# Division euclidienne aux Cours Elémentaire et Cours Moyen

*par G. BROUSSEAU*

## *1 — BUTS DE LA SERIE DE LECONS*

Nous voulons que les enfants élaborent progressivement un algorithme de la division euclidienne grâce à une série de réflexions et de découvertes, suivant le processus de mathématisation que nous utilisons habituellement.(1)

Ces découvertes doivent surgir à l'occasion de jeux de stratégie dans lesquels elles sont utiles : "la course à n".

Elles doivent être formulées et utilisées comme des théorèmes au cours d'un "jeu de la découverte" permanent.

Nous allons exposer en détail l'utilisation pédagogique de ces deux jeux.

La reconnaissance de situations *isomorphes* dans lesquelles l'algorithme élaboré est utilisable — ce que les maîtres appellent le

(1) Voir : "Processus de Mathématisation" dans le cinquième chapitre.

sens de la division — ne sera pas évoquée ici, mais elle doit évidemment être étudiée.

Les jeux ne supposent aucune technique mathématique préalable sinon celles du C.P. sur les naturels et sur l'addition.

*2 — JEU DE LA COURSE A n*

*Règle du jeu*

Soit n et p deux naturels donnés. p est plus petit que n.

Deux adversaires, $A_1$ et $A_2$, sont en présence.

$A_1$ dit un naturel inférieur à p, soit $\alpha_1$.

$A_2$ dit un naturel $\alpha_2$ obtenu en ajoutant à $\alpha_1$ un naturel inférieur à p ;

$A_1$ dit un naturel $\alpha_3$ obtenu en ajoutant à $\alpha_2$ un naturel inférieur à p ;

etc...

Celui des deux adversaires qui peut dire n est déclaré gagnant.

*3 — 1ère LECON*

n = 20 ; p = 3, course à 20

*1ère Phase : Compréhension de la règle du jeu* (groupes de deux).

On pourra présenter ce jeu de deux manières :

*Méthode visuelle :* On étale 20 allumettes. Les adversaires prennent à tour de rôle *une* ou *deux* allumettes, au choix. Celui qui peut ramasser le dernier paquet d'allumettes, ou la dernière allumette, a gagné.

*Méthode orale :* On suit la règle du jeu de la course à n exposée ci-dessus : chaque adversaire ajoute 1 ou 2 au naturel énoncé précédemment. Celui qui dit 20 a gagné.

On peut utiliser l'une ou l'autre méthode, ou les deux successivement, au choix. Si on utilise les deux, il importe que les enfants découvrent l'isomorphisme entre les deux jeux. Dans tous les cas, on fera écrire les parties faites, de manière à pouvoir procéder ensuite à des comparaisons, dont les enfants pourront déduire des découvertes.

*2ème Phase : Adoption d'une découverte*

*4 — OBSERVATION DE LA CLASSE :* Classe de Mme Giverso ($CE_1$; $CE_2$)

*Méthode de présentation du jeu*

La méthode orale a été choisie. L'institutrice a expliqué qu'il fallait ajouter un naturel inférieur à 3, c'est-à-dire 1 ou 2, au naturel énoncé précédemment par l'adversaire.

*Difficulté de départ :* Un certain nombre d'enfants écrivaient des suites telles que celles-ci : 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1...

*Jeu de la découverte :* Après un certain nombre de parties, les enfants ayant gagné au moins quatre fois ont essayé d'expliquer comment il fallait s'y prendre.

Les recettes suivantes ont été données :

(1) "j'ajoute toujours 2, et je gagne"

(2) "Celle qui commence la première gagne"
"celle qui commence la première perd"

(3) "Ca n'a pas d'importance par quoi on commence ; c'est important de partir de 16 ; l'autre a dit 16 ; je ne veux pas qu'elle gagne, alors je dis 17 ; alors, elle dira 18 ou 19 et je pourrai dire 20".

On assiste alors à une discussion entre les auteurs des idées (1) et (3) ; la première est convaincue de son erreur comme suit, par la troisième : "Si je dis 16, en ajoutant 2 tu diras 18, et tu perdras". Mais elle émet la réserve suivante : "si je mets 18 et si ma camarade ne comprend pas, elle dit 19 et je gagne".

