédagogiques qui « étaient dans l'air » à l'époque, et en tout cas, l'éventuelle conciliation était l'affaire des professeurs eux-mêmes. On avait perdu de vue Comenius mais quoique qu'on se gausse d'eux, ses principes régissaient les conceptions pédagogiques populaires. Et ils disaient entre autres choses que les méthodes ne dépendaient pas du contenu de l'enseignement.

En tout cas personne ne pensait alors qu'il faudrait avoir des connaissances spécifiques pour mieux comprendre le fonctionnement de l'enseignement des mathématiques et pour réussir

cette réforme. Les divisions comtiennes de la science formaient un mur compact contre cette idée. La psychologie et les autres sciences établies devaient y suffire.

On pensait pouvoir concevoir directement les enseignements nécessaires et les diffuser par les moyens habituels : arrêtés ministériels, programmes, manuels... L'ordre général et les définitions étant donnés, le développement semblait être l'affaire d'exemples de leçons, d'écoles modèles ou pilotes. Certains allaient jusqu'à envisager des expérimentations. Mais trouver des candidats qui conjuguent la hardiesse nécessaire avec l'autorité institutionnelle non moins indispensable n'était pas facile (seul des inspecteurs pouvaient l'entreprendre, mais leur disponibilité n'était pas à la hauteur des nécessités. De toute façon il s'agissait, au plus, de mettre en expérience des options techniques et de développer celles qui paraîtraient marcher le mieux. Ces entreprises étaient limitées par la délégation et l'empirisme. Les nouvelles techniques ouvraient des voies qui paraissaient assez nombreuses pour que chacun en trouve une originale ; faire un choix paraissait illusoire et inutile : que cent fleurs s'épanouissent.

Chacun allait se mettre à la tâche de concevoir une version de Bourbaki accessible à... chaque niveau scolaire - de l'école maternelle à l'Université - comme le disait un slogan de l'époque, destiné à souligner l'espoir et la volonté de faire profiter les élèves de l'unification des concepts et des langages, laquelle ferait gagner du temps et par conséquent améliorerait les résultats.

2. *Quel genre d'ouvrages pour les professeurs ?*

Il me semblait que nous pouvions améliorer beaucoup l'enseignement du comptage, des nombres et du calcul élémentaire à *condition d'agir sur l'ensemble de la scolarité primaire*. Il ne s'agissait pas de parsemer le curriculum de quelques leçons sur les ensembles ou de plaquer des explications futiles sur des apprentissages déjà là. Il y avait une réelle opportunité d'enseigner mieux et plus vite les mathématiques de base en utilisant le nouveau sens donné aux notions anciennes. Il n'était même pas nécessaire de changer les programmes qui tenaient en 5 lignes (appuyées il est vrai sur une tradition bien établie). Encouragé par Lucienne Félix je commençai la rédaction d'un ouvrage pour le début de l'école primaire. Je crois que c'est cette intuition, je veux dire cette ambition qui a tout changé. Elle signifiait qu'il fallait concevoir l'enseignement avant de le présenter aux professeurs... Vaste programme ! Et elle impliquait aussi - mais pour un enseignant du primaire la chose semblait aller de soi - qu'il faille examiner conjointement les questions de mathématiques à enseigner, de didactique, de psychologie et de pédagogie.

Mais un ouvrage pour qui ? Chaque notion à enseigner aux élèves devait d'abord être expliquée aux maîtres. Même illustrée de quelques exercices, cette solution me semblait impraticable. C'était toute l'organisation des enseignements, l'articulation des connaissances, et l'ergonomie de l'enseignement qui étaient bouleversées quand on y regardait de plus près. Une raison théorique et intellectuelle était insuffisante pour soutenir les efforts de longue durée que réclamaient les apprentissages fondamentaux du calcul.

On vit bientôt que tous les rénovateurs pouvaient imaginer qu'un petit ouvrage d'une centaine de pages suffirait pour expliquer une « définition » des ensembles et des opérations logiques puis celle des cardinaux et de leurs opérations. Mon expérience me conduisit à penser tout de suite qu'au contraire, il fallait partir dans l'autre sens : que doivent faire les élèves ? Pourquoi le feraient ils ? Que doivent faire les professeurs ? Pourquoi ? Comment dire ce que l'on fait ? Pourquoi ?...

Ce choix me conduisit à suggérer d'abord les exercices qui pourraient s'exprimer dans les termes ordinaires du vocabulaire des enfants et de leurs professeurs. Et pour éviter le pédantisme et diverses dérives que beaucoup plus tard je décrivis comme des glissements métadidactiques je fis le choix de présentations non verbales d'exercices, eux-mêmes non verbaux. Double pari qui avait bien peu de chances d'être gagné.

3. Leçons non verbales et axiomatique

Le professeur dessine au tableau un grand rectangle. Sans un mot mais ostensiblement il regarde l'une après l'autre les tables de ses élèves et dessine pour chacune un petit rectangle placé comme sur un plan. Il dessine ensuite sous chaque rectangle, un petit rond pour chaque élève présent. Troublés par son silence inhabituel les élèves intrigués chuchotent. Il se représente lui-même par un plus gros rond placé en haut. Soudain il tend la craie à l'élève qu'il allait représenter et semble attendre qu'il fasse quelque chose. Interdit l'interpellé se retourne vers les autres qui rient de son embarras. – Vas-y ! L'élève va devant le tableau. S'il hésite trop le professeur lui reprend la craie, répond et d'un geste le renvoie à sa place. Très vite et sans un mot la fonction du plan est « comprise ». Le professeur trace alors un lien entre le dessin d'un élève et le sien puis il va serrer la main de l'élève représenté. Quand il dessine un lien entre deux élèves voisins, tous vérifient qu'ils ont compris en les voyant se serrer la main... Puis une flèche représente que l'un tape sur l'épaule de l'autre et là il faut savoir qui... (Cette leçon est la première suggérée dans mon livre de Chez Dunod, mais sans qu'il soit dit que cette leçon puisse être non verbale !).

Plusieurs leçons et projets de ce genre m'ont convaincu qu'il était possible de les utiliser. Mon intérêt pour les leçons non verbales puis sur les aspects non verbaux des leçons ordinaires n'a jamais cessé. Cet aveu semblera cocasse à ceux qui ont relevé mon goût – parfois immodéré - pour la parole et pour les explications.

Mais à l'époque il me semblait indispensable de les utiliser si nous voulions éviter d'avoir à fonder les notions mathématiques sur de mauvais discours, bien difficiles à corriger ou pire sur l'illusion d'approches logicistes formelles. Il fallait que le métalangage de base soit aussi léger que possible et ne soit l'objet d'aucune discussion.

