

## **PREMIÈRES DECOUVERTES DES LOIS DU HASARD A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE**

### **I. - INTRODUCTION**

Cette émission a été enregistrée en mai 1975, dans un cours moyen 2e année de 25 élèves. les deux séquences de classe enregistrées font partie d'une suite de 20 leçons d'éveil à caractère mathématique.

Dans ces leçons les enfants se familiarisent avec les lois du hasard et commencent à les mathématiser, en utilisant une grande partie des acquisitions de l'année.

### **II. - LA SITUATION FONDAMENTALE**

Les enfants ont pris 6 bouteille opaques et que rien ne distingue les unes des autres. Dans chacune d'elles, ils ont mis 5 billes blanches ou noires en réalisant toutes les combinaisons différentes.

Quand on renverse ces bouteilles une seule des billes vient se loger dans le bouchon transparent et apparaît. On peut ainsi faire très vite des tirages avec remise.

Pour les enfants, le jeu consiste d'abord à choisir une bouteille et à deviner sa composition. Mais bientôt, il s'agira de mettre au point et de décrire une méthode pratique pour décider du contenu d'une bouteille nouvelle : par exemple, découvrir le contenu d'une bouteille dont on sait qu'elle contient 8 billes.

### **III. - GENERALITES**

a) Cette tâche paraît bien difficile pour des enfants de cet âge, mais elle s'éclaire au fur et à mesure qu'ils progressent dans trois directions :

- D'écrire et analyser des résultats d'expériences (tirages, suite de tirages) à l'aide de statistiques : fréquence d'apparition d'une boule noire, mode, moyenne...

Figure 1. —  
En retournant la bouteille on ne peut voir qu'une bille à la fois.



Figure 1. - En retournant la bouteille on ne peut voir qu'une bille à la fois.

- Distinguer les *événements* qui peuvent se produire dans une expérience et fabriquer un système pour prévoir leur apparition.

- Emettre des hypothèses sur le contenu d'une bouteille qu'ils observent.

L'enfant établit des liaisons convenables entre les éléments de statistiques, de probabilité, et les hypothèses qu'il conçoit. Ces *liaisons* constituent le modèle de probabiliste.

#### **b) Le processus :**

L'enfant est conduit à construire des modèles de plus en plus satisfaisants qui relient et expliquent de façon de plus en plus précise un plus grand nombre de faits.

Le processus consiste en une confrontation de ces trois sortes d'approches à travers les expériences, les prévisions et les modèles.

*Cette confrontation permet:*

Une relance constante de l'activité des enfants.

Exemple : pour expliquer des résultats statistiques, les enfants émettent une hypothèse sur le contenu de la bouteille à laquelle ils rattachent certaines prévisions qu'ils essaient de vérifier par une expérience nouvelle.

- De comprendre, que finalement ce n'est pas découvrir la composition de la bouteille qui compte mais plutôt trouver un moyen d'être convaincu qu'il s'agit de telle ou telle composition.

C'est pour cela, que passées les deux premières leçons, les enfants ne devront plus ouvrir les bouteilles pour vérifier.

Plus tard, l'enfant est amené à se préoccuper du risque qu'il prend lorsqu'il décide de telle composition. En effet, on ne peut dissocier une prévision de sa probabilité de réalisation.

#### **c) Rapports avec la formation mathématique des enfants :**

Pour valider leurs prédictions, les enfants choisissent certains outils mathématiques qui correspondent au modèle probabiliste qu'ils envisagent.

**Tout au long de cette série de leçons, les outils suivants ont été utilisés :**

- De très nombreux calculs (additions, divisions, etc...)
- Les décimaux.
- Les intervalles.
- Les représentations graphiques.
- Les fonctions linéaires : (proportionnalité)

## **IV.- RESUME DES ACTIVITES**





Figure 5. — Les enfants fabriquent une bouteille et expérimentent.

Ils font des remarques objectives : "sur 10 tirages, j'ai tiré plus de blanches que de noires".