On assiste ici à la naissance de l'idée qu'on ne peut établir une loi que si l'adversaire sait jouer. Les idées numéro (2) ont été immédiatement rejetées par l'ensemble de la classe.

*Vérification des idées (1) et (3) :* On reprend le jeu et on est amené à découvrir le théorème : celle qui dit 17 gagne.

Les enfants reprennent ensuite le jeu à 20. Puis on fait une deuxième pause pour juger des deux énoncés suivants :

(4) "*Il ne faut jamais dire 16*"

"Si, rétorque une enfant ; j'ai mis 16 ; l'autre a mis 18 et j'ai mis 20".

Une élève lui répond : "l'autre aurait pu mettre 17 et tu aurais perdu".

C'est-à-dire que si l'autre sait jouer, alors 16 est perdant.

(5) "Je compte de 2 en 2 jusqu'à 10, puis je dis 11, 14, 17" ; l'auteur est invité à venir écrire la suite des naturels au tableau. Elle joue en deuxième position (naturels soulignés).

$$2 - \underline{4} - 6 - \underline{8} - 10 - \underline{11} - 13 - \underline{14} - 15 - \underline{17}$$

Comentaire des élèves :

L'auteur : "Si mon amie met 13, je mets 14, comme ça j'arrive à 17".

Une deuxième enfant : "celui qui met 14, ça lui porte bonheur".

Une troisième : "14 est gagnant".

## 5 — *REMARQUES SUR LE PROCESSUS DE MATHEMATISATION*

Le théorème "celui qui dit 17, s'il sait jouer, ne peut pas perdre" est souvent découvert suivant le processus de mathématisation déjà évoqué.

a) — *Action.* Au cours de l'action, après une phase où l'enfant répond à "17" par "18", ou par "19", et constate qu'il perd, vient une phase où à 17 l'enfant ne répond pas. Ceci marque qu'il se reconnaît perdant dans tous les cas ; il ne se résigne pas à dire l'un des deux naturels — perdants — qu'il a le droit d'annoncer. Mais le théorème est implicite en ce sens qu'il est effectivement utilisé, dans les bonnes situations, pour effectuer des déductions correctes, mais il n'est pas formulé.

b) — *Communication.* Il faut une motivation d'un autre type pour obtenir l'explicitation du théorème : par exemple la communication, dans le jeu de la course à n, entre membres d'une même équipe :

L'autre équipe a dit 15 ; "dis 17, dis 17 et on a gagné"
(si nous disons 17 nous avons gagné).

Mais cette formulation, dans le jeu de la recherche d'une stratégie, est généralement reçue par le destinataire comme une simple information, une proposition, parmi d'autres, elle peut être vraie ou fausse.

c) — *Controverse.* Il faut encore une autre motivation pour que cette formulation prenne une valeur de théorème. Ici le maître propose le jeu de la découverte : "Qui peut dire une proposition certainement vraie ? "... Si les élèves sont peu habitués, le maître donne l'exemple.

— "Celui qui dit 20 gagne"

— C'est vrai, mais c'est la règle...

— "A vous"

Ici la phrase émise par l'enfant sera une assertion : il s'engage sur la véracité de ce qu'il dit.

— "Celui qui dit 17 gagne" *et ce n'est pas la constatation statistique "chaque fois que quelqu'un peut dire 17 il gagne" qui doit convaincre*, c'est la preuve que, si le premier dit 17, quoi que fasse l'autre, le premier peut gagner.

Cette qualité de preuve ne surgira pas de l'action, ni de l'information.

## *6 — 2ème LECON. REITERATION — RECURRENCE*

### *PHASE INDIVIDUELLE*

*But :* Généraliser les découvertes qui n'ont été acquises précédemment que par quelques enfants.

La classe est divisée en deux équipes : les bleus et les rouges

Chaque équipe comportera trois conseillers et neuf concurrents. Les conseillers par exemple sont les trois élèves qui gagnent le plus de courses à 20.

