Alternatives en Didactique de la Statistique

Guy Brousseau

Résumé
La nécessité d'un enseignement des statistiques dans la scolarité de base est devenue indiscutable. Mais les difficultés et les dangers de cette entreprise sont moins évidents.
Cet article a pour ambition d'évoquer ce qu'est la recherche fondamentale en Didactique des Statistiques et ce qu'elle peut apporter à la connaissance scientifique et, par là, à l'enseignement. La didactique part aujourd'hui de la spécificité des connaissances pour étudier les conditions optimales de leur apprentissage et de leur enseignement, contrairement à la didactique de Comenius (1649). Mais cette dernière est si anciennement et profondément ancrée dans la culture qu'elle influence la conception de la diffusion des connaissances scientifiques dès leur origine. Elle rend assez complexe la reconstruction épistémologique nécessaire. Pour éviter un délicat et fastidieux inventaire théorique, l'article s'appuie sur le rapport commenté du déroulement d'une expérimentation d'enseignement de statistiques et de probabilités en cinquième année de primaire, conçue dans le cadre d'un ambitieux programme de recherches en *didactique des statistiques* entre 1971 et 1978.
Ainsi les résultats et les attendus de cette expérimentation permettent - sans prétendre à l'exhaustivité - d'introduire divers aspects mathématiques, psychologiques, épistémologiques, didactiques, éducatifs et éthiques, du projet d'enseignement de la Statistique et d'évoquer ses perspectives, ses difficultés et ses dangers, dont voici deux exemples.
L'enseignement de la Statistique concerne deux types de populations, avec deux types d'enseignements, différents dès leur introduction, et qui ne cessent de s'éloigner. L'un, orienté vers les applications, présente essentiellement des paramètres et des algorithmes ; il se prête mal aux exercices des mathématiques. L'autre, qui se veut plus théorique, consiste essentiellement à « exploiter » les occasions favorables à l'exercice de mathématiques plus générales : il se prête mal à la compréhension d'ensemble du domaine de la Statistique. L'organisation des mathématiques et la formation des professeurs font, des probabilités, les prolégomènes apparemment inévitables de la Statistique. Or leur introduction précoce soulève des problèmes d'éthique compte tenu du développement de l'addiction de masse aux jeux de hasard, et de la formation insuffisante des professeurs en mathématiques et en didactique. Un des buts de l'expérience de 1974 qui est relatée ici était de montrer qu'il est possible de désamorcer l'intérêt naturel des élèves pour le hasard et de les ouvrir au préalable à la curiosité scientifique et au test d'hypothèse dans une démarche « logique » à leur portée.

Introduction

Il y a maintenant plus de 60 ans que la nécessité d'enseigner la statistique et son usage à tous les élèves (donc au cours de la scolarité commune) est reconnue et proclamée par les spécialistes de l'éducation. Cette nécessité est de plus en plus évidente pour tous, pourtant la mise en œuvre du projet progresse avec difficulté. Dans les années 70, à l'époque où la mention « Statistique » est apparue pour la première fois dans les nouveaux profils des carrières universitaires en France et en Europe, de nombreux mathématiciens ont étudié, et quelques uns, expérimenté, diverses façons d'enseigner, dès l'école primaire, les éléments de ce nouveau secteur des mathématiques dont chacun mesurait l'importance croissante [1]. Certains se contentaient de prolonger les leçons classiques en illustrant les fractions ou la proportionnalité par des exercices sur des mesures « en environnement statistique » (Rade), d'autres s'attachaient à introduire directement des notions de probabilités, considérées comme les prolégomènes obligés (Varga), parfois avec des moyens très ingénieux (Engel). En France, dans les IREM nouvellement créés, de nombreuses équipes (Lyon, Clermont,

[1] La pensée probabiliste (OCDE) 1960

Toulouse,…) ont exploré les voies possibles et publié leurs travaux dans des revues professionnelles, les seules qui leur étaient ouvertes. .
La Didactique des Mathématiques a été créée à la même époque (1975) par des mathématiciens, comme leur instrument propre pour étudier expérimentalement l'épistémologie de leur discipline et pour comprendre et accompagner l'enseignement des mathématiques. Les premiers mathématiciens didacticiens s'affiliaient à la 18ième section à côté de la section « théories de l'apprentissage ». Suivant les préceptes de son rénovateur Comenius (1649), la didactique restait confinée dans la rationalisation de méthodes qui ne tenaient aucun compte de la nature des connaissances enseignées. La « méthodologie », son avatar moderne, se contentait de répertorier les pratiques pour tenter de choisir une hypothétique « meilleure » méthode. Cette collection de prescriptions n'offraient aucune place à des questions « falsifiables et ne pouvait pas revendiquer le statut de Science. Aujourd'hui au contraire, la nouvelle didactique étudie expérimentalement et théoriquement les conditions optimales de l'apprentissage et de l'enseignement associées à chaque connaissance particulière. Elle constitue un domaine neuf qui ne peut être entièrement réduit à aucun des domaines classiques comme la psychologie ou la sociologie …
Si ces recherches et l'éthique dont elles relèvent les apparente plutôt à l'anthropologie, la didactique des mathématiques est une partie des Sciences Mathématiques qui s'adresse en priorité à la communauté mathématique, dont elle est le mandataire, mais dont elle doit se faire comprendre autant qu'elle doit la comprendre. Elle s'adresse aussi aux enseignants de mathématiques et à tous les éducateurs.
Pour illustrer ces propos nous allons décrire une des premières expériences menées dans cette perspective.

1. Questions préalables

1.1. En quoi la communauté statisticienne est elle concernée ?

1.1.1. Les statisticiens sont concernés comme mathématiciens, car ils fournissent les moyens des études scientifiques sur l'enseignement :
– Production d'instruments statistiques pour les études empiriques des processus scolaires
– Modélisation et théorisation des processus scolaires
1.1.2. Les statisticiens sont concernés comme experts de la discipline, c'est-à-dire comme référents de la validité mathématiques des contenus de l'enseignement et sous réserve de quelques éclaircissements de la valeur épistémologique et didactique de leur « présentation »:
- la connaissance « savante » des mathématiques suffit-elle pour structurer leur enseignement?
– Sinon de nouvelles connaissances additionnelles mais spécifiques sont elles nécessaires à leur discipline?
1.1.3. Ils sont enfin concernés comme citoyens, et comme responsables vis-à-vis du public, dans une certaine mesure, des effets de leurs apports scientifiques.
– quelle responsabilité assument–ils dans les effets de la diffusion et de l'interprétation incontrôlées d'informations statistiques, notamment scolaires?
– Y a-t-il contradiction entre la déontologie de l'enseignement et celle de la recherche ?

1.2. Le hasard et la mythologie du hasard sont-ils indispensables ?

1.2.1 *L'école, les croyances et la science*
Nous soupçonnons que nous sommes plongés dans une contingence dont nous ne pouvons tenter de saisir qu'une part infime, à l'aide de notre culture d'abord, et ensuite avec nos savoirs scientifiques, qui souvent disqualifient une partie de cette culture.

L'école, chargée d'acculturer les enfants à la société, se trouve alors, au nom de la culture, obligée de transmettre des croyances qu'elle doit par ailleurs combattre au nom de la science. C'est le premier *dilemme* de la Didactique des Sciences

Ainsi tout projet trop décalé par rapport à la société, trop ambitieux - comme l'enseignement direct des connaissances scientifiques sous leur forme actuelle –, peut faire de l'école l'ennemie de la société… et sa victime. D'autre part, il est impossible de reproduire à l'école les chemins historiques tortueux par lesquels la science émerge.

1.2.2 *Le hasard*

Le « hasard » est le dernier avatar des moyens par lesquels l'humanité, depuis son origine, a essayé d'apprivoiser l'angoisse causée aux individus par leur incertitude au sujet du monde et d'eux-mêmes. Il est la source et le résidu de la science et aussi celui de toutes les croyances, Il est enfin l'alibi de tous les abus :

– « qu'est ce que je dois à mon adresse ou à mes talents? à la volonté des dieux? à ma chance personnelle? à LA chance ? À la providence ? au hasard?…

Evoquer explicitement le hasard ou les jeux de hasard avec les enfants, importerait dans la classe toute **la mythologie du hasard** avec ses ribambelles de croyances (influence occultes, lois erronées) d'explications et de dictons pris parfois par les enfants au pied de la lettre : « jamais deux sans trois », « le hasard me doit bien ça !... », tel qui rit vendredi dimanche pleurera »…. Car, vivant en permanence dans des situations incertaines, aléatoires, les enfants connaissent et utilisent ces on-dit, ces commentaires, ces croyances… qui ont souvent constitué autant d'obstacles épistémologiques à l'avancement de la science.

Dans ce cas, inévitablement, le professeur devra prendre position à propos de cette toute cette mythologie Or, il ne peut le faire avec des chances de succès que s'il a enseigné *auparavant* les moyens de la désamorcer par des explications convaincantes – rationnelles, et me semble-il déterministes – utilisables par les élèves. La question est donc : comment enseigner les probabilités sans évoquer des situations incertaines?

Il est possible de « plaquer » cet enseignement sur (à côté) de la mythologie, en s'appuyant sur sa légitimité scientifique; mais alors qu'est ce qui distingue la légitimité de ce savoir de la mythologie qu'il doit combattre? La logique « locale » de sa construction, beaucoup trop longue, ne suffit pas à le justifier.

Voici le paradoxe que j'ai voulu résoudre. Il est typique de ceux que la science didactique doit affronter.

1.2.3 *La mythologie et la rhétorique du hasard*

La mythologie et la rhétorique du hasard tentent de répondre à - et au besoin d'exploiter - l'ignorance ou l'incertitude générale au sujet d'évènements uniques qui seront issus d'UNE expérience isolée, bien déterminée, et chargée d'un enjeu qui peut être considérable.

Aujourd'hui, le calcul des probabilités se fonde sur une théorie de la mesure des évènements dans ce genre d'expérience. Mais dans la pratique, il s'illustre prématurément de calculs et d'exemples numériques tirés de l'analyse combinatoire pour justifier le choix de valeurs numériques pour la probabilité des évènements. Mais le choix de ces valeurs numériques s'appuie implicitement sur une notion d'équiprobabilité mal fondée et sur des axiomes et des justifications fréquentielles : « Si on répète l'expérience, la fréquence d'apparition de tel évènement sera à peu près égale à celle de tel autre, il n'y pas de raison qu'elles diffèrent etc.

Or, on ne peut pas tenir ce discours avant d'avoir établi le théorème des grands nombres, lequel ne suppose aucune attribution de valeurs numériques ni aucun calcul numérique concret. L'intérêt de l'axiomatique de Kolmogorov est de permettre de donner une signification analytique à la notion d'équiprobabilité sans l'encombrer de considérations mécanistes et d'éviter ainsi un « cercle vicieux » : les étudiants ne comprennent pas pourquoi on démontre un énoncé qu'on leur a demandé d'admettre dès la première illustration de l'étude concrète des espaces probabilisés.