Ils expriment des conjectures et les discutent : "sur 5 tirages, j'ai obtenu : "blanc, noir, noir, blanc, blanc", donc il y a 3 billes blanches et 2 billes noires".

"Si on a 3 blanches et 2 noires, il doit sortir 3 blanches et 2 noires quand on fera 5 tirages".

La vérification expérimentale va remettre en cause cette dernière affirmation et relancer l'intérêt de la classe. Les enfants vont proposer une autre composition, et effectuer le même raisonnement. Petit à petit, ils se rendent compte que c'est le raisonnement lui-même qui n'est pas correct.

Remarque : Certains groupes, comme l'illustre la figure 3, font des séries de 5 tirages et regardent la série qui apparaît le plus souvent.

D'autres ont l'idée de cumuler les résultats de plusieurs manipulations successives. (par exemple, la figure 4 montre un document qui n'a pas été réalisé en une seule série de tirages, mais en plusieurs) le choix de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes influe beaucoup sur le déroulement des séances à venir.

**Très vite, les enfants ont une idée précise du contenu de la bouteille, mais ne disposent pas d'un moyen pour prouver cette idée. "Il y a 3 blanches et 2 noires, mais il pourrait y avoir 4 blanches et 1 noire".**

### **Simulation** (2séances)

La discussion se poursuit lors de la 4e séance.

- 2 groupes (sur 5) cumulent leurs résultats avec ceux obtenus la veille (avec la même bouteille). Leur travail porte alors sur 300-400 tirages. Un groupe voudrait fabriquer une bouteille pour "comparer". Cette idée de simuler l'expérience avec une bouteille transparente dont on connaît la composition est acceptée par tous les autres groupes.

Dans cette bouteille, les enfants mettent la composition qu'ils pressentent comme étant celle de leur bouteille opaque, d'autres mettent la composition qu'ils croient pouvoir écarter.

Ils travaillent alors par comparaison des suites de tirages.

**Cette première séquence d'activités s'achève. Elle a permis aux enfants de prendre contact avec le hasard, d'appréhender diverses statistiques. Aucune n'a fait l'objet d'une mise au point par les maîtres, mais le rôle du nombre de tirages et l'intérêt de traiter la plus grande quantité d'informations possibles ont été perçus de façon intuitive, ainsi que la stratégie générale du test d'hypothèse : (affirmer une prévision et constater par l'expérience dans quelle mesure cette prévision peut-elle ou non être infirmée. Ce qui est infirmé est faux, mais ce qui n'est pas infirmé n'est pas forcément vrai. Cette dissymétrie est intuitivement perçue dans plusieurs cas.**

## **B. DECOUVERTE DE LA PROBABILITE**

Les enfants sont maintenant convaincus que les relations entre le contenu de la bouteille et les suites de tirages obtenus ne dépendent sans doute pas du moment de l'observation. En effet, ils cumulent les résultats, et les découpent en sous-séquences de 5 tirages.

Ceci va les conduire, pour faire des prévisions qui leur donnent satisfaction sur des plus grands nombres de tirages, à postuler la linéarité (voir ci-après).

La vérification de ces prévisions exige de grands tirages et permet de choisir celle qui apparaît la meilleure : la valeur de convergence.

Ils admettent aussi que cette valeur représente la meilleure prévision pour des petits nombres de tirages et le vérifient en considérant les séries de tirages qu'ils possèdent.

Les enfants travaillent par groupes.

### **Les prévisions (3 séances).**

La maîtresse demande aux enfants, "voici une bouteille dans laquelle il y a 3 billes blanches et 2 billes noires. Pouvez-vous prévoir sur 100 tirages ce qui peut sortir ? Vous n'écrirez ces prévisions que lorsqu'elles satisferont tout le groupe.

### **Les enfants marquent les résultats qu'ils estiment possibles (fig. 6)**

(59 B, 41 N)
(58 B, 42N)
(60 B, 40 N)
(62 B, 38 N)
(65 B, 35 N)

(fig. 6)

### **La linéarité (2 séances).**

"Prévoyez sur 200 tirages ce qui peut sortir".

