GUY BROUSSEAU

LE CALCUL « A LA PLUME » DES MULTIPLICATIONS ET DES DIVISIONS ELEMENTAIRES

Résumé : Cet article résume une série de travaux sur le choix des dispositions et des méthodes de calcul humain de la multiplication et de la division. Extraites des études menées dans les années 60-70 dans le cadre de l'IREM de Bordeaux sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres dans la scolarité obligatoire, ces recherches ont donné lieu à de très nombreuses expériences menées principalement à l'Ecole pour l'observation Jules Michelet de Talence et à toutes sortes de publications recensées dans l'abondante bibliographie jointe. En dehors de l'école Michelet ou l'utilisation s'est poursuivie pendant trente ans à la satisfaction des maîtres et des élèves, les méthodes proposées ici, malgré leurs qualités, n'ont fait l'objet que de développements très sporadiques. Leur adoption semble poser des problèmes de « macro didactique »

INTRODUCTION

L'enseignement du calcul des opérations a suivi l'évolution de l'humanité et de ses besoins. Depuis le début du $19^{\text{ième}}$ siècle il a pris une importance considérable dans l'enseignement élémentaire notamment.

Aujourd'hui l'enseignement des opérations est en crise. Il semble que les professeurs aient de plus en plus de difficultés à obtenir des résultats satisfaisants et qu'à son tour l'administration se soit rendue à l'évidence et ait cédé, consentant à abaisser ses exigences en supprimant ou en retardant des apprentissages considérés comme fondamentaux. La noosphère s'émeut, exige le maintien de ses illusions nostalgiques et, refusant d'étudier le problème avec des moyens appropriés, se déchire en secouant ses jouets préférés : les professeurs, le niveau, les institutions de formation, les mathématiques, les nouveaux élèves, de mystérieux paramètres…

Cet article n'a pas la prétention d'étudier en détail ces problèmes, de macrodidactique. Je me bornerai à évoquer dans un premier paragraphe quelques considérations qui me semblent dire pourquoi on ne peut plus enseigner le calcul élémentaire traditionnel et pourquoi on aurait tort de vouloir le conserver. J'y dirai aussi pourquoi je crois qu'on ne doit pas abandonner l'enseignement du calcul élémentaire traditionnel « à la plume ».

S'il existe une solution à ce dilemme, c'est, je crois, dans la modification de la chose enseignée qu'il faut la chercher et corrélativement dans les méthodes didactiques qui peuvent leur être associées. Suivant les pays, les époques, les besoins et les ressources des sociétés humaines il a existé de nombreuses manières d'effectuer les calculs nécessaires aux transactions humaines. Certaines faisaient appel à des aides matérielles abaques, bouliers, machines diverses, d'autres non. On pourrait croire qu'aujourd'hui, l'enseignement du calcul aurait bénéficié de cette expérience millénaire pour proposer aux élèves les moyens les plus adaptés, les plus sûrs et les plus performants d'effectuer ces calculs. Cet article montre qu'il n'en est rien. Je puiserai mes arguments et mes solutions dans des travaux personnels théoriques et expérimentaux que j'ai publiés il y a plus de trente ans.

Mon argumentation s'adresse d'abord aux enseignants et au public, c'est pourquoi j'ai tenu à détailler autant que nécessaire l'objet principal de ma proposition : comment effectuer et disposer les calculs des multiplications et surtout des divisions ? et comment les enseigner ? J'ai voulu exposer ces techniques sans exposer en détail les modalités de leur enseignement, et bien qu'elles permettent des améliorations très sensibles de ce côté-là aussi.

Il restera à expliquer après mes conclusions pourquoi ce genre de travaux est resté sans effets pendant si longtemps et sous quelles conditions il pourrait en être autrement dans l'avenir.

A LES MULTIPLICATIONS

1. UNE MULTIPLICATION «CLASSIQUE »

1. 1. Le procédé « habituel »

La multiplication de 625 par 25 s'effectue au Chili en utilisant la disposition suivante :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 2} \\ \underline{624} \times 25 \\ 31^{1}20 \\ \underline{+\ 1248} \\ 15600 \end{array}$$

Le projet de calcul se place au dessus du trait. Il est écrit « en ligne ». En France il serait écrit en deux lignes, ce qui ne change pas grand-chose.

$$\begin{array}{r} 624 \\ \underline{\times\ 25} \\ 31^{1}20 \\ \underline{+\ 1248} \\ 15600 \end{array}$$

L'usage veut que l'élève choisisse d'abord un nombre *multiplicande* (le premier : 625) et un nombre *multiplicateur* (25). Il aurait pu faire l'inverse
Puis il choisit un premier chiffre multiplicateur, il prend le chiffre des unités 5. (il aurait pu prendre le 2). Puis il calcule « en ligne » le premier *produit partiel* : 624 x 5 et pour mémoriser les *retenues,* il les écrit au dessus du chiffre multiplicande :
-5 fois 4 vingt, j'écris zéro et je retiens deux, écrit au dessus du 2
- 5 fois 2 dix, et deux de retenue font douze, j'écris deux et je retiens un, écrit au dessus du 2
- 5 fois 6 trente et un de retenue font trente et un
Il calcule ensuite toujours en ligne et de la même manière le deuxième produit partiel, mais il n'écrit pas le résultat de l'opération 624 x 20 c'est-à-dire 12480 ce qui lui aurait permis de conserver l'alignement pour l'addition et de ne pas perdre de vue l'ordre de grandeur de son résultat, mais qui l'aurait obligé à effectuer les produits partiels de façon différente (écrire d'abord un ou plusieurs zéros) suivant l'ordre du multiplicateur. Tous les produits partiels se calculent de la même manière, mais l'élève doit décaler d'un rang vers la gauche à chaque multiplicateur et il peut oublier la signification de ce qu'il calcule.