Ainsi dans sa version pour l'enseignement, l'introduction des probabilités se nourrit sournoisement « d'évidences » qui font admettre des propriétés essentielles bien avant d'avoir les moyens de les justifier (j'exclus de mes reproches l'option bayésienne). Elle demande, avant toute étude, de rejeter a priori les principaux obstacles épistémologiques qu'elle est supposée combattre. Par exemple…

- croire que les machines de hasard (des dés, des cartes, etc.) donnent des résultats indépendants de la personne qui les manœuvre, du jour de la semaine, du temps qu'il fait… et donc croire qu'on peut ajouter des effectifs obtenus avec des appareils identiques mais différents, et donc qu'en répétant des expériences, on peut cumuler leurs résultats,
- admettre la possibilité d'obtenir des informations nouvelle en répétant sans autre nécessité la même observation etc. .

Cette introduction qui, sous prétexte d'enseignement, viole les fondements mathématiques sur lesquels il faudra finalement s'appuyer, explique peut être la gêne ou l'hostilité de la population en l'égard de cette « mathématico-mancie [2] » qui prend simplement place implicitement aux côtés de toutes les méthodes de divination (les –mancies) que les puissants moyens d'intoxication offerts par le développement des médias et d'Internet ont fait ressurgir de la nuit des temps.

1.2.4 *La poule des statistiques ou l'œuf des probabilités ?*

L'introduction directe des statistiques par leurs descripteurs et leurs propriétés mathématiques souffre finalement de difficultés différentes mais du même ordre.

L'expérience que je vais rapporter ici avait pour but de permettre aux élèves 10 ans d'apprendre à attribuer des valeurs aux évènements d'une expérience (et à leur appliquer le calcul des probabilités), sans jamais accorder un enjeu au résultat d'une expérience isolée, sans devoir faire de prévisions sur des évènements à venir… Sans que le concept de hasard ait à jouer un rôle explicite.

Nous voulions que les élèves puissent établir et accepter leurs résultats avec leur rationalité déterministe spontanée. Et pour nous assurer de cette possibilité nous avons choisi des situations où les apports de connaissances du professeur étaient minimes et seulement instrumentaux.

Il est essentiel de noter qu'il ne s'agit pas d'éluder, d'affaiblir ou de retarder l'enseignement des probabilités et des statistiques, mais de le faire précéder d'un processus épistémologique et didactique indispensable.

1.3. Actualité de l'enseignement des statistiques

Les nouveaux programmes introduisent un enseignement de statistique dans l'enseignement secondaire. Ils s'appuient sur des conceptions épistémologiques dont Jean Claude Régnier présentait un inventaire [2002].

Mais ces conceptions sont en fait limitées par des présupposés didactiques retenus pour la formation des professeurs.

1.3.1 *A l'université*

–Dans le cursus des professeurs de mathématiques, l'ordre standard est celui de l'axiomatique de Kolmogorov. Il est essentiellement déductif : champs de probabilité, Variables aléatoires, distributions usuelles, Théorèmes limites… Mais pour illustrer la théorie de la mesure dans l'environnement des probabilités les séances d'exercices font appel prématurément à des notions intuitives de probabilité en application à d'exercices de combinatoire

[2] allusion à tous les formes d'art divinatoire, de l'aéromancie à la sidéromancie, en passant par la cartomancie, la chiromancie, la cristallomancie,…, la molybdomancie, la nécromancie, etc. et dont l'astrologie est la forme la plus populaire.

– Dans les cours au contraire, les mathématiques privilégiées sont au contraire celles qui présentent un intérêt purement mathématique (analyse, théorie des nombres):
–La Statistique mathématique présentée ensuite n'est souvent qu'à peine esquissée. Son champ scientifique est ignoré. Son enseignement à l'école est envisagé comme empirique

1.3.2 *Avant l'université*

Les nouveaux programmes introduisent un enseignement de Statistique dans l'enseignement secondaire.
–L'organisation de cet enseignement (sa transposition didactique) ne peut pas s'éloigner beaucoup de son modèle : l'enseignement universitaire
–Est-elle adaptée à l'instruction publique commune?
–Quels sont les enjeux? Les difficultés ? Les dangers?
–Existe-t-il des alternatives?
Les présupposés de ces programmes semblent insuffisamment questionnés. L'exposé qui suit a l'ambition de montrer une alternative didactique effectivement utilisable en préalable à l'étude précoce des probabilités et d'évoquer les études théoriques et expérimentales qui l'ont produite. Ce texte montre une des contributions possibles de la Didactique des Mathématiques à l'enseignement de la Statistique.

1.3.3. *Alternatives*

a). Il est nécessaire d'introduire des notions de statistiques : selon quels modèles didactiques?
- En commençant par les descripteurs? ou par la *modélisation de l'activité qui les justifie?*
b). Il est indispensable d'enseigner la structure des évènements et leur mesure, mais vaut-il mieux opérer sur des *fréquences empiriques théoriques* ou sur des probabilité?
c). Est-il judicieux de fonder ces études sur la notion de hasard sachant qu'on va rencontrer le lourd héritage culturel qui a ponctué l'évolution des connaissances de ces notions avec les difficultés de tous ordres notamment psychologiques qui les accompagnent. Les nombreuses confusions levées avec peines au cours de l'histoire, les obstacles épistémologiques… mais *peut-on l'éviter* ?
d).Est-il conforme à la déontologie pédagogique de donner prématurément une dignité scolaire aux jeux de hasard ? Aujourd'hui plus que jamais l'addiction à l'aléatoire est un fléau social ! Peut-on l'éviter et enseigner tout de même les expériences sur le hasard ou *peut-on l'éviter* ?
Ces conditions paraissent difficiles à concilier, les choix notés en italique sont ceux que nous avons retenus.

1.4. Les recherches et les conditions de l'expérimentation

Les recherches et les conditions de l'expérimentation décrite ci-dessous seront détaillées dans la troisième partie de cet article. Pour l'instant, il suffit d'indiquer que l'expérimentation s'est déroulée entre 1973 et 1974 à l'école Jules Michelet de Talence, dans le cadre d'un organisme – le COREM – créé par l'IREM de Bordeaux Elle a été répliquée quatre fois dans des classes de CM2. Ces expériences avaient été précédées par un ensemble de recherches théoriques, d'enquêtes et d'expériences préalables qui nous avaient montré certains écueils de l'enseignement des probabilités, qu'il soit présenté selon les anciennes méthodes, ou qu'il suive celles qui s'inspiraient de l'axiomatique, nouvelle à l'époque et aujourd'hui classique. Pour éviter ces écueils et en appliquant les éléments de la théorie des situations en construction nous avons été conduits à un curriculum assez inhabituel qui n'était absolument pas destiné à être reproduit dans les classes ordinaires. Des commentaires dans le compte-rendu et dans la troisième partie apporteront des précisions et des éclaircissements nécessaires au lecteur.

2. Une expérience de premier enseignement de statistique[3]

L'évocation de ce qu'ont fait des enfants de 10-11 ans en 31 séances de 10 à 60 minutes sera répartie en trois étapes : observations et hypothèses sur le contenu d'une bouteille, modélisations et intervalles de confiance, calcul de fréquences théoriques et de probabilités

2.1 Observations et hypothèses sur le contenu d'une bouteille

2.1.1 *Situation initiale.* A l'heure des « activités d'éveil », l'enseignante a apporté une bouteille opaque vide, avec un bouchon transparent. Elle a mis dans un sac en tissus opaque, des boules blanches et des boules noires. Elle a demandé à deux élèves d'isoler 5 boules dans le coin du sac puis de les introduire dans la bouteille sans les sortir du sac, de façon que tout le monde voie bien qu'on place 5 boules exactement, mais que personne ne puisse savoir quelle est leur couleur :
Le problème P: Nous allons essayer de savoir ce que contient cette bouteille « <u>sans jamais l'ouvrir »</u>
Cette question heurte évidemment les modalités des raisonnements déterministes en usage dans les classes et les élèves ne comprennent pas quel calcul ils pourraient faire pour obtenir la solution de ce problème. D'autre part, rien ne fait référence à des « tirages », ni à du hasard, ni à une incertitude quelconque.
La bouteille passe de mains en mains. Certains essaient de regarder à travers le bouchon, mais ils ne voient rien. Un élève retourne la bouteille, le bouchon laisse apparaître une boule blanche. Tous la voient ils en sont sûrs : il y a une boule blanche dans la bouteille.

La question qui vient alors spontanément est « y en a-t-il aussi une noire ? » deux retournements de la bouteille… encore une blanche (la même ? une autre ? personne ne sait). L'idée que s'il y a une noire, elle va finir par se montrer justifie des retournements jusqu'à ce que l'événement se produise (s'il se produit ! sinon ?).

« Il y a une blanche et une noire… »

Commentaire : Les élèves sont dans une logique déterministe, alors cette constatation met fin aux manipulations. Rien ne saurait justifier dans ce mode de pensée de continuer ces retournements de bouteille[4], qui ne sont évidemment pas des « tirages » mais des observations. Les élèves doivent donc avoir d'autres raisons (que la coutume du professeur) pour renouveler ces observations. Ces raisons vont évoluer après chaque expérience suivant les questions que se posent les élèves, les objections du professeur feront démarrer le processus :

E. «- recommence cinq fois pour qu'on voie toutes les boules » dit un enfant »

E. « voilà ! Il y a trois boules blanches et deux noires ! »

Commentaire Bien sûr, ils ne sont pas convaincus**,** leur réponse n'exprime pas leur croyance, elle résulte seulement du contrat didactique **:** ils espèrent que c'est ce que l'institutrice veut

---

[3] Ce paragraphe reprend avec de nouveaux commentaires, l'expérience décrite dans les articles suivants :
Guy BROUSSEAU, Nadine BROUSSEAU, Virginia WARFIELD, "An experiment on the teaching of statistics and probabilité" *Journal of Mathematical Behavior*, 20 (2002) 363-441.
Brousseau. G., Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique, annexe « une expérience de premier enseignement en statistique », (CD-ROM), Mercier A. & Margolinas C. (ed.) *balises en didactique des mathématiques*, 165-194. La pensée sauvage 2005
Ces textes s'appuient sur une série de textes publiés par la CEAIAEM et l'IREM de Bordeaux (1973-1974.)
[4] Est-ce que la lecture d'un deuxième exemplaire d'un même journal confirme les nouvelles du premier ?.

leur entendre dire**.** Le professeur dit qu'on peut connaître le contenu de la bouteille sans l'ouvrir, alors il faut bien que ce qu'on voit le révèle. Il faut donc organiser ce qu'on voit pour le comparer au contenu de la bouteille. D'où le groupement par 5. Et**,** en tout cas, ils ne disent que ce qu'ils ont vu ! L'histoire n'a pas de raison d'aller plus loin… Les élèves attendent tranquillement la confirmation du professeur.
Le professeur peut saisir l'occasion de lancer le processus :
P: «Si ce que tu dis est vrai, alors en recommençant on doit voir à nouveau trois blanches et deux noires... non?»

Cet argument déterministe paraît légitime aux enfants, bien qu'ils ne soient pas convaincus. Ils ont des doutes mais la curiosité vaut la peine d'essayer.

