GUY BROUSSEAU

L'ENSEIGNEMENT des PROBABILITES et de LA STATISTIQUE
RESUME DES TRAVAUX DE L'IREM DE BORDEAUX DE 1971 A 1974

1. ETUDES SUR LES POSSIBILITES D'ENSEIGNER DES ELEMENTS DE PROBABILITES ET DE STATISTIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE (1971)

Ce texte de 1971 prend acte des évolutions, de la société (besoin technologie), des mathématiques, de la psychologie et de l'enseignement. Il inventorie les questions auxquelles on doit s'intéresser.

Il décrit les limites imposées aux recherches par les conceptions et les pratiques de l'époque 60-70 (recherche d'ingénierie et innovation, pas d'observations effectives, pas de recherche sur les possibilités effectives. Il explique pourquoi il faut rompre avec ces pratiques

> « Le regard que l'on peut aujourd'hui porter sur cette situation montre qu'il était nécessaire d'accomplir un certain nombre de ruptures que le déroulement de la recherche a permis de concevoir et parfois de réaliser :
>
> 1) Rupture avec la conception de la recherche en tant qu'innovation, et avec les rapports d'auteur à lecture, voire de prosélyte qu'elle établit entre les chercheurs et les maîtres.
>
> 2) Rupture donc aussi avec la position des chercheurs comme fournisseurs d'informations visant à élaborer les décisions de l'administration de l'enseignement. Il est aussi important de poser de bonnes questions même si on ne peut y répondre, que de fournir des propositions d'actions, ou des moyens d'évaluation, ou les deux à la fois.
>
> 3) Rupture avec une conception des rapports de l'enseignement avec les sciences fondamentales ou humaines faisant du premier, l'application des seconds et avec ses corollaires : l'impossibilité de concevoir une recherche didactique propre et l'idée de l'indépendance des études fondamentales.
>
> 4) Rupture par conséquent avec la référence préalable aux théories pédagogiques classiques.
>
> 5) Rupture avec la méthodologie traditionnelle des recherches sur l'enseignement. »

Il décrit les méthodes et les dispositifs qu'il compte mettre au point (en spirale) pour conduire des recherches plus fondamentales mais aussi plus axées sur l'enseignement

1. 2. GENERALITES SUR L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES AU NIVEAU ELEMENTAIRE (1972)

Ce document de 13 pages est écrit en 1972. Il discute les choix qui ont permis d'élaborer la situation de l'expérience n°1. (voir le dossier précédent « Probabilités et statistiques 1, apprentissages premiers pas » en particulier les articles « études sur les possibilités d'enseigner des éléments de probabilités et de statistiques à l'école élémentaire 1971 et « découverte des probabilités au CM 1972»).

Il est présenté en introduction du compte rendu de l'expérience n°2, menée en 1973-1974, (réplique améliorée de l'expérience n°1 de 72-73), à la rencontre de la CEIAEM de 1974 qui se réunit à Bordeaux sur le sujet « l'enseignement des probabilités et les statistiques ». Il est publié dans la brochure (168 p) éditée par l'IREM de Bordeaux[1] à cette occasion.
Il introduit la présentation de la deuxième expérience du processus sur le test d'hypothèse et l'étude et de son déroulement.
Il reprend les objectifs généraux d'un enseignement des probabilités :
Pratique d'expériences où le hasard jour un rôle (Par la présentation de certaines situations *où* un modèle déterministe ne convient pas, on veut mettre les enfants en mesure de construire un modèle probabiliste implicite).
Introduction d'un vocabulaire utile et précis (Il s'agit de permettre aux enfants de formuler les constatations qu'ils font à propos de ces observations c'est-à-dire d'identifier et de désigner des événements et leur mesure.)
Construction de modèles mathématiques et probabilistes explicite.
Introduction à l'étude systématique de la théorie des probabilités
Pas un mot sur la statistique, pourtant la situation proposée partira du test d'hypothèse.

Ensuite ce texte présente un état de la question, il critique un peu la psychologie et l'épistémologie génétique tous en soulignant leurs apports, et beaucoup Diénès le seul didacticien de l'époque qui propose à la fois de l'ingénierie et une théorie didactique.

Il oppose à ces conceptions une vision dialectique de la mathématisation, base de la TSDM.en développement.

