QUI DIRA VINGT ?

Cette émission a été enregistrée au mois de janvier 1973 dans un C. M. 1 de vingt-cinq **élèves de** Talence (Gironde)*.

Le but de cette leçon était d'introduire une révision de la division (dans des circonstances où le • sens de l'opération n'était pas conforme aux apprentis-sages antérieurs) et de favoriser la découverte et la démonstration, par les enfants, d'une suite de théorèmes.

1. Le jeu.

Il s'agit, pour chacun des adversaires, de réussir à dire " 20 en ajoutant 1 ou 2 au nombre dit par l'autre ; l'un commence, dit 1 ou 2 (exemple : 1), l'autre continue; ajoute 1 ou 2 à ce nombre (2 par exemple) et dit " 3 " ; à son tour le premier ajoute 1 ou 2 (1 par exemple), il dit 4, etc.

II. Déroulement de la leçon.

1. La maîtresse *explique* la règle du jeu et commence une partie au tableau contre un enfant, puis cède sa place à un autre enfant.

2. Jeu *à 1* contre *1.* Les enfants jouent par groupes de 2, plusieurs parties. Ils marquent sur une feuille de part et d'autre d'un trait, les nombres choisis. Cette phase doit comprendre environ 4 parties et durer au plus dix minutes).

Remarque : au cours de cette phase, les enfants appliquent la règle.

Certains, sans en avoir bien conscience, se rendent compte que répondre au hasard n'est pas la meilleure stratégie : ils éprouvent les contraintes du jeu au niveau de l'action et des décisions immédiates

et se donnent une suite d'exemples. Certains découvrent implicitement un avantage à dire 17.

3. Jeu *à 1* équipe *contre 1 équipe* (6 à 8 parties, 15 à 20 mn).

Les enfants sont partagés en deux équipes. Dans chacune, la maîtresse désigne un champion pour chaque partie en l'appelant par une lettre, comme au jeu du béret. Chaque élève pourra être appelé à défendre son équipe au tableau dans une partie que tout le monde verra ; s'il gagne, il apportera un point à son équipe.

Les enfants se rendent très vite compte de la nécessité de se concerter et de discuter à l'intérieur de chaque équipe pour se communiquer des stratégies. Les premières apparaissent dès la première partie : " il faut dire 17 "...

(*) Il s'agit de l'école Jules-Michelet, École **d'observation de** l'Institut de recherche sur l'enseignement **des mathématiques de Bordeaux.**

4. leu de la découverte (20 à 25 mn).

La maîtresse demande alors aux enfants d'énoncer des propositions. Ce sont les découvertes qu'ils ont faites et qui leur ont permis, de gagner. Ces découvertes énoncées, alternativement par l'équipe A puis par l'équipe B, sont inscrites sur le tableau par la maîtresse (suivant la disposition ci-dessous) et vérifiées aussitôt par l'autre équipe. A ce moment-là, elles seront acceptées ou rejetées. Si elles sont acceptées, elles seront conservées sur le tableau.

Découvertes proposées		Score	
Equipe B	Equipe A	A	B

Pour chaque proposition énoncée, l'enfant devra venir prouver à un adversaire qu'elle est vraie ou fausse, soit en jouant, soit par une preuve intellectuelle.

Pour donner plus d'intérêt au jeu, on peut adopter la règle suivante :

— Toute proposition énoncée et acceptée par la classe vaut 1 point ;

— Toute proposition prouvée fausse donne 3 points à l'équipe qui a prouvé qu'elle l'était.

Remarque : si le jeu de la découverte stagne (les enfants ne trouvent plus de propositions à énoncer), on rejoue à *qui dira vingt ?*

Observations : très vite, les propositions ont été faites :

— Si j'écris 17, je suis sûr de gagner ;

— Si j'écris 14, je suis sûr aussi de gagner.

Puis les découvertes ont été beaucoup moins importantes :

Exemple : si je dis 16, l'autre peut dire 17 et il gagne.

Si je dis 18, je perds, etc.

Alors, on a arrêté le jeu de la découverte et repris celui du béret. Au bout de deux parties, les enfants ont découvert qu'en disant 11, puis 14, puis 17, ils gagnaient. Discussion très serrée à propos de 5 : un enfant qui avait écrit 5 eu cours du premier jeu à 2, avait perdu. Un autre enfant lui montre que s'il sait jouer, il doit gagner en disant 5. S'il ne sait pas jouer, il est évident qu'il peut perdre. Ces preuves sont toujours apportées en rejouant (à partir de 5 par exemple). Les enfants, au bout d'une heure, ont découvert que, pour gagner, il fallait dire 2, 5, 8, 11, 14, 17.

III. Remarques.

1. Les stratégies et découvertes sont utilisées implicitement avant d'être formulées, pour répondre aux nécessités d'une action en cours. Exemple : la suite : 5, 8, 11, 14, 17 apparaît avec une fréquence élevée bien avant que les élèves n'aient formulé la nécessité de « jouer 14

2. La formulation intervient après la conviction et avant la preuve, pour répondre aux nécessités d'une action requérant sa communication. Plusieurs formulations précèdent la *preuve* et s'appuient à la fois sur l'efficacité et sur la rationalité.

3. Les théorèmes établis ne servent pas tout d'abord à s'étayer les uns les autres, leur articulation n'est découverte qu'à la fin. Le même théorème est redécouvert plusieurs fois, même par un même enfant.

4. Ce *sont les* enfants qui perdent une partie qui veulent le plus expliquer leur échec, ou les conditions de la réussite.

5. La *démonstration* atteint sa valeur mathématique lorsqu'elle a été éprouvée comme moyen de convaincre et comme obligation d'être convaincu. Ce qui ne peut se faire qu'entre « égaux", entre enfants. Le maître doit renvoyer les questions aux équipes.