La faiblesse didactique d'une théorie axiomatisée réside dans son introduction, car celle-ci requiert des mots, qui, par définition, échappent à la théorie en question. Aucun dictionnaire ne peut s'organiser sans accepter des termes primitifs dissimulés, mais qui sont définis à l'aide de termes dans la définition desquels ils entrent eux-mêmes. Remarquons pour y revenir en temps voulu, que cette difficulté est récurrente à l'école primaire, même dans les leçons ordinaires. Par exemple j'ai observé un projet de leçon où le professeur, voulant expliquer ce qu'est un *angle*, le présentait comme l'*écart entre deux côtés*. Finalement le terme « angle » ne figurait que dans le titre de la leçon, l'objet et sa mesure étaient confondus et l'« explication » avait pris la place du concept à introduire.

Pourquoi définir avec des mots ce qui peut, au moins provisoirement, se concevoir directement ? Certes la compréhension finale des notions exige d'avoir à disposition des formulations adéquates, lesquelles sont guidées par des connaissances, dont une grande partie reste implicite. Mais pourquoi devraient-elles précéder ces dernières ? J'en inférai que les connaissances devaient d'abord se développer comme des réponses implicites à des nécessités. (J'ai dû ferrailier un moment pour me convaincre que cette position ne contredisait pas l'axiome des linguistes, pour qui il n'existe pas de pensée sans langage).

On comprend désormais pourquoi l'idée d'une définition directe, non verbale, des concepts mathématiques me conduira fatalement plus tard à une théorie des situations.

Pour l'instant, les formulations éventuellement mobilisées dans cette première phase pourraient être celles du langage ordinaire, « naïf », et le professeur devait pouvoir faire fonctionner l'exercice sans le verbaliser lui-même. Mais cela impliquait aussi qu'il ne fallait pas baser d'apprentissages sur ces formulations !

Ainsi la séparation des idées mathématiques et de leur formulation, des langages et des métalangages était indispensable pour l'introduction des notions fondamentales de mathématiques.

4. Le signe et la chose

J'en déduisis qu'il fallait dès que possible rendre très familière pour le professeur et pour les élèves la différence entre le signe et la chose désignée, entre les propriétés de l'une et de l'autre. Cette propension allait à l'encontre de la tendance générale à les utiliser conjointement même lorsque leurs règles d'emploi respectives étaient contradictoires.

La suite a montré qu'une des raisons de l'échec des réformes a été l'incapacité de notre culture à maîtriser à ce moment là les glissements métadidactiques. Ce phénomène consiste à prendre les moyens de la compréhension, de l'apprentissage ou de l'enseignement comme des objets d'enseignement et à réitérer (comme dans l'exemple de l'angle). Le plus connu de ces phénomènes a été provoqué par un empilement de métaphores. La représentation naïve des opérations logiques par des opérations ensemblistes prêtait déjà à des paradoxes révélés par Russell. En conjuguant cette idée avec celle d'Euler, qui représentait les syllogismes par des positions de régions du plan, on obtenait un mauvais modèle, même pour les ensembles (avec lesquels il n'y a ni frontières ni localisation stable dans les opérations). La nécessité d'introduire des signes aussi bien pour représenter les objets (identifier un ensemble par une couleur) que leurs relations (flèches), leur représentation (désignation d'un élément précis ou générique) etc. augmentait la confusion. Les nécessités de la pédagogie classique basée sur l'introduction solennelle de signes, de lettres et de mots, qui devenaient les supports d'explications et d'exercices où se confondaient tous ces niveaux méta achevaient l'imbroglio. Mauvais modèle, verbalisation excessive et confusion entre les objets et leurs signes furent les trois principales erreurs techniques des choix de cette époque. Ces erreurs étaient inéluctables dans les conceptions didactiques de l'époque. La psychologie génétique proposait de nombreux arguments contre ces conceptions, mais elle était incapable de proposer des alternatives à des principes didactiques qui remontaient à Comenius. Pendant dix ans le milieu ne parvint pas à se résoudre à tirer les conséquences des observations qui dénonçaient ces erreurs. L'impatience conduisit à ignorer les timides premiers résultats des recherches. Au contraire, pour les discréditer, on les accusa d'être la cause des échecs de ce que pourtant elles combattaient (« c'est çui qui dit qui l'est »). Finalement la grande réforme fut jetée avec l'eau du bain et on se garda de tirer les leçons de l'aventure : aucune histoire sérieuse de ces évènements n'a été entreprise. (Hier encore un Académicien voulait la fonder sur – et donc la réduire à - l'étude de la correspondance entre les inspecteurs généraux de l'époque).

4. Les « dépendances » entre apprentissages

Je ne pouvais pas éviter de vouloir transposer, dans ce nouveau projet, un certain nombre de « principes » que le temps avait permis de réaliser à peu près dans les curriculums classiques. Ainsi mon défi principal était dans l'articulation des apprentissages. Chaque connaissance devait pouvoir être rencontrée, introduite, comprise, expliquée, utilisée et apprise au fil des leçons successives à un rythme et avec une densité contrôlée. Si l'ordre axiomatique proposait un ordre chronologique pour les connaissances principales, il ne prenait pas en compte l'ordre des connaissances annexes ; presque aucune ne pouvant être traitée séparément. D'ailleurs pour être comprise, une idée nouvelle doit être accompagnée d'une perspective sur son usage et son utilité. Il fallait donc tresser plusieurs fibres en même temps : les idées, les représentations, les usages, Il fallait les rendre compatibles et suivre leurs progressions concomitantes. Au début il me fallait plusieurs heures chaque matin pour me remettre en mémoire toutes les conditions que je voulais satisfaire dans les nouvelles leçons envisagées. Pour soulager et contrôler mon travail je construisis des « matrices de dépendance » : par exemple, pour placer l'ensemble des connaissances visées, et leurs étapes successives, et pour repérer celle qui intervenaient dans la construction d'une autre, le nombre de fois où elle allait

être présentée ou utilisée, et à quel rythme, ou la durée entre le moment où une étape était achevée et ou une autre qui l'utilisait pouvait commencer etc. Par la suite (en 1971-75) ces matrices me servirent pour analyser les expériences où cette « progression fut utilisée, pour tenter de prouver expérimentalement les types d'états et de « dépendances », et naturellement pour organiser d'autres curriculums.