Ce texte dégage quelques problèmes et quelques paradoxes

> « Si l'enfant n'a aucun moyen d'attribuer une signification aux écarts observés et qu'il se trouve dans l'obligation de les justifier rationnellement, <u>les modèles même corrects ont toutes les chances d'être rejetés</u> au moins formellement. Or c'est cette validation que nous visons]…
>
> [d'une part, la création des modèles probabilistes ne peut se faire sans qu'existe une structure de comparaison, mais d'autre part, cette structure de comparaison ne pourrait apparaître sans l'occasion de se manifester c'est-à-dire sans modèles à comparer. »

Et en déduit la nécessité qu'il existe des modèles implicites d'action probabilistes pour permettre que des modèles explicits puissent prendre du sens et se développer (Ces modèles explicites ne sont pas de simples formulations des modèles implicites)

> « La rupture de ce cercle vicieux nous apparaît comme la clef de la genèse d'un modèle probabiliste. Il faut donc, dans un premier temps, l'observer. Ce sera le but principal de nos prochaines expériences et notamment de celle que nous présentons ci-après.

Ici se dessine le plan des recherches sur l'apparition des modèles de théorèmes dans le jeu de la course à 20. Et déjà aussi il apparaît une certaine méfiance pour les paris et pour la méthode empirique comme base de l'étude :

Dans l'expérience que nous présentons plus loin nous devons donc le plus possible écarter les paris et devrons introduire la contrainte qui consiste à refuser toute possibilité de vérifier l'hypothèse soumise à l'étude autrement qu'à travers des expériences statistiques. La frustration ainsi provoquée ne sera compensée que dans la phrase d'intervention.

[1] C'était la première fois qu'une rencontre de la CEIAEM donnait lieu à une publication des interventions produites par les participants. Le recueil des quelques textes que nous avions pu réunir était une tentative encourageante malgré le manque de rigueur dans le recueil et la présentation des interventions. Dès l'année suivante Willy et Jacqueline Van Hamme éditèrent le premier compte rendu formel d'une rencontre de la CEIAEM.

3. PRESENTATION DE L’EXPÉRIENCE SUR LE TEST D’HYPOTHESE

L’article rappelle les objectifs particuliers de l’expérience :
Observation de modèles implicites d’action : les élèves réagissent-ils de façon différentes aux situations probabilistes ?
Quand considèrent-ils qu’ils ont affaire à une même expérience ? Quand disent ils qu’elles sont différentes ? Ont-ils tendance à adapter leur comportement lorsque les conditions stochastiques évoluent à leur insu ? Quand peuvent-ils distinguer deux probabilités distinctes
Il est possible que les enfants devinent ensuite quel est le patron probabiliste de l'une des expériences ?
La conclusion est que les élèves doivent pouvoir éprouver la convergence (en probabilité implicite) d’une suite produite par une machine sans mystère
Le texte indique les grandes lignes de l’étude mathématique a priori des propriétés de cette situation : fiabilité, possibilités de réalisation, en fonction de différentes variables : nombre d’expériences, nombre d’événements etc. Cette étude sera prolongée et précisée par celle de Paul Louis Hennequin pour modéliser l’expérience principale de 1973-74
Le texte étudie ensuite les caractères de la situation pédagogique et prévoit deux phases l’une qu’on dirait aujourd’hui a-didactique pour l’observation et l’autre didactique

> « Cette première expérience doit permettre de mettre au point les procédés d'observation et peut être un plan d'expérience ».

Cette recherche est menée avec Mady Bourgeois, Joel Briand, Jacques Pérès
En effet d’autres recherches sont ou seront entreprises parallèlement

- sur les modèles implicites (la MEC et la course à vingt) (Brousseau, Gabinski, Maysonnave, en prolongement des études plus anciennes de Rouanet)
- et à ajuster leurs prévisions (Déramecourt, Brousseau) Cette recherche est proche du point de vue Bayésien tel que Bruno De Finetti le proposera en 1974
- sur les capacités des élèves à faire des prévisions (Rouanet, Guy Dumousseau 1974)

4. L’EXPERIENCE DU TEST D’HYPOTHESE

Trois sacs contiennent des jetons de dames : deux contiennent deux jetons blancs et trois noirs, le troisième contient quatre blancs et un noir. Les élèves peuvent venir retirer un jeton et le remettre aussitôt. Que peuvent-ils dire sur le contenu des sacs ? y en a-t-il deux semblables ? Ils savent qu’il y a cinq jetons car ils peuvent les tâter à travers le tissu.
La partie a-didactique de l’expérience dure quatre jours. Elle produit toutes sortes d’observations justes et les réticences dues aux obstacles habituels : on ne peut pas savoir, ça ne recommence pas pareil etc.