« Oui dit l'institutrice, peut être peut-on voir toutes les boules en retournant la bouteille 5 fois. Mais alors, alors si nous recommençons, on devrait observer la même chose... ?? »
E. «maintenant il y a quatre blanches et une noire»
Commentaire
L'argument de l'institutrice semble contredit : les boules ne se montrent pas toujours dans le même ordre. Les élèves en doutent certainement. Cependant à leur âge le « vrai enseigné » doit être vrai partout et toujours, il est fondé sur l'idée que les mêmes causes produisent les mêmes effets. Ce n'est pas toujours le 'vrai' auquel ils croient vraiment. Et dans cette perspective l'argument de l'enseignante leur semble logique. Critiquer l'idée que les boules se montrent toutes sagement l'une après l'autre n'aurait servi à rien: elle s'évapore. L'idée de la réapparition régulière fait long feu. Avec elle l'espoir de voir les 5 boules en 5 observations fait naufrage
Par contre l'idée que ce qui se montre doit "ressembler" à ce qui se cache se maintient, les élèves continuent à examiner la composition des séries de cinq observations sans tenr compte de l'ordre.
E. «De toute manière il y a plus de blanches que de noires …» disent d'autres
P: «Alors on devrait continuer à voir plus de blanches que de noires si on recommence ?»
E. « Non ! si les blanches ont apparu, maintenant ce sera le tour des noires » (il y aura compensation).
E. « On ne peut pas savoir » disent quelques uns. C'est l'opinion intime de la plupart
Et comme l'institutrice se montre intéressée et dubitative mais qu'elle n'approuve, ni ne désapprouve personne, ils finissent par conclure : « essayons ». *Les élèves utilisent spontanément mais de façon opportuniste des arguments déterministes ou empiristes ou expérimentalistes*
Commentaire. A ce moment la situation est en place : les élèves évoquent des faits observés et font des déclarations qui appellent des expériences, le professeur peut relancer ces expériences en demandant aux élèves si « ça va recommencer pareil ? ». Le maître doit rester centré sur l'expérience et pas sur les croyances ou les savoirs des élèves. Leur demander s'ils croient que « ça va recommencer pareil » est une question méta qui ne peut déboucher sur rien.
Les élèves cherchent donc « quelque chose » qui resterait pareil.
Ils ont commencé à noter les observations - ce qu'ils n'avaient pas de raison de faire jusqu'à ce moment là -. Elles ne sont toujours pas des tirages, puisqu'elles se font en situation supposée déterministe.
Commentaire *Le moteur de l'action didactique est l'argument déterministe dont le professeur s'est emparé : « Si ce qu'on voit donne des indications sur ce que contient la bouteille, alors, en reproduisant ce qu'on a fait, on devrait reproduire ce qu'on a vu ». Autrement dit, en s'appuyant sur une statistique, on créée un modèle (une machine de hasard), qui permet d'envisager une probabilité (un évènement à venir). Ainsi cette situation est fondamentale à la fois pour les statistiques et pour les probabilités. Seule l'invention de*

ces deux concepts (et les notions afférentes) et la compréhension de leurs rapports peut résoudre ce problème de façon satisfaisante. Le moteur vaudra tant que les élèves éprouveront de la curiosité pour ce défi piquant. Le professeur veille évidemment à ne pas le laisser devenir un jeu de devinette. Sur les questions cruciales que la classe va rencontrer, le professeur n'apportera et n'acceptera ni informations, ni techniques, ni idées en dehors de celles qui sont prévues. Cette recommandation ne doit rien à une idéologie constructiviste ou à une pédagogie non directive. Son influence se limite à ce qui permet la réalisation du processus. Sa retenue tient seulement à la nature mathématique de l'activité. Les problèmes de mathématiques doivent être résolus à l'aide des seuls théorèmes déjà démontrés et reconnus comme références. D'ailleurs, aucun des savoirs que l'on veut enseigner dans ce curriculum ne serait enseignable et utile à ce moment là. Le but de la séance n'est pas pour l'instant l'enseignement au sens classique Il s'agit d'une acculturation.

Commentaire : Commentaire : L'idée de recourir à une “expérience” pour trancher un débat “théorique” de cette sorte n'est pas évidente pour tous les élèves. Elle constitue pourtant un progrès important que le professeur souligne:

P: Est-ce que vous croyez que ...

- ce qu'on va voir ressemblera à ce qu'on a vu ?
- et que ce qu'on a vu ressemble au contenu de la bouteille ?

Cet argument est le seul moyen de relance dont dispose le professeur :

P : « Si les observations dépendent du contenu de la bouteille, les nouvelles observations en dépendront de la même manière. Si ce que vous dites est vrai, de nouvelles observations devraient reproduire ce que vous avez observé ».

2.1.2 *Choix des observations et distributions.* Dans la séance suivante l'institutrice a rappelé les dire des uns et des autres et ce qu'ils avaient décidé de faire: une autre observation de cinq boules, puis une autre encore pour voir si elles se ressemblent. Ils avaient l'idée que si les suites de cinq observations ressemblaient au contenu de la bouteille elles devaient se ressembler entre elles. Ils ont alors décidé de faire de nouvelles observations et de noter leurs résultats.

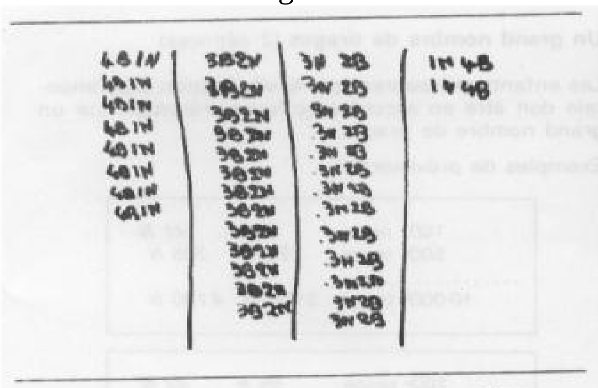
Commentaire : Le professeur ne précise pas ce qu'est ce ‘ce que vous avez observé ».

Il reprend toujours le raisonnement suivant. L'objet des préoccupations des élèves est le contenu de la bouteille qui se manifeste à eux de façon inconnue par la production de suites d'observations. Si une suite d'observation est porteuse d'une particularité (par rapport à quoi ?) qui tient au contenu de la bouteille, une autre suite doit témoigner de la même singularité. Il faut donc comparer des suites entre elles. Il n'y à aucune spéculation ni aucune attente précise sur le futur et sur les probabilités des évènements.

Ce raisonnement n'est fondé que sur l'assurance que donne le professeur « il y a des ressemblances » et « vous pouvez trouver ces ressemblances » autrement dit sur l'adhésion des élèves à ce contrat didactique. Ce qui n'est pas facile à maintenir.

2.1.3 *Les Séries de cinq observations*

- *E.* « Il faut écrire ce qu'on observe sinon on ne se souviendra pas »
- Certains groupes comptent seulement les blanches et les noires qui apparaissent
- Ils sont assez vite (trop) convaincus qu'il y a plus de blancs
- D'autres comptent les groupes de cinq observations classées par types : (1;4), (2;3), , (3;2), (4;1) et les disposent en une sorte d'histogramme figure. A ce moment, les élèves omettent de compter les séries unicolores car elles ne peuvent pas représenter le contenu de la bouteille
- Ils sont vite déçus de voir les résultats rester indécis, Les effectifs progressent lentement puisqu'il ne peut y avoir qu'une bouteille. Les observations sont fastidieuses… Alors les séances sont très courtes (5mn à 10 mn).

Figure1  Figure 4. — Une autre manière de noter les résultats.	Ce point a été relevé par un lecteur : les élèves n'auraient pas eu le droit de négliger ces séries puisque les fréquences relatives fr(iB) qu'ils utilisent ne sont pas égales aux fréquences f(iB) de la distribution binomiale. Pour cette raison le professeur aurait dû les interrompre le travail. Or cette objection est invalide. En effet si ef(i) est l'effectif de la classe i de la distribution : fr(2B) = ef(2B) / [ef(2B) + ef(3B)] et fr(3B) = ef(3B) / [ef(2B) + ef(3B)], alors fr(2B)>fr(3B) ⇔ f(2B) > f(3B). Il est équivalent de raisonner sur les fréquences relatives ou sur les fréquences. Cette équivalence persiste à la limite. Le résultat ne change pas.

➢Les élèves sont partagés, car les effectifs des deux clases 3B 2N et 2B 3N restent obstinément voisines. Certains argumentent avec les classes latérales : il y a plus de 4Blancs 1Noir que de 4N, 1B, donc plus de Blancs que de noirs. Le contenu doit être 3 blanc 1 noir. Certains élèves veulent alors compter les séries unicolores pour améliorer leurs arguments.
Le professeur ne prend pas parti : il ne sait pas. Mais il doit investir la question avec beaucoup de détermination pour entraîner les élèves à persévérer. Bientôt des groupes de pression se forment.

2.1.4. *Condition d'arrêt des observations*. Trois partis se sont formés pour argumenter les décisions possibles.

- Certains veulent continuer,
- D'autres disent « Il y a le même nombre d'observations 3B2N et 2B3N mais il y a plus de blanches que de noires en tout, alors nous devons dire que la composition de la bouteille est 3B2N. Nous sommes convaincus, on peut ouvrir la bouteille
- d'autres enfin disent « on ne peut pas savoir, on ne pourra pas savoir sans ouvrir la bouteille

L'enseignante refuse. Au bord du découragement et presque de la révolte, les élèves excédés trouvent un compromis : « On veut bien continuer les observations, mais on arrêtera dès que l'effectif d'une classe dépassera les autres d'au moins deux et on conclura ». Ils considèrent implicitement l'évènement « il y a 2B3N ou il y a3B2N » comme 'certain'.

Commentaire *Les élèves ont conçu une stratégie qui constitue une ébauche*[5] *d'un test d'hypothèse, mais elle joue un rôle central dans la suite, d'abord comme moteur puis comme objet d'étude. Le statut de la 'vérité' qu'ils tendent à établir n'a pas d'antécédent dans la culture scolaire.* Ils savent que cette décision ne prouvera pas que la conclusion soit exacte.

Bientôt effectivement, l'histogramme satisfait la condition que les élèves s'étaient donnée : l'effectif d'une classe dépasse un peu les autres. Les élèves sont alors convaincus d'avoir répondu à la question de leur institutrice, d'avoir une réponse et surtout une méthode satisfaisante.

D'ailleurs ceux qui comptaient seulement les observations de B : e(B) = 94 et celles de N e(N) = 70, prétendent depuis un certain temps qu'ils sont convaincus que la réponse est 3B 2N.

Et là déception ! L'institutrice ne sait pas ce que contient la bouteille ! Elle ne peut pas confirmer ou infirmer la conclusion. Alors les élèves exigent que l'on ouvre cette bouteille pour voir sa composition et pour confirmer ou infirmer leur hypothèse.