Lucienne Félix me présenta à André Lichnerowicz qui incita son ami Georges Dunod à éditer mon opuscule. L'ouvrage n'eut aucun succès commercial. Mais la table des matières dévoilait les clés des exercices en termes mathématiques crus et elle servit beaucoup à inspirer les futurs auteurs ou à impressionner leurs interlocuteurs. Mais ils ont opté pour l'autre solution : la présentation aux maîtres des savoirs à enseigner aux élèves, simplement illustrée de quelques exercices.

Cette voie s'imposa finalement, c'est ainsi que plus tard, en 1970, je fus conduit à m'y engager un peu. L'école maternelle avait les yeux fixés sur le primaire afin d'échapper à l'image classique de la garderie. Parce qu'elle s'intéressait beaucoup plus aux activités des élèves qu'aux spéculations didactiques, Lucienne Félix approcha des inspectrices et leur suggéra diverses activités. Elle obtint une floraison de « thèmes d'activités » publiés par Hachette. Ils étaient accompagnés de commentaires où nous expliquions les notions mathématiques suivant l'organisation du livre de Dunod, et de fiches d'exercices à photocopier...

5. Un plan quadriennal

Mon programme était fondé sur l'épistémologie spontanée des professeurs couramment admise à cette époque. Mais le travail effectif m'entraîna à relever bien des contradictions.

Je m'étais normalement emparé des idées dans l'air : les graphes de Papy (cercles d'Euler et flèches), et les opérations sur les classes d'objets qu'elles pouvaient représenter. Les défauts et les limites de ces idées étaient déjà visibles, mais la nécessité de faire et la volonté de « faire simple » l'emportait habituellement assez vite sur la recherche de solutions plus satisfaisantes. Pour que je prenne conscience de la nécessité de ces remises en question, j'avais besoin d'un point d'appui : ce furent les travaux de Diénès qui me l'offrirent on le verra plus loin.

Grâce à Lucienne Félix, je rencontrai à nouveau Lichnerowicz. Je lui fis part de mes réflexions, de mes doutes et de mon sentiment qu'il était nécessaire d'entreprendre des recherches coordonnées pour mieux reconnaître ce qui était possible. Il ne semblait pas m'écouter, la pipe éteinte au coin de la bouche ; ses yeux d'un bleu intense suivant d'invisibles volutes de fumées... mais il m'écoutait et après une heure de mon verbiage exalté, il résuma les choses en quelques phrases. Il m'invita à entreprendre un ensemble d'études dont il fixa le programme : « en mathématiques vous aurez besoin de ceci et de cela, laissez ceci, voyez avec Colmez, prenez contact de ma part avec Pierre Gréco, continuez à votre goût vos lectures de linguistique et de sociologie... et je vous suggère de faire une étude plus précise sur les 'les conditions limites d'une expérience en pédagogie des mathématiques'. Ce fut mon programme pour quatre ans de travail.

6. Le CREM (Centre de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques)

Heureusement, j'ai compris le sujet comme un sujet de recherche et non comme celui d'une thèse. Au lieu de me mettre à compiler les textes et à visiter dans le détail ce que je connaissais déjà, je créai un premier « instrument de recherches », destiné à déterminer concrètement ses conditions d'existence. Je suivais en cela – dans l'ordre où le préconisait mes convictions - une méthode que j'allais expliciter et systématiser par la suite avant de l'ériger en théorie! L'idée première est que tout ce que l'on obtient par l'action d'un pouvoir peut ne fonctionner que par lui, indépendamment des conditions effectives et des besoins réels

et il est susceptible de disparaître de la même façon. J'ai choisi d'obtenir les moyens dont j'aurai besoin par la production de ce dont avaient besoin ou envie ceux qui m'aideraient. Je ne pouvais d'ailleurs pas faire autrement. J'ai eu la chance de rencontrer des responsables suffisamment motivés et hardis pour leur travail. René La Borderie, directeur du CRDP de Bordeaux à cette époque en est le prototype. Il a financé et soutenu la création et le fonctionnement du CREM, Centre de recherches sur l'enseignement des mathématiques, pendant quatre ans contre ma participation à plusieurs de ses projets, en particulier sur l'éducation à l'audio visuel. Il nous a permis de fédérer les 16 professeurs d'écoles Normales et les professeurs de spéciales, de connaître les inspecteurs, d'avoir les faveurs du recteur... Je ne connaissais que l'enseignement primaire, et de l'intérieur, j'ai appris le fonctionnement des systèmes administratifs qui l'encadraient. Pour faire coopérer ces personnages, il fallait des actions réelles et du succès auprès des acteurs effectifs. La demande de suggestions et de textes de formation et d'information était forte et soutenait le projet. Relater les péripéties et les apprentissages de cette période demanderait un ouvrage complet. La protection et l'aide de Jean Colmez et de sa jeune collègue Françoise Tison me firent espérer trouver l'université en mesure d'établir des coopérations durables avec le système éducatif. Mais lorsque l'IREM fut créé, il vida le CRDP de ses mathématiciens et les coopérations s'effritèrent jusqu'à ce que le COREM prenne à sa charge et à sa façon la responsabilité des rapports avec les enseignants et leur administration. J'ai pu réaliser dans cette structure les sévères « conditions administratives d'une recherche en pédagogie des mathématiques » que j'avais établies. Grâce au travail, au dévouement et à la compétence de ses membres le COREM put vivre 25 ans sur ces bases, sans accrochage ni avec l'administration, ni avec les professeurs ou leurs syndicats ni avec les responsables politiques...⁴

Pendant ces quatre années (1964-1968), nous avons essayé de préfigurer ce que pourraient être des expériences, des projets d'expériences, des questions fondamentales, des méthodes d'études, des éléments théoriques nécessaires empruntés à diverses disciplines ou alors spécifiques et improvisés, quel serait le profil des personnels et les structures qui permettraient ces travaux etc. Mes exigences surprenaient mes amis professeurs d'écoles normales qui ne se voyaient pas poser les bases d'une telle entreprise. Je cherchais à les convaincre que la formation des maîtres allait nécessairement se faire un jour à l'université, et que ses agents ne pouvaient en être qu'eux, connaisseurs à la fois des mathématiques, des enseignants, et aussi des enfants, mais à la condition d'être aussi des chercheurs – ce que notre projet pouvait leur donner la chance d'être. La place que j'osais briguer dans un tel système n'était pas la leur, elle était celle d'un technicien, au mieux celle d'un ingénieur, comme il y en avait à l'époque dans les laboratoires de Physique.