Par chance, dans cet exemple, il n'y a pas de retenues dans le deuxième produit partiel. Où se placeraient les retenues des produits partiels dans le calcul de 624 x 75 ? Ainsi ?

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 3} \\ {\scriptstyle 1\ 2} \\ \underline{624} \times 85 \\ {}^{1}3^{1}120 \\ \underline{+\ 4992} \\ 53040 \end{array}$$

En France les élèves ne doivent pas les écrire, imaginez ce que deviendrait l'écriture des retenues si le multiplicateur comprend 4 chiffres !
Mais ceci complique et allonge d'autant l'apprentissage des produits en ligne qui doivent s'effectuer sans l'appui de l'écriture des retenues

1.2. Les propriétés ergonomiques de cette méthode

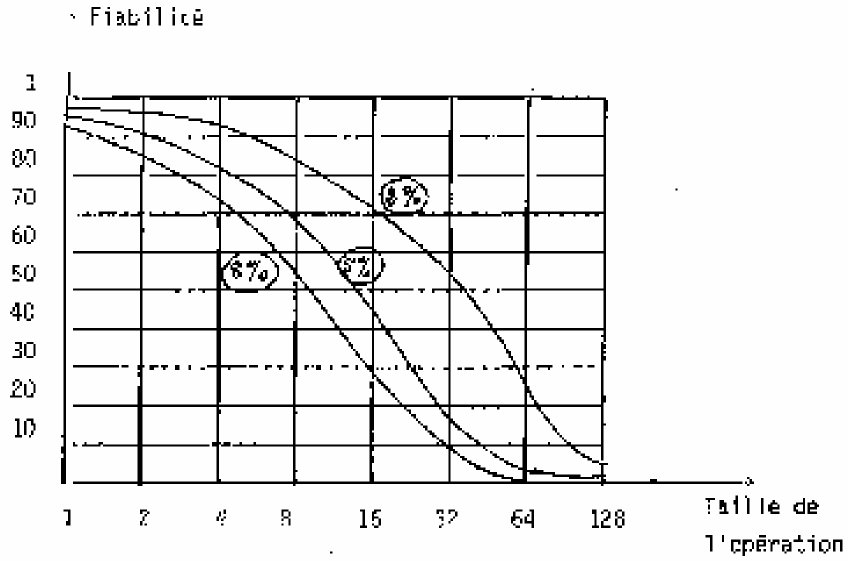
La description de la tâche par un ordinogramme qui prend en compte tous les cas fait ressortir facilement quelques *caractères* : nombre de boucles, gestion des répertoires et des mémoires.
Le caractère essentiel est la *fiabilité* du résultat. Le rôle d'un calcul c'est d'assurer son résultat et de permettre son contrôle. Le but de l'apprentissage est de permettre à l'exécutant d'avoir une confiance suffisante dans son travail. La vitesse d'exécution n'est qu'un facteur subalterne. La fiabilité dépend de divers facteurs, certains sont propres à l'exécutant *apprentissage, habileté, fatigue*…, d'autres tiennent au procédé lui-même : *complexité de l'algorithme, nombre de valeurs à maintenir en mémoire à court terme simultanément, importance et disponibilité des répertoires exigés, possibilités de contrôle,* d'autres enfin tiennent à l'adaptation de la tâche aux possibilités de l'exécutant.
L'étude de ces caractères peut être menée de façon empirique, expérimentale et de façon théorique, l'étude d'ergonomie éclaire la recherche des difficultés. (Ce que nous avons fait dans les années 60, voir 1972 c). Nous allons suivre l'analyse théorique.

1) la complexité formelle : la tâche qui se reproduit en boucle est le calcul d'un produit de deux nombres d'un chiffre : le nombre de boucles est le produit des nombres de chiffres des deux termes de la multiplication. L'opération ci-dessus comprend 6 boucles, l'opération 3546 x 8345 en comprendrait 16. On comprend que la complexité croisse comme le nombre de boucles. Voir l'ordinogramme PERT de l'opération dans 1972c)

Chaque boucle présente des difficultés différentes, suivant sa place dans le calcul, suivant la présence d'une retenue ou non, suivant les chiffres à multiplier et suivant la complexité de l'algorithme dans lequel elle est plongée.