Certains enfants prévoient à nouveau ; d'autres utilisent les prévisions faites pour 100 tirages pour prévoir sur 200 tirages.

Exemple : Résultats pour 100 tirages 58 B 42 N  
donc

Prévision pour 200 tirages 2X58, 2X42 : 116 B 84 N.

### Un grand nombre de tirages (2 séances)

Les enfants présentent que la vérification expérimentale doit être en accord avec leurs prévisions sur un grand nombre de tirages.

Exemples de prévisions :

100 <sup>e</sup> tirage : 59 B 41N
500 <sup>e</sup> tirage : 295 B 205 N
.....
10000 <sup>e</sup> tirage : 5 900 B 4 100 N

100 <sup>e</sup> tirage : 58 B 42 N
500 <sup>e</sup> tirage : 290 B 210 N
.....
10 000 <sup>e</sup> tirage 6 500 b 4 200 N

100 <sup>e</sup> tirage : 65 B 35 N
500 <sup>e</sup> tirage : 325 B 175 N
.....
10 000 <sup>e</sup> tirage 6 500 b 3 500 N

Ainsi, pour prévoir d'une manière satisfaisante pour eux, les enfants fabriquent une application "prévision" linéaire qui soit la plus "proche" des applications "résultats" qu'ils possèdent.

Ce sont les résultats sur un grand nombre de tirages qui vont permettre de choisir cette application linéaire.

10 000 <sup>e</sup> tirage : 6000 B 2000 N
5 000 <sup>e</sup> tirage : 3000 B 2000 N
500 <sup>e</sup> tirage : 300 B 200 N

*Remarque* : pour faciliter leur travail, la maîtresse donne aux enfants des listes de tirages toutes prêtes issues de bouteilles de composition connue.

### Retour aux petits tirages (2 séances)

Les enfants s'accordent pour juger cette application également satisfaisante pour des petits tirages. Ils font des vérifications expérimentales.

Remarque : A cette époque, les mots : probabilité (opérateur prévision) et fréquence ont été introduits pour faciliter la discussion.

PREVISIONS			RESULTATS		
Tirage	B	Opérateur prévision	tirage	B	Fréquence
10e	6	X 0,6	10e	7	0,70
30e	18	X 0,6	30e	19	0,63
100e	60	X 0,6	100e	68	0,68
200e	120	X 0,6	200e	128	0,64
300e	180	X 0,6	300e	187	0,62
500e	300	X 0,6	500e	306	0,61

Prévision (pour 3 B 2 N)