Je déposai mes conclusions – du moins ce que j'avais envie d'en expliciter - au cours du Colloque d'Amiens, en 1968, sous la forme d'un projet d'Institut de Recherches *pour* l'enseignement des mathématiques. J'avais aussi rempli mon contrat du côté des études. Jean Colmez me recruta en 1969 comme assistant de mathématiques dans la toute nouvelle Université Bordeaux 1, pour y continuer ce que j'avais entrepris sous sa conduite.

7. *Diénès et la psychomathématique*

Les ouvrages de Diénès commencèrent à être traduits en français et atteignirent le grand public vers 1965. On put constater que de nombreux ouvrages qui parurent à cette époque convergeaient avec ses choix ou s'en étaient inspirés. Il y avait effectivement un certain nombre de similitudes avec mon travail... je l'ignorais mais le sien, en anglais, était

⁴ Les conditions ne régleront pas tout - il faudrait un ouvrage plus détaillé pour rendre justice et hommage à Pierre Raymond, à Gisèle Jousson, à Jacques Perès, à Nadine Brousseau et à tous leurs collègues et successeurs qui ont assuré le fonctionnement du COREM entre 1973 et 1998, avec la complicité de nombreux administrateurs.

antérieur. D'abord un peu dépité, je ne tardais pas à transporter mes critiques et mes doutes sur mon travail sur le sien, et de bénéficier ainsi d'un punching-ball qui me fit rapidement progresser.

Diénès proposait deux nouveautés : des jeux et du matériel d'une part et des principes de « psychomathématique » d'autre part. La base d'un jeu de Diénès était un matériel, par exemple les « blocs logiques », (ou plus tard, les points d'une géométrie discrète, ou bien les nombres naturels, les puissances de dix étant représentées par cubes et des barres, à la manière de Stévin). Ces éléments réalisaient un champ d'objets mathématiques et sa structure, par exemple un espace produit de classes de variables (forme, taille, épaisseur, couleur). Les axiomes deviennent des règles, le « jeu » consiste à utiliser ces règles pour produire des résultats déterminés par des conditions: rassembler tels éléments, produire des éléments présentant une différence, ou deux etc. réaliser un nombre ayant telle propriété... Les réalisations convenables doivent présenter en outre des propriétés qui facilitent la reconnaissance et la manipulation des objets construits, ce qui n'est pas toujours aussi facile.

Les « jeux » de Diénès étaient donc essentiellement pour ces élèves des *exercices*.

La pratique d'un jeu ayant de facto introduit la structure, la connaître au sens empiriste du terme consistait à être capable de l'identifier dans des réalisations différentes (jeux isomorphes et « abstraction »), et avec des systèmes sémiologiques différents (schématisation, puis symbolisation), Alors les conditions étaient favorables pour procéder à la formalisation et à l'axiomatisation qui réorganisait les observations introduites et développées dans les phases antérieures.

Le système était très séduisant pour les professeurs car il reprenait des éléments de leur pratique et de leur épistémologie spontanée en les identifiant à l'aide de termes ou de concepts savants. La notion d'isomorphisme absorbait et sacralisait les notions d'exemples similaires et d'exercices. Lorsque après le cours et les explications, un nombre suffisant d'élèves n'avait pas su faire un problème, le professeur devait chercher un problème similaire et le proposer pour s'assurer que la correction avait permis d'apprendre la méthode pour le résoudre. Je comprenais était nécessaire d'attendre un peu pour dissimuler l'intention du professeur et pour éviter que les élèves, reconnaissant le problème, ne « recopient » sa solution dans son nouveau décor, sans pour autant avoir compris le raisonnement qui la validait. Cependant, si le problème était important et typique, ces finesses disparaissaient vite avec les élèves récalcitrants. Le professeur ne cachait plus que si on ne comprenait pas pourquoi, il fallait au moins reconnaître le problème et appliquer la méthode qu'au besoin il explicitait... avec des surcharges didactiques incroyables comme dans l'enseignement traditionnel de la règle de trois. Je trouvais choquant que Diénès posât en règle ce qui, pour des pédagogues professionnels, n'était qu'un pis aller, une béquille dans une négociation délicate.

De la même façon, il justifiait sa démarche avec des références à diverses disciplines savantes mais elles fonctionnaient de façon plus idéologique que réelles. Par exemple, la règle d'apprentissage par répétitions de présentations analogues est empruntée au behaviorisme psychologique le plus élémentaire. Les comportements des enfants présentés comme des inventions mathématiques n'étaient que la reproduction de ce que le professeur leur avait appris. Sa conception du jeu me semblait assez rustique comparée à ce qu'en disaient les auteurs de l'époque⁵ puisque exposer les règles du jeu était en fait expliciter le savoir à enseigner. Et par dessus tout, la même théorie semblait propre à construire ou à expliquer aussi bien la construction des mathématiques, que leur apprentissage, leur enseignement que leur histoire et que leur épistémologie – troublant et simpliste !-. Malgré cela, Diénès fut

⁵ les mathématiciens, des philosophes comme Johan Huizinga, des pédagogues comme Jean Châteauneuf, et des compilateurs comme Claude Aveline

l'auteur de ce que je considère comme la première théorie de didactique au sens moderne, c'est-à-dire une théorie dans laquelle les dispositions sont puisées dans la matière à enseigner elle-même et non pas seulement dans des agencements généraux.

Je n'étais pas en position d'explicitier à l'époque autre chose que des doutes et des objections, bien faibles devant le succès que rencontraient ses ouvrages (Succès dont j'analysais plus tard les raisons). Mais à critiquer ses méthodes, je mettais en pièce une grande partie des pratiques classiques, y compris les miennes.

Je n'écrivis mes critiques de la théorie et des méthodes de Diénes que bien plus tard, après en avoir m'être convaincu de leur validité par diverses expériences. Je n'ai pas voulu contrarier le développement d'une action qui avait du succès, même si je la trouvais très discutable. Je n'ai jamais osé le faire lorsque je n'avais pas une alternative consistante à lui opposer. Ai-je eu tort ? Il y avait beaucoup d'excès dans les mouvements qui accompagnèrent le mouvement des mathématiques modernes. Certains auraient pu être évités. Mais il y en a bien davantage dans les méthodes et surtout dans les croyances empiriques prétendues traditionnelles. Elles évoluent tout autant et sans contrôle, mais je ne me hasarde plus pour l'instant à montrer ses failles, même si je peux suggérer des solutions applicables et sûres. Leur diffusion et leur mise en œuvre restent éminemment hasardeuses à cause justement de la persistance de la culture mathématique, philosophique et pédagogique actuelles.