Au cours d'une boucle l'élève peut être conduit à conserver et à effacer en mémoire jusqu'à 5 renseignements provisoires : considérons 5468 x 797 : il faut mémoriser au moins 2 et peut être 4 informations pour repérer la position des deux chiffres (par exemple les centaines du multiplicande par les dizaines du multiplicateur) qu'on va multiplier, de façon à pouvoir trouver le couple suivant, 2 pour les chiffres qui se multiplient (4 et 9), 1 pour la retenue du produit élémentaire précédent (5 de 6x9) que l'on doit ajouter au produit, puis après le calcul du produit, 1 mémoire pour la retenue à reporter (4 venant de 4x9 → 36, + 5 → 41)
On peut donc compter 5 *places de mémoire* si on considère les retenue comme se remplaçant dans une même mémoire, ou 7 *objets de mémoire* par boucle (en ajoutant le résultat du produit et l'autre retenue) si on pense que les élèves mémorisent toute la chaîne des opérations d'un même produit partiel pour la répéter rapidement pour la contrôler. Nous leur avons vu faire cela presque tout le temps)

2) Il est facile d'établir expérimentalement différents résultats sur :
   a) L'effet de la taille des opérations (nombre de boucles), suivant la fiabilité sur les boucles : la probabilité de réussite s'écroule rapidement. voir la figure ci-dessous. Ces courbes montrent qu'un progrès minime dans la fiabilité des produits élémentaires, comme passer de 5% de résultats erronés à 2%, fait passer l'élève du statut de très mauvais calculateur : 30% des opérations de taille 16 justes, à celui d'assez bon 75% de réussite. **C'est donc le point qu'il faut chercher à améliorer, soit par des apprentissages frénétiques, soit par un dispositif approprié moins contraignant**.



b) L’ordre de difficulté des produits élémentaires (tables) Exemples :
   i) difficulté croissante suivant :
      - la taille du produit : les résultat à la question (2x6) sont meilleurs que ceux de (8x6),
      - la fréquence d’emploi du 0 et sa position Succès (n x 0) >> Succès (0 x n)
      - les confusions possibles, par exemple entre 7 x 8 et 6 x 9, sont l’occasion de plus d’erreurs chez les débutants
   ii) difficultés décroissantes avec
      - les possibilités d’étayage (calcul rapide avec un autre produit), etc.

c) L’effet très important de la présence des retenues dans une boucle : c’est la principale cause des erreurs, comme le montre le tableau ci-dessous

Ce tableau indique les résultats d’une épreuve proposée à 142 élèves de 9 à 11 ans qui calculaient avec la méthode « traditionnelle ». Il s’agissait de trouver des arguments pour justifier un changement de méthode. Il montre la moyenne (et l’écart type) des pourcentages d’erreurs observées sur 1 opération élémentaire suivant qu’elle se trouve dans des opérations de tailles diverses et suivant qu’il y a ou non une retenue à faire. Par exemple 47 x 8 est une opération de type 2 x 1 et elle présente deux produits élémentaires 8x7 et 8x4, tous les deux avec retenue : à reporter pour 8x7, reportée et additionner pour 8x4).

Il y a donc quatre cas de retenues : sans retenue (**3**2x**2**), avec retenue seule (comme 4x3 dans 2**4**x**3),** avec addition de la retenue seule comme 2x3 dans **2**4x**3**, avec à la fois addition de la retenue antérieure et report de la suivante comme dans le 7 x 6 de 2**7**4x**6.**

Mais l’analyse de détail est plus compliquée car il faut tenir compte du fait que les produits élémentaires de nombres tels que 7x8 ou 6x9 sont moins bien connus que d’autres comme 2x3 et qu’ils ne peuvent pas figurer dans les catégories sans retenue. J’ai tenté d’annuler cet effet par des moyens compliqués.

La seule preuve irréfutable a été apportée plus tard, lorsque nous avons pu comparer les résultats aux mêmes opérations avec l’une et l’autre méthode, d’une part avec les mêmes élèves avant et après un apprentissage, d’autre part avec des élèves différents mais appariés d’après leurs résultats aux produits 1x1.

Dans des opérations de taille 2x1 (comme 47x8). Il y avait 17 produits sans retenue et 19 avec retenue. Il y avait 7,45 % d’erreurs sur les produits élémentaires avec retenue. Et seulement 1,20 erreurs sur 100 sur les opérations élémentaires sans retenue.

Les courbes précédentes montrent les progrès que l'on peut attendre du changement de méthodes.
Note : le rapport initial comprenait des schémas où ces mémoires étaient représentées comme dans les ordinogrammes utilisés à l'époque pour décrire les programmes informatiques

$m \pm \sigma/\sqrt{N}$ (N)	Sans retenue	Avec retenue
Produits seuls Taille 1 x 1	3,73 ± 0,56 (98)	
Taille 2 x 1	1,20 + 0,55 (17)	7,46 - 1,78 (19)
Taille 3 x 1	2,40 + 1,32 (13)	11,47 - 1,47 (17

établi sur 141 enfants de 9 à 11 ans

d) L'effet de la longueur des séquences enchaînées : si le multiplicande comprend beaucoup de chiffres, l'élève doit effectuer d'un coup une longue série d'opérations. S'il est interrompu il doit recommencer, le contrôle de ce qu'il a fait est d'autant plus difficile et la probabilité d'être interrompu croît très vite aussi.