Ensuite la phase d’intervention fait apparaître les rapports entre le nombre de jetons d’une couleur et le ombre de jetons total. Le professeur fait écrire la suite des tirages et la suite des rapports. Dès la première séance et au bout de quarante tirages, les élèves concluent « correctement » et semblent persuadés (rassurés mais non pas assurés par l’encadrement didactique)
Retour aux trois premiers sacs, puis essai avec 6 jetons. La séquence a duré 7 séances.

Cette expérience est le prototype de l’expérience principale de 1973-74 où, en remplaçant les sacs par des bouteilles permettant d’obtenir des suites d’observations de grande taille, le processus pourra se poursuivre jusqu'à son terme ; l'exploration de l'intervalle de confiance et les calculs de « fréquences théoriques ».

5. PLAN DE TRAVAIL POUR 72-73

Le plan propose une des deux voies de recherches, celle sur les modèles d'apprentissages, et sur le processus de mathématisation. Les probabilités ne sont concernées que par le caractère probabiliste des modèles d'apprentissage utilisés. Les théorèmes apparaissent comme des modèles implicites d'action dans des processus stochastiques que l'on provoque que l'on observe et que l'on étudie de façon théorique et expérimentale.

6. LES ETUDES DES MEC 20 ET 7

La phase d'action

Les théorèmes que Vergnaud dira plus tard « en actes » (ici M.I.A.) sont ceux de la course a vingt.

Ils apparaissent comme M.I.A.

Pou la course à 7 les modèles stochastiques classiques rendent comptent de l'apprentissage observé.

Les parties contre un moniteur ou contre une machine rationnelle enseignent implicitement mais rapidement la méthode aux élèves

Pour la course à 20 aucun modèle ne converge assez rapidement. Des schèmes et des stratégies interviennent pour accélérer l'apparition des théorèmes. La récurrence n'aide pas au contraire, la reproduction des mêmes raisonnements enchâssés dans les mêmes raisonnements complexifie la tâche et ralentit l'apparition des modèles implicites de théorèmes. La croissance du temps cependant n'est que quadratique alors que la complexité est exponentielle.

La formulation (Lamarque)

La formulation ne fait pas progresser l'efficacité des actions ni les explications, mais si les théorèmes implicites ne sont pas formulés ils disparaissent au bout d'une cinquantaine de parties

et la preuve son rôle dans l'apprentissage apparaît douteux.

L'expérience de l'entraînement d'un modèle de mec « éducable » avait pour but de voir si les élèves modifieraient volontairement et correctement le contenu des boîtes pour faire gagner « leur » boîte.

7. **PROJETS DE TRAVAUX ET TRAVAUX EN COURS SUR LES PROBABILITES**

Projet d'une leçon proposée par le Professeur VARGA à présenter à la rencontre de la C.I.A.E.M, BORDEAUX, août 1974.

Les enfants disposent de 5 jetons rouges et 5 jetons blancs répartis dans des urnes. On tire une urne au hasard, puis un jeton au hasard dans cette urne. Les enfants peuvent modifier le nombre d'urnes et la répartition des jetons dans les urnes. Le but de ces modifications est d'augmenter les chances de tirer un jeton rouge.

Il n'est pas question de demander aux enfants de trouver une solution optimale, mais seulement de les amener à comparer des probabilités.
Leçon à rapprocher de l'éducation de la MEC 7. Les probabilités sont objectivées comme moyen d'améliorer les chances de gain

1°/ La leçon ci-dessus fait appel à des notions complexes. Plusieurs niveaux de comportement sont possibles :

- Hypothèse 1 : Les enfants conçoivent qu'aux différentes distributions correspondent des probabilités de gain différentes : ils font des tentatives cohérentes de modification, appuyées par exemple sur des expériences statistiques.

- Hypothèse 2 : Les enfants envisagent des distributions différentes, calculent les probabilités composées de chaque distribution, en en déduisent un choix.

- Hypothèse 3 : Les enfants choisissent certaines distributions en s'appuyant sur le calcul et sur une expérience statistique.

- Hypothèse 4 : Les élèves justifient leur choix par des considérations indépendantes du nombre de jetons et du nombre d'urnes.