Pendant les années soixante je me suis essentiellement concentré sur l'enseignement des connaissances classiques : les nombres (naturels et décimaux), leurs opérations et la mesure. Il fallait surtout développer des modes de calcul et d'apprentissage du calcul plus économiques. Mes résultats dans ce domaine furent éprouvés et probants : on pouvait gagner près de 180 heures de classes sur les cinq ans du primaire, l'équivalent d'une année de mathématiques. Ce qui aurait pu offrir quelques possibilités pour faire des mathématiques autres et autrement sans rien perdre de vue. Mais la publication de mes résultats en 1975 n'eut aucun écho.

Cette période apporta à l'enseignement des probabilités un instrument extraordinaire, apprécié comme il se doit par ceux qui, comme moi, avaient essayé de les apprendre, en autodidactes, dans le livre de Borel⁶. Kolmogorov, en l'axiomatisant et en l'appuyant sur la théorie de la mesure, simplifiait considérablement l'exposé de cette théorie, qui n'avait été longtemps qu'une collection de calculs. Pourtant, pendant cette décennie je ne me suis intéressé aux statistiques et aux probabilités qu'en élève et en utilisateur. Mes efforts pour trouver un indice de dépendance entre les résultats des leçons ne porteront leurs fruits que quelques années plus tard... et grâce à d'autres chercheurs⁷. Je rampais au pied des échelles de Guttman et je buvais la tasse au fond de l'analyse factorielle, de l'analyse des classes latentes, et des « casi implications »!

8. La lumière didactique qui vient des probabilités.

J'ai pu enfin rencontrer Diénes en 1970, à Sherbrooke où avec onze assistants il s'efforçait d'élargir sa méthode à l'ensemble des sujets mathématiques élémentaires, et à faire traduire ses travaux dans de nombreuses langues. Il m'accorda trois jours pleins et répondit à mes questions avec une courtoisie parfaite. J'étais un inconnu, je le harcelais de questions qui étaient autant de critiques : il m'invita chez lui, à Montréal, où avec sa jeune femme il me reçurent royalement. J'éprouvai alors un profond sentiment de tristesse. Mon punching-ball était cassé. En mon for intérieur: je jugeais, impitoyablement, qu'il ne pourrait rien ajouter à son œuvre.

Cette idée m'était apparue en prenant connaissance des travaux qu'il faisait accomplir à ses deux assistants français. Ils essayaient d'appliquer la méthode de Diénes aux probabilités.

⁶ E. Borel, Les éléments de la théorie des probabilités (1909) réédités par Albin Michel en 1950)

⁷ Régis Gras établit l'analyse implicative pour répondre aux questions sur les dépendances didactiques posées au COREM

Ils avaient commencé par la phase ludique. Ils présentaient aux élèves deux machines apparemment identiques, l'une était probabiliste (un planche de Galton avec un mécanisme qui permettait de faire varier à volonté la fréquence des sorties à gauche ou à droite), l'autre déterministe (think-a-dot). Dans la seconde, la loi était assez simple pour que les élèves la découvrent rapidement, la première résistait aux pronostics, mais des observations sur la fréquence des événements pouvaient survenir. Si je me souviens bien, ils devaient continuer par la phase des jeux isomorphes. Ces jeux devaient consister à jeter divers polyèdres réguliers (un cube, un tétraèdre, un octaèdre, un icosaèdre...). D'un appareil à l'autre, les élèves apprenaient à faire l'inventaire des événements, à les représenter par des schémas, à leur attribuer une mesure et à calculer par la somme, la probabilité de sortir l'une ou l'autre des issues. L'équiprobabilité des événements possibles était admise par raison de la régularité du polyèdre. Le jet simultané de deux appareils devait fournir de façon très classique l'introduction du produit de probabilités. Je me demandai un instant s'ils allaient compléter la collection des machines par des polyèdres irréguliers pour mesurer l'aire des faces par leur probabilité d'apparaître, et donc par leur fréquence d'apparition. Il n'est pas sûr que la dynamique de ces objets justifierait ce point. Mais cela aurait enfin fait entrer un peu de signification réelle aux probabilités comme modèle pour des observations. Car dans ce projet, les fréquences étaient un argument purement rhétorique. Elles ne servaient effectivement qu'à convaincre les élèves de l'imprévisibilité déterministe des résultats. Le reste étant affirmé Pourquoi le processus de mathématisation de Diénès ne faisait-il pas surgir la nécessité de donner à cette « mesure » un espace mesurable concret ?

Quelle différence faisait-il entre un processus déterministe et un processus probabiliste ?

En faisant reposer l'apprentissage soit sur des révélations du professeur, soit sur la répétition d'activités similaires, quelle place restait-il aux mathématiques ?

Comment acquérir ou même distinguer dans cette théorie le sens de l'implication logique si toute connaissance résultait d'une inférence statistique ?

Ces réflexions et bien d'autres me permirent de rassembler autour de sa théorie un grand nombre d'idées jusque là un peu éparses et de poursuivre parallèlement l'étude de l'apprentissage de la logique et du raisonnement et celle des probabilités et de la statistique. Le premier résultat fut donc l'émergence d'une autre conception *du processus de mathématisation*, dont on va parler dans le chapitre suivant.

Elle s'est construite tout en s'appuyant « contre » celle de Diénès, avec mon expérience d'instituteur et avec ma nouvelle provision de connaissances dans divers domaines. Mais je ne la « reconnus » comme une « théorie » que beaucoup plus tard ; quand elle eut résisté à de nombreuses objections ou qu'elle s'y fut adaptée. Et de toute façon elle resta pour moi, comme celle de Diénès, un punching-ball.

9. Connaissance et savoir, déjà.

A mesure que j'avancais dans ces études dispersées, obligé de choisir ce qui me paraissait utile et de rejeter le reste, j'éprouvais la crainte grandissante de rester un amateur dans tous les nouveaux domaines. Plus j'apprenais, mieux je voyais la différence entre les connaissances d'un amateur et les savoirs d'un professionnel. Ce sentiment était surtout pénible en mathématiques où la connaissance superficielle est particulièrement contre-indiquée. Mais mes choix n'étaient pas le fruit du hasard ou de la fantaisie, chaque pierre était choisie en fonction de sa place dans un nouvel édifice. J'étais convaincu que chaque notion est une réponse à une foule de questions. En avançant dans la connaissance d'une notion, certaines questions se ferment et s'organisent et d'autres s'ouvrent. Puis, à un moment donné on a le sentiment qu'aucune des questions qui restent ne peut résister bien longtemps à ce que l'on sait déjà, ni conduire à modifier sensiblement l'organisation des connaissances. On ne sait pas

tout mais on connaît beaucoup plus de choses qu'on n'en sait. A ce moment il est possible de laisser les choses en l'état et d'attaquer de nouveaux sujets ; mais il faut être prêt à payer le prix d'une révision lorsqu'on s'aperçoit qu'on s'est trompé.