678678 x 7 est moins bien réussi que 678 x 77 de même que 923923 x 3 923 x 33

L'articulation des boucles elle-même peut contribuer à la complexité.
L'exemple le plus évident est celui où les boucles sont vides, c'est le cas lorsque il y a plusieurs zéros contigus dans le multiplicande et surtout dans le multiplicateur.

3) Les résultats les plus surprenants sont les suivants
   a) le paramètre le plus sûr est le chiffre des unités du résultat,
   b) le moins sûr, lorsqu'il y a des erreurs, c'est le nombre de chiffres du résultat, et le premier chiffre significatif.
   c) Le calcul ne se prête pas à un calcul d'approximation : il faut tout calculer d'abord et tronquer ensuite

Il est facile d'incriminer la méthode de calcul si on la compare à d'autres. Et nous n'avons pas évoqué, par exemple, la question du temps d'exécution, ni celle de la fatigue de l'exécutant liée de façon plus serrée à la longueur des séquences enchaînées. Ces variables influent moins dans les conditions scolaires dans la mesure où les enseignants les surveillent.

4) L'influence du nombre et de la disposition des informations à traiter a retenu notre attention. Le repérage de la boucle suivante après l'exécution d'une boucle peut être rendu difficile par la présence des marques de retenues, la position de la marque de retenue peut compliquer sa recherche etc.
5) La relation entre l'exécution de l'algorithme avec le sens de l'opération en cours (la signification d'un produit partiel par exemple) s'est révélée mal comprise et difficile à expliquer pour les professeurs

1.3. L'organisation de l'apprentissage

Il est clair qu'il faut que les élèves soient capables d'exécuter parfaitement (ou presque) les multiplication en ligne (avec un seul chiffre au multiplicateur pour effectuer les produits avec 2 chiffres au multiplicateur, et qu'il faut alors parfaitement savoir reporter les retenues sans les écrire.
Il faut donc programmer d'abord l'étude des produits simples, ceux qui figurent dans la table.

Puis l’étude du calcul des produits par un seul chiffre au multiplicateur, sans retenue : 712 x 4 (cette limitation ne peut être évidemment que très provisoire, compte tenu du faible nombre de possibilités). Puis…

Le principe est donc celui de l’étude d’un programme qui restera presque intangible, suivi de son utilisation comme sous programme dans un programme plus complexe.

L’étude de la multiplication précède mais s’imbrique dans celle de la division au nom de ce même principe. Le souci de « mécaniser » l’exécution du calcul conduit à enlever tout rôle fonctionnel au sens qui n’a plus qu’un rôle secondaire, illustratif et explicatif après coup.
Pour apprendre à faire les divisions à la plume sans trop d’erreurs et avec une vitesse convenable, il faut avoir appris avant et assez tôt, à exécuter parfaitement les soustractions et les multiplications… Finalement il faut consacrer près de 400 heures sur cinq ans à ces apprentissages.

1.4. Les solutions alternatives

L’étude d’une alternative éclairera cette question. Les procédés développés dans l’histoire et dans le monde pour calculer le produit de deux naturels sont nombreux et variés : par exemple, le procédé par doublement du multiplicande et division du multiplicateur avec addition des restes (procédé dit parfois « à la russe ») remonte à la plus haute antiquité.
Chaque méthode est caractérisée par un répertoire de résultats élémentaires à mettre en œuvre sans calcul : les tables pour la méthode des produits partiels (dite parfois de Fibonacci), ou les doubles, les moitiés pour la méthode « à la russe », et par un algorithme.
A priori, le temps d’enseignement et les difficultés de l’apprentissage dépendent principalement de ces deux paramètres.
Nous allons montrer comment l’utilisation de la méthode du tableau des puissances dite « per gelosia » (par Fibonnacci), ou « à l’arabe », ou « à la grecque »… permet de résoudre de nombreux problèmes posés ci-dessus.

2. LA MULTIPLICATION EN TABLEAU[1]

2.1. Le procédé

C’est le procédé utilisé par les mathématiciens pour effectuer les produits de polynômes.
Il commence par le tracé d’un tableau qui comporte autant de colonnes que le multiplicande comprend de chiffres, et d’autant de lignes que le multiplicateur en comprend. Les chiffres du multiplicande sont écrits au dessus du tableau (un par colonne) et ceux du multiplicande à droite (un par ligne). Chaque cellule du tableau est partagée en deux par sa première diagonale.
Par exemple pour la multiplication de 7503 par 945 le tableau a l’aspect suivant.