Commentaire *Si l'institutrice acceptait qu'on ouvre la bouteille cela ne validerait pas la méthode empiriste des élèves. Que la prévision soit juste ou fausse, cela ne donnerait aucune*

[5] Il est clair que faire dépendre l'arrêt de l'observation d'un résultat ne constitue pas un test d'hypothèse correct.

information ni aucune méthode sûre pour conclure dans une nouvelle expérience. Elle dit alors : « Si vous étiez vraiment sûr, vous n'auriez pas besoin d'ouvrir cette bouteille »

Cet argument s'explique: en statistique on ne peut généralement pas « ouvrir la bouteille» qui produit les observations. Mais pour les élèves, il est scandaleux : Catastrophe et désespoir ! Tout serait-il à refaire ?

Le processus n'est pas empiriste : ce qui est observé n'est pas accepté, ni comme loi, ni comme preuve, ni comme métaphore. Répéter les observations n'est proposé, ni comme pratique usuelle, ni comme moyen magique de faire apparaître des régularités. Aucune allusion n'est faite à des « tirages ». Il est important de noter que les élèves n'anticipent pas le résultat d'observations isolées, et considèrent des cohortes comme des indices d'un fait déterminé.

2.1.5 *L'essoufflement*

Le professeur veut relancer toujours le processus avec son argument : «- si vous êtes sûrs qu'il y plus de billes blanches que de noires dans la bouteille parce que vous voyez sortir plus de coups « blancs » que de coups « noirs », alors vous devez penser qu'en recommençant vous allez trouver encore, plus de coups blancs ?

E. - Oui !

P. - Et est ce que c'est vrai ?

E. - Essayons… »…

EE.:Bof… Non ! non ! on est sûr, on est sûr !

Commentaire Aujourd'hui, surtout avec des élèves plus âgés, la tension serait insoutenable et le professeur serait obligé de rendre des comptes, c'est-à-dire d'exposer les savoirs et les techniques dont il dispose… ce qui les mettrait sous la dépendance du jugement des élèves basé sur des connaissances superficielles et des préjugés.

2.2. Modélisations et intervalles de confiance

2.2.1. Au cours de la cinquième séance, une élève avait proposé :

« *3 élèves feront chacun 5 observations, nous compterons combien de blanches et de noires ils ont vu, et nous diviserons par 3 pour trouver le contenu de la bouteille.* (nombre moyen de noires par groupe de 5 observations.

Objections des autres élèves : « s'il y a dix blanches, 10 : 3 = 3,33 ? Ça ne va pas ! Et avec 5 : 3 = 1,66 non plus » « La somme n'est pas 5 mais 4,99 etc. »

En fait, malgré les encouragements du professeur, les autres élèves ne comprennent pas cette alchimie… qui était probablement l'apport d'un parent.

L'idée que s'il y avait deux noires au lieu d'une il devrait y avoir deux fois plus d'observations de noires est apparue mais elle disparaît car elle n'a aucun support à ce moment là

2.2.2. *1ère modélisation : des bouteilles transparentes pour les comparer* (séances 8 à 16).

Les interrogations des élèves deviennent pressantes : Que veut le professeur? Pourquoi ne pas ouvrir cette bouteille? Que font les boules dans la bouteille ?...

Le professeur encourage aussitôt cette question :

« Comment le savoir », « il faudrait que la bouteille soit transparente ».

« Faisons en une… »

Assez vite, en s'accordant pour trouver sans intérêt les bouteilles qui ne contiennent que des boules de la même couleur, les élèves décident de faire finalement **quatre bouteilles** avec les quatre compositions possibles pour comparer les observations avec celles de la bouteille de composition inconnue. Ils font des séries d'observations avec ces « modèles » possibles de la bouteille inconnue.

Avec l'aide du professeur les élèves relèvent les effectifs d'observations et les portent dans des tableaux.
Les doutes demeurent et il faut toute l'assurance de la maîtresse et toute la confiance des élèves pour maintenir le processus. Et au moment où cette confiance allait se lasser définitivement, un élève en propose une sorte de **loi des rapports**:

2.2.3. *La « loi » des rapports*

« Dans la bouteille 2B3N il y a deux fois plus de boules blanches que dans la bouteille 1B4N, alors (selon l'hypothèse que les observations reflètent le contenu de la bouteille).on devrait observer deux fois plus de boules blanches avec la 1ère qu'avec la 2ième pour le même nombre d'observations. Le principe est vite accepté comme hypothèse à l'étude par tous les élèves qui aperçoivent enfin une issue raisonnable.
« S'il y a deux fois plus de noires dans une bouteille que dans une autre, il devrait y avoir deux fois plus d'observations de noires… » La proportionnalité étant à peu près la seule fonction mathématique utilisée à ce niveau, sa légitimité leur semble totale. Cet argument tout de suite convainquant pour les élèves (ils ne le rapprochent pas de la proposition voisine précédente) se prête à une vérification qui est entreprise.
. Hélas, appliquées à leurs observations de chaque modèle la vérification de cette brillante idée n'est pas très convaincante (les séries sont trop courtes et fluctuent encore trop) Il faut encore et encore des observations. Un plus grand nombre d'élèves sont occupés à effectuer des observations et à les reporter sur des tableaux mais la lassitude impose d'abaisser fortement le coût des informations.

2.2.4 *2ième modélisation. Des Tables d'observations pseudo aléatoires.*

Aussi, avant que les élèves ne se lassent définitivement, l'institutrice leur apporte un viatique : des tables de hasard, c'est-à-dire des suites d'observations fournies à la demande par la fonction 'random' d'un ordinateur (d'abord des suites de N et de B, puis des effectifs et un peu plus tard des fréquences).
P:« C'est comme si j'avais fait des observations pour vous cette nuit »
Commentaire : Les tables sont des pages imprimées présentant des groupes de 5 observations : NBBNN NBNBN NBBBB…Les élèves disposent alors de suites de données aussi longues qu'ils veulent, issues de bouteilles dont ils connaissent la composition, mais évidemment pas de la bouteille initiale. Ces manipulations sont porteuses d'une découverte mathématique.

2.2.5. *Les nombres rationnels et les nombres décimaux*

Cependant nombreuses comparaisons non plus d'effectifs mais de fréquences conduisent les élèves à accepter l'introduction d'une notion mathématique très importantes de leur programme : les fractions et les rationnels sous la forme de rapport d'un effectif de blanches ou de noires au cours du nombre d'observations correspondant, ou du nombre de suites de chaque sorte dans des suites de 5 observations. Ces comparaisons et les calculs qui les accompagnent seront effectués un très grand nombre de fois par chaque élève. Le sens et les techniques de calcul seront ainsi soutenus par un usage fréquent. Tous les élèves devront effectuer couramment ces calculs et ces raisonnements pour suivre l'activité collective.
De plus les comparaisons de suites de fractions pour approcher des nombres qui ne peuvent être que des naturels donne de nombreuses occasions de substituer des nombres rationnels représentés par des décimaux aux fractions. Les mesures décimales leur sont familières. Seule, l'organisation des différents rapports à l'unité demande un travail mathématique original. Ils obtiennent des « fréquences théoriques » pour chacune de leurs bouteilles.

2.2.6. *3ième modélisation : les graphiques*

Au fur et à mesure que le nombre des observations augmente, les histogrammes disparaissent au profit de tableaux de fréquences, bientôt représentés par des graphiques qui représentent les fréquences observées après chaque série d'observations

Les élèves peuvent faire des graphiques avec des nombres d'observations de plus en plus grands

Très vite, ils demandent que la machine leur donne le résultat des comptages

Les élèves remarquent alors d'abord les fluctuations, puis que les suites de fréquences d'observations d'une « même bouteille » finissent par se rapprocher les unes des autres et se séparent des suites issues des autres bouteilles (figure 2) .

Figure 2

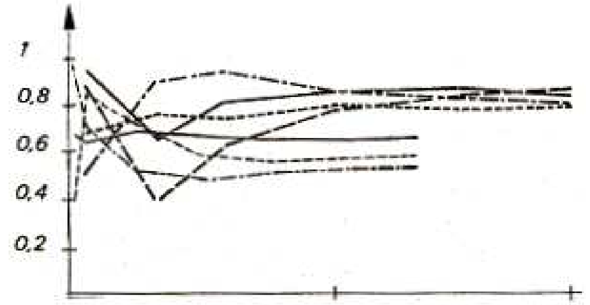
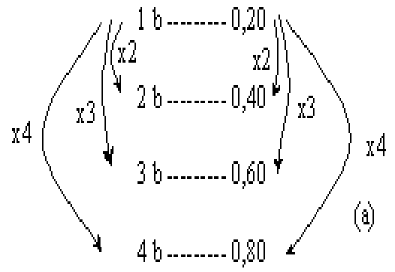


Figure 3



La lecture de ces graphiques n'est pas familière aux élèves. Le professeur propose un jeu entre groupes d'élèves.

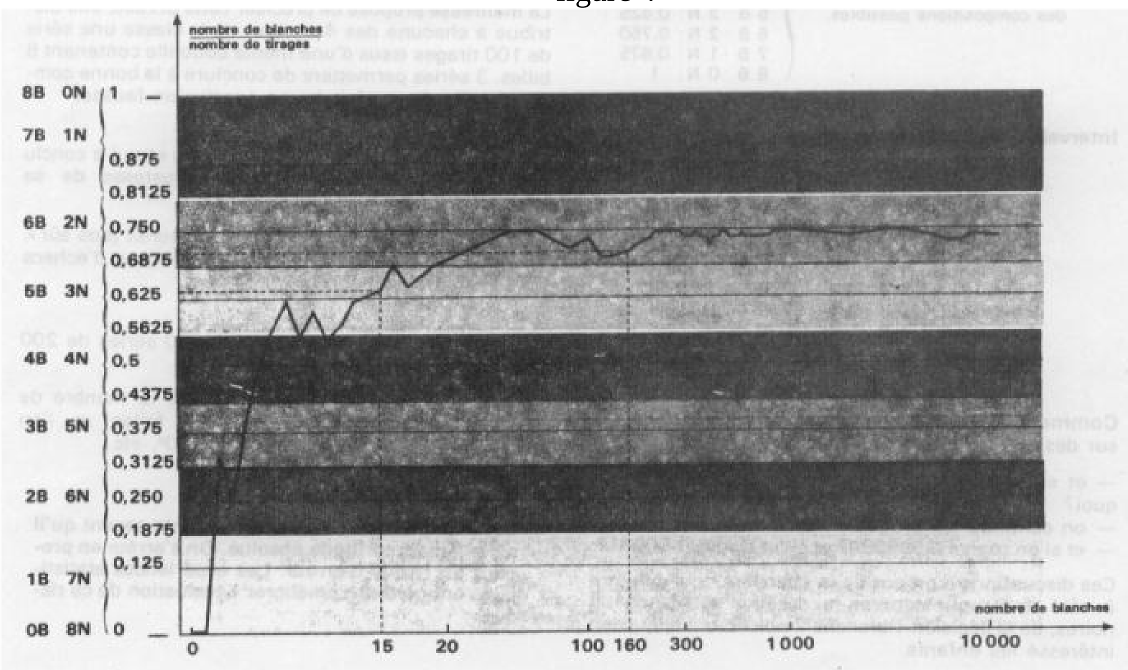
Un groupe choisit un graphique de fréquences issu d'une bouteille qu'il connaît et le propose à un autre groupe qui ignore cette origine : il doit deviner quelle bouteille a fourni ce graphique.