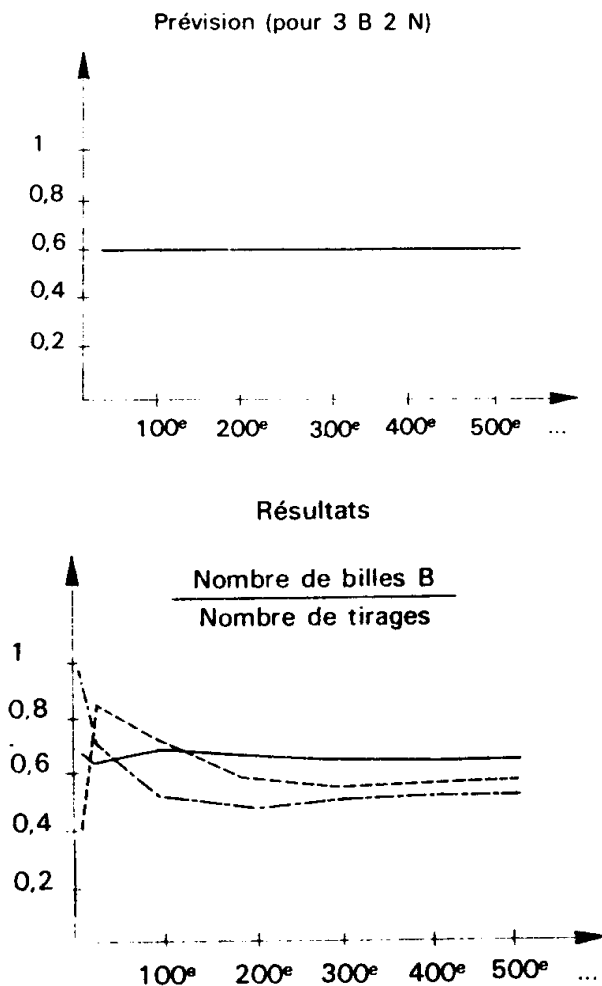


fig 9. Les résultats

Les enfants découvrent alors que pour prévoir on peut prolonger l'application linéaire et la définir directement à partir de la composition de la bouteille.

Exemple

5 billes 3 blanches 2 noires		
100 <sup>e</sup> tirage	60 B	40 N
200 <sup>e</sup> tirage	120 B	80 N
.....		
10 000 <sup>e</sup> tirage	6 000 B	4 000 N

Ainsi, la probabilité apparaît d'une part, comme résultat d'un calcul a priori (combinatoire à partir de la composition de la bouteille), d'autre part, comme valeur expérimentale où semble se stabiliser la fréquence cumulée (loi des grands nombres).

*LES SÉQUENCES FILMÉES :*

**Choix des informations utiles** (première séquence filmée).

La maîtresse dit : "nous allons faire un jeu qui consiste à deviner la composition de certaines bouteilles contenant 5 billes d'après des tirages déjà effectués. Vous allez utiliser des résultats de tirages qui ont été faits par vos camarades de C.M.2 l'année dernière".

La maîtresse distribue à chacun des 4 groupes de la classe une feuille sur laquelle sont représentées des courbes issues des tirages faits l'an dernier

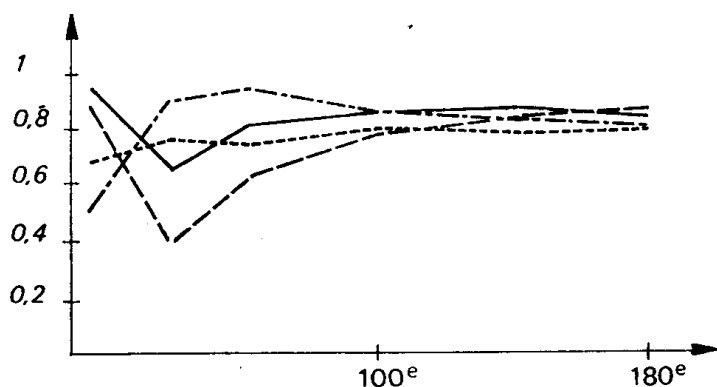


Figure 10. —

Courbe illustrant des séries de tirages allant jusqu'à 180.

(fig. 10). Courbe illustrant des séries de tirages allant jusqu'à 180

Chaque équipe joue contre les 3 autres. Elle choisit une courbe et se prépare à donner les renseignements issus de cette courbe, réclamés par les autres équipes.

L'équipe qui gagne est celle qui a demandé à chacune des 3 autres le moins de renseignements possibles et qui a découvert la composition exacte de la bouteille.



Cette leçon a pour but de découvrir que le renseignement le plus utile est la fréquence liée au nombre maximum de tirages effectués.

Ce renseignement contient à lui seul toute l'information utile. Mais les enfants ne le voient pas immédiatement et demandent plusieurs renseignements. Ils finissent par demander la fréquence liée au maximum de tirages et concluent correctement en utilisant leur stratégie "le plus près de".

réponse : 0,315

L'équipe compare 0,315 à 0,20 (qui est la probabilité d'apparition des blanches pour la composition 1 blanches 4 noires) et à 0,4 (qui est la probabilité d'apparition des blanches pour la composition 2 blanches 3 noires).