[1] Cette multiplication est dite « per gelosia » (par jalousie) par Leonard Fibonacci qui l’enseigna à l’Europe au 12[e] -13[ième] siècle. Mais il l’avait empruntée aux arabes. Pour cette raison elle est dite par d’autres « multiplication arabe ». Mais les arabes l’avaient peut être empruntée aux hindous, et en tout cas elle était déjà utilisée par certains anciens mathématiciens grecs. Elle est donc reconnue aussi comme « muliplication à la grecque »… Mais était-elle étrangère aux chinois ? … Elle se distingue ici d’autres méthodes, comme par exemple la multiplication « à la russe », qui remonte à l’Egypte ancienne et qui ne demande que de savoir multiplier et diviser par 2

	7	5	0	3	
?					*9*
?					*4*
?					*5*
	?	*?*	*?*	*?*	

Phase 1

Les points d'interrogation représentent les chiffres du produit cherché. On voit tout de suite qu'il y en aura 7 Un élève avisé pourra dire que le premier chiffre sera 6 ou 7 et le produit est de l'ordre de 7 millions.
Pour calculer un élève débutant peut commencer par les produits qu'il connaît bien
Par exemple par la colonne de 0,

	7	5	0	3	
?			0 0		*9*
?			0 0		*4*
?			0 0		*5*
	?	*?*	*?*	*?*	

Phase 2

Il a repéré 3 x 4 qu'il connaît bien aussi : il écrit le 1 au dessus de la diagonale et le 2 à droite en dessous

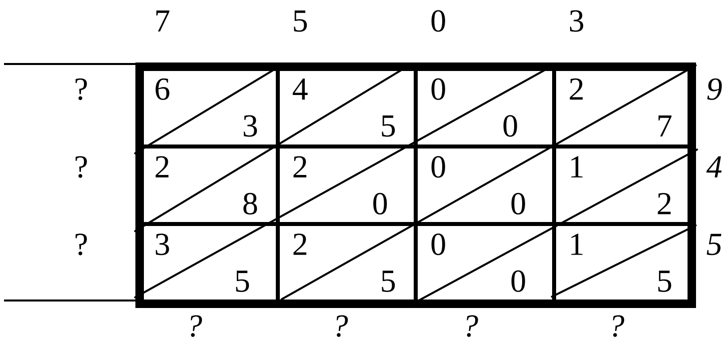
Il fait de même avec le 5 x 4 et le 5 x 5, et le 3 x5 qu'il connaît aussi

	7	5	0	3	
?			0 0		*9*
?		2 0	0 0	1 2	*4*
?		2 5	0 0	1 5	*5*
	?	*?*	*?*	*?*	

Phase 3

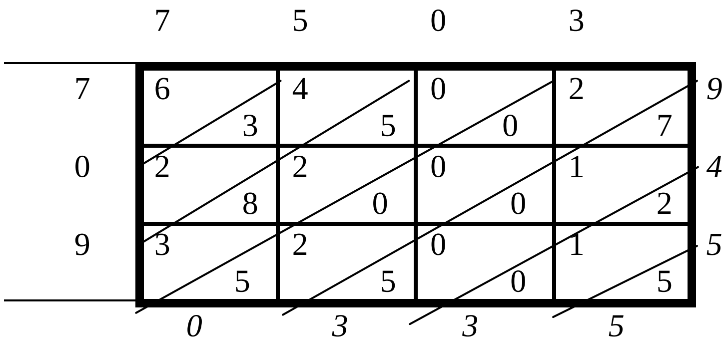
Il a tout son temps pour vérifier et éventuellement étayer ou même compter les produits qu'il ne connaît pas encore parfaitement : comme 4 x 7 = 28 ou 5 x 7 = 35.
Il peut même se servir de certains calculs déjà faits pour en vérifier d'autres :
Il hésite sur 9 x 7 (61 ?), mais il vérifie : puisque 5 + 4 = 9 alors 5 x 7 + 4 x 7 = 9 x 7 et donc (5+4) x 7 = 35 + 28 = 63, en attendant de savoir 9 x 7 = (10 x 7) -7

Il ne s’agira pas d’encourager les élèves à traînasser sur les résultats intermédiaires mais seulement de leur permettre un apprentissage par l’usage, moins dépendant de façon critique de la connaissance préalable par cœur.



Phase 4

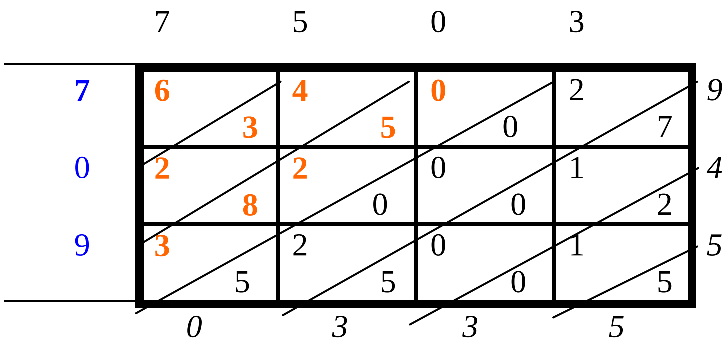
Il reste alors à additionner les nombres d’un même ordre, d’une même puissance de l0, qui se trouvent en diagonale : les unités avec les unités : 5
Les dizaines avec les dizaines : 0 + 1 + 2 = 3
Les centaines : 5 + 0 + 0 + 1 + 7 = 13 Cette fois il y a des retenues, mais ce sont celles d’une addition, une par colonne. Et le résultat se lit sur les marges de haut en bas et de gauche à droite : 7 090 335



Phase 5.