Ce jeu justifie et accompagne diverses découvertes. Nous observons que les élèves utilisent bientôt les fréquences pour les grands nombres d'observations (au début ils s'intéressaient à la partie gauche des graphiques) et surtout qu'ils commencent à utiliser des arguments de linéarité (approximative) pour se décider déterminer (Figure 3).

Les propriétés que les élèves soupçonnent et découvrent progressivement apparaissent comme moyens de gagner ou de faire perdre l'adversaire. En introduisant un tarif des informations dépendant de la longueur des séries demandées et montrées, le concours réalise la modélisation de la situation fondamentale de la statistique inférentielle.

2.2.7. *La convergence des séries d'observations : premiers intervalles de décision.*

figure 4



Les élèves disposent alors de plusieurs graphes correspondant à chaque composition. Ils remarquent les caprices de ces séries, leurs fluctuations, certaines s'écartent après s'être

rapprochées, mais beaucoup se rapprochent effectivement. La loi des rapports semble bien justifiée. Les élèves observent que les courbes semblent se stabiliser de façon à s'éloigner les unes des autres. Ils voient des frontières entre des zones plutôt qu'une valeur centrale
Pour hasarder une valeur de convergence, il faudra qu'ils considèrent le tableau de linéarité
Chaque intervalle correspond à une composition de la bouteille. Si la fréquence cumulée "tombe" dans un des intervalles choisis, on peut décider la composition de la bouteille correspondante. La détermination des intervalles (inégaux, bornes) pose aux élèves des problèmes complexes mais intéressants de topologie des rationnels.

Ainsi les élèves, avec l'aide de leur institutrice, mettent à l'épreuve « leur loi des rapports » qui remplace à ce stade l'équiprobabilité. Ils ont exploré et beaucoup perfectionné le « test » qu'ils avaient inventé. Ils demandent le plus grand nombre possible d'observations et désignent la composition correspondant à la fréquence théorique la plus proche de la fréquence observée.
A ce moment les élèves ont vérifié qu'ils peuvent trouver le contenu véritable de bouteilles transparentes à l'aide des graphes d'observation. Ils sont convaincus qu'ils peuvent conclure de la même façon pour la bouteille initiale, opaque, et de composition inconnue. Ils le font. Ils admettent qu'ils n'ont pas besoin d'ouvrir la fameuse bouteille… mais ils auraient bien aimé quand même vérifier leur découverte… La bouteille est vidée sans vérification dans le sac de billes. Cette étape clôt la phase inaugurée par la situation initiale. Les élèves ont la conviction d'avoir acquis un nouveau pouvoir. Ils se montrent désireux de l'exercer dans un autre cas. Le professeur accepte d'organiser la recherche pour une bouteille dont le contenu est différent afin d'achever la deuxième phase de son programme en présentant à ses élèves la notion de risque et son rapport avec le coût des informations.

2.2.8. *Réplique : une bouteille avec une autre composition*

A la 19$^{\text{ième}}$ séance les élèves refont collectivement les calculs des fréquences théoriques pour une bouteille composée de 4 billes seulement et pour une, composée de 8 billes. Ils utilisent ces calculs pour deviner la composition de bouteilles dont l'ordinateur donne à volonté des cohortes d'observations. Le calcul des nouveaux intervalles et des « fréquences théoriques » est un problème, où ils appliquent ce qu'ils ont appris, (en particulier a utiliser les décimaux et leur topologie). Les séances 20 à 24 permettent aux élèves de s'exercer individuellement à la méthode de détermination du contenu de diverses bouteilles. Il s'agit de divisions dans les décimaux et d'intervalles… Ils décident du contenu de la bouteille lorsque le graphe reste « assez longtemps » dans l'intervalle centré sur la valeur théorique.
Les élèves doivent et savent effectuer ces calculs individuellement. L'éternelle objection de l'enseignante : « est-ce que ce sera pareil si … on recommence ? » les a conduits à dire qu'ils peuvent répondre mais qu'il y a un risque de se tromper. Remarquons qu'il s'agit toujours d'établir une vérité et non pas de faire un pronostic sur un avenir incertain.

2.2.9. *Le risque*

Les élèves demandaient des suites d'observations aussi longues que possible. Mais la close du jeu fixant un prix pour les observations, et les oscillations initiales des graphiques ont attiré l'attention sur le fait que si on ne prend pas suffisamment d'observations on risque de se tromper. Quel risque ? Quelle proportion des séries d'observations donne une réponse exacte ?
Pour l'instant les intervalles (inégaux) sont toujours ceux (maximums) délimités par la loi des rapports. Les élèves proposent de l'exprimer par le rapport du nombre de séries qui restent en dehors de l'intervalle déterminé par chaque fréquence théorique. Dans cette règle empirique l'intervalle reste fixe, ce sont seulement les effectifs des observations qui varient, mais ce qui est visé est le sens plus que les calculs. Par la suite, ils rapetisseront cet intervalle pour être plus surs. Plus l'intervalle est petit ou plus on veut diminuer le risque plus il faut demander un grand nombre d'observations. Elle a même essayé de faire remarquer qu'il fallait bien plus du

double d’observations pour obtenir le même risque avec un intervalle divisé par deux mais elle n’a pas insisté.
La figure 5 présente le travail d’un groupe d’élèves qui disposait de 20 séries de 100 observations issues d’une bouteille 6B ; 2N. Ils ont calculé les bornes de l’intervalle de décision : [0,812 ; 0,688] et ils ont relevé que les 16 fréquences qui se trouvaient dans cet intervalle et les 4 qui étaient en dehors. Avec une cohorte de 100 observations le critère de décision donne 20% d’erreurs et 80% de réussites. Avec une cohorte de 1000 le travail des élèves serait simple (mêmes intervalles) mais trop fastidieux. Les résultats ont été donnés aux élèves.

Figure 5

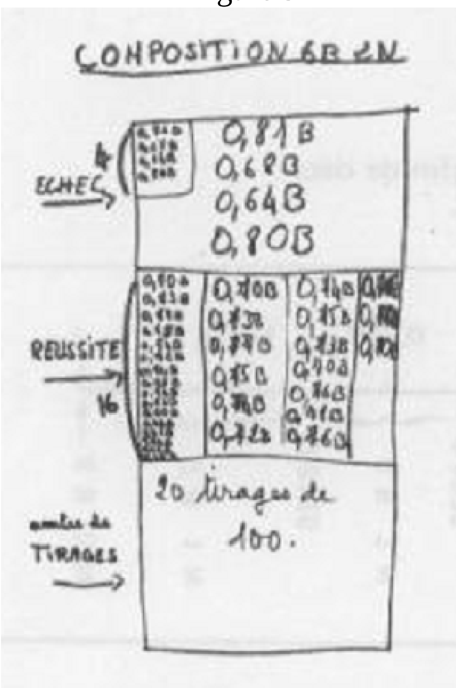
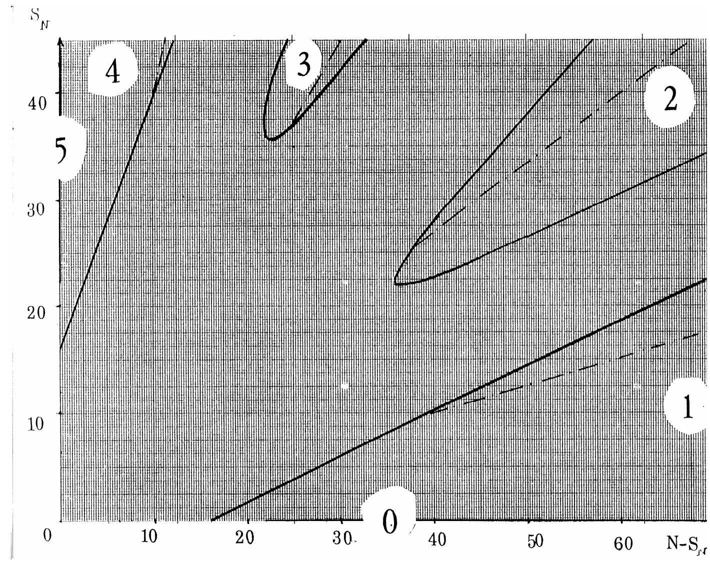


Figure 6
Représentation de la stratégie séquentielle déterministe :
Les zones de décision (PL Hennequin)



Par contre, la relation entre la largeur de l’intervalle, le nombre d’observations, et la proportion des suites qui sortent n’est pas clairement formulable par les élèves dans toutes ses formes: Elle est « connue » ou pressentie, utilisable pour des décisions adéquates, et plus ou moins formulée par bribes … La figure 8 montre les zones de décisions de la stratégie séquentielle déterministe pour toutes les promenades aléatoires possibles. Les courbes sont les frontières pour le seuil de sécurité de 95%.

2.2.10 *Exercices*

Voici le type d’exercices qui sont proposés à ces élèves à ce moment là. (26$^{\text{ième}}$ leçon)
« Sur 100 observations on a calculé une fréquence de 0,91 blancs combien de jetons blancs a-t-on observé. Il y a 4 jetons B ou N dans un sac. Au bout de 10 observations on trouve une fréquence de 0,3 blancs, combien y a-t-il de jetons blancs dans le sac, argumentez oralement ? Même question si on trouve une fréquence de 0,3 au bout de 100 observations ? Un sac contient 10 jetons, quelles sont les fréquences théoriques possibles ? Quels sont les intervalles de décision ? »…
Ici se termine la première partie de l’expérience. Nous pouvons prétendre avoir réalisé une sorte de genèse empirique didactique introductive à une des *pratiques statistiques.*
Les élèves ont une certaine expérience et des techniques qui leur permettent de « deviner » la composition d’une urne. En fait la bouteille n’aura jamais été ouverte, mais les élèves seront convaincus – par des arguments logiques et déterministes - que ce qu’ils croient est vrai.
Cette introduction est purement empirique mais elle permet de donner une signification solide et sans mystère aux calculs qui vont faire l’objet de la phase suivante. Elle n’est pas empiriste car aucune conclusion n’a été tirée ni donnée pour établie. Au contraire la question de savoir

quelle est la valeur de vérité de ces conjectures et de ces méthodes reste entièrement mais clairement ouverte, tout comme le rapport qui existe entre, d'une part, la mesure de probabilité à attribuer à un évènement de l'expérience de l'alternative initiale, et d'autre part, les fréquences théoriques et les fréquences limites « connues ». Quand les élèves accèderont à des niveaux plus avancés, ils pourront aborder clairement le problème de la consistance de ce rapport, ce qui est exactement le rôle des mathématiques à ce sujet.