Avec le secours d'une bibliothèque amoureusement rassemblée et d'une lecture rapide et frénétique, je pensais pouvoir attaquer la plupart des lacunes qui se révélaient sans faire de grands contre sens. J'ai eu la chance de pouvoir soutenir cette illusion, jusqu'au moment où je me suis aperçu que tout le monde, spécialiste ou non faisait, comme moi, même dans des domaines restreint.

Avec le recul, j'ai le sentiment que c'est exactement la méthode que j'ai suivie dans mes « recherches ». Au sujet d'un concept ou d'une réalisation, je tapais dedans, j'accumulais critiques, informations, expériences et raisonnements jusqu'à ce que j'obtienne des convictions qui résistaient bien à toutes les objections que je connaissais. M'employer à prouver publiquement le mal fondé de ce que j'avais rejeté était impraticable. La variété des domaines auxquels il fallait faire appel pour contrecarrer une seule idée appartenant à un domaine unique. Je ne pouvais donc pas transformer mes connaissances en savoirs sûrs pour les autres. Je m'attachais donc à envisager des concepts alternatifs qui me servaient à leur tour de punching-ball. Cette démarche tétatologique produisait des exemples différents et des contre exemples indispensables pour des recherches. Les « ennuis » commencèrent quand on vit les monstres résister aux épreuves de l'expérience mieux que leurs compétiteurs.

III. La situation en 1970

1. La mathématisation du réel

La création des trois premiers IREM fut un grand moment pour l'APMEP et pour son président, Walusinski, qui avait beaucoup milité pour les obtenir. Le premier congrès postérieur à ces événements mémorables eut lieu à Clermont-Ferrand en mai 70. L'IREM de Bordeaux venait d'être créé et tout y était prêt pour son fonctionnement et son orientation. Je fus donc invité à faire une demi conférence.

Le thème proposé par P. L. Hennequin était certainement destiné à évoquer principalement les statistiques et les probabilités. Mais je décidai de l'interpréter comme un sujet de pédagogie : comment peut-on utiliser divers milieux « réels » pour favoriser l'invention de mathématiques ?

L'idée empiriste d'une « extraction » directe des structures mathématiques à partir de l'observation intelligente du « réel » était très communément acceptée à l'époque dans la culture. Son antagoniste, l'apriorisme de Poincaré, s'essouffait un peu. Le structuralisme la tolérait très bien, la psychologie behaviouriste américaine l'instillait dans la jeune « intelligence artificielle » [Rosenblatt], et même Piaget, tout en la critiquant de façon convaincante, lui réservait un de ses processus de création de schèmes. En éducation mathématique, elle s'accordait harmonieusement avec le réalisme platonicien spontané des mathématiciens et offrait un argument facile pour clamer que les mathématiques sont importantes parce qu'elles sont partout !

Ainsi Emma Castelnuovo, que je fréquentais un peu à la CIEAEM, préconisait l'observation de la disposition des feuilles sur les tiges de certaines plantes pour conduire directement à la découverte et à l'étude des suites de Fibonacci. La reconnaissance directe des structures par la répétition de rencontres « isomorphes » ou même par la contemplation d'un exemple était la principale justification sous jacente à de nombreuses propositions didactiques de l'époque.

Les constructions philosophiques classiques fournissaient des cadres intéressants, mais je les ressentais comme des métaphores finalement idéalistes. Il ne me paraissait pas très fécond de

chercher à discuter ces questions sans un travail plus précis sur les conditions de l'interaction d'un sujet avec « la réalité ». Je voulais présenter dans ma conférence les bases d'une étude expérimentale qui éviterait les généralisations hâtives de ces épistémologies qui me paraissaient sommaires. Plutôt que de se demander 'comment venait une connaissance' pour l'enseigner, il me semblait suffisant de se demander 'dans quelles circonstances' : le langage vient de la nécessité de communiquer avec les autres ou de s'exprimer, la raison vient de la nécessité de justifier ce dont on doute, la connaissance vient de la nécessité de s'adapter à des circonstances nouvelles... Idées simplistes mais pourquoi ne pas essayer, pour commencer. J'exposais donc des modèles différents de conditions, assortis d'exemples que je trouvais probants même lorsqu'ils fournissaient des solutions assez différentes des curriculums classiques. Ces furent là les bases de ce qui deviendrait plus tard la « théorie des situations ». Ce point de vue s'illustre d'un curriculum pour l'étude des nombres naturels et des opérations. Il commençait à différer sensiblement du livre de 1964 et il était en cours d'expérimentation. Il me semblait prématuré de m'avancer sur le terrain des probabilités et des statistiques, mais les idées étaient déjà nombreuses. Le problème qui me préoccupait alors était plutôt celui d'expliquer l'émergence de la pensée logique en m'alignant sur les travaux de A. Wermuz à Genève) mais par le truchement d'un processus stochastique comme en témoignent nos documents de l'époque sur la désignation et le codage des objets, des collections, et des relations.

En tout, cas l'idée que les connaissances naissent à cause de leur adéquation à des conditions déterminées mais erratiques ne semblait pas s'accorder facilement a priori avec la superbe nouvelle organisation générale connaissances des mathématiques par leurs structures. Comment accorder Bourbaki avec Gonseth ?

2. Une double mathématisation du réel.

Il n'est pas insignifiant de remarquer que la mathématisation du réel me préoccupait à un double titre. Il s'agissait d'abord d'imaginer des modalités de mathématisation d'un réel pour les élèves, destinées à leur faire développer et comprendre des connaissances mathématiques. Mais il ne suffisait pas de produire de telles modalités, il s'agissait surtout de les connaître, de façon scientifique et si possible *mathématique*, et de les comprendre – celles que nous imaginions mais aussi celles qui étaient déjà déployées –. Contrairement à la didactique classique je ne croyais pas que l'on puisse apprendre des connaissances mathématiques par des moyens qui ne dépendaient pas de la spécificité de ces connaissances... ni qu'on puisse par conséquent les enseigner de façon optimale par des méthodes universelles.