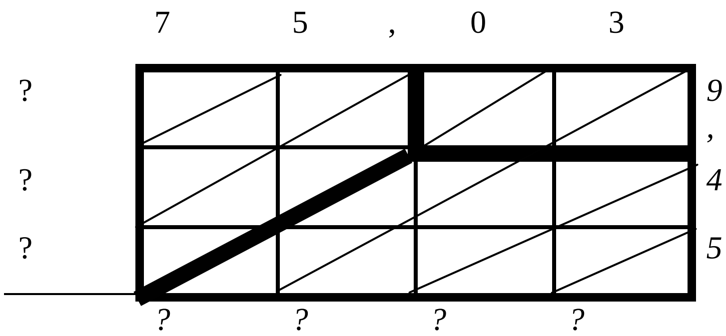
Réponses approchées. Dans certains cas, l’ordre de grandeur du résultat avec un petit nombre de chiffres significatifs suffit. Dans ces conditions, l’opération peut être limitée à une partie seulement du tableau, à un triangle borné par une diagonale des coefficients du même ordre.
Par exemple, si 2 chiffres significatifs sont suffisants, l’élève doit en général opérer sur les 9 chiffres occupant les trois diagonales contenant les puissances de 10 les plus élevées (les chiffres en rouge).
Il calcule donc le troisième chiffre : 5 + 2 + 8 + 3 = 10 + 8 → 8 (ou 9),
La retenue pour la deuxième colonne est 1
Puis le deuxième chiffre : 1 + 4 + 3 + 2 = 10 + 0 → 0,
La retenue est 1
Enfin le premier 1 + 6 = 7
La réponse approchée est 708 suivi de 4 zéros : 7 080 000
Ou 709 suivi de 4 zéros : 7 090 000

Pour obtenir exactement le troisième chiffre significatif il doit connaître la retenue, et pour cela, au moins calculer la quatrième diagonale (en comptant de droite à gauche, c'est-à-dire selon les puissances descendantes de 10),. Hélas elle est ici de 2 + 2 + 5 = 9. Il peut donc y avoir une retenue de la colonne précédente, la 5^{ième}, ce qui ferait reporter une retenue sur la 4^{ième} puis sur la 3^{ième} diagonale. C'est le cas. La réponse approchée est 7 090 000. L'écart au résultat exact est inférieur à 10 000, en fait il est seulement de 335



6.

Produits de décimaux
La position de la virgule se déduit mécaniquement de la position des virgules des nombres multipliés : exemple 75,03 x 9,45 = ###,####
.



7.

2.2. L'analyse ergonomique et la comparaison

La place des chiffres du résultat est prévue dès la pose de l'opération, ce qui diminue de beaucoup les erreurs d'ordre de grandeur. Celles-ci ne se produisent qu'au début, lors de la recopie des chiffres du produit.
Tous les résultats des calculs élémentaires sont écrits, ce qui facilite le contrôle et la correction.
Il y a bien toujours 12 boucles, mais elles sont beaucoup plus simples. Elles peuvent être calculées indépendamment les unes des autres, dans un ordre quelconque.
Il n'y a plus de retenue en cours de calcul d'un produit élémentaire. Toutes les retenues sont reportées dans l'addition qui s'en trouve un peu compliquée par rapport à l'autre méthode : il y plus de chiffres et les colonnes sont en biais.
Il était facile de calculer les probabilités d'erreurs et de prévoir les avantages qui seraient obtenus par la simplification des produits, avec le modèle évoqué ci-dessus. L'augmentation de difficultés dans l'exécution de l'addition n'avait pas été étudiée de façon théorique. Nos résultats empiriques montraient que l'augmentation des difficultés de l'addition était très

faible, et en tout cas très largement compensée par la diminution des erreurs sur les produits partiels.

Le procédé a été enseigné à titre expérimental dans quelques classes de Cours élémentaire et de Cours moyen : quelques leçons réparties sur une semaine, suivies d'usage contrôlé dans les calculs ordinaires de la classe (sans autres exercices spécifiques). Il a été facile de vérifier expérimentalement, que l'amélioration de la fiabilité des calculs suivait les prévisions : elle était meilleure que ce qu'apportait la suppression des retenues.
Les améliorations du pourcentage de réussites dépendaient évidemment des performances anciennes des élèves : ceux qui profitaient le mieux des avantages de la « nouvelle méthode » étaient les élèves qui présentaient à l'avance des performances faibles ou moyennes. Ceux qui calculaient déjà très bien avant trouvaient tout de même que cette méthode était plus agréable.

Nous avions craint que le fait de devoir dessiner le tableau n'allonge beaucoup le temps d'exécution des calculs. Il n'en a rien été. Il n'y avait pas d'écart significatif entre le temps de calculs par les mêmes élèves, avant avec la méthode classique et après, avec la méthode en tableau.