2.3 Les événements et leurs probabilités

2.3.1. Les évènements et leur fréquence théorique dans une expérience plus complexe
La 26$^{\text{ième}}$ leçon introduit un matériel nouveau :
Dans un sac on a mis 6 petits cartons,3 rouges et 3 jaunes, qui portent des numéros de 1 à 6.
(Pour avoir des évènements formés d'évènements élémentaires, plus tard on aura 3x6 évènements élémentaires)
On peut observer les cartons un par un et en les remettant chaque fois dans le sac
Pr. : Pouvez vous dire que serait la fréquence des observations d'un carton jaune
E1 *« Les cartons, c'est comme les billes »*
E2 *« Oui ! C'est comme s'il y avait 6 billes dans le sac »*
E3 *« C'est la même chose que les billes blanches et les billes noires ».*
M « Mais quelle serait la fréquence des jaunes ? »
E "c'est 0,50"
M : « Pourquoi ? »
E4 : « parce que 3 : 6 = 0,50 » …
M : *quelle serait la fréquence des 1 ? :*
1 :6 = 0,16 »
M : *« probabilité de tirer le 3 ? » (Ici, un lapsus du professeur qui se reprend : quelle fréquence… ?*
E : ??
Echec presque total En remplaçant 1, 2, 3 .. Par A, B, C,… le professeur obtient aussitôt une réponse correcte (les élèves avaient pris les numéros pour des nombres)
Les élèves font la liste des évènements, c'est-à-dire des observations possibles d'un carton seul et des fréquences théoriques correspondantes
Commentaires
Le professeur a en fait utilisé le terme « probabilité », mais il est clair que ce terme ne pouvait pas avoir pour les élèves un autre sens que celui de « fréquence théorique ».
Ce qui ne les a pas empêché d'effectuer les calculs habituels dans un espace de probabilités, et sur des probabilités produit, par exemple au cours de deux expériences simultanées
Il est très important d'observer qu'il ne s'agit là que de « connaissances ». Bien qu'elles soient devenues familières pour ces élèves là, elles ne doivent absolument pas être confondues avec des savoirs scolaires au sens habituel.
2.3.2. *Expériences successives ou simultanées*
A la 27$^{\text{ième}}$ séance sont introduits différentes sortes de dés (1 classique, 1 avec 4 faces blanches et 3 bleues,… un dé plombé) et un icosaèdre.
Pour les élèves ces fréquences sont des résultats de divisions, mais ils ne restent ni des fractions ni des rapports. Ce sont des mesures exprimées par des décimaux. Ils conçoivent les mesures d'évènement comme les mesures qui leur sont familières : les prix ou les aires, du moins pour les sommes. Il s'agit donc d'exercices inhabituels mais de leur niveau et près de leur programme officiel de mathématiques.
2.3.3. *La somme des points obtenue avec deux dés jetés simultanément*

Au cours des 5 dernières séances les élèves apprennent successivement à faire l'inventaire des possibilités dans 2 expériences successives (28ième), puis celui des sommes obtenues lors d'un lancer de 2 dés simultanément, les élèves prévoient d'abord une distribution équiprobable qui semble contredite par une expérience de 344 observations. La discussion fait apparaître la raisons : certains valeurs peuvent être obtenues de plusieurs façon 29ième). L'illustration et l'explication des résultats empiriques de l'expérience précédente occupent la 30ième. La 31ième séance se borne à vérifier si les élèves comprennent l'énoncé d'un problème de synthèse. Le dé pipé est resté dans sa boite.

Il faut remarquer qu'au cours de ce processus, jamais les élèves ne se sont intéressés à une expérience unique et isolée, ni à de pronostics, ni à des probabilités d'évènements, ni au hasard.

2.3.4. *Epreuves et résultats.*

Le déroulement extrêmement rapide de la partie réservée au calcul des probabilités doit être expliqué. Les séances sont des leçons, conduites par l'enseignante de façon plus directe que celles qui ont précédé. Les calculs sont simples et répétitifs. Les élèves savent calculer des effectifs, des fréquences et les additionner. Dépouillés de leur contexte de mystère et d'incertitude les concepts sont familiers : faire l'inventaire des possibilités, et calculer sur des mesures (fréquences ou probabilités) simples ne mobilise pas d'autres concepts mathématiques que ceux du programme, utilisés pour calculer dans l'espace vectoriel des achats. Le but de l'expérience (qui se termine très près des vacances d'été) n'était pas de fixer les apprentissages mais seulement de s'assurer de la possibilité de les introduire.

Nous avions prévu deux épreuves pour attester des limites de notre enseignement :

Il en est ressorti comme prévu que les observations de la bouteille ne représentent pas n'importe quelle observation statistique, et les fréquences limites ne sont pas équivalentes à des probabilités. La seconde consistait en ceci : Voici une bouteille à quatre boules : deux noires et deux blanches. Vous avez une bande comprenant dix cases numérotées de 1 à 10, vous allez écrire N ou B dans chaque case. Puis nous ferons 10 observations. A chacune, les élèves qui ont prévu la bonne couleur marquent un pont, les autres aucun. Celui qui a le plus de points a gagné. Nous ferons plusieurs parties successivement… Le résultat est net : les élèves essaient de reproduire la distribution, ce qui n'est évidemment pas la stratégie gagnante.

2.4. Quelques conclusions tirées de cette expérience[6]

1. Il est possible d'enseigner aux élèves les usages de la statistique inférentielle et du calcul d'une distribution de fréquences sur une algèbre d'évènements… évidemment sans ce métalangage savant. Simuler des démarches de statisticiens pourrait être plus efficace que l'enseignement direct des éléments de leur savoir.
2. La situation utilisée s'est révélée plus intelligible et efficace pour des apprentissages du calcul élémentaire que les pratiques commerciales et financières traditionnellement enseignées, surtout telles que des enfants pouvaient déjà les approcher comme aujourd'hui.
3. La situation détermine le curriculum par ses propriétés poïétiques : Chaque leçon est fondée sur les interrogations et les débats soulevés dans la leçon précédente et non selon un ordre importé Les apports de connaissances du professeur ont été minimes
4. Le processus est fondamentalement collectif. Il simule l'activité d'une société de mathématiciens,

[6] De nombreux autres résultats ont été tirés des groupes de travaux expérimentaux et théoriques menés au COREM entre 1973 et 1998. Nos archives vidéos sont accessibles aux chercheurs (exclusivement) grâce au projet VISA de l'INRP Lyon. Mais nous ne savons toujours pas réunir **25 000€,** l'argent nécessaire pour numériser nos archives papiers : 25 ans d'activités d'une école à 14 classes pendant 25 ans. etc.

5. Ce curriculum auto-inductif intensifie l'engagement des élèves et contribue à structurer leurs connaissances à condition de le compléter par une institutionnalisation soutenue. Cependant il est inapproprié pour un préceptorat.
7. A aucun moment il n'a été fait appel à la rhétorique du hasard. Il ne s'agissait pas de parier sur l'avenir, mais de savoir à propos d'un objet actuel et fixe. .
8. Savoir comment et pourquoi on a intérêt à utiliser les fréquences théoriques dans des décisions relatives à UNE expérience unique est une question différente que seule la démonstration mathématique des théorèmes de convergence pourra justifier plus tard. Pour l'instant les élèves ont une connaissance empirique de cette loi. Cette connaissance sera perdue si elle n'est pas reprise et analysée assez vite. Ce serait le rôle d'une quatrième étape d'institutionnalisation de ces connaissances.
8. Une « pensée probabiliste » spécifique n'est donc pas indispensable à ce stade de l'enseignement. Nous avons évité aussi bien l'empirisme simpliste que les allant de soi de l'axiomatique de Kolmogorov qui déroute les démarches rationnelles des élèves.
Les obstacles les plus importants à l'amélioration de l'enseignement des probabilités ne sont pas les insuffisances des élèves mais l'inadéquation des conditions de l'enseignement inférées des insuffisances de la culture didactique et mathématique actuelle des professeurs et de la population.
9. Nous avons expérimenté l'introduction de *la description statistique* dans d'autres conditions. Mais son enseignement pourrait commencer immédiatement après l'introduction à la statistique inférentielle, et se poursuivre parallèlement à l'étude des probabilités.
10. Hélas, les conditions réunies pour cette expérience ne sont pas reproductibles dans les conditions ordinaires de l'enseignement. Trop de formes de savoir, d'habitudes, de croyances, de pratiques pédagogiques ont dû être réaménagées. Les professeurs avaient besoin d'une assistance constante de la part des chercheurs et de la protection épistémologique et sociale de l'institution pour résister aux exigences et aux critiques culturelles et épistémologiques du milieu.
Le développement de la *Science du Didactique* et sa diffusion dans les milieux scientifiques et dans la population, paraissent indispensables pour envisager l'adoption de ce genre de curriculums scolaires avec des chances de succès raisonnables.

3. Conditions de l'expérimentation et résultats

3.1. Conditions institutionnelles

3.1.1. *L'école Michelet de Talence*. Dès leur construction, les écoles Michelet de Talence ont été conçues, pour un temps (en fait 25 ans), dans le cadre d'une convention entre d'une part les autorités administratives du Rectorat et de l'Académie de la Gironde et d'autre part l'Université de Bordeaux 1. Dans le cadre de l'IREM (Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques) de Bordeaux, un laboratoire universitaire – le COREM (Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques) – était créé pour assurer le fonctionnement du projet de recherches ayant pour but d'étudier de façon scientifique et clinique l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire (maternelle, primaire et collège). Ce laboratoire recevait un appui très important des écoles normales et des corps d'inspection, Ce système a fonctionné de 1973 à 1998 suivant des conditions administratives, humaines, pédagogiques, techniques et scientifiques appropriées, étudiées entre 1964 et 1968 au CRDP (Centre Régional de Documentation Pédagogique) de Bordeaux afin de permettre des observations et des recherches d'un type nouveau.

3.1.2. *Les expériences et les recherches sur l'enseignement des probabilités* ont commencé à l'IREM de Bordeaux dès 1971 en parallèle avec tout un ensemble de recherches sur la modélisation des situations mathématiques. L'expérimentation présentée ci-dessus en a tiré les leçons Elle s'est déroulée entre 1972 et 1974 parallèlement à d'autres. .

3.2. L'enseignement

3.2.1. *Les Objectifs scolaires.* Ainsi la première condition de cette expérience était qu'elle enseigne aux élèves des connaissances utiles pour eux, dans le cadre des programmes et horaires officiels. Les leçons étaient donc données sous deux rubriques de l'horaire officiel, une partie au titre des « activités scientifiques d'éveil », et une partie au titre de l'horaire de mathématiques : calculs arithmétique, mesure etc. La règle absolue était de ne consacrer aucun temps à des activités qui seraient inutiles aux élèves eux-mêmes ; et si les dispositifs s'écartaient des pratiques habituelles, il fallait délimiter des périodes où les apprentissages seraient vérifiés équivalents à ceux des méthodes classiques. Les évaluations n'avaient pas pour but de démontrer une amélioration (si elle se produisait tant mieux) mais de démontrer un résultat au moins égal aux résultats moyens. Nous voulions gagner du temps pour tous les élèves.

3.2.2. *Les conditions pédagogiques.* Cette expérience n'avait aucune ambition dans ce domaine et ne suivait aucune école de pensée. Toutes les formes de leçons pouvaient être envisagées suivant les besoins. L'intérêt que nous portions aux effets de nos dispositifs sur les comportements des élèves, nous amenait à organiser des situations qui leur laissaient une large autonomie vis-à-vis du professeur. Mais celui-ci n'hésitait pas, le cas échéant, à utiliser toutes ses ressources pédagogiques lorsqu'il s'avérait nécessaire qu'il reprenne la main. Les professeurs agissaient conformément aux pratiques professionnelles courantes, et après discussions au sein de l'équipe, suivant leurs talents et leurs options personnelles.