A cette époque de structuralisme généralisé il était naturel de rapprocher ces deux mathématisations et d'essayer d'enrichir chaque domaine de nos observations dans l'autre. C'est en ce sens que la conception du dispositif d'observation du COREM constitue lui aussi un travail et un résultat de recherches en didactique, plus précisément en théorie des situations.

Ce rapprochement permet d'expliquer les difficultés que nous avons rencontrées dans la diffusion de nos recherches. Entre le projet et la conception d'un dispositif d'expérimentation ou d'expérience, puis entre sa réalisation et son analyse, et éventuellement ses reprises pour le mettre au point, il s'écoulait un temps parfois long au cours duquel les premières ébauches étaient retravaillées et améliorées. Les communications à l'intérieur de l'équipe laissaient des suites de traces écrites avec parfois l'évocation des raisons qui avaient présidé aux modifications apportées... Ce n'est que plus tard que les explications pouvaient être à leur tour formulées oralement (et filmées) et écrites, dans des textes provisoires en attente de résultats d'autres expériences ou développements théoriques en cours.

Il s'écoulait donc un temps considérable entre les étapes successives du travail : les intuitions initiales, les conceptions corrigées, les corpus réunis au cours des expériences, leur analyse et

leur présentation hors de la petite communauté des personnes impliquées dans les recherches. Et plus on voulait agrandir le cercle, plus il fallait expliquer et ordonner clairement un champ sans cesse plus complexe et plus vaste.

La règle primitive des IREM était de donner l'accès à chacun des membres qui le voulaient à tous les textes échangés à l'interne au fur et à mesure de leur apparition. Chacun pouvant puiser les informations ou les idées qui l'intéressaient. Ce dispositif destiné à promouvoir plus vite les bonnes idées et à écarter les mauvaises a eu des effets dévastateurs sur la diffusion de nos travaux. Aucun chercheur ne pouvait suivre l'évolution logique d'un pareil ensemble d'idées ni même mettre à jour celles dont il avait eu connaissance. Les formulations initiales maladroitement et les malentendus sur les événements même qui alimentaient nos travaux, étaient beaucoup plus difficiles à lever. Certains, croyant que nous élaborions des leçons ou des curriculums modèles pour toutes les classes nous reprochaient comme des erreurs l'étrangeté de nos dispositifs ou les résultats qui nous instruisaient le mieux. Et les malentendus persistaient pendant des années, nous obligeant à rabâcher nos principes et nos méthodes et ralentissant le travail. L'essentiel a été imaginé entre 1965 et 1975 dans une joie collective et une ivresse même, difficile à décrire. A partir de la création des DEA en 1975 il a fallu négocier les textes et leur teneur, les plier à l'opinion et aux intérêts communs et couler nos idées dans le plomb des présentations académiques.

Cette réalité historique à imprégné nos idées sur la création des connaissances mathématiques et sur leur diffusion dans un groupe de condisciples.

Il n'est donc pas facile aujourd'hui – plus de trente ans après - de préciser la date à laquelle une idée a pris corps. Connaissant la suite on peut toujours identifier après coup les bons indices et négliger les hésitations et les erreurs.

En tout cas le processus de recherche qui consistait à progresser en spirale sur plusieurs axes à la fois (le dispositif, les méthodes, les concepts théoriques, les résultats, la reproduction, etc.) en essayant de progresser à chaque spire, était tout à fait conscient et fonctionnait aussi bien pour décrire les recherches que leur objet. Suscitées par une situation favorable les premières connaissances des élèves étaient questionnées, transformées par leur mise à l'épreuve, révisées par la nécessité de leur formulation, par la confrontation avec d'autres situations et dans des débats d'élucidation et de preuve... jusqu'au moment où une connaissance satisfaisante était obtenue et apprise avec sa raison d'être. Ainsi chaque connaissance mathématique importante était associée à ses conditions de validité et à son utilité, représentées par une situation de référence.

Le travail du professeur

Nous pouvons remarquer que cette conception laisse dans l'ombre le rôle du professeur qui, pourtant, est essentiel, nous le savions bien, et qui est différent de ceux de l'élève et du chercheur. Regarder le travail du professeur comme un instrument et non pas comme un objet de recherche a joué un rôle capital dans nos recherches et dans la possibilité de faire fonctionner le COREM. Nous cherchions ce que nous appelons aujourd'hui des *situations mathématiques* qui caractérisent de façon catégorique les connaissances et qui modélisent autant que possible leur rôle essentiel logique ergonomique et heuristique. Ces situations sont des dispositifs didactiques au sens classique, ils servent à enseigner. On se préoccupe le moins possible de ce que leur mise en œuvre peut coûter aux professeurs ; ce qui ne veut pas dire qu'on le néglige, au contraire.

L'étude de l'action du professeur deviendra prioritaire dix ans plus tard (vers 1980), après que les effets et les paradoxes de l'impossible contrat didactique nous aient obligé à voir que les conditions didactiques de l'usage et de l'apprentissage de ces situations d'apprentissages ou de référence scolaire, devaient être modélisées elles aussi, en même temps que la situation mathématique adidactique. La situation didactique elle aussi dépend de la spécificité des connaissances enseignées. Dix ans était aussi le temps nécessaire pour que les professeurs

soient assurés que notre regard se portait bien sur les situations et non pas personnellement sur les personnes qui en étaient les agents.

3. *Panorama actuel des situations et des curriculums*

Nous avons distingué l'étude des conditions « locales » propres à déterminer « une » connaissance, par exemple une définition ou un théorème, de l'étude de processus plus ambitieux portant sur une structure entière ou un concept comme celui de nombre naturel, ou de rationnel, ou même sur une branche entière des mathématiques comme les probabilités et statistiques ou la géométrie. La première relève pour l'essentiel de la théorie des situations mathématiques classique. La seconde - en fait la première mise à l'étude -, est beaucoup, plus complexe et moins formalisée. Malgré de nombreux progrès théoriques (sauts informationnels, obstacles, et techniques, l'étude théorique des dépendances entre les apprentissages, des agrégations de situations et de connaissances, des équilibres entre les enjeux et les coûts, et de leurs répercussions dans les processus, stagne. Pendant un court laps de temps ces études ont porté le nom de macrodidactique. Mais nous réservons ce terme aujourd'hui à l'étude des rapports spécifiques des sociétés avec les objets de l'enseignement des mathématiques (par exemple avec la statistique ou le calcul), à l'étude de certains phénomènes comme les glissements métadidactiques, les effets destructeurs du cycle des évaluations et des sanctions automatiques, la crise de l'individualisation etc.