A cette époque de l'année, nous avons demandé aux enfants d'écrire à des correspondants ce qu'il faut faire pour découvrir le contenu d'une bouteille. Des groupes se sont répartis le travail de rédaction.

**Formulation de la stratégie à l'occasion d'une nouvelle expérience** (deuxième séquence filmée en classe).

Une bouteille contient 8 billes. La maîtresse dispose de séries de 50 tirages, de 100 tirages issus de cette bouteille. Chaque groupe doit trouver la composition de la bouteille en demandant le nombre de séries de 100 ou 50 tirages qu'il souhaite.

Les groupes demandent 150 ou 200 tirages, calculent la fréquence, cherchent la probabilité qui se rapproche le plus de cette fréquence et concluent. Ex. : un groupe trouve la fréquence d'apparition des blanches, égale à 0,712. Ce groupe pressent 5 blanches 3 noires ou 6 blanches 2 noires. Il calcule la probabilité associée à :

5 blanches :  $(5/8 = 0,625)$

6 blanches :  $(6/8 = 0,750)$  et conclut 6B 3N.

**Commentaire :**

a) Les décimaux à 3 chiffres sont un facteur de difficulté.

b) Nous avons constaté un retour, pour deux groupes, à des stratégies plus archaïques que celles qui utilisaient la fréquence.

Exemple : "sur 100 tirages, on a trouvé 65 B, et 35 N, Si c'était 6B et 2N on aurait 75 B et 25 N : si c'était 5 B 3 N, on aurait 62,5 et 37,5. Alors le plus près, c'est 5 B 3 N".

Cette régression est normale. Les enfants disposaient de ce moyen assez efficace pour décider. Pourtant, ils ont bien compris ce que les fréquences pouvaient apporter et améliorer. Mais, une méthode qui a permis d'avancer dans l'analyse ne s'abandonne pas immédiatement au profit d'une autre. Les deux se confrontent. Cette démarche est caractéristique d'une mathématisation.

**Cette deuxième partie s'achève. Les enfants expriment :**

**- l'idée de la convergence de la fréquence vers la probabilité**

Ex. : "plus on fera de tirages avec la bouteille 3 blanches 2 noires, plus la fréquence va être près de 0,6".

**- la stratégie à adopter pour découvrir le contenu d'une bouteille**

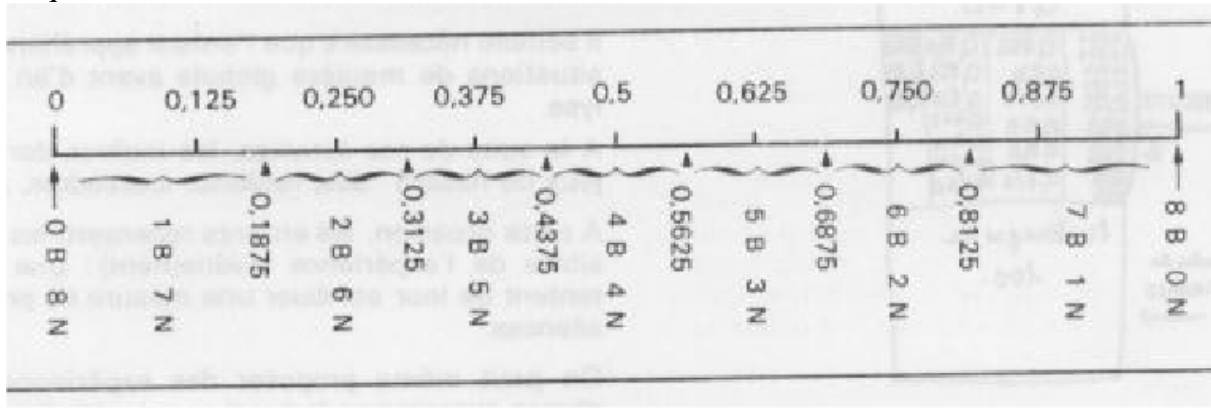
" On fait le plus de tirages possibles, on prend la fréquence des blanches et on voit si c'est près de 0,6 ou 0,20 ou 0,4 ou 0,8".