2°/ Langage à utiliser par les enfants :
- graphe en arbre, valué en probabilités, pour analyser la situation
- calcul de probabilités de la forme
  (pas terminée équations et schémas)

8. PROJETS POUR L'INRDP 73-74

Ces projets ont pour titre : « Évolution des critères de décision en situation aléatoire et approche des modèles probabilistes ». Sous la coordination de Paul Louis Hennnequin et de Pierre Gréco, des équipes de l'INRDP et de divers IREM ils étudiaient les possibilités au Cycle Elémentaire et 1^er Cycle de l'enseignement Secondaire
Les **objectifs,** excessivement ambitieux, étaient de fournir des propositions d'enseignement. Ils s'inspiraient d'un programme diffusé par la commission Lichnérowicz.
1°) <u>Pratique d'expériences</u> où <u>le hasard joue un rôle</u>
Exemples :.prédictions sur la composition d'un univers à partir de données statistiques (type : composition d'une urne). paris, équitables ou non, sur une suite d'épreuves répétées. sens de la vitesse de convergence d'une série statistique.
2°)<u>Introduction</u> d'un <u>vocabulaire utile et</u> Précis
Identification et désignation des évènements et de leur mesure (en distinguant bien mesures statistiques et mesures de probabilités)
3°) <u>Construction de modèles Probabilistes explicites</u> Utilisation par les enfants, d'instruments mathématiques formels (rapports, combinatoire..) et de représentations (diagrammes, arbres) pour rationaliser les situations proposées et valider certaines de leurs décisions.
4°) <u>Introduction à l'étude systématique des_ probabilités</u>
Maîtrise de notions et théories permettant de décrire et résoudre toute une catégorie de situations et problèmes. Exemple : évènements, mesure, convergence.
5°) <u>application à des Problèmes Pratiques (de sciences humaines, d'écologie etc) d'analyses statistiques élémentaires</u> Exemples : analyse factorielle méthode des juges, simulation, etc.

Les buts de la recherche en découlaient. Il s'agissait de déterminer dans quelle catégorie de situations les enfants atteignent les objectifs et comment ils les atteignent. Ils comprenaient
1°) L'<u>Etude des comportements des</u> enfants <u>et de leur évolution à travers:</u> la prévision des résultats d'une expérience, la formulation des constatations et, en particulier, le vocabulaire

employé pour désigner les évènements et leur mesure, les différents degrés de conviction et expression, les conditions pédagogiques adéquates.
2°) La Caractérisation des situations : l'Analyse à priori, qui met en évidence un certain nombre de paramètres, par exemple nombre d'expériences parallèles, nombre d'épreuves répétées possibles par enfant, nombre d'issues possibles par épreuve, probabilité par évènement, nombre de valeurs de convergence entre lesquelles les enfants ont à choisir...
3°) L'Etude des procédés qui permettent d'expliciter dans certaines conditions : l'analyse correcte de la situation : prise en considération des fréquences cumulées, la découverte des valeurs de convergence (probabilités) la découverte de la convergence des fréquences cumulées.
Les hypothèses étaient plutôt générales

> « Nous supposons que les enfants sont susceptibles - de construire., à certains âges, certains modèles implicites d'expériences *statistiques* simples et, d'en rejeter d'autres, -de prendre conscience, au prix de certaines interventions, des objets mathématiques de ces modèles, - de comparer, alors, le modèle et la situation. Il nous paraît illusoire de vouloir préparer une compréhension satisfaisante des probabilités en se bornant à une introduction formelle des structures mathématiques utiles (fractions, combinatoire ou à une définition ex cathedra de la correspondance situation statistique - modèle probabiliste, (les enfants n'intervenant alors que pour l'effectuation des calculs justifiés à l'avance), Il nous parait indispensable que les modèles probabilistes soient construits et explicités par l'enfant lui-même pour rendre compte d'une expérience statistique effective.

Mais le programme a été à peu près tenu.

9. L' EXPERIENCE DE PERIGUEUX

Les élèves du CE ont-ils de modèles implicites d'action efficaces en situation aléatoire ?