Par la suite, le procédé a été enseigné à tous les élèves de l'école pour l'observation Jules Michelet, pendant plus de 20 ans pour étudier les conditions d'insertion de la méthode dans le cursus et les difficultés du développement qui ne peut pas être concomitant.
Les avantages de la méthode se sont régulièrement confirmés : meilleurs résultats des élèves obtenus à moindre temps et efforts des enseignants. L'apprentissage étalé sur la même durée déterminée par les horaires officiels laissait plus de temps pour des activités mathématiques plus riches que des répétitions d'exercices. La pratique du calcul en ligne n'était enseignée qu'un peu plus tard au moment de la mise en place de la division dont nous parlerons plus loin.
Le calcul en tableau que montre la figure ci-dessous

	5	2	6	9	x
	2 / 0	0 / 8	2 / 4	3 / 6	4
2	1	0	7	6	

Devient le calcul en ligne : 5269 x 4 = 21076, qui s'intègre plus facilement dans la disposition de la division. A ce moment il faut faire l'apprentissage qu'on a évité au début de l'étude de la multiplication. Mais avec des élèves plus expérimentés, qui savent bien leurs tables et qui sont donc plus confiants, l'apprentissage se passe bien

Les enseignants n'ont pas eu de grandes difficultés avec l'environnement, parents ou professeurs du collège. Beaucoup de ces derniers utilisaient même la présence de leurs élèves dans leur classe pour revisiter le sens des opérations. Mais il est apparu qu'il suffisait d'un tout petit nombre de professeurs hostiles, souvent pour de simples raisons de commodité ou par idéologie, pour créer des pressions désagréables sur les élèves.
Pour leur éviter ces difficultés nous avons été conduits,

a) après avoir enseigné d'abord la méthode en tableau qui se prête mieux à l'apprentissage au cours élémentaire (7 à 9 ans),
b) après avoir pratiqué le calcul des produits en ligne en ligne pour la division,

c) après avoir introduit ensuite les premiers produits de décimaux au Cours moyen 1ère année (9-10 ans) avec la méthode du tableau, plus facile à comprendre (par exemple pour expliquer 0,3 x 0, 8).

d) Les enseignants ont fait pratiquer la méthode classique, « pour préparer le collège »

Spontanément les élèves disposaient de façon classique les petites opérations, mais dès que la difficulté devenait plus grande, ils reprenaient la méthode en tableau, conscients d'avoir une pratique plus adaptée et raffinée du calcul. .

2.3. L'invention et l'apprentissage de la méthode par « le sens »

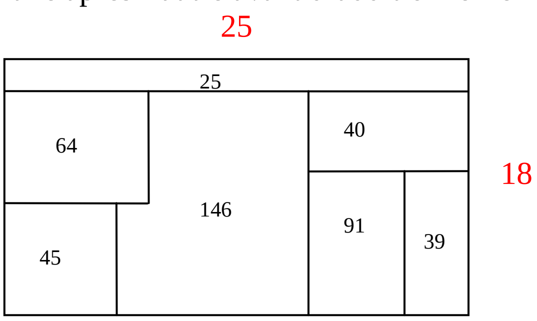
La multiplication de deux entiers peut être définie de plusieurs façons mathématiquement équivalentes, mais principalement :

- Comme une addition répétée du multiplicande, le nombre de fois étant déterminé par le multiplicateur : des deux nombres, l'un compte des objets matériels, l'autre compte des objets d'une autre « nature » et joue plutôt le rôle de fonction ou de rapport.
- Comme le nombre de cases d'objets rangés en un nombre de lignes et de colonnes déterminé par le multiplicande et le multiplicateur : les deux nombres comptent des ensembles de même nombre d'objets.

La première opération est dissymétrique, mais elle correspond à une énumération effective. A priori 3 x 4 et 4 x 3 décrivent des énumérations différentes et si la preuve que 3 x 4 = 4 x 3 est assez immédiate, ce n'est pas le cas pour des nombres quelconques.
La seconde est symétrique, et 3 x 4 et 4 x 3 sont *le* nombre d'une même collection d'objets.
Le sens de ces opérations matérielles peut varier suivant les situations, suivant la possibilité d'effectuer facilement les énumérations etc.
Après l'essai de diverses méthodes, éprouvées parfois pendant plusieurs années, celle qui est apparue la mieux adaptée suivait le schéma suivant.

a) **Définition** : l'écriture de type a x b est introduite très tôt, pour décrire la quantité obtenue en mettant a lignes de b colonnes objets. Elle peut servir à écrire des nombres dont on connaît l'écriture et le nom canonique mais aussi des nombres dont on ne connaît pas encore le nom. Par exemple quinze x vingt. Nous avions déjà utilisé l'addition pour écrire des nombres plus grands que ceux dont on connaît le nom au cours préparatoire. : par exemple 5 + 5 + 4 + 3 permet d'écrire dès le mois de novembre des nombres qui s'appelleront bientôt 17.

b) **Dénombrement des carreaux d'un rectangle au cours élémentaire** (7 ans).
   - **première étape** : les élèves ont un papier quadrillé de 25 carreaux sur 18. En équipe, pour compter ces carreaux, ils délimitent des régions disjointes qu'ils comptent l'une après l'autre avant d'additionner le résultat



- **deuxième étape,** les élèves partagent un nouveau rectangle de 18 sur 25 de façon plus systématique en ménageant des carrés de 10 sur 10, Ils comptent les centaines ainsi obtenues, puis les morceaux qui restent.