3.2.3. *Les objectifs didactiques.* Les leçons devaient donc familiariser les élèves avec les observations statistiques et leur signification (activités d'éveil), à leur faire utiliser les décimaux (somme et division) pour une nouvelle sorte de *mesure*, et de leur faire reconnaître les manipulations d'un espace mesurable dans un environnement légèrement différent de celui qu'ils connaissaient (longueurs, aires etc.)

L'expérience s'est étendue dans chaque classe sur 32 séances (soit 24h d'activités 12h « en éveil » et 12 en mathématiques » dont seulement une dizaine ont duré plus d'une demi heure.

3.2.4. *Résultats* L'éventail des connaissances qui sont apparues au cours de cette activité est très large : de la méthode de notation des statistiques aux calculs d'effectifs et de fréquences, de la construction et de l'utilisation d'un histogramme à celles d'une représentation graphique, un répertoire de termes nouveaux a été utilisé pour des usages précis et concrets… Mais aucune n'a fait l'objet d'une institutionnalisation[7] –. L'expérience montre **ce qu'ont fait les élèves**, dans des circonstances inhabituelles, en fonction d'interventions du professeur bien délimitées. Dans ces conditions, les élèves ne faisaient que ce qui leur paraissait adéquat avec ce qu'ils avaient compris. Les actions accomplies – les performances – et contrôlées, témoignent qu'une certaine acculturation au calcul de probabilités s'est produite.

---

[7] *L'institutionnalisation* est une opération didactique par laquelle le professeur indique qu'une connaissance devra servir de référence dans d'autres activités, qu'elle est un objet de savoir, qu'elle doit être « apprise », et « restituée » à la demande… par exemple un théorème fondamental est une conn. institutionnalisée.. L'institutionnalisation d'une connaissance exige qu'un *terme* précis (et fixe) lui soit attribué (une étiquette : « le théorème de Pythagore »), accompagné d'une *définition* ou d'un énoncé (le texte) ou au moins d'une description, et qu'il soit associé à un « sens » c'est-à-dire à un environnement d'occurrences et d'usages (des lemmes, des corollaires, des exercices et des problèmes), à des actions ou à un algorithme (de construction, par exemple 3-4-5) etc. L'institutionnalisation est un acte didactique facile à projeter et son résultat est facile à contrôler. Malheureusement elle est insuffisante pour créer les connaissances qui sont nécessaires pour comprendre et connaître et finalement apprendre le savoir enseigné et non seulement sa description.

Les connaissances de ce type qui ne sont pas, soit institutionnalisées, soit stabilisées par une réutilisation fréquente, s’estompent vite si elles ne sont pas rapidement *organisées en savoirs*, et rattachées au reste des études. Elles sont donc, par définition, difficiles à vérifier par les moyens d’évaluation habituels qui visent des savoirs formels et généraux.
Mais nous pensons qu’après ce curriculum, l’institutionnalisation *classique* des calculs de probabilités qu’avaient effectué les élèves aurait pu se poursuivre et s’achever sans difficulté.
Compte tenu du fait que cet enseignement ne devait pas être repris dans leurs études secondaires, nous avons renoncé à poursuivre notre action didactique au-delà.
Bilan Le bilan pédagogique de ces leçons a été jugé tout à fait satisfaisant par les enseignants et par les autorités académiques. L’habileté dans les calculs, notamment des divisions etles connaissance numériques et topologiques sur les fractions et sur les décimaux (ordre, intervalles) ont été contrôlées comme largement accrues.
3.2.5. La *conclusion de l’expérimentation* a été que les élèves de 10-11 ans étaient capables de suivre ce curriculum et d’acquérir les rudiments de méthodes statistiques et de calcul des probabilités qui le concluaient sans recourir à la rhétorique du hasard, mais qu’il aurait été nécessaire de prolonger ces connaissances pour les institutionnaliser et les stabiliser. Ce qui n’était pas possible dans le cadre des programmes et des pratiques du secondaire de l’époque.
Diffusion Par contre, la diffusion de ce genre d’activités - qui aurait pu intéresser les instituteurs dans le cadre de leurs activités d’éveil – a été jugée indésirable à cause de la complexité des connaissances et des techniques mathématiques et didactiques nécessaires, et de l’encadrement humain et technologique utilisé. Le COREM n’a pas jugé conforme à son éthique d’encourager des réifications directes vouées à l’échec, ne serait-ce que par les réactions de l’environnement.

3.3. Caractères mathématiques

3.3.1 *Une genèse plutôt qu'une construction axiomatique.* Cette genèse échappe aux maladresses de la transposition didactique habituelle extraite de l'axiomatique de Kolmogorov
Le vocabulaire de base de la statistique inférentielle est introduit d'abord, - mais la source d'observations est pour nous une expérience de Bernoulli —
Les élèves se construisent une expérience (une connaissance non institutionnalisée) des fluctuations des séries statistiques, de la loi des grands nombres, d'une forme de convergence vers une fréquence théorique, d'intervalles de confiance et du test d'hypothèse, de la croissance du coût de la confiance, tout cela sans définitions formelles, mais comme réponse à des préoccupations déterministes, et avec une épistémologie spontanée empiriste caractéristique de leur développement. Nous avons montré
- qu'ils peuvent ainsi analyser d'autres machines de hasard et calculer les fréquences théoriques associées à tous les évènements d'épreuves relativement complexes, ou même composées et ainsi effectuer des calculs élémentaires de probabilités - que leur conception empiriste a été mise en question. Il est apparu que la consistance de leur méthode devra être établie mathématiquement par la suite.
3.3.2. *Des fréquences et non des probabilités*. En conséquence, les élèves n'envisagent jamais de réfléchir sur une épreuve isolée. Ils ne font jamais de prévisions à ce sujet. Il n'y a aucun enjeu personnel de ce type. Leur incertitude porte seulement sur des résultats statistiques. Ils tentent de réduire leur incertitude mais ne font aucun « pronostic ». Ce sont des hypothèses et des méthodes qui sont en jeu.
L'interprétation des probabilités en terme de fréquences théoriques n'a fait que retarder le moment où se posera le problème d'utiliser ce concept pour prendre une décision dans une épreuve unique. Il n'est pas évident a priori qu'il faille faire intervenir au cours d'une épreuve unique ce qui se révèle dans une infinité d'épreuves.

3.3.3 *Obstacles* : Diverses études avaient montré que les voies classiques, (à partir des applications, de l'ordre historique ou d'une axiomatique) rencontrent nécessairement des difficultés importantes d'ordre psychologique, épistémologique et didactique. Nous en avons tiré une liste de conditions à éviter. Le travail d'ingénierie, éclairé par quelques expériences subsidiaires, a pu les satisfaire en produisant le processus résumé ci-dessus,
3. 3. 4. *La remise en question du modèle transposé de l'axiomatique de Kolmogorov* est d'autant plus fondée que depuis une cinquantaine d'année le calcul des probabilités se limite de moins en moins aux jeux de hasard mais qu'en liaison avec la statistique il est devenu irremplaçable dans toutes les sciences. La façon dont les gouvernements et les médias vivent au jour le jour l'épidémie de grippe montre qu'il y a beaucoup à faire.

3.4 Caractères épistémologiques

3.4.1 *Le hasard.* Il n'est fait aucune référence implicite ou explicite au hasard, comme explication et surtout comme réalité objective, avant qu'on ait pu construire les instruments mathématiques qui établissent sa consistance et ses limites. Il s'agit d'éviter le redoutable héritage des croyances et des explications naïves sur les causes des évènements qui s'est construit au cours de millénaires. Les étapes de cette évolution ont truffé notre culture des traces de leurs errements et des obstacles qui en découlent. Le Hasard porte néanmoins tous leurs stigmates, bien qu'il se pare aujourd'hui de vertus scientifiques[8].
3.4.2 *Pouvoir poïétique et mathématique des situations*. Chaque séance succède à la précédente en réponse aux questions qu'elle a suggérées aux élèves et aux réponses qu'ils lui apportent eux-mêmes. Ces questions sont le fruit d'une pensée déterministe et empiriste spontanée qui ne fera place à la pensée probabiliste que dans une démarche rationnelle, dénuée de magie. Le jeu du professeur est délicat car il n'est justifié pour les élèves qu'a posteriori. La situation génératrice détermine l'évolution des questions et justifie les connaissances développées
3.4.3 *Unité* Ce curriculum présente les probabilités et les statistiques ensemble, dans leur rapport épistémologique et fonctionnel, afin de montrer d'emblée leur complémentarité dans la résolution des problèmes d'incertitude. Les élèves disposent au plus vite d'un équivalent empirique à la loi des grands nombres : la fréquence (moyenne arithmétique des n premières variables aléatoires) tend (en probabilité) vers une valeur déterminée dès la première observation (l'espérance mathématique) lorsque le nombre d'observations augmente. Cette remarque donne un premier fondement (empirique) aux fréquences théoriques, naïvement inférées d'une linéarité familière à cet âge. Elle supplée à l'absence de la notion d'équiprobabilité. Ils conçoivent les fréquences limites comme des mesures d'évènements, et ils peuvent les calculer avec leurs opérations. Dans le cas d'une épreuve isolée, les élèves ne considèreront que les fréquences théoriques et demanderont des justifications pour les utiliser comme « probabilité ».
3.4.4 *Ethique pédagogique*. Ce processus évite de donner aux élèves l'exemple d'investir un intérêt frivole et dangereux pour les situations incertaines non problématiques, non résolubles. Avec les moyens modernes l'addiction aux jeux de hasard est devenue un véritable fléau social. L'introduction innocente et maladroite des jeux et des espérances mathématiques dans les classes élémentaires rendra probablement les jeux de hasard familiers et fréquentables et donnera un alibi aux sociétés de jeux pour contribuer à l'initiation. Il faut conforter les leçons de morale avec lesquelles les enseignants croiront pouvoir contenir le fléau par une approche plus résistante.

---

[8] Au niveau universitaire, les difficultés persistent, malgré l'introduction de la rigueur : l'effort manifesté dans les cours est contrarié dans les exercices trop précoces, et malgré l'usage du formalisme qui masque les difficultés, les obstacles et les méprises sans les résoudre. L'incompréhension et le dédain sont augmentés par des détournements de l'intérêt au profit de questions purement mathématiques...