**- des opinions à propos de la sûreté dans la prévision.**

**C. LA DECISION, LE RISQUE**

**Les intervalles de décision. (2 séances)**

Les enfants mettent au point un tableau afin de décider vite lorsque l'on connaît la fréquence. :



Probabilité d'apparition des blanches pour chacune des compositions possibles .

Pour décider	0 B	88 N :	0
" "	1 B	77 N :	0,125
" "	2 B	66 N :	0,250
" "	3 B	55 N :	0,375
" "	4 B	44 N :	0,5
" "	5 B	33 N :	0,625
" "	6 B	22 N :	0,750
" "	7 B	11 N :	0,875
" "	8 B	00 N :	1

**Intervalles de décision :**

Pour décider	0 B	8 N :	[ 0]
	1 B	7 N	] 0, 0,1875[
	2 B	6 N	] 0,1875 ; 0,3125[
	3 B	5 N	] 0,3125 ; 0,4375[
	4 B	4 N	] 0,4375 ; 0,5625[
	5 B	3 N	] 0,5625 ; 0,6875[

6 B	2 N	] 0,6875 ; 0,8125[
7 B	1 N	] 0,8125 ; 1[
8 B	0 N	] 1

**Commentaire :** Les enfants ont longuement discuté sur des questions précises comme :

- et si on trouve 0,8125, comme fréquence ? on dit quoi ?
- on continue les tirages !
- et si on trouve 0,999999 ? et si on trouve 0,00001 ?

Ces discussions à propos de la "barrière" qui doit être à côté de 0 pour séparer la décision 0 blanche 8 noires, de la décision 1 blanche 7 noires, ont beaucoup intéressé les enfants.

### **Le risque**

"Plus on a de tirages, plus on est sûr, mais c'est long." Avec 150 tirages on est presque".

La maîtresse propose de préciser cette phrase, elle distribue à chacune des 4 équipes de la classe une série de 100 tirages issus d'une même bouteille contenant 8 billes. 3 séries permettent de conclure à la bonne composition, la 4e conduit à une conclusion fausse.

Le groupe qui a travaillé sur cette liste et qui a conclu faussement es convaincu de la justesse de sa démarche.

"Il faudrait continuer les tirages, on serait plus sûr". La classe décide alors d'étudier les risques d'échecs en fonction du nombre de tirages.

Les enfants ont à leur disposition : 20 séries de 200 tirages.

Ils vont examiner expérimentalement le nombre de conclusions fausses qui seraient faites si l'on concluait au 10e tirage, 20e tirage, 30e, ect.

**Cette 3e phase s'achève, les enfants savent qu'il n'y a jamais certitude absolue. On s'arrête en prenant un risque d'erreur. Les expériences statistiques ont permis d'améliorer l'évaluation de ce risque.**

### **D. PROLONGEMENTS (calcul des probabilités)**

Les 20 séances des phases précédents ont permis aux enfants de dégager les principales notions de probabilités et de statistiques dans leurs rôles et leurs significations réciproques. Aucune de ces notions n'a fait l'objet d'une définition formelle, mais un certain vocabulaire de base a été introduit correctement.

Il semble nécessaire que l'enfant appréhende ainsi des situations de manière globale avant d'en faire l'analyse.

A la suite de ces activités, les maîtres donnent divers jeux de hasard ; dés, roulette, icosaèdres, pièces, etc. A cette occasion, les enfants recensent les issues possibles de l'expérience (événement) : une séance, et tentent de leur attribuer une mesure de probabilité : 2 séances.

On peut même proposer des expériences indépendantes successives (arbres) et calculer des produits de probabilités indépendantes (3 séances).