Le professeur fait des séries de 50 tirages avec une bouteille contenant 25 boules blanches et 25 boules noires. Pour chaque expérience on compte le nombre de tirages noirs obtenus. Chaque groupe d'élèves prévoit dix résultats possibles de l'expérience et marque autant de points qu'il a de résultats exacts (le même nombre peut être répété).
L'expérience sera répétée 12 fois chaque jour pendant 4 jours, mais avec des compositions différentes de la bouteille. Il s'agit d'observer l'évolution des choix des élèves et d'en déduire quelles informations ils tirent de ces expériences successives.
En particulier l'évolution de l'étendue de leurs choix car les actants auraient intérêt à parier dix fois le mode de la distribution (25 noirs) , qui se confond ici avec la moyenne pour obtenir les meilleures chance de gain. (soit p_i la probabilité qu'il sorte i noires (sur 50 tirages) et soit x_i^j l'événement {le j$^{\text{ième}}$ pari se porte sur l' événement {il sort i noires}}. Les 10 paris d'un groupe sont : x_{ai}^1, x_b^2, x_{ci}^3,…, x_{ig}^{10}. L'espérance de gain de ce groupe est :
E(X) = 1. (p(a) + p(b)+ … +p(g)).
Elle est maximum si p(a) est maximum c'est à dire si a = 25
et elle est égale à $25\times\dfrac{50!}{(25!)^2}$ ≈ 25 x 0,11 = 2,75 à chaque partie
On a observé aussi l'évolution de la moyenne et de l'écart type de leurs choix. Mais ces observations n'ont aucun intérêt
Il faut remarquer que l'étude a priori n'est pas présentée. On a délaissé à l'époque l'étude mathématique des paramètres de la situation. Les variations de l'espérance de gain suivant les choix ne sont pas très fortes. Les probabilités d'apprentissage sont donc assez faibles.
Pour résumer la situation les joueurs sont tiraillés entre au moins deux stratégies. Celle qui optimise l'espérance mathématique c'est-à-dire qui donne les meilleurs chances de gagner

beaucoup de points que ce soit au cours d'une ou de plusieurs parties : elle consiste à placer toutes les mises sur le mode.
L'autre minimise la probabilité de ne pas gagner au moins un point au cours de la prochaine partie. Cette stratégie consiste à miser sur dix emplacements différents l'étendue étant centrée sur le mode.
Le choix entre ces deux stratégies qui visent des objectifs différents est totalement arbitraire et ne peut être tranché par les mathématiques.
Cette situation peut servir de modèle à des paraboles intéressantes : Un pauvre doit gagner à chaque partie ce qui lui est indispensable pour survivre : il choisira plutôt la deuxième stratégie. Un riche qui peut se permettre de ne pas gagner pendant un certain nombre de parties pourra jouer la première stratégie plus rentable.
Faire des statistiques pour prévoir l'avenir est un bon principe. Encore faut-il les utiliser correctement. Celui qui reproduirait dans ses paris, les statistiques qu'il observe, et qui distribuerait ses mises comme sont distribuées les fréquences observées tirerait un bien mauvais avantage de sa stratégie. (En rendant le jeu équitable entre une banque et un joueur on peut obtenir un honnête « trompe couillon » du fait de cette simple dissymétrie : la banque peut jouer longtemps la valeur gagnante.)

Résultats :
Le premier jour (12 tirages avec (25N ; 25B)) : A partir de la 9ème partie incluse, quatre équipes sur cinq misent dans un intervalle comprenant 25 et ayant au plus 10 éléments, Une équipe au douzième jeu mise ses dix choix sur seulement trois valeurs : 23, 24 25. Une autre équipe a misé plusieurs fois au-delà de 50 (le nombre total de bille, et le nombre de tirages)
Le second jour (6 tirages, 15N ; 35B) puis (5 tirages avec 40N et 10 B) : Les étendues restent assez importantes, supérieures à 20 à la cinquième partie pour 3 équipes. Le sixième pari est individuel, tous les élèves sauf deux; proposent des nombres dans un intervalle comprenant les résultats obtenus. Les étendues sont inférieures ou égales à 12 pour 15 élèves (20 présents).
Encore trois expériences : (7T ; 5N ; 45B) (6 T ; 30N ; 30B) et (6 T ; 20N ; 20B)

De façon générale les élèves centrent leurs paris et resserrent l'étendue, mais lorsqu'il sort un résultat hors de leur domaine de prévision il provoque un élargissement de l'étendue des paris. Ils essaient donc plutôt d'améliorer leurs chance de gagner quelque chose à chaque expérience plutôt que leur espérance de gain sur plusieurs parties.
Les variations des conditions n'amorcent aucun progrès au contraire. En situation didactique des variations sans effet conduisent les élèves à abandonner leur réflexion et leurs intuitions.
L'absence d'un plan d'expérience et d'une étude didactique sérieuse de la situation s'est faite sentir : les enfants ont désappris ce que leur modèle implicite d'action leur avait soufflé dès le premier jour. L'étude mériterait d'être reprise aujourd'hui.

10 L'EXPERIENCE PRINCIPALE

1. Le compte de l'expérience principale de 1973-74 fait l'objet d'un compte rendu et d'un résumé séparé.
2. « Premières découvertes des lois du hasard à l'école élémentaire » Fiche accompagnant l'émission de TV scolaire « atelier de pédagogie » du mardi 30 novembre 1976 (8p)