LA DEMONSTRATION : UNE LOGIQUE EN SITUATION ?

Gilbert Arsac
Université Claude Bernard Lyon, IREM et LIRDHIST

1) Introduction

Le but de cet exposé est d'examiner quelles questions, et éventuellement quelles conjectures, diverses modélisations logiques peuvent amener dans le domaine de la didactique. Il ne s'agit donc pas de présenter une théorie générale originale de la démonstration, ni de la réduire à sa structure logique : d'autres points de vue, d'autres modélisations sont possibles.

Il s'agit d'un exposé élémentaire en ce sens que je souhaiterais qu'il soit utile aussi bien en formation des maîtres de mathématiques qu'en recherche didactique, fournissant un cadre théorique de base, cadre de base, c'est-à-dire pouvant ou devant être complété par des théories plus élaborées auxquelles je ne me référerai pas.

L'exposé part de l'expérience de la pratique mathématique dans la tradition occidentale. Depuis Euclide, celle-ci cherche à établir une vérité mathématique par une méthode de validation, la démonstration, reconnue par tous, et cette recherche reste un trait commun avec les mathématiciens contemporains (Arsac,1992), même si au cours de l'histoire, les nécessités de la résolution de problèmes ont amené à laisser de côté au cours d'épisodes historiques importants, comme par exemple l'invention du calcul infinitésimal, la rigueur du raisonnement (Hemily, 2006). Cette unanimité sur la validité des mathématiques ne suppose aucune philosophie partagée, aucune épistémologie commune : le silence d'Euclide sur cette question est impressionnant. En ce qui concerne les mathématiciens contemporains, si Alain Connes par exemple proclame son platonisme (Changeux Connes, 1989), il n'est pas nécessaire de partager cette philosophie pour approuver ses résultats.

2) Problématique.

2.1) **Les mathématiques de référence**.

Compte tenu du but didactique, la référence à la pratique mathématique se précise de la façon suivante :

- j'entends par « démonstration » ce que l'on baptise de ce nom dans les cours, manuels et ceci à tous les niveaux : il s'agit de s'intéresser aussi bien à la démonstration en quatrième, et pas seulement en géométrie, qu'à celles que l'on étudie à l'université.
- En revanche, et compte tenu que le but de cet exposé est didactique et non épistémologique, vous n'entendrez pas parler ici du théorème de Gödel ou de l'intervention de l'informatique dans la démonstration du théorème des quatre couleurs. Les références resteront tout à fait classiques.

Une question, tout à fait centrale du point de vue didactique, est l'une des motivations de cette étude: tenant pour acquit, de manière un peu brutale, que jusqu'à présent les tentatives d'utiliser un enseignement de la logique pour améliorer les performances des étudiants en matière de raisonnement mathématique conduisent à l'échec, nous nous posons la question : peut-on expliquer précisément cet échec ? L'adverbe « précisément » signifie qu'il semble assez évident que l'échec est dû à la trop grande imbrication entre la logique et les mathématiques, mais que nous souhaitons mettre en évidence de façon très précise cette imbrication. Faut-il d'ailleurs conclure de cet échec que la logique est inutile, ou les choses sont-elles plus subtiles ? On peut aussi interroger le fait que beaucoup de recherches portent principalement sur la démonstration en géométrie et que beaucoup d'enseignants et d'élèves pensent qu'il n'y a de démonstration qu'en géométrie.

Récemment un article de Thurston (1994) a traité en partie de la question qui nous intéresse de manière assez radicale. Il déclare que « Nous disposons de plusieurs façons innées de raisonner et d'assembler les choses qui sont liées à la façon dont on fait des déductions logiques : cause et effet (reliés à l'implication logique), contradiction ou négation, etc. » puis : « En fait, on rencontre souvent d'excellents mathématiciens qui ne connaissent même pas l'usage standard et formel des quantificateurs ("quel que soit" et "il existe"), bien que tous les mathématiciens effectuent certainement les raisonnements que ces écritures formelles codent. » Au XVIIème siècle déjà, Pascal déclare à propos de la géométrie « …elle seule sait les véritables règles du raisonnement, et sans s'arrêter aux règles du syllogisme qui sont tellement naturelles qu'on ne peut les ignorer… » (Pascal, 1985). De même, la vérification d'une démonstration (que l'on pense aux tentatives successives de démonstration du théorème de Fermat) ne se fait pas à l'aide d'une modélisation dans une théorie logique.

Apparemment donc, les règles de la logique seraient innées. Elles sont d'ailleurs utilisées dans les dialogues de Platon, et le raisonnement par l'absurde apparaît même antérieurement à l'époque de Platon, chez Parménide. Quant à Euclide, Gardies, (1997) après avoir étudié le raisonnement dans les Eléments écrit : : « Ainsi la chronologie rend-elle plus vraisemblable une influence des mathématiques contenues dans les Eléments sur les découvertes logiques […] que l'influence inverse […]il est évident que les géomètres grecs ont pu pratiquer par exemple le *calcul propositionnel*, comme M. Jourdain pratiquait la prose, bien avant que quiconque ait su en formaliser la moindre inférence ». Mais il souligne par ailleurs que certaines opérations comme la contraposition, sont ignorées des mathématiciens grecs. De même, en ce qui concerne les quantificateurs, l'étude des textes des premiers mathématiciens qui se sont affrontés au phénomène de la convergence uniforme montre que ce maniement n'est pas encore maîtrisé ; il serait d'ailleurs étonnant que la négation d'une proposition quantifiée un peu complexe, nécessaire en cas de raisonnement par l'absurde, relève entièrement d'une connaissance simplement sous-jacente au langage (pour des exemples de cette difficulté, cf Seidel, 1847 ou Stokes, 1847). Ce petit panorama historique conduit donc à estimer qu'en matière de raisonnement, tout n'est pas naturel, il y a quelque chose à apprendre, ce qui ne surprendra pas les enseignants, mais apparemment cet apprentissage ne passe pas par une étude de la logique autonome par rapport aux mathématiques, puisque d'ailleurs, les mathématiciens ont en général employé les règles logiques avant qu'elles soient formalisées.

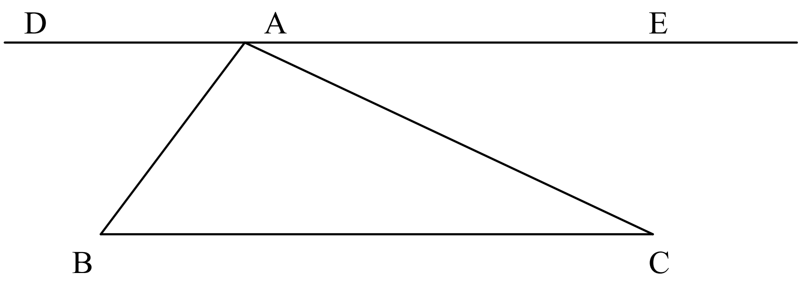
Notre étude mettra également en évidence le rôle primordial joué dans le raisonnement mathématique par « l'outillage » du mathématicien, composé non seulement de concepts, mais de notations, de routines de nature diverse, ceci à l'encontre d'un mentalisme à la Brouwer qui ferait de l'écrit la simple traduction d'une pensée entièrement autonome. Le présent article partage là-dessus la position de Bosch et Chevallard (1999) et aussi l'idée que c'est souvent en scrutant la mathématique elle-même, y compris son histoire, qu'on comprend le mieux les difficultés d'apprentissage.

3) Modélisation par le calcul des énoncés.