Il existe d'autres approches et d'autres visions à partir de postulats et de méthodes différentes ; nous ne les examinerons qu'à l'occasion. Mais ma présentation d'ensemble dénotait clairement l'ambition de déterminer non seulement un champ scientifique où l'on peut appliquer les sciences existantes, mais aussi une science qui revendique le droit de contrôler la légitimité de ces applications. Cette ambition ne fut assumée que beaucoup plus tard⁸ par des définitions du genre : « la *Didactique* a pour objet d'étudier la façon dont sont les connaissances des hommes sont diffusées pour leurs besoins et ceux de leurs sociétés ». D'ailleurs ce nom de *Didactique* n'a été choisi qu'en 1975, quand il fallut baptiser les nouveaux DEA. Jean Louis Ovaert proposa le titre qui correspondait le mieux à notre travail de l'époque : « épistémologie expérimentale ». Mais nous avons finalement préféré relever – malgré quelques contradictions importantes qui nous coûtèrent cher par la suite - le vieux terme humaniste et honni de *Didactique* afin de marquer un certain engagement militant des IREM dans un projet éducatif.

Les connaissances peuvent être présentées suivant différentes logiques :

- *l'ordre déductif* des textes standard de mathématiques : axiomes, définitions, propriétés dans l'ordre lemmes, théorèmes, corollaires, applications...

Par exemple l'expérience d'enseignement des rationnels et des décimaux mise en expérimentation au CM2 (10-11ans) en 1973 suit un ordre axiomatique : les couples de naturels sont concrétisés par la mesure de l'épaisseur d'un certain nombre de feuilles de papier identiques. Les couples équivalents sont ceux qui correspondent à une même épaisseur. Les élèves cherchent ce qui correspond aux opérations qu'ils connaissent avec d'autres grandeurs. Ils introduisent la somme, la différence, et le produit et la division d'une mesure rationnelle par un scalaire dont ils retrouvent les propriétés. Pour localiser des rationnels sur une droite, en les encadrant entre des rationnels de plus en plus proches, les élèves choisissent les rationnels décimaux dont ils découvrent les bonnes propriétés pour les calculs. Ils étudient

⁸ Il est vrai que j'ai entrepris ce chantier depuis le début, mais j'imaginai que c'était l'ambition commune à beaucoup d'autres. Je ne me voyais que comme un modeste acteur de ce mouvement, un contributeur chanceux que les hasards d'une époque rendaient utile pour un moment. J'ai toujours été surpris qu'à chaque étape il ne se trouve personne pour conduire cette barque mieux et plus loin que moi, et ce n'est pas sans réticences que j'ai accepté les tâches et les postes qui me conduisaient hors de ma condition. En fait j'ai eu la chance de pouvoir me placer au bon endroit pour recevoir de nombreux appuis.

ensuite le semi groupe linéaire des applications « rationnelles » et approchent ces applications avec des applications décimales. Ils définissent enfin le produit des rationnels mesure, des rapports ou des applications linéaires par la composition des fonctions. L'invention réside dans les situations qui suggèrent la recherche, qui justifient l'usage de ces notions mathématiques et qui suscitent des preuves de leurs propriétés. Ni l'ordre ni l'agencement de ces situations ne sont décidés par les élèves, même s'ils les comprennent après coup.

- l'ordre *génétique* dans lesquels une situation initiale provoque une cascade de questions qui aboutissent à la construction d'un concept par ses fonctions

Les situations et leur succession apparaissent alors aux élèves comme motivées, et même nécessaires. Les connaissances sont justifiées par leur utilité et s'appuient sur une histoire spécifique. La difficulté est alors de faire que cette raison d'être n'apparaisse pas comme suffisante pour assurer la validité logique d'une connaissance.

En effet si on admet que la connaissance d'une proposition telle que $(H \Rightarrow C)$ s'acquiert par la rencontre répétée de situations où elle est utile, comment la distinguer de celle de $(H \text{ et } C)$ qui est attestée en même temps qu'elle. L'implication logique n'a plus de sens. Certes, une connaissance H est intéressante dans la mesure où elle peut servir à en établir une autre par exemple C . Cet intérêt est d'autant plus grand que H est plus fréquemment réalisé dans le champ des situations rencontrées, que C l'est rarement (sinon inutile de le prouver à partir de H) et bien sûr que $(H \Rightarrow C)$ est lui-même réalisé. Mais pour établir ce dernier territoire il faut aussi considérer les cas où H et C sont réalisés mais sans que $H \Rightarrow C$ soit vraie. D'où l'importance des contre exemples et du raisonnement pas l'absurde.

Il est surprenant de constater que des croyances fausses puissent jouer conjoncturellement un rôle positif dans la découverte d'une connaissance vraie. Il est troublant de constater que tant qu'on n'a pas établi catégoriquement une connaissance, elle est une croyance et qu'elle joue néanmoins son rôle. Il en résulte que utilisons spontanément, opportunément et inconsciemment les croyances (vraies ou fausses) de la même manière que les connaissances vraies. Vouloir à l'avance, censurer toute erreur, revient à empêcher toute pensée.

Ainsi aucun des deux ordres ne peut à lui seul rendre compte de l'acquisition d'une connaissance ou sa re-production. Il faut conjuguer la recherche de la consistance avec celle de l'utilité à tous les niveaux, locaux ou plus globaux, des processus d'apprentissage et d'enseignement. Il faudra conjuguer les proximités syntaxiques (des structures et des relations mathématiques, des proximités sémantiques (agrégats de connaissances valides dans des conditions similaires) ou pragmatiques (agrégats de connaissances concomitantes dans les utilisations) sans accepter de remplacer l'une par l'autre

Ce point de vue continuera à s'imposer lorsque nous serons amenés à distinguer les connaissances (utilisées consciemment ou non et effectivement universellement valides ou non) et les connaissances institutionnalisées tenues pour vraies dans les rapports avec le système éducatif, dans la société⁹.

⁹ Les lecteurs qui veulent s'informer directement sur l'expérience complète qui est issue de nos réflexions de 70-73 trouveront sa description finale dans le dossier « Probabilités et statistique 2 »

La suite de ce dossier 1 s'offre aux chercheurs en didactique – et aux curieux - qui voudraient mieux connaître le détail de nos premières expériences et de nos réflexions dans ce domaine au cours des années 70-75 et leurs conclusions, peuvent consulter la suite de ce dossier

Les réflexions sur l'enseignement des probabilités se poursuivront dans 4 dossiers en tout