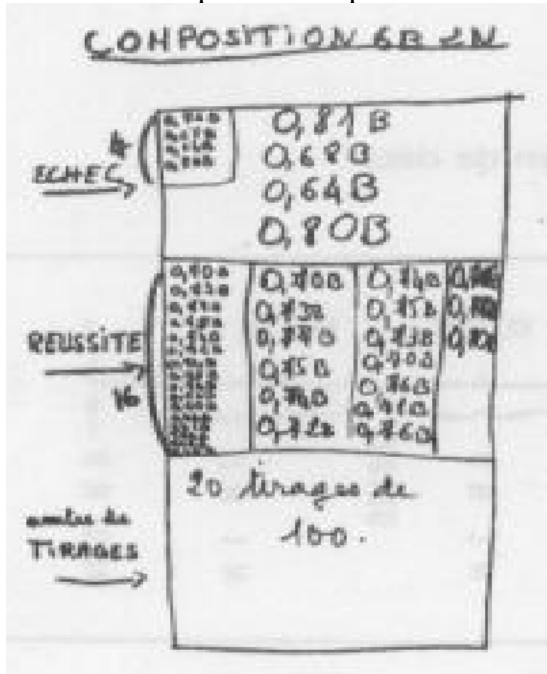


Figure 11 Travail d'un groupe d'enfants ayant analysé les réussites –échecs lorsque l'on prévoit au 100<sup>e</sup> tirage

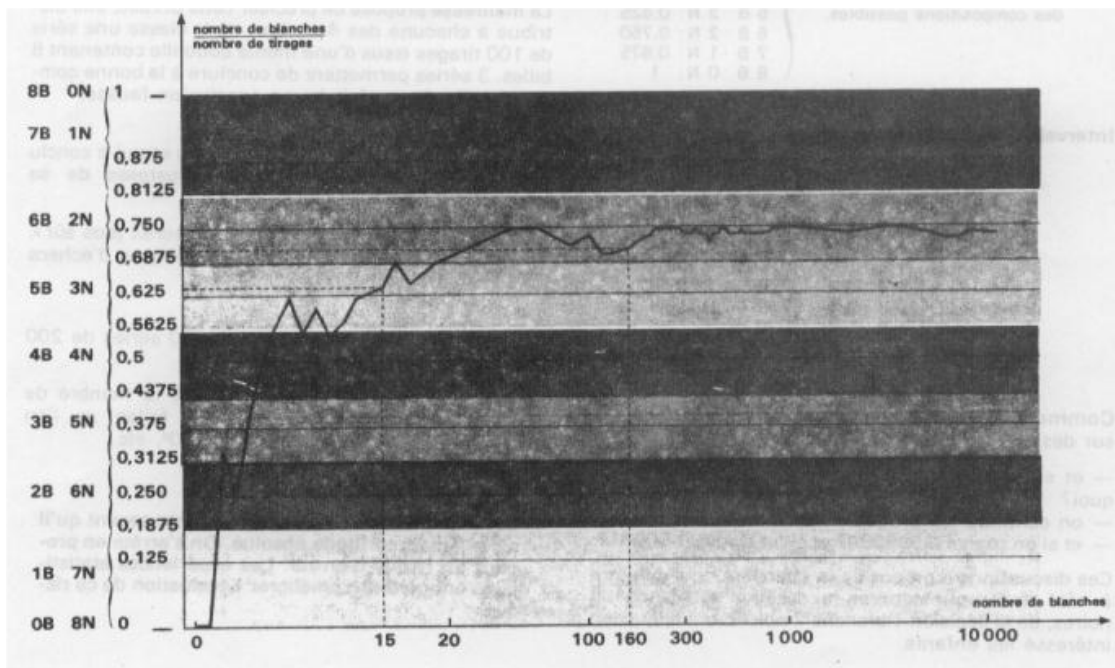


Figure 12 Une série de 10 000 tirages issus de la bouteille 6B 2N... (Dans l'animation, pour des raisons de cadrage l'échelle n'est pas proportionnelle au nombre de tirages)

Fiche établie par J. Briand et G. Brousseau (février 1976)