3.4.5. *Philosophie.* Le détour proposé ici n'a pas pour objet de se substituer à l'enseignement des probabilités, mais au contraire de le précéder pour le sécuriser, et pour permettre de l'enseigner mieux et plus vite.
Nous avons voulu l'introduire ainsi, sans réveiller « la rhétorique du hasard ». Certains trouveront prématuré de mettre les enfants dans l'obligation d'affronter des difficultés, certes résolubles, mais inhabituelles. Cependant les provoquer avec des questions insolubles, et avec des mystères insondables est le moyen habituel utilisé pour les persuader des vérités les moins bien établies. La considération de l'incertitude et du « hasard immédiat » est le moyen le plus rapide de confronter quelqu'un à des abîmes de perplexité et de lui faire accepter tous les raisonnements et tous leurs contraires. Nous avons voulu éviter d'ouvrir avec eux cette boîte de Pandore de la « rhétorique du hasard ». C'est l'ensemble des moyens culturels accumulés depuis le fond de l'histoire humaine, à l'aide desquels « on » décrit, « on » explique » et au besoin « on » exploite, le type de situations de la vie dont les jeux de hasard sont des métaphores. Les sentiments d'espoir ou de crainte qui naissent de l'incertitude objective ou ressentie dans certaines situations sont la source d'un énorme fatras d'interprétations à l'aide desquelles on essaie depuis le début de l'humanité de distinguer les rôles des vertus personnelles (celles qui peuvent s'acquérir : les connaissances, l'adresse..., celles qui «nous sont données »: l'intelligence, la bonne étoile..., les soi disant « lois » communes, « jamais deux sans trois », la loi des séries, Dieu l'a voulu, le destin ... les indices les signes prémonitoires...
Chaque question sans réponse, chaque espoir déçu est l'occasion d'une exploitation et de la création d'une culture « appropriée ». C'est très péniblement que la science se glisse dans cette tunique. Ces « vestiges culturels » sont toujours actifs et les obstacles épistémologiques qui ont ponctué la découverte des probabilités aussi.
Retenons qu'il ne faut pas confondre une pratique ordinaire du hasard avec «la rhétorique du hasard ».

3.5 Quelques résultats (sur les situations fondamentales et sur les comparaisons de processus)

Au début des années 70, nous avions mis à l'étude l'enseignement de toutes les branches des mathématiques de la scolarité obligatoire : logique, dénombrements, arithmétique, mesures, géométrie, algèbre.
Pour chacune nous cherchions une ou des situations fondamentales, certaines capables de modéliser toutes les circonstances de l'emploi d'une connaissance par le jeu de leurs variables, ou d'autres capables de provoquer un processus génétique qui les construise.
Au moment où nous avons entrepris les recherches sur l'enseignement des probabilités et des statistiques, nous avons mis en chantier un enseignement expérimental des rationnels et des décimaux. Les deux projets mettaient à l'épreuve deux modes opposés d'articulation des situations qui formaient ce que nous appelons la genèse d'un concept mathématique.
3.5.1. *Articulation déductive*
Pour l'enseignement des décimaux, les situations étaient articulées suivant l'ordre d'un exposé de mathématiques standard des connaissances qu'elles enseignaient. On pouvait distinguer derrière une présentation accessible pour les élèves, les étapes classiques de la présentation de la structure de Q^+ : équivalence de couples, passage au quotient, groupe, groupe linéaire, isomorphisme et homogénéisation. Mais évidemment, les fractions étaient des mesures avec leurs opérations. Leur ordre menait à la topologie de Q^+ et à son approche par le filtre décimal qui conduisait aux décimaux. Les fractions étaient ensuite des applications linéaires (des similitudes) avec leur composition, et l'homogénéisation du groupe multiplicatif avec son dual achevait le processus. Bien sûr aucun de ces termes de mathématiques « abstraites » n'était prononcé avec les élèves. Chacune de ces parties constituait une genèse,

à partir d'une situation qui provoquait l'apparition presque spontanée des connaissances voulues. Mais la plupart ces situations étaient ordonnées conformément à l'organisation mathématique d'un exposé. Elles devaient donc être proposées par le professeur, un peu comme dans la maïeutique de Socrate (les questions à son esclave), dans le dialogue du Menon. Mais les réponses réclamaient ici beaucoup plus d'activité de la part des enfants

3.5.2. *Articulation poïétique*

Au contraire, avec le processus choisi pour les statistiques et les probabilités, nous avons tenté d'articuler les leçons par *les questions que chacune soulevait* plutôt que par *l'organisation logique de connaissances* qu'elle rendait nécessaires. Ainsi chaque situation appelle la suivante, grâce à des propriétés que nous qualifions aujourd'hui de *poïétiques*. Les activités s'articulent suivant une logique locale qui n'est pas seulement celle qui organise le discours de conclusion. Le professeur reste sur une position presque immuable, et ce sont les élèves qui paraissent inventer les concepts et les moyens successivement mis en œuvre, pour des raisons qui peuvent être faibles, hasardeuses mais opportunes et intelligibles. Un tel processus possède des qualités didactiques intéressantes, et il se rapproche beaucoup des modes de production effectifs des mathématiques (mais non pas proches des processus historiques ni des organisations déductives). Nous voulions vérifier qu'un tel processus était réalisable, l'étudier et le comparer à l'autre. Il apparaîtra par la suite clairement qu'il est indispensable de faire réorganiser et fixer les connaissances ainsi envisagées par les élèves dans un processus d'*institutionnalisation*

3.5.3. *Le processus étudié, et ses prolongements possibles*

Dans ce processus, nous avons inversé l'ordre classique, fait construire empiriquement un équivalent épistémologique du théorème des grands nombres et introduit la notion de fréquence théorique avant de présenter un espace mesurable et de calculer avec une mesure à condition d'échelle. L'expérimentation a permis de montrer que les élèves de 11 ans pouvaient « apprendre » par ces moyens les bases de l'analyse inférentielle et du calcul des fréquences théoriques sans qu'il soit nécessaire de mobiliser la rhétorique du hasard dont nous savions qu'elle égare les élèves dans des obstacles difficiles à contourner.

Le travail qui reste alors est proprement mathématique. Il s'agit de montrer la consistance de ces « intuitions » empiriques.

Pour cela nous aurions pu suivre au collège le plan de Kolmogorov : Si dans UNE expérience isolée, on attribue comme mesure de probabilité les « fréquences théoriques » basées sur l'équiprobabilité des évènements élémentaires, et si on réplique cette expérience sous des conditions d'indépendance, la fréquence observée tend en probabilité vers la fréquence théorique. Mais quelle raison y aurait-il d'attribuer précisément cette valeur limite au cours d'une expérience unique ?

Mais une autre voie, techniquement plus complexe mais intellectuellement plus satisfaisante pourrait consister à montrer que, si on attribue aux évènements une probabilité quelconque, et si on corrige après chaque nouvelle expérience les probabilités attribuées aux évènements grâce au théorème de Bayes, les valeurs obtenues convergent en probabilité vers les valeurs théoriques… Si les conditions de l'expérience - distribution de probabilités et indépendance des expériences successives - sont bien celles qui sont supposées, il y a évidement un certain intérêt à attribuer directement les valeurs proposées par des modèles plausibles. Le point de vue objectiviste peut alors prévaloir sur l'usage du modèle subjectiviste, plus suspicieux et plus lourd.

Bien que les élèves se soient posés beaucoup de questions sur ce que leurs tentatives allaient leur apprendre, la pensée probabiliste semble avoir été complètement absente de ce curriculum, du moins comme objet d'enseignement et même comme initiation. D'autres expériences ont montré que si les élèves apprennent inconsciemment, grâce à des stratégies que l'on ne peut représenter qu'avec des modèles stochastiques, s'ils ont une sensibilité certaine aux variations du probable, leurs intuitions correctes sont très vite limitées. L'incertitude au sujet de ce qui va arriver, et l'attribution des responsabilités dans ce qui est advenu sont liées. Ces spéculations sont l'objet d'innombrables approches empêtrées dans un impossible partage théorique entre les rôles de l'adresse, de la chance et du hasard dans ce qui advient par l'action des hommes ou des Dieux. Elles sont portées par des intérêts divergents et souvent occultes. Les conceptions les plus contradictoires se glissent de façons si diverses par le biais du langage et de la culture qu'il n'est pas raisonnable de croire qu'on peut combattre les plus néfastes avec les quelques éléments de rationalité et les quelques techniques que l'on peut enseigner à l école et au collège.

Nous avons montré qu'il était possible de commencer par enseigner d'abord un peu du langage de base et la philosophie de la Statistique, afin d'appuyer *convenablement* dès que possible les mathématiques des probabilités[9].

Cela ne signifie pas qu'on doive retarder beaucoup au point de les séparer, l'enseignement des connaissances et celle des savoirs qui les soutiennent.

Nous ne pouvons pas dans le cadre de cet article détailler tous les résultats conditionnels ou méthodologiques qui nous ont permis d'avancer dans la construction des bases de la Didactique scientifique et expérimentale.

4 Conclusions

Il y a plusieurs millénaires que l'on essaie de prévoir l'avenir (et que l'on exploite l'impossibilité de le faire) en interprétant le passé et ses statistiques. Notre culture est chargée des traces de ces efforts et des résidus de leurs échecs. Il y a très peu de temps que ces deux champs sont devenus des sciences et des objets de théories mathématiques. Le travail spontané de transposition didactique est lent, chaotique et il procure un accès assez sélectif aux connaissances. Les connaissances de statistique doivent être vite et mieux diffusées. Les solutions à ce problème didactique sont actuellement recherchées dans des sciences qui apportent des renseignements intéressants mais très indirects comme la psychologie ou les neurosciences et qui ne prennent pas le processus spécifique de la création ou de la recréation d'une connaissance précise comme objet d'études théoriques et expérimentales. On peut espérer que la Didactique, en évitant les inférences douteuses auxquelles ces approches latérales nous condamnent, contribuera à améliorer la diffusion de la statistique.

Références

Brousseau, G., N. Brousseau et V. WARFIELD, (2002), An experiment on the teaching of statistics and probability, *Journal of Mathematical Behavior*, 20:363-441

Régnier, J-C. A propos de la formation en statistique: approches praxéologiques et épistémologiques de questions du champ de la didactique de la statistique. *Revue du centre de recherches en Education Université de Saint Etienne*, 22-23 :157-201 (2002).

Cohen J., *Hasard, Adresse et Chance, la psychologie du pari et du jeu*, Presse Universitaires de France, 1963.

[9] Dans la même ligne nous avons montré qu'il est déraisonnable de vouloir enseigner précocement la *géométrie*, avant - et surtout à la place de l'*espace* – un objet qu'elle étudie d'un point de vue très particulier. Nous avons montré les inconvénients de commencer l'enseignement des nombres en les embarrassant avec des symboles algébriques inutiles. Il est évident qu'il faut connaître suffisamment au moins une langue vernaculaire avant de comprendre une grammaire quelle qu'elle soit.

Summary

First, the text evokes 31 lessons of Statistics and Probabilities, taught in 4 classes of 5th primary, between 1973 and 1974. This curriculum shows possibility of learning probability theory only after having understood its relationship with the law of the great numbers and the principle of statistical tests, and thus how to avoid the mobilization of the rhetoric of the chance, premature study of plays, and attention limited on stakes of single experiments. The comments present some of concepts and methods of studies - theoretical and experimental - introduced by the new Didactic of Mathematic. Scientist and non prescriptive, it considers first the nature of knowledge to learn, the specific conditions of their use and understanding, deducing of it designs of the didactic situation, using contributions of other sciences only after. Thus this article shows the specific help that this science can bring to diffusion and teaching of Statistics.