Dans ce paragraphe, je regroupe un grand nombre de modélisations ou analyses, didactiques ou non, qui voient la démonstration comme un enchaînement de syllogismes, ou, si l'on préfère, comme l'application des règles du modus ponens à des énoncés, c'est-à-dire à des phrases susceptibles d'être déclarées vraies ou fausses. Le rôle central dans le raisonnement est alors attribué à l'implication. Comme il s'agit en général de travaux bien connus, je n'insisterai pas sur les détails, par exemple sur la nécessité d'envisager le cas du raisonnement par l'absurde. Dans cette catégorie je regroupe donc aussi bien les analyses épistémologiques de Lakatos (1976) que les travaux de Duval (1991) qui portent sur la dimension cognitive du raisonnement, mais uniquement dans le cas du raisonnement déductif. Ces auteurs ne font pas de référence explicite au calcul des énoncés, mais c'est bien ce point de vue logique qui est en arrière plan de leurs travaux, c'est-à-dire que leur caractéristique commune essentielle est de s'intéresser à l'enchaînement syntaxique des énoncés en fonction de leur « statut opératoire » (Duval, loc cit) mais sans s'intéresser à leur structure interne. La notion de variable référant à un objet mathématique est absente.

En écartant ainsi de l'exposé le point de vue qui est le plus classique, je n'oublie pas qu'il apporte déjà beaucoup à l'étude de la démonstration. Pour le montrer et mettre déjà en évidence un certain nombre de questions, il suffira de traiter l'exemple d'une démonstration classique et très courte, celle du théorème sur la somme des angles d'un triangle traditionnellement attribuée à Pythagore.

> « Etant donné un triangle ABC, traçons la parallèle DE à BC passant par A. Les angles alternes internes sont égaux : d'une part celui sous DAB et celui sous ABC ; d'autre part, celui sous EAC et celui sous ACB. Ajoutons celui sous BAC aux deux autres. Les angles DAB, BAC, CAE, c'est-à-dire DAB, BAE, autrement dit deux droits, sont donc égaux aux trois angles du triangle. Donc les trois angles du triangle sont égaux à deux droits ».



Examinons dans quelle mesure cette démonstration peut être réécrite comme un enchaînement de déductions justifiées. Une remarque préliminaire s'impose : une suite de déductions valides schématisée par « Si H, alors H_1 », « si H_1, alors H_2 », … « si H_k, alors K » aura comme résultat final « Si H, alors K ». On reconnaît dans H « l'hypothèse » et dans K la « conclusion » de la démonstration. Viviane Durand-Guerrier (2005) fait remarquer qu'il est pourtant très rare en milieu scolaire que le résultat final soit énoncé sous forme d'une implication : on démontre, mais on n'explicite pas complètement ce qu'on a démontré. Souvent, seule la conclusion K est mise en valeur. Ceci pose une première question didactique.

Dans la démonstration de Pythagore, on part d'une donnée, celle d'un triangle, qui remplace manifestement l'hypothèse ; celle-ci implicite, consiste dans les propriétés qui définissent un triangle : les trois points A, B, C ne sont pas alignés. La frontière entre donnée et hypothèse peut être déplacée ; ici on pourrait partir de :

Donnée : trois points. *Hypothèse*: ils ne sont pas alignés.

On met ainsi en évidence qu'une démonstration part de la donnée d'objets mathématiques d'une part, et de propriétés supposées vraies de ces objets d'autre part, qui constituent les hypothèses. Dans l'exemple que nous étudions, les hypothèses ne sont pas absentes mais implicites.

On peut remarquer ensuite, et c'est particulièrement évident sous la forme que nous avons donnée à l'hypothèse, que celle-ci n'est pas utilisée dans la démonstration, contrairement à ce qu'explique traditionnellement l'enseignant à ses élèves. Il est facile de voir que cela provient du fait que l'existence de la parallèle en A à (BC) n'est pas justifiée. Voici alors un schéma d'enchaînement logique tentant de suivre au plus près la démonstration :

1 Comme A, B, C ne sont pas alignés, il existe une parallèle (DE) en A à (BC).

2 Les angles $\hat{B}$ et $B\hat{A}D$ d'une part, $\hat{C}$ et $C\hat{A}E$ d'autre part, sont alternes internes par rapport aux deux droites parallèles (BC) et (DE) et aux sécantes (AB) et (AC).

3) Ces angles sont égaux (propriétés des angles alternes-internes).

4) On a donc $\hat{B}+\hat{A}+\hat{C}=B\hat{A}D+B\hat{A}C+C\hat{A}E=D\hat{A}E$ cqfd.

On remarque que l'introduction de la parallèle, que nous venons de justifier, est évidemment la clé de la démonstration car elle permet d'appliquer les théorèmes classiques sur les angles alternes-internes. Pour un mathématicien c'est « l'idée » fondamentale de la démonstration. D'une manière générale, dans une démonstration, l'introduction d'objets apparaît souvent comme la clé qui permet de mener à bout le processus déductif.

Ce rôle fondamental des introductions d'objets permet de comprendre que pour un mathématicien, la démonstration ne se réduit certainement pas à une déduction, et justifie des recherches qui portent sur le lien entre découverte et démonstration (« unité cognitive », cf Garuti et al, 1998 ou Pedemonte 2005). D'ailleurs dans de nombreux cas, on peut constater que le lien entre l'énoncé à démontrer et les hypothèses choisies n'est pas évident : on trouvera dans Aigner et Ziegler (1998), au premier chapitre, six preuves de l'infinité des nombres premiers : à chaque fois les hypothèses sont différentes, et proviennent du choix antérieur d'une stratégie de démonstration, qui consiste en général à démontrer un énoncé dont l'énoncé initial est conséquence, par exemple que la somme des inverses des nombres premiers constitue une série divergente. Il y a ici à la fois introduction d'un objet (la série) et utilisation de la logique qui permet de voir le lien entre l'énoncé à démontrer et la stratégie choisie. Et bien sûr, on peut aussi choisir de raisonner par l'absurde.

L'analyse de la démonstration de Pythagore pourrait sembler terminée, mais en fait, on découvre, à la réflexion, un « lemme caché » suivant l'expression de Lakatos (loc cit). Pour se rendre compte de l'existence d'un point obscur dans l'enchaînement logique proposé ci-dessus, il suffit de remarquer qu'il est fort difficile à suivre sans utiliser la figure, essentiellement parce que les points D et E ne peuvent être placés au hasard sur la parallèle en A à BC : il faut que les angles ABC et BAD d'une part, BCA et CAE d'autre part soient des angles alternes internes, ce qui veut dire par définition que les demi-droites [AD) et [BC) sont de part et d'autre de (AB) et que de même, [AE) et [CB) sont de part et d'autre de (AC). Mais pour pouvoir conclure, il faut être sûr que [AD) et [AE) qui sont deux demi-droites de même origine portées par une même droite, sont opposées et non pas confondues. Ceci suppose le lemme suivant :

« Dans tout triangle ABC, la demi-droite d'origine A parallèle à (BC) et située de l'autre côté de (AB) par rapport à C et la demi-droite parallèle à (BC) et située de l'autre côté de (AC) par rapport à B sont deux demi-droites opposées »

Ce lemme est bien sûr évident sur le dessin. Contrairement à l'existence de la parallèle en A qui peut être facilement démontrée, il fait appel à des raisonnement d'un type inconnu d'Euclide, et qui supposent une axiomatique adaptée (cf Arsac 1998, p. 75). C'est pourquoi sans doute on n'en parle jamais.

4) Un contre-exemple.

Reprenons maintenant un exemple déjà publié dans Durand-Guerrier et Arsac (2003) montrant comment l'analyse en termes de logique propositionnelle, c'est-à-dire de façon élémentaire comme ci-dessus, sans tenir compte des variables qui figurent dans les énoncés, échoue à analyser certaines erreurs. Cet exemple consiste en une démonstration erronée du théorème des accroissements finis généralisés. Nous rappelons ci-dessous l'énoncé de ce théorème, ainsi que celui du théorème usuel des accroissements finis.