6. *L'explication* doit être nécessaire, techniquement et sociologiquement ; si le résultat est évident ou — comme ici au début — accepté par tous, on n'obtient qu'une recette.

IV. Suite de la leçon.

1 ° Qui *dira* 25 ? 29 ? 30 ? (sans changer le pas).

a) Qui *dira 25 ?*

Les enfants reprennent le jeu 2 par 2 (comme **pour** la course à 20) en notant chaque fois, dans 2 colonnes, les nombres qu'ils énoncent.

Cinq minutes après le commencement de la **partie** à 2, la majorité des enfants a demandé que l'on arrête le jeu à 2 parce qu'ils avaient trouvé « le truc

Un élève a énoncé :

« *il suffit de* mettre *1* ***et après, d'aller de 3 en 3***

Après une phase de vérification, toute la classe e accepté la proposition.

b) *Qui* ***dira 29 ?***

On a procédé de la **même manière** que pour la course à **25.**

Après deux parties de jeu à 2, un élève a énoncé : au lieu de commencer *par 1, il faut* commencer par 2 et *aller de 3* en 3

Vérification par la classe. Proposition acceptée. c)

Qui *dira 30 ?*

Même déroulement que précédemment. Les enfants ont trouvé très vite qu'il fallait laisser commencer l'adversaire pour gagner et mettre ensuite 3.

Remarque : la liste des nombres qu'il faut dire dans les courses à 20, à 25, à 29 pour gagner, a été laissée sur le tableau.

On avait alors :

Qui dira 20 : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 ;
Qui *dira 25 :* 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 ; *Qui dira 29 :* 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 ; Qui dira 30 : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, **24,** 27, 30.

Les enfants ont remarqué que la liste des nombres de la course à 20 était la même que celle de la course à 29. Ils ont déduit aussitôt que ce serait la même pour la course à 26, 23, 20, etc.

2° Même jeu : course à 30, 35, 40, etc. (en changeant le pas).

Il s'agit de trouver avant l'adversaire par quel nombre il faut commencer. Les enfants le cherchent par soustractions successives du • pas •. Ainsi, le jeu " *qui dira 428 ?* avec un pas de 27 doit être commencé par 23 (on soustrait pour cela 15 fois 27 de 428). 15 est le quotient et 23 le reste de la division de 428 par 27.

C'est en raccourcissant cette longue suite de soustractions grâce à diverses découvertes (en particulier la possibilité de soustraire d'un coup 10, 100, 1 000 fois le pas) que l'enfant réinvente la division.

V. La division - Disposition des calculs.

Soit à effectuer la division 961 093:563. Le dividende est disposé d'abord comme l'indique la figure 1 (sous le poteau de rugby).

563	961093

(fig. 1)

Le quotient sera disposé entre les poteaux au-dessus de la barre, les restes successifs sous le dividende ; les multiplications auxiliaires se feront à gauche des poteaux. La partie droite sera utilisée pour les divisions dans les décimaux. On soustrait du dividende un multiple du diviseur aussi grand que possible et • le plus à gauche possible (mais ce n'est pas obligatoire au début de l'apprentissage). Le résultat, reste intermédiaire, s'écrit au-dessous du dividende (fig. 2).

	1
563	961093 563000
	398093

(fig. 2)

Le chiffre du quotient est placé au-dessus du chiffre des unités du multiple que l'on soustrait (ici 1 au-dessous du 3, unité de mille). On peut voir dès maintenant que le quotient aura **4** chiffres.

On tente de la même manière de trouver un multiple de 100 et du diviseur, inférieur au premier reste intermédiaire, le plus grand si possible. On le calcule à gauche en s'y prenant à plusieurs fois s'il le faut (fig. 3).

	17
563 563 × 6 = 3 378 563 × 7 = 3 941 563 × 8 = 4 504	961093 563000
	398093 394100
	003993

Le chiffre correspondant du quotient, 7, se place au-dessus du chiffre des unités de 3 941.

Et ainsi de suite...

Le même produit partiel peut servir plusieurs fois (fig. **4).**

	177
563 563 × 6 = 3 378 563 × 7 = 3 941 563 × 8 = 4 504	961093 563000
	398093 394100
	003993 3941
	000052

On met un zéro dans les colonnes du quotient où aucun chiffre n'apparaît.

Le quotient est-1 707 et le reste 52.

Si on ne trouve pas du premier coup le plus grand multiple, on peut trouver des quotients partiels dont on fait la somme (fig. 5).

563
$563 \times 6 = 3\,378$

1707
1 1 16 6
961093 563000
398093 337800
060293 56300
03993 3378
0615 563
052

Cette disposition présente certains avantages :

— Les calculs intermédiaires figurent explicitement et la détection des erreurs est plus facile ;

— Les produits partiels ne sont calculés qu'une fois ;

— Les zéros intercalés causent moins d'erreurs ;

— Le nombre de chiffres du quotient est inscrit dans la disposition dès le départ ;

— Les tâtonnements légitimes ne donnent lieu à aucune rature traumatisante ;

– L'apprentissage est plus souple : en effet, la technique optimum peut être obtenue progressive-ment sans mécanisation.

Une disposition analogue est adoptée dans d'autres pays européens (les Pays-Bas, par exemple).

On trouvera dans la brochure éditée par l'A. P. M. E. P. (29, rue d'Ulm, 75230 Paris, Cedex 05) : Mathématique à l'école *élémentaire,* des compléments sur les processus de mathématisation et des exemples de leçons pris à d'autres niveaux..

Fiche établie par Guy Brousseau.