Les exécutants jouent ensuite individuellement à la course à 20 (bleus contre rouges). Les perdants peuvent se faire conseiller par des membres de leur équipe. Inversement, les exécutants peuvent aussi faire part aux conseillers de découvertes qu'ils pensent avoir faites en jouant.

On constate qu'une bonne partie des élèves joue la suite 8 — 11 — 14 — 17 — 20.

### *PHASE COLLECTIVE*

On demande qui sait comment il faut faire pour gagner.

*1ère proposition :*

— "Si on dit 14, on peut dire 17 et on gagne".

Objection : "Je ne veux pas le croire, car j'ai mis 14 et l'autre a gagné".

Pour preuve, l'élève montre le jeu écrit dont elle parle. On l'écrit au tableau : 14 — 15 — 16

Commentaire de la classe : elle a perdu parce qu'elle aurait dû mettre 17 qui est gagnant, au lieu de 16 qui est perdant.

*Autres propositions :*

— On compte de deux en deux jusqu'à 8, puis on dit 11 — 14 — 17 — 20

— On met 2 — 5 — 8 — 11 — 14 — 17 — 20 ;

— Si l'adversaire dit 2, on dit 4, comme ça on peut arriver à 8 ;

— Pour gagner, il vaut mieux commencer par 1 ;

— Si on arrive à 10, on a gagné ;

— Si on commence par deux, on gagne.

*Conclusion :* L'ensemble de la classe n'arrive pas à décider lesquelles de ces propositions donnent des méthodes sûres pour gagner. Au cours d'une troisième leçon, on devra donc organiser à nouveau le même jeu, pour en arriver à la découverte de l'algorithme correct.

*7 — 3ème LECON*

Les idées suivantes ont été émises et vérifiées :

— L'important est d'arriver à 5.

— Si l'autre commence par 1, je mets 2, comme ça elle ne pourra pas dire 5 ; car il y a 3 entre 2 et 5.

— Si on commence par 2, on est sûr d'arriver à 5.

*Conclusion finale :* Si on dit 2 — 5 — 8 — 11 — 14 — 17 — 20, on gagne à coup sûr. On n'a pas besoin de faire attention à ce que dit l'autre.

*8 —* Cette constatation achève une première étape pour l'étude de la division.

La deuxième étape va consister à mettre en évidence les rôles de p, de n, surtout celui de r, le premier naturel qu'il faut jouer, et éventuellement de q, le nombre de coups joués.

La troisième aboutira à l'institution d'un algorithme pratique pour trouver r ou q quand on connaît p et n.

*9 — 2ème ETAPE :*

*n assez grand ; p choisi de façon que pour arriver à n de p en p, le nombre de sauts soit assez faible.*

*BUT DE LA LECON :*

Transport des algorithmes découverts dans le cas précédent. Découverte du rôle de p.

Remarque : On peut donner la règle du jeu de deux façons différentes :

1°) — Ajouter à chaque coup un naturel inférieur à p ;

2°) — Ajouter un naturel au plus égal à p — 1.

La deuxième manière introduit une difficulté supplémentaire : on n'attire pas l'attention des enfants sur le rôle joué par p.

Si une erreur est faite, les enfants doivent en chercher la cause qui peut être :

— une erreur de calcul ;
— une erreur dans l'algorithme utilisé ;
— une erreur sur la valeur de p.

Il semble qu'une telle recherche doive introduire une certaine confusion. C'est pourquoi il paraît souhaitable d'éliminer certaines causes d'erreur :

— l'utilisation de la machine à additionner évitera les erreurs de calcul ;

— la formulation de la règle du jeu qui donne p évitera des erreurs sur la valeur de p ;

— on pourra faciliter la recherche de l'algorithme de diverses façons, en mettant en évidence ce qui est important dans le jeu à 20 comme dans le jeu à n.

*10 — 3ème ETAPE :*

*p fixe ; n variable* (nous prendrons ici p = 5).

*Phase collective :*

On suppose que les enfants ont compris que, dans le jeu de la course à n, il fallait trouver une "suite gagnante". On sait donc ce qu'il faut trouver. L'objet de cette leçon est d'améliorer autant que possible la *méthode de calcul.*

On espère que les enfants découvriront que, pour n fixé, non multiple de p, le premier joueur gagne s'il commence par un naturel bien déterminé, inférieur à 5, et que toutes les autres solutions sont perdantes. Au contraire, si n est multiple de 5, le premier joueur perd si le second énonce les multiples de 5.

On espère un perfectionnement de la méthode de recherche du nombre initial.

*JEU :* La classe est divisée en deux équipes. Chaque équipe comprend un centre de calcul et un groupe d'organisateurs, qui ne peuvent communiquer que par messages : les organisateurs d'une équipe rédigent les programmes des calculs à effectuer par les calculateurs de l'autre équipe.

On change n à chaque coup ; p reste fixe. On demande de trouver la suite gagnante le plus rapidement possible.

Chaque équipe peut gagner de deux manières :

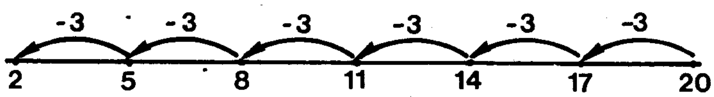
— par ses organisateurs, si leur message était correct (compris et exécuté par les calculateurs de l'autre équipe),

— par ses calculateurs, si ces derniers peuvent prouver que le message reçu était inefficace (soit erroné, soit incomplet).

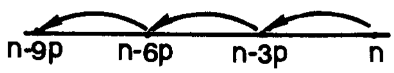
Concrétisation à l'aide d'allumettes, groupées par 3 dans le jeu à 20, par p dans le jeu à n.

Concrétisation graphique (représentant la suite des naturels à dire si on veut gagner à coup sûr).

jeu à 20




jeu à n



*Remarque :* On peut faire plusieurs exemples consécutifs. L'important est que les enfants aient trouvé une méthode pour obtenir la suite gagnante (on pourra prendre p = 5).

*OBSERVATION DE LA CLASSE :*

*1er exemple :* n = 33 ; p = 5

La classe est divisée en deux équipes, réparties en sous-groupes de trois.

On organise un concours pour trouver la manière de gagner. Le pas a été donné dans la consigne (ajouter au naturel dit par l'adversaire un naturel inférieur à 5 ; celle qui dit 33 a gagné).

*DECOUVERTES IMPORTANTES*

1°) — Très rapidement : "28 est gagnant" est découvert et adopté par la classe.

2°) — "Si 28 gagne alors 25 gagne".
Objection : 25 n'est pas bon car le suivant peut dire 28

3°) — "26 perd".
"23 gagne".

4°) — "Il faut arriver à 18, comme ça on est sûr d'arriver à 23, et on pourra dire 28".

Un seul élève donne la suite gagnante. Une comparaison collective de la course à 20 par 3 et de la course à 33 attire leur attention sur l'importance de ce qu'elles appellent "l'écart" : 3 dans la course à 20, 5 dans la course à 33. Mais la classe n'a pas encore généralisé correctement la méthode, ce qui amène l'institutrice à proposer d'autres exemples.

*2ème exemple :* n = 56 ; p = 6

Le pas n'est plus donné. La consigne est d'ajouter un naturel au plus égal à 6.

Après quelques découvertes incorrectes, vite rejetées par l'ensemble de la classe, on obtient l'énoncé suivant :

"à partir de 56, il faut toujours soustraire 6 et on est sûr de gagner".

On vérifie l'exactitude de cette découverte.

*Conclusion d'un élève :* "Quand on respecte un naturel, c'est celui-là qu'il faut toujours soustraire".

*3ème exemple :* n = 48 ; p = 7

La classe obtient très rapidement la suite gagnante dès qu'un élève a remarqué :

"pour trouver l'écart, si on a le droit d'ajouter 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, on ajoute 1 à 6. Puis on retranche toujours 7".

— Proposition de la course à n (n grand).
(On peut laisser les enfants choisir n et p dans des créneaux raisonnables ($12\ p < n < 30\ p$)), n non multiple de p.

TRAVAIL A L'AIDE DE MACHINES

I — *Introduction par le maître*

— Présentation des avantages de la machine : "elle calcule, vous n'avez plus qu'à réfléchir" (exemples d'additions, soustractions).

— Proposition de la course à n (n grand).
(On peut laisser les enfants choisir n et p dans des créneaux raisonnables ($12\ p < n < 30\ p$)).
n non multiple de p.

II — *Objectif*

Concours pour savoir ce qu'il faut faire pour trouver le premier naturel de la suite gagnante. Un enfant de chaque groupe travaille à la machine. Les autres vérifient à la main.

Le groupe gagnant est celui qui trouve le premier la méthode correcte. Une fois un naturel avancé il faut donc une vérification.

*Vérification :* Le naturel annoncé est-il le bon ?
Un représentant du groupe qui annonce ce naturel joue contre un autre élève devant toute la classe.

Le groupe est alors déclaré gagnant ou perdant.

*Conclusion :* Le maître fait exprimer le procédé suivi.

III — *Concours par groupe de quatre*

*Objectif :* trouver r le plus vite possible. 4 jeux consécutifs.
p est fixé, le maître donne successivement 4 valeurs pour n.

*Vérification :* voir ci-dessus.

IV — *Raccourcissements de procédures*

Toujours concours : n plus grand. "Chercher des astuces permettant de trouver plus vite le premier naturel de la suite gagnante". "Ce seront des découvertes".

11. *APPLICATIONS POSSIBLES*

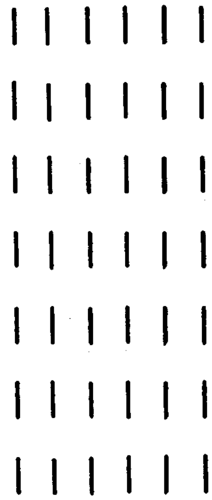
1°) *Tables de multiplication*

a) *Cas où n est multiple de p :* Une méthode rapide pour trouver la suite gagnante est de connaître la table de multiplication par p.

Ce jeu semble être une bonne motivation pour apprendre ou pour réviser la table de multiplication.

S'il s'agit de les apprendre, il peut être utile de concrétiser le jeu au moyen d'allumettes :

*Exemple :* n = 42 ; p = 6



On fait des rangées de 6 allumettes. On constate qu'on peut les ranger dans un tableau de 7 lignes et 6 colonnes.

Donc : $42 = 7 \times 6$

Pour gagner, il faut ramasser toutes les allumettes qui restent dans une ligne entamée. Quand une ligne a disparu, le nombre d'allumettes qui reste correspond au naturel qui précède 42 dans la suite gagnante.

C'est 36. C'est aussi $6 \times 6$.

b) *Cas où n n'est pas multiple de p*

La disposition des allumettes en rangées de p concrétise le fait que, pour trouver la suite gagnante, on peut savoir par quel naturel commencer en retranchant de n le plus grand multiple de p possible (en substance, les enfants cherchent le reste de la division de n par p).

2º) *Caractères de divisibilité (on prendra n multiple de p).*

*Exemples :*

a) p = 25

la suite gagnante se trouve plus aisément si on remarque que les multiples de 25 sont les naturels qui se terminent par 00, 25, 50, 75.

b) p = 9

les multiples de 9 sont les naturels dont la somme des chiffres est multiple de 9.

c) p = 4

les multiples de 4 sont les naturels dont les deux derniers chiffres forment un nombre multiple de 4.

Pour amener la découverte de ces propriétés, on peut poser des questions comme celle-ci :

p = 9 ; n = 900

32 fait-il partie de la suite gagnante ?
puis 36, puis 90, puis 279, puis 301, puis 132.

Pour les petits naturels, l'enfant peut trouver aisément grâce aux tables. Pour les grands naturels, on peut faire un concours de vitesse qui incitera les enfants à trouver un "truc" pour pouvoir répondre rapidement.

12. *4ème ETAPE : n et p grands*

Même schéma que dans la troisième leçon.

La recherche de la suite gagnante se fera à la machine à calculer.

13. *5ème ETAPE : quotient de n par p*

n et p étant donnés, les enfants doivent découvrir combien de naturels le gagnant a écrit s'il a toujours bien joué. Cette leçon peut se faire d'abord à la main, puis à la machine.

14. *6ème ETAPE : problèmes de division*

Trouver des problèmes où les enfants peuvent reconnaître le schéma de la course à n et savoir qu'il s'agit d'un problème de division.

15. *REMARQUES PEDAGOGIQUES ET PSYCHOLOGIQUES*

Pour tous les enfants — après l'explicitation du premier théorème "qui dit 17 peut gagner" — la difficulté consiste à réitérer le raisonnement pour trouver les naturels 14, 11... à dire pour gagner contre toute défense. Les premiers pas faits, très peu d'enfants de 7 - 9 ans arrivent à réitérer d'eux-mêmes et à obtenir 8, puis 5, puis 2. Nous disons que ceux-ci dominent le processus de la récurrence finie. La plupart au contraire éprouvent de plus en plus de résistance à réitérer le raisonnement : d'abord ils savent de moins en moins bien répéter le démonstration "si je mets 8, il ne peut mettre que 9 ou 10; s'il met 9, j'ajoute 2 et je dis 11, s'il met 10 j'ajoute 1 et je dis 11 aussi, si je mets 11 je peux mettre 14, puis 17, puis 20".

Comme si cette suite de propositions perdait de son sens par l'effet d'une certaine fatigue du cerveau ou comme si la mémoire s'embrouillait à vouloir se substituer à la compréhension de la situation : certains enfants au contraire se conduisent comme si le raisonnement luttait contre un autre modèle :

"à la fin il faut choisir le bon naturel mais avant 11 ou avant 8 on peut faire ce qu'on veut... Avant 5 ça n'a pas d'importance tout de même ! ". Ces enfants ne dominent pas le processus de récurrence finie.

Enfin les enfants sont de moins en moins sûrs de la véracité des théorèmes énoncés et des conclusions obtenues. Non seulement ceux-ci ne dominent pas le processus de récurrence, mais encore la notion même de déduction leur échappe encore : la vérité démontrée n'a pas pour eux la même valeur que la vérité constatée et dépend de la longueur du raisonnement.

Je ne suis pas sûr qu'il ne s'agisse que d'un retard dans le développement de la pensée logique de l'enfant, et qu'il suffise d'attendre que la nature fasse son oeuvre, car beaucoup d'adultes éprouvent le même genre de difficultés. Il est toutefois évident que les explications du maître sont impuissantes à corriger ce défaut : une déduction ne peut convaincre qu'un interlocuteur capable de déduire. Il serait au contraire extrêmement dangereux que l'enfant accepte la déduction par sympathie pour le maître, par bonne volonté, à la suite d'une comparaison adroite, par habitude, ou à la suite d'un apprentissage. Il faudra faire jouer à nouveau l'enfant contre un autre qui connaît la suite gagnante, il pourra obtenir alors la conviction que le théorème est vrai, sémantiquement vrai.

Dans les autres exemples de courses le même raisonnement sera employé, de nouvelles occasions seront données à l'enfant de comparer la valeur des conclusions obtenues par des déductions avec celles qu'on peut obtenir par la pratique, le sens,...

Il faudra toutefois aussi qu'il apprenne à distinguer les déductions logiques des conjectures et associations d'idées, pour lesquelles on emploie les mêmes mots du langage courant (donc, parce que, car, alors...).

L'étude traditionnelle de la division ne s'arrête évidemment pas à ces difficultés car elle vise la connaissance de l'algorithme, — ce qui n'exige pas la compréhension — ; et le sens des occasions où il y a lieu d'employer l'algorithme — appelé sens de la division —. Ce choix est peut être criticable mais il est possible que nous devions conserver provisoirement pour l'acquisition de l'algorithme un apprentissage au sens strict.

La course à n et les leçons qui la suivent tendent à remplacer toutes les soi-disant explications et justifications, qui alourdissent, sans le rendre plus efficace, l'apprentissage de la division.

Ces explications consistent à résoudre l'algorithme en une suite d'évidences, mais évident veut dire ici familier, évident au maître, sémantiquement évident et non pas logiquement évident. L'inefficacité voire la nocivité de ces fausses explications est facile à démontrer.