Théorème des accroissements finis :
Etant donné deux réels a et b tels que a < b et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé [a ; b], si f est continue sur l'intervalle fermé [a ; b], et dérivable sur l'intervalle ouvert]a ; b[, alors il existe un réel c dans l'intervalle]a ; b[tel que f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).

Théorème des accroissement finis généralisé :
Etant donné deux réels a et b tels que a < b et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé [a ; b], dérivables sur l'intervalle ouvert]a ; b[, si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle]a ; b[, alors il existe un réel c dans l'intervalle]a ; b[, tel que : $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Une démonstration, fréquemment rencontrée chez les étudiants en DEUG scientifique première année, consiste à déduire le deuxième théorème du premier, de la façon suivante :

La fonction *f* vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe *c* dans]*a ; b*[, tel que *f'(c)(b-a) = f(b)-f(a)*. De même *g* vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe *c* dans]*a ; b*[, tel que *g'(c)(b-a) = g(b)-g(a)*. Comme *g'* ne s'annule pas sur]*a ; b*[, *g'(c) ≠ 0* et donc *g(b) - g(a) ≠ 0*. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Cette démonstration est fausse ; on peut le montrer sur un exemple en considérant deux fonctions pour lesquelles on ne peut pas *choisir le même point c,* ce qui n'est pas si facile d'ailleurs puisque, pour exhiber un contre-exemple, on ne peut pas considérer deux

polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ; on peut par exemple prendre les fonctions qui à x associent respectivement x^2 et x^3 ou encore x^2 et $sinx$. Si l'on analyse cette démonstration, on ne trouve pas d'erreur dans l'enchaînement logique : les théorèmes sont appliqués correctement ; la non-validité ne dépend pas d'une mauvaise application de la règle du Modus Ponens. L'erreur peut être analysée de deux points de vue.
- dans le premier point de vue, on considère que la démonstration est, comme en géométrie une démonstration sur un exemple générique, constitué ici du couple des deux fonctions f et g (dans la démonstration du théorème usuel, on travaille sur une seule fonction f), mais que du fait qu'on va utiliser deux fois le même énoncé, il faut tenir compte d'une règle de manipulation des variables : quand on applique un énoncé du type « quel que soit a, il existe b… », il faut ajouter que b « dépend » de a. Dans ce premier point de vue *on étudie empiriquement les règles de fonctionnement des démonstrations concrètement mises en œuvre en mathématiques.*
- dans le deuxième point de vue, on interprète la démonstration non plus dans le cadre du calcul des propositions, mais dans celui du calcul des prédicats. Autrement dit, *on utilise un modèle théorique pour rendre compte de la pratique précédente.*

De ce point de vue, l'erreur consiste à utiliser une lettre de « variable liée », c'est-à-dire qui est dans le champ d'un quantificateur, à savoir ici la lettre c, comme s'il s'agissait d'un nom d'objet (ici un nombre réel) et du coup, à ne pas respecter les restrictions correspondantes sur les noms d'objets : à savoir, qu'une lettre déjà utilisée pour une instance d'un énoncé existentiel ne peut pas être utilisée pour désigner un autre objet. L'utilisation de cette règle permet de rectifier la démonstration précédente : on déduit une instance pour f avec par exemple la lettre r, puis une instance pour g avec par exemple la lettre s. On peut bien alors obtenir l'égalité des deux quotients, mais ceci ne prouve pas le résultat cherché.

Une manière d'éviter l'erreur, fréquemment rencontrée dans la classe de mathématiques, consiste à utiliser une lettre différente pour la variable liée dans chacune des deux instances de l'énoncé existentiel. Sur le plan logique, ceci n'a pas de statut théorique ; sur le plan mathématique non plus d'ailleurs, les règles de manipulation des lettres muettes en mathématiques étant analogues aux règles de manipulation de lettres de variables liées en logique. Il s'agit d'une pratique permettant, par l'utilisation d'un formalisme intermédiaire, d'attirer l'attention sur le fait que l'on ne peut pas considérer a priori qu'il s'agit du même élément pour les deux fonctions.

5) **Le calcul des prédicats et la démonstration naturelle.**

Le calcul des prédicats auquel nous venons de faire appel permet de donner toute sa place à la quantification et à la notion de variable. Il permet donc de modéliser les démonstrations mathématiques devant lesquelles échouait le calcul des propositions. Malheureusement, il y a unanimité pour souligner à la fois la complexité du calcul des prédicats et l'éloignement des démonstrations rédigées dans ce modèle des démonstrations mathématiques correspondantes, au point qu'on puisse bien imaginer que l'on possède une démonstration mathématique fausse d'un théorème exact sans que la présentation de la démonstration exacte dans le cadre du calcul des prédicats permette de déceler l'erreur. Ainsi, alors que le calcul des propositions était considéré comme superflu car trop évident, celui des prédicats se trouve écarté car trop compliqué!

Un modèle intermédiaire est fourni par les modèles de « déduction naturelle » en calcul des prédicats qui étend la « déduction naturelle » dans le calcul des énoncés. Comme il n'est pas question ici de se lancer dans l'exposé d'une théorie logique, nous nous contenterons d'indiquer les buts poursuivis par la déduction naturelle et comment elle peut nous guider dans notre recherche. Dans le calcul des énoncés, la déduction naturelle a pour but d'obtenir les démonstrations les plus « naturelles » possibles et la déduction naturelle dans le calcul des prédicats ajoute à la déduction naturelle dans le calcul des énoncés, des règles de manipulation des variables, dites règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs, qui sont destinées à modéliser au plus près les pratiques des mathématiciens. Nous pouvons donc exploiter la réflexion des logiciens sous la forme suivante : ces règles concernant les quantificateurs sont candidates à la description de la spécificité des raisonnements mathématiques. A la suite de Viviane Durand-Guerrier (Durand-Guerrier Arsac, 2003) qui a été la première à faire appel à la déduction naturelle pour étudier dans un but didactique la démonstration mathématique, nous donnons ci-dessous la formulation de Copi pour ces règles (Gochet Gribomond, 1990, Hottois, 1989)

1) I.U. Instantiation Universelle

$$\frac{\forall x f x}{f a}$$

a constante individuelle quelconque substituée à x
(notre commentaire : ce qui vaut pour tous vaut pour n'importe qui)

2) G.U. Généralisation Universelle

$$\frac{f a}{\forall x f x}$$

avec a, constante d'objet absolument quelconque choisie dans le domaine (de x), c'est-à-dire considérée uniquement du point de vue de son appartenance à ce domaine
(notre commentaire : on reconnaît ici la démonstration par élément générique)

3) G.E.Généralisation Existentielle

$$\frac{f a}{\exists x f x}$$

a constante quelconque
(notre commentaire : exhiber un élément qui vérifie la propriété permet d'affirmer l'existence d'au moins un tel élément)

4) I.E. Instantiation existentielle

$$\frac{\exists x f x}{f w}$$

Attention à l'interprétation de w : il s'agit d'une constante d'objet, mais dont on retient seulement qu'elle est le nom de l'un des objets qui, par hypothèse, doivent, (ou doit s'il n'y a qu'un objet de ce type) vérifier ∃xfx. Le plus souvent, on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on ignore l'identité précise de cet objet. c'est pour cela qu'il faut veiller à ce que le signe introduit (ici w) soit sans occurrences antérieures qui précisément le détermineraient (l'identifieraient) de façon abusive. "
(notre commentaire : affirmer l'existence d'au moins un élément qui vérifie une propriété donnée permet de considérer un tel élément)

N.B. Parmi les règles de restriction, se trouvent naturellement le respect de l'ordre d'introduction des lettres : si une instantiation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante.

6) Etude de la règle GU (généralisation universelle).