Puis les morceaux qui restent sont eux-mêmes découpés en dizaines organisées selon un quadrillage ingénieux. :

100	100	
250		

100	100	50
80	80	40

- **troisième étape**. Le rectangle dont disposent les enfants n'est plus quadrillé, les élèves doivent prévoir et dessiner (approximativement) le résultat du découpage et calculer les sommes. Ils ne peuvent plus compter un à un pour vérifier. Voici par exemple la représentation d'un rectangle de 35 colonnes sur 23 lignes. Un rectangle quadrillé, caché dans le bureau, permet toutefois des vérifications et des corrections.

10	10	10	5	
100	100	100	50	10
100	100	100	50	10
30	30	30	15	3

- **Quatrième étape** : les centaines sont regroupées et les représentations ne conservent plus les proportions : le rectangle ci-dessus devient

30	5	
600	100	20
90	15	3

- **Cinquième étape** : Jusqu'ici, la somme se fait à côté du tableau. Mais bientôt elle pourra se faire directement sur le dessin du découpage, après la reconnaissance de la position des mêmes coefficients des puissances de 10 sur les diagonales. La disposition est alors celle qui a été présentée plus haut.

Cette méthode permet de conserver le sens de l’opération assez longtemps au cours de l’apprentissage initial. Certes, l’usage ordinaire tend à faire oublier la signification du tableau mais la méthode rend disponible le recours à son « sens » chaque fois que cette référence est nécessaire. Par exemple lorsqu’il s’agit de raisonner sur un produit de fonctions ou de polynômes.

En particulier, elle permet d’illustrer les produits de mesures et de comprendre le rôle du choix d’une certaine correspondance entre les unités de longueur (ou des composantes) et les unités d’aire (ou de la grandeur produit).

c) **Rapports**. Le multiplicateur peut être considéré comme un rapport entre le multiplicande et le produit. De nombreuses situations se formulent ainsi et la notion de rapport est appelée à un avenir scolaire important

d) Fonctions

Bien sûr, d’autres exercices permettent d’explorer d’autres façons de concevoir le produit de deux nombres. Par exemple de traduire l’addition répétée d’une mesure, par une fonction scalaire, avec le dédoublement « nombre de fois x mesure » : 3+3+3+3 = 4x3

De la représentation concrète, les élèves passent au cours moyen à des représentations comme fonction (linéaire), sous des formes diverses. Par exemple

$$35 \xrightarrow{\times 23}$$

Les représentations et les symboles ne sont pas essentiels pour les élèves, il n’est pas raisonnable de les multiplier. Par contre, ils sont précieux pour le professeur qui doit garder à l’esprit que la même opération recouvre des actions et des états, c’est-à-dire un sens, différents.

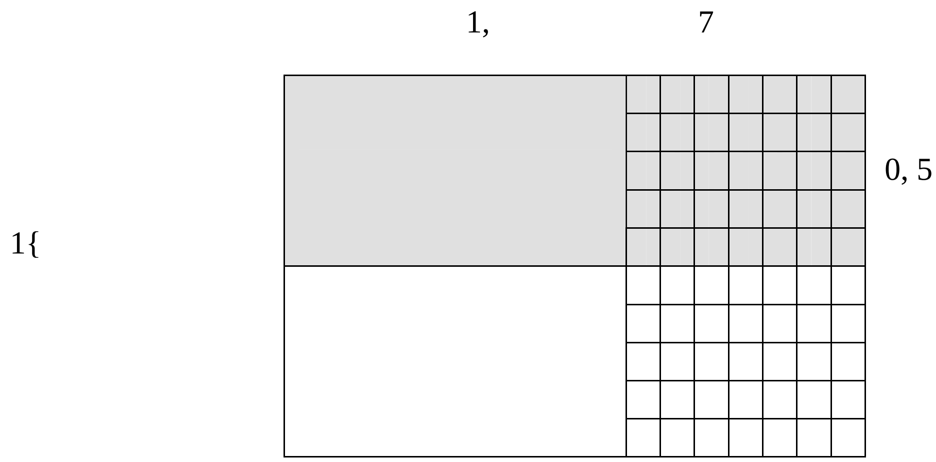
e) **Compositions de fonctions**. Parmi les façons de concevoir directement quelque chose qui se traduit par le calcul : 5 x 7 x 4 ? certaines suivent l’ordre des calculs ; ce sont les plus faciles, d’autres non, et le sens de ces compositions ou transformations de fonctions est plus délicat.

Ex : Paul a livré chaque jour, pendant cinq semaines, 4 litres de lait à Mme Michu. La dame lui demande de doubler la commande pour les six prochaines semaines…

2. 4. Le produit de deux décimaux

Le produit de deux décimaux prolonge naturellement celui de deux naturels. En revenant au sens initial. Dans le produit de deux naturels, si on considère le tableau comme un rectangle et les cotés comme des longueurs : les cases sont des cases unités, elles sont carrées et ont un côté de longueur 1. Si on partage chaque coté en dix, on obtient toujours 100 cases sur lesquelles les mêmes méthodes peuvent s’appliquer :

Ainsi 1,7 x 0,5 se représente concrètement par la partie grisée



Et le calcul prend la forme :