6.1) **Quelques remarques générales.**

Cette règle, suivant laquelle il suffit de démontrer une propriété pour un élément quelconque d'un ensemble pour pouvoir affirmer qu'elle est vraie pour tout élément apparaît comme tellement évidente et banale qu'il faut bien la modélisation par la déduction naturelle pour que nous la prenions en considération ! Du point de vue du vocabulaire, on parlera aussi bien d'élément « quelconque », « arbitraire », « générique », voire même « donné »[1]. On sait que le principe du raisonnement par « exemple générique » apparaît spontanément chez les élèves comme l'a montré Balacheff (1987).

La preuve par exemple générique concerne donc les assertions portant sur tous les éléments d'une classe, c'est-à-dire en mathématiques des propositions universellement quantifiées. On peut y distinguer deux aspects : la *nécessité* et la *généralité*. La nécessité fait référence au caractère contraignant du raisonnement : « est nécessaire ce qui ne peut être autrement » (Aristote, Lalande, 1926). Elle est assurée par l'enchaînement sans faille du raisonnement, ce que Duval (loc. cit.) étudie d'un point de vue cognitif dans le mécanisme du « pas de déduction», et est facilement modélisée par le calcul des énoncés. La généralité vise à garantir le caractère générique de l'exemple étudié. Elle peut être assurée de différentes manières, relativement indépendantes de la nécessité, et dépendantes du domaine mathématique envisagé. Elle peut résulter simplement d'une argumentation, c'est-à-dire ne pas faire référence, en tout cas pas explicitement, au raisonnement. C'est la qualité de cette argumentation qui permettra de reconnaître une démonstration, c'est-à-dire une preuve intellectuelle, et non une simple preuve empirique, suivant les classifications de N Balacheff (1987). Remarquons que parallèlement, l'enseignement utilise systématiquement des exemples « pour faire comprendre ». Un tel exemple est évidemment supposé avoir un caractère suffisamment générique, sinon il ne serait qu'une vérification dans un cas particulier, mais ce caractère générique n'a pas à être argumenté car le but n'est pas de démontrer, et le caractère générique est à admettre par les élèves sur la base de l'autorité de l'enseignant.

6.2**) Le cas de la géométrie.**

Au témoignage de Proclus, conforté par les travaux d'historiens comme Mueller (1981) ou Netz (1999), il est clair que pour Euclide, la démonstration géométrique consiste dans l'étude d'un exemple générique (pour plus de détails, cf Netz, loc.cit. et Arsac, 1999). D'après Netz, le caractère générique de la démonstration menée sur une figure était assuré par la possibilité de la répéter à volonté pour toute autre figure proposée. Herbrand énonce la même idée de façon tout à fait générale : « …quand nous disons qu'un théorème est vrai pour tout x, nous voulons dire que pour chaque x individuellement il est possible de répéter sa démonstration, qui peut être considérée seulement comme un prototype de chaque preuve individuelle » (cité par Longo 2009). Ceci rend bien compte du plan des démonstrations d'Euclide : Tout d'abord, Euclide énonce le théorème à démontrer, dans toute sa généralité, sans introduire de lettres, c'est ce que Proclus appelle « protasis », par exemple :

---

[1] Lorsque la géométrie descriptive était enseignée, et que l'on se posait le problème de la construction de l'intersection de deux surfaces, on vérifiait toujours que l'on était capable de construire un « point courant » de l'intersection, ce qui signifiait un point absolument quelconque, sans aucune particularité facilitant sa construction.

« Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés qui sous-tendent les angles égaux seront aussi égaux entre eux. »

Vient ensuite l' « esthesis » ; on se donne un triangle générique et on affirme que l'on va démontrer le résultat dans ce cas particulier :

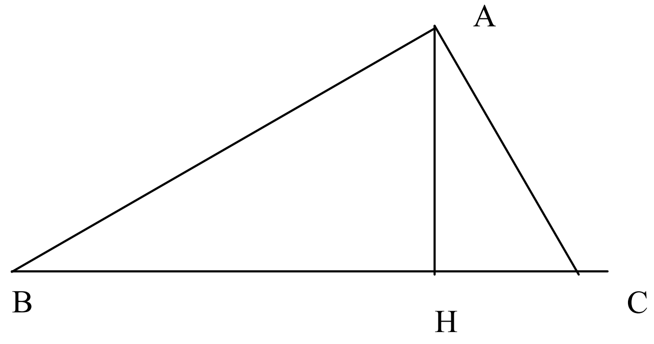
« Soit le triangle ABC ayant l'angle sous ABC égal à l'angle sous ACB. Je dis que le côté AB est égal au côté AC. »

Ensuite seulement vient la démonstration.

Cette question de la généralité dans les démonstrations géométriques est réglée depuis si longtemps qu'elle n'est plus abordée explicitement par les mathématiciens. Mais revenons à la classe du vingt-et-unième siècle. Lorsque l'enseignant insiste auprès des élèves pour qu'ils dessinent précisément un triangle quelconque, c'est-à-dire ni isocèle, ni rectangle, il essaie d'obtenir qu'ils tracent une figure générique en ce sens qu'on ne risque pas d'y lire d'autres propriétés que celles postulées dans les hypothèses du problème étudié. Cette précaution a-t-elle un statut théorique ? A priori non : on peut parfaitement démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes en s'appuyant sur une figure qui perceptivement représente un triangle isocèle, pourvu qu'on n'utilise pas le fait que deux côtés ou deux angles du triangle sont égaux. Ceci justifierait que l'on affirme, comme parfois, que la figure n'a aucun rôle dans le caractère de nécessité de la démonstration : elle aurait seulement l'utilité d'un changement de registre permettant de mettre en valeur visuellement les hypothèses, de déceler, par un travail propre à son registre, les énoncés à faire intervenir dans la démonstration. Quant à l'insistance de l'enseignant sur les figures génériques, elle n'aurait qu'un rôle pédagogique : éviter de lire sur le dessin des propriétés parasites, montrer que la démonstration doit être dans une certaine mesure indépendante du dessin.

En fait, cette position est illusoire car, comme nous l'avons vérifié sur l'exemple très simple de la somme des angles d'un triangle, la très grande majorité des démonstrations géométriques font appel à des propriétés lues sur la figure et qu'on ne saurait démontrer sans sortir du cadre de la géométrie traditionnelle (cf Arsac, 1998). Voici un autre exemple plus simple et plus général : considérons un triangle ABC rectangle en A et la hauteur issue de A qui coupe (BC) en H. Plusieurs démonstrations élémentaires du théorème de Pythagore, ainsi que la démonstration d'Euclide elle-même, utilisent le fait que H est entre B et C, qui permet par exemple d'écrire que :

aire (ABC)=aire(ABH)+aire(ACH), ou bien que BC=BH+HC.



Si l'on veut que le résultat de ces démonstrations ait un caractère de nécessité, il faut donc en particulier que H soit *nécessairement* entre B et C. Si l'on renonce à se placer dans un cadre de géométrie affine, où le problème, moyennant le choix d'un système d'axes devient un problème algébrique, ce caractère de nécessité peut être établi de deux manières.

- On peut se placer dans un cadre axiomatique « complet », comme celui défini par Hilbert (1899), on disposera alors d'un cadre théorique dans lequel on pourra démontrer que H est entre B et C par un raisonnement déductif ne renvoyant en aucune manière à la lecture de la figure (cf Arsac 1998).
- Mais en général, comme le faisait Euclide lui-même, on utilise cette propriété sans l'énoncer. Comme le dit Netz (1999, p. 35) dans son commentaire des démonstrations d'Euclide : « Les propriétés que la perception extrait du diagramme forment un sous-ensemble vrai des propriétés réelles de l'objet mathématique. ». Dans ce cas, si l'on pose explicitement la question de la vérité de cette affirmation, la réponse spontanée est que c'est évident. Il s'agit maintenant d'analyser cette évidence.

Afin d'écarter toute équivoque dans l'étude de cette question, rappelons qu'il est classique depuis Platon de distinguer la figure tracée sur le papier (ou l'écran) qu'il est naturel de désigner comme un dessin, de l'objet géométrique « abstrait » sur lequel porte en fait la démonstration. Alors, le problème porte bien sur le dessin : comme personne n'a jamais vraiment contemplé l'objet idéal platonicien, c'est bien sur le dessin, qui en est son représentant, tout imparfait soit-il, que se fait la constatation du fait que H est entre B et C. *C'est donc le dessin qui doit avoir un caractère générique* et attester de la nécessité du fait que H est entre B et C. Autrement dit, il faut que dans tout dessin H soit entre B et C, et même qu'on puisse affirmer que tout dessin contradictoire est faux. Mais comment s'en assurer ? Nous emprunterons à N. Rouche (1989) la formule suivante, concernant ce qu'il appelle la « pensée mathématique immédiate » ou les jugements « d'une seule venue » et qui recouvre en particulier ce que nous caractérisé comme des évidences lues sur le dessin.

« Une double condition semble nécessaire et suffisante pour qu'une proposition soit vécue comme évidente, à savoir
a) Qu'on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier ;
b) que la pensée s'engage sans accroc dans l'imagination de tous les cas particuliers. »
(Rouche, 1989, p. 14).

Bien sûr, les remarques de Rouche constituent plus une description d'un phénomène qu'une explication, et nous laissons la question ouverte sans savoir de quel domaine de la pensée et de la recherche elle relève.

La démonstration géométrique usuelle utilise donc des constatations sur le dessin qui ne peuvent être incorporées dans le déroulement du raisonnement que parce qu'elles présentent un caractère de nécessité et ce caractère de nécessité renvoie à une certitude sur le caractère générique de ces constats graphiques. Serfati (1999, p. 151) avance l'hypothèse que c'est l'expérience du caractère invariant de ces constatations sur le dessin qui a amené chez les mathématiciens grecs l'idée d'un objet abstrait dont les différents dessins ne seraient que des « représentations concrètes contingentes » et donc finalement une « conception platonicienne forte des mathématiques ». Ces constatations sur le dessin, fondées sur la familiarité avec le dessin géométrique, constituent un stock d'évidences qui sont **une partie implicite** de ce que l'on appelle souvent dans l'enseignement **la boîte à outils**.

La démonstration géométrique classique ne peut donc être considérée comme un enchaînement d'inférences qu'à condition que certaines de ces inférences soient du type « On voit sur le dessin que D et E sont de part et d'autre de A ». Bien sûr, ce type d'inférences où « l'énoncé tiers » est lu sur le dessin n'est pas explicité en général.

La conviction du caractère générique des constatations sur le dessin peut être renforcée par l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique, mais il reste toujours le problème de la séparation entre ce qu'il est légitime de lire sur le dessin et ce qu'il n'est pas légitime d'y lire, la conclusion en particulier (pour une étude plus détaillée, cf Arsac 1999). Ce problème relève à la fois de la transposition et du contrat didactique.

Par ces dernières remarques, liées à la prise en compte du problème de la généralité, l'analyse ci-dessus diffère de celle de Duval. Mais cette différence porte sur la dimension épistémologique de l'analyse sans remettre nécessairement en cause son aspect didactique, ceci pour deux raisons :

- tout d'abord, l'analyse de Duval se situe à un niveau où l'on peut supposer que l'apprentissage des évidences graphiques ou des « jugements d'une seule venue », est déjà réalisé. Nos remarques soulignent simplement que cet apprentissage préalable doit être acquis pour que l'analyse cognitive de Duval s'applique.
- D'autre part, personne ne songe (ou ne songe plus ?) à enseigner une géométrie sur une base axiomatique rigoureuse, à la Hilbert, ce qui n'était d'ailleurs pas le projet de Hilbert lui-même, lequel s'attache à « l'analyse de notre intuition de l'espace ». Cette analyse consiste pour lui à découvrir, en particulier, les relations logiques entre les diverse énoncés géométriques vrais, y compris ceux considérés alors comme évidents, mais le but n'est pas d'inventer une nouvelle façon de faire ou d'enseigner la géométrie plane (Arsac, 1998)

Nous avons mentionné le fait que l'on distingue parfois dans une démonstration géométrique différents cas de figure. On peut remarquer que cette distinction entre deux ou trois cas et son caractère exhaustif ne sont en général fondés que sur des évidences graphiques. Lorsqu'on admet, souvent implicitement et toujours sans argumentation explicite, qu'il n'y a qu'un seul cas de figure, ce qui précède montre que l'on admet en fait que le dessin que l'on a tracé a un caractère générique !

Ce genre de question n'est pas abordé en didactique, sans doute parce qu'effectivement, on sait depuis longtemps que la démonstration géométrique classique assure la généralité de ce qu'elle démontre, ce qui revient à la réduire au seul aspect de la nécessité. Cet escamotage du problème de la généralité est nécessaire si l'on veut éviter les redoutables problèmes dus à la lecture sur le dessin de certaines informations nécessaires à la démonstration. Cependant la prise de conscience du fait que c'est le dessin, et non l'objet géométrique abstrait, qui doit avoir un caractère générique a les avantages suivants :

- elle montre que l'on peut faire de la géométrie, sans résoudre le problème philosophique du statut de l'objet géométrique (Arsac, 1999, p. 363 et 385-87), que chacun peut résoudre à sa manière sans que cela influe sur la pratique de la démonstration géométrique.
- Elle rappelle l'enracinement de la géométrie dans la perception, et souligne, du point de vue pédagogique la continuité entre la familiarisation avec le dessin géométrique qui remonte à l'école primaire et la démonstration géométrique. Elle fait le lien entre le point de vue de Rouche et celui de Duval.

En ce qui concerne la démonstration elle-même, nous pouvons tirer les conclusions suivantes de cette brève étude : en géométrie, le problème de la généralité n'est pas soulevé, la démonstration utilise des prémisses lues sur le dessin, mais pratiquement toujours de façon implicite. Ainsi ce qui reste visible, c'est un raisonnement déductif, essentiellement en langue naturelle, ce qui explique que l'exemple de la démonstration géométrique soit privilégié pour son apparente transparence logique.

Une dernière remarque concerne ce que l'on peut appeler la « figure complétée », c'est-à-dire dans laquelle ont été ajoutées à la figure initiale toutes les constructions nécessaires à la démonstration ; autrement dit, c'est la figure complétée par les introductions d'objets nécessaires à la démonstration. Aussi bien pour les Grecs que pour Hilbert, cette figure complétée peut être considérée à elle seule comme la démonstration. Ceci souligne à nouveau le rôle fondamental des introductions d'objets et le fait que la démonstration ne se réduit pas d'abord, pour les mathématiciens, à un enchaînement logique.

6.3**) Le cas du calcul littéral : « il n'y a pas de démonstration en algèbre ».**

Cette phrase, prononcée par un historien des mathématiques, est reproduite ici à titre de provocation…

Précisons ici que nous entendons le mot algèbre en son sens élémentaire traditionnel, pratiquement synonyme de calcul littéral. Afin d'illustrer le double aspect de nécessité et de généralité, voici deux démonstrations d'un énoncé d'arithmétique (Garuti et al, 1998).

Enoncé : *la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4.*

Première démonstration, par un élève de cinquième :

« Je fais quelques essais : 3+5=8, 1+3=4, 5+7=12 ; je vois que je peux écrire ces additions de la manière suivante : 3+5=3+1+5-1=4+4=8 (de même pour les autres). C'est la même chose que d'additionner le nombre pair intermédiaire à lui-même, et le double d'un nombre pair est toujours un multiple de 4. »

Deuxième démonstration, par un élève de seconde :

« Je peux écrire deux nombres impairs consécutifs sous la forme $2k+1$ et $2k+3$ ainsi je trouve :

$$(2k+1)+(2k+3)=2k+1+2k+3=4k+4=4(k+1)$$

Le nombre obtenu est un multiple de 4. »

Examinons ces deux démonstrations : dans la première, l'élève, après une vérification sur trois exemples, montre en se concentrant sur le premier, 3+5=8, que l'on peut présenter le calcul de manière à ce qu'il ait une valeur générale en introduisant le nombre pair « intermédiaire » entre deux impairs consécutifs. Remarquons que cette argumentation de généralité est tout à fait explicite et particulière au problème considéré. Elle correspond tout à fait à la définition de Balacheff de l'exemple générique :

> « L'exemple générique consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent, non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe. » (Balacheff 1987)

Dans la deuxième, l'élève traite directement un « cas général » grâce à la notation littérale, c'est l'emploi de cette notation, dont l'origine remonte à Viète, au seizième siècle, qui assure la généralité : la lettre k représente un nombre entier quelconque, donc le calcul est général, mais comme cette argumentation, contrairement à la première, n'est pas liée à un problème particulier, et qu'elle est connue comme classique, elle n'est pas reproduite, il n'y a donc pas d'argumentation explicite de généralité. Cette question de la généralité n'apparaît explicitement dans la classe qu'aux débuts de l'apprentissage du calcul littéral, quand l'enseignant y fait allusion en rappelant « traitez un cas général, calculez avec des lettres ! »

Quant à la nécessité, elle n'apparaît pas à première vue dans aucune des deux démonstrations. La deuxième par exemple se réduit apparemment à un calcul. C'est que le calcul n'est autre qu'un raisonnement automatisé. Si l'on voulait mettre en évidence ce raisonnement, il faudrait revenir aux justifications du calcul, en commençant par écrire en détail :

$$(2k+1)+(2k+3)=(2k+1)+(3+2k)=2k+\big(1+(3+2k)\big)=2k+\big((1+3)+2k\big)=2k+(4+2k)=$$
$$2k+(2k+4)=(2k+2k)+4=(2+2)k+4=4k+4=4k+4.1=4(k+1).$$

On pourrait ensuite justifier chaque égalité en citant les propriétés (associativité, distributivité, commutativité) auxquelles on a fait appel. Celles-ci jouent le rôle d'énoncés tiers et permettent de retrouver, à condition de détailler assez, la structure habituelle d'un raisonnement par enchaînement de pas de déduction. Bien sûr, personne ne fait cela, car le but des règles de calcul est précisément d'éviter d'avoir à le faire. Ceci peut aboutir à une « perte de sens » c'est-à-dire qu'à force de faire des calculs on finit par oublier qu'ils représentent en fait des raisonnements.

En résumé, dans ces deux démonstrations, la nécessité est assurée par l'usage des règles de calcul, la généralité est assurée dans le premier cas par une argumentation explicite particulière, dans le deuxième par le recours à une méthode, la notation littérale, universellement admise en mathématiques, et qui n'est donc plus argumentée. Ainsi s'explique que dans la deuxième démonstration, qui a la forme la plus courante, **aussi bien la nécessité que la généralité soient apparemment absentes**. De là provient l'idée « **qu'il n'y a pas de démonstration en algèbre** ». Effectivement, les routines de la notation littérale et du calcul algébrique font disparaître toute intervention explicite de la logique, contrairement à la géométrie. Plus généralement, dans une démonstration complexe, les parties qui comportent du calcul sont celles où toute mention explicite de la logique disparaît.

Revenons sur cet exemple : nous avons dit un peu rapidement que dans la démonstration classique de calcul littéral, toute allusion explicite aux énoncés tiers qui justifient le calcul est supprimée. En réalité, il n'en est pas ainsi lorsque ces règles sont encore en cours d'apprentissage : alors le professeur en exigera la mention explicite. Il pourra par exemple trouver un peu « rapide » l'égalité $(2k+1)+(2k+3)=4k+4$ et exiger un commentaire. On reconnaît là le fonctionnement du contrat didactique et la transformation progressive du « nouveau » en « ancien » qui n'est plus objet d'apprentissage. La disparition apparente du raisonnement est dans ce cas un signe d'un bon apprentissage…

Une remarque essentielle est la suivante : le fait de savoir choisir un élément quelconque en géométrie n'apprend pas pour autant à savoir le faire en « algèbre ». Plus savamment, l'utilisation de GU en algèbre et en géométrie est fondamentalement différente, et fait appel à des symbolismes, figure dans un cas, notation littérale dans l'autre, bien distincts, le deuxième, découvert des siècles après le premier, est bien une invention mathématique. D'autre part, une étude historique montrerait sans doute que les lois de l'algèbre ont été « découvertes » en quelque sorte expérimentalement et non pas comme application de règles de la logique.

6.4) **Donnée ou hypothèse (à nouveau) ?**

Du fait que la démonstration d'un énoncé universel se fait en considérant un élément générique, elle commence par la « donnée » d'un tel élément. Ainsi, pour démontrer que dans tout triangle les médianes sont concourantes, on commence par la « donnée » d'un triangle quelconque, ce qui explique qu'il soit plus naturel de parler de *donnée* que d'hypothèse. Parfois, l'énoncé du théorème préfigure et met déjà en place cette méthode de démonstration : « soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors f est minorée et majorée sur $[a,b]$ ». La démonstration commencera par « soit donnée une fonction f continue sur un segment $[a,b]$ » ; la donnée de cette fonction continue tient lieu d'hypothèse, la conclusion restant « alors f est majorée et minorée sur $[a,b]$ ». Quant à l'énoncé complet quantifié, il serait « quels que soient les nombres réels a et b, et la fonction f, si $a<b$ et si f est continue sur $[a,b]$, elle est majorée et minorée sur $[a,b]$ ». Cette forme lourde, dans laquelle on distingue et quantifie les données a, b, f et l'hypothèse (la fonction f est continue), est rarement explicitée. De même, l'énoncé classique du théorème des accroissements finis dissimule également une quantification universelle implicite. En algèbre, comme on vient de le voir, c'est la notation littérale qui permet de travailler sur un nombre quelconque ; par exemple, pour démontrer que « pour tous réels a et b, on a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ », on commencera par « soit deux réels a et b », en ajoutant éventuellement « quelconques ». La donnée est ici celle de a et b.

Ainsi, la démonstration d'un énoncé universel commence par une introduction d'objet, mais qui est en quelque sorte automatique pour le mathématicien suffisamment expérimenté, et donc distincte de l'introduction d'objets qui, comme la parallèle à la base dans le cas de la preuve relative à la somme des angles représentent « les idées » qui font tout marcher. Mais bien entendu, comme les élèves ne sont pas en général des mathématiciens expérimentés, il y a ici matière à apprentissage, tout au moins à partir du moment où une part suffisante d'initiative leur est laissée. De plus, dans certains cas, cette introduction d'objet générique est moins évidente. Considérons par exemple l'énoncé « l'ensemble des nombres premiers est infini ». Du point de vue d'un mathématicien contemporain, on peut introduire la donnée « ensemble des nombres naturels premiers », ce qui n'était pas concevable pour un mathématicien grec car il s'agit d'un ensemble dont on va montrer qu'il est « actuellement » infini. Pratiquement, on revient à l'équivalence « infini=non fini » et on démontre en fait : quel que soit l'ensemble fini de nombres naturels que l'on considère, il ne contient pas tous les nombres premiers. Alors la donnée est celle d'un ensemble fini de naturels $n_1,n_2,...,n_p$. Après l'introduction de cet objet vient celle de l'objet qui représente l'idée de la démonstration, le nombre $n_1n_2,...n_p+1$. Cette démonstration « simple » a donc une structure logique assez complexe si on ne se limite pas à l'analyse en termes d'énoncés. En revanche, partons de l'énoncé d'Euclide (livre IX, prop 20) qui évite l'infini :

« Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée. »

Ici, l'introduction de la multitude « proposée » $n_1,n_2,...,n_p$ s'impose comme la donnée de départ. Mais on pourra trouver au chapitre 1 de Aigner et Zigler (1998) six démonstrations différentes du fait que l'ensemble des nombres premiers est infini : pour chacune de ces démonstrations les données changent suivant les stratégies adoptées pour résoudre le problème. Ce lien entre le choix des hypothèses et des données et celui de la stratégie de démonstration renvoie à nouveau au concept d'unité cognitive (cf par ex Pedemonte 2005) : la rédaction de la démonstration finale n'est pas indépendante du processus de recherche qui l'a précédée.

6.5**) Le cas de l'analyse : limite et continuité. Le cas de l'algèbre linéaire**

Bien que l'esprit de cet exposé soit de montrer à partir d'exemples précis comment fonctionne le raisonnement dans chaque domaine particulier des mathématiques, nous regroupons analyse et algèbre linéaire à la fois pour gagner du temps et parce qu'on y rencontre dans les deux cas des énoncés, d'utilisation fréquente, où la quantification universelle est explicite, ce qui n'est que rarement le cas en géométrie et même en algèbre au sens élémentaire où nous l'avons entendu. Ce sont par exemple la définition de la limite ou de la continuité et celle de l'indépendance linéaire :

$\forall\varepsilon,\exists\eta$...etc. ou : $\forall\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n,\sum_1^n\lambda_i v_i=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$.

Lorsqu'on veut démontrer un énoncé du type précédent, on doit, comme nous venons de le voir, « se donner » un exemplaire quelconque de l'objet universellement quantifié (règle GU). Et l'expérience prouve là aussi que cette donnée d'un objet quelconque ne va pas de soi, même si c'est une pratique déjà expérimentée en géométrie et en calcul littéral : le contexte change tout. Mais laissons la parole à un expert : il s'agit d'un étudiant marocain en deuxième année d'université interviewé par Hamid Behaj (1999) lors d'une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage à long terme de l'algèbre linéaire. A une question sur les démonstrations importantes à donner dans un cours d'algèbre linéaire, il répond :

> « Surtout en ce qui concerne la famille libre et la base. La famille libre, est comme une petite démarche pour la famille génératrice, c'est-à-dire écrire un élément sous forme d'une combinaison linéaire de cette famille génératrice. Ce n'est pas forcément une écriture unique. Par exemple, l'étudiant qui voit « quel que soit l'élément appartenant à E », pour la famille qui est considérée, il va croire qu'on peut prendre une autre famille. Il faut chercher à le convaincre, que la notion "on prend quelque chose de quelconque" c'est en même temps quelque chose de fixé. Comme par exemple, en analyse, on dit, "pour un certain *x* fixé", il y a ceux qui comprennent que *x* fixé est un *x* donné et bien défini, ils ne mettent pas en relation *x* fixé et *x* quelconque ».

Ici l'étudiant fait le rapport entre des raisonnements en analyse et en algèbre et la fin de son intervention montre qu'il a bien compris la démonstration par élément générique qui utilise un « *x* fixé » qui pour beaucoup d'étudiants ne peut pas être « quelconque » puisqu'il est fixé. Il y a ici une difficulté liée au fait que le raisonnement mathématique amène à mettre en relation « quelconque », « étant donné » « quel que soit » etc…, ce qui n'est pas évident dans le langage courant : il n'y a pas congruence entre le vocabulaire et la pratique du raisonnement.

En analyse, la difficulté de compréhension et de mise en œuvre du caractère générique de ε est bien perçue par les auteurs de manuels, ce qui donne lieu à une grande créativité didactique à l'occasion de laquelle on voit surgir une mise en scène analogue à celle de la logique dialogique : celui qui propose la démonstration (le proposant) affronte un opposant qui fixe ε. Le fait que, que vu la forme du résultat final à obtenir, $|f(x)-l|<\varepsilon$, le défi consiste en somme à réaliser cette inégalité même si ε est très petit, donnait lieu auparavant à la formule traditionnelle « ε aussi petit qu'on veut » qui fait penser au raisonnement par « expérience cruciale » de Balacheff (1987).

L'idée de l'appel à un interlocuteur imaginaire pour justifier des règles de manipulation des variables dans un contexte analogue n'est pas nouvelle. Voici l'article exhaustion dû à d'Alembert, dans la grande Encyclopédie.

> **EXHAUSTION,** s. f. *terme de Mathématiques.* La méthode d'*exhaustion* est une manière de prouver l'égalité de deux grandeurs, en faisant voir que leur différence est plus petite qu'aucune grandeur assignable ; & en employant, pour le démontrer, la réduction à l'absurde.
> Ce n'est pourtant pas parce que l'on y réduit à l'absurde, que l'on a donné à cette méthode le nom de *méthode d'exhaustion :* mais comme l'on s'en sert pour démontrer qu'il existe un rapport d'égalité entre deux grandeurs, lorsqu'on ne peut pas le prouver directement, on se restraint à faire voir qu'en supposant l'une plus grande ou plus petite que l'autre, on tombe dans une absurdité évidente : afin d'y parvenir, on permet à ceux qui nient l'égalité supposée, de déterminer une différence à volonté ; & on leur démontre que la différence qui existeroit entre ces grandeurs (en cas qu'il y en eût) seroit plus petite que la différence assignée. (Encyclopédie, article exhaustion).

Au début du vingtième siècle, on retrouve la même idée chez Hardy (1908) :

Définition 4 :

> If, when any positive number δ, however small, is assigned, we can choose $y_0(\delta)$ so that, for all values of y different from zero but numerically less than or equal to $y_0(\delta)$, $\phi(y)$ differs from l by less than δ, then we can say that $\phi(y)$ tends to the limit l as y tends to 0, and write $\lim_{y\to 0}\phi(y) = l$. (Hardy, 1908, p. 175).

En voici une version contemporaine :

> Définition. Soit *u* une suite réelle. Soit *l* un réel. On dit que u admet *l* pour limite si,pour tout ε de $\mathbf{R}^{+*}$,il existe un naturel *N* tel que,quel que soit le naturel *n*, si *n*>*N*, alors $|l - \mathbf{u}_\mathbf{n}| < \varepsilon$.
> […] De façon imagée, il faut considérer « qu'on » nous impose un certain ε, sans bienveillance particulière, et que nous n'avons aucun droit sur cet ε ; il faut nous en accommoder et trouver un entier N qui lui convienne. (Haug, 2000, p. 79).

Un autre type de commentaire est le suivant :

> La démonstration du fait que f(x) a pour limite un nombre connu l quand x tend vers a pose un problème d'existence comportant une donnée ε (nombre positif) et une inconnue α (nombre positif). (Cagnac, 1963, p. 69).

Dans la suite de cet ouvrage, l'auteur insiste beaucoup sur le changement de statut des lettres quand l'énoncé en $\forall\varepsilon,\exists\eta$...est une hypothèse, c'est-à-dire est considéré comme vrai. Dans ce cas en effet, on peut « choisir » ε : ce n'est plus une donnée, et η n'est plus une inconnue. Cette insistance est assez exceptionnelle : en dehors de cette référence nous n'avons pas rencontré d'autre manuel soulignant ce fait. Or comme dans beaucoup de démonstrations sur les limites, l'hypothèse et la conclusion présentent une grande similitude formelle, il y a là une difficulté d'apprentissage évidente liée à la confusion entre la forme d'un énoncé et son statut logique, que Duval (1991) a bien identifiée en géométrie. Toutefois, en géométrie, l'étude de Duval montre que le problème se pose au niveau des énoncés, mais pas spécialement à celui des variables.

Conclusions sur l'analyse : le caractère générique de ε semble présenter une difficulté particulière, dont témoigne l'insistance de nombreuses définitions sur cet aspect. L'appel au dialogue avec un adversaire incrédule, qui est fréquent, fait songer aux logiques dialogiques. Le fait que, dans un énoncé en $\forall\varepsilon,\exists\eta...$, η « dépend » de ε est souligné dans de nombreuses définitions. Nous y revenons au paragraphe suivant.

En revanche, le changement de statut des lettres suivant que la définition de la limite (ou de l'indépendance linéaire) figure en hypothèse ou en conclusion est peu abordé. Cette grosse difficulté fait de façon surprenante l'objet de beaucoup moins de commentaires que la précédente.

7) La « règle de dépendance ». Quelques faits de la confrontation des mathématiciens aux raisonnements en (ε,η) à l'occasion du phénomène de convergence uniforme.

Nous appelons « règle de dépendance » le fait que, dans un énoncé en $\forall\varepsilon,\exists\eta...$, η « dépend » de ε. Cette règle qui est soulignée dans de nombreuses définitions relatives aux limites joue un grand rôle en analyse depuis le dix-neuvième siècle où son oubli a été à la source de nombreuses erreurs.

7.1) Remarques préliminaires.

Plusieurs remarques s'imposent :

- tout d'abord, le fait que dans un énoncé du type « quel que soit X, il existe Y », affirmé comme vrai, « Y dépend de X », en un sens d'ailleurs courant du mot « dépendre », est une évidence en dehors du contexte mathématique : si chaque homme a un nom, le nom dépend de l'homme.
- Du point de vue de la modélisation logique, cette règle se réduit à des règles purement syntaxiques sur les noms à attribuer aux variables ; Nous avons déjà étudié (Durand-Guerrier et Arsac, 2003 et 2005) les réactions des enseignants universitaires à une erreur due à l'oubli de la règle de dépendance commise par un étudiant en topologie générale : seule une minorité des enseignants universitaires interrogés adopte ce point de vue syntaxique pour prévenir ce type d'erreur chez les étudiants.
- Le titre de notre article de 2005, « An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule » pourrait conduire à penser que cette règle intervient seulement en analyse. Or, avec un peu de réflexion, on constate que, par exemple, elle intervient sans cesse en géométrie. Mais elle est complètement cachée, et il y a à cela deux raisons : la pratique de la quantification implicite et le recours au dessin. La quantification implicite masque le fait que l'énoncé « tout segment a un milieu » devient, une fois restituée la quantification : « Quels que

soient A et B, distincts, il existe un point I de la droite (AB) tel que IA=IB » et qu'il y a plus généralement en géométrie, tout comme en analyse, des quantités d'énoncés du type « quel que soit X, il existe Y ». Le recours au dessin fait que personne ne doute que le milieu dépende du segment considéré car c'est graphiquement évident.

- Les erreurs auxquelles a donné lieu l'application de cette règle, ont suffisamment frappé les mathématiciens pour qu'ils inventent une notation indiciée comme par exemple η_ε pour exprimer cette dépendance. On en a vu ci-dessus un exemple avec la définition de la limite par Hardy. L'affaire semble donc assez importante pour qu'on lui consacre une notation spéciale d'ailleurs abusive en ce sens qu'il ne s'agit pas d'une dépendance fonctionnelle. La plupart des universitaires pensent que cette notation est importante pour éviter les erreurs mais ceci est contestable (Durand-Guerrier et Arsac, loc citati)
- Dès qu'une démonstration est un peu complexe, ce qui n'était pas le cas de l'exemple choisi avec le théorème des accroissements finis généralisés, toutes nos observations, ainsi que l'étude historique montrent que ce n'est pas en général l'analyse du raisonnement qui conduit à déceler une erreur mais un soupçon global sur le résultat démontré, essentiellement l'existence d'un contre-exemple.

Afin d'approfondir cette question, remarquons qu'on peut trouver en géométrie des situations dans lesquelles, comme pour le théorème des accroissements finis généralisés, on a à appliquer deux fois de suite un même énoncé en « quel que soit X, il existe Y », comme celui affirmant l'existence du milieu d'un segment. Supposons par exemple que nous voulions démontrer quelque propriété de la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle. La donnée sera celle d'un triangle ABC et du point de vue de la structure logique du raisonnement, nous sommes devant la même situation que pour la démonstration fausse du théorème des accroissements finis généralisé étudiée au §4 puisqu'il s'agit d'appliquer deux fois le théorème relatif à l'existence du milieu. L'erreur analogue consisterait ici à appeler I à la fois le milieu de [AB] et celui de [AC], et bien sûr, personne ne la commet ! Mais pourquoi ? Tout simplement parce qu'on peut constater l'usage implicite et universel de la règle suivante en géométrie : si deux points sont distincts sur la figure, on doit leur attribuer des noms différents. Ici on les appellera par exemple, suivant l'usage courant, C' et B'. Cette règle suffit en général à assurer le respect des règles syntaxiques sur l'usage des variables, elle élimine donc complètement de la géométrie les problèmes de manipulation des variables si importants en analyse. Elle est tellement évidente qu'on peut l'utiliser en toute innocence en n'ayant absolument pas conscience qu'on fait un appel au dessin.

Ainsi, le contexte géométrique, et plus précisément la présence du dessin rend la règle de dépendance si évidente qu'elle n'est même pas explicitée. Bien qu'elle intervienne autant qu'en analyse, elle disparaît tout comme le modus ponens dans le calcul algébrique. Il y a bien une manipulation des variables en géométrie comme en analyse, mais le contexte la rend évidente, invisible. La géométrie est une cachottière qui, à l'aide du recours au dessin, ne laisse paraître que le raisonnement déductif ! Nous pouvons synthétiser ce qui précède sous la forme suivante :

a) la figure est un registre dans lequel sont traduites les étapes de la démonstration et dans lequel le fait que quand on change X, Y change aussi, est en général une évidence graphique
b) en géométrie, Y est en général fonction de X, et plus précisément constructible au sens géométrique à partir de X, ce qui montre bien la dépendance.

c) Très souvent, cette dépendance fonctionnelle se traduit par des notations systématiques, de façon fort variée : si ABC et A'B'C' sont deux triangles, leurs orthocentres seront notées H et H'. Dans un même triangle ABC, les milieux des côtés pourront être notés A' (milieu de BC), B', C' ou I, J, K, et avant de considérer la droite (B'C'), personne n'introduit l'énoncé tiers « par deux points distincts il passe une droite et une seule », qui imposerait de vérifier que B' et C' sont distincts : tout ceci est lu sur le dessin.

A contrario, le problème de la dépendance se posera plus probablement dans des contextes où une ou plusieurs des conditions suivantes sont réunies :
a') L'absence d'un registre dans lequel on peut lire la dépendance.
b') une dépendance non fonctionnelle de Y par rapport à X.
c') L'absence d'une notation rappelant la dépendance, qu'elle soit fonctionnelle ou non.
d') Une manipulation des variables ne tenant pas compte des règles d'instanciation.

Ces conditions constituent seulement une première tentative de caractérisation des contextes où l'application de la dépendance peut être problématique. Dans l'état actuel de notre travail, nous ne pouvons pas dire si elles sont exhaustives. On trouvera dans Durand-Guerrier et Arsac, (2005) un exemple en algèbre linéaire, où ces conditions sont remplies et où effectivement l'erreur apparaît presqu'à coup sûr.

Une fois de plus, c'est la nature du contexte mathématique, y compris le registre symbolique qu'il utilise, figures pour la géométrie, notations en analyse, caractère fonctionnel ou non, qui modifie complètement les conditions de fonctionnement de la logique.

7.2) Le problème historique de la convergence uniforme.

La question de la convergence uniforme apparaît historiquement sous la forme suivante : étant donné une série de fonctions continues simplement convergente sur un intervalle de R, la somme de cette série est-elle également continue ? Au début du dix-neuvième siècle, la réponse apparaît a priori positive compte tenu du « principe de continuité » dû à Leibniz. Ce principe, à vrai dire très large puisqu'il s'applique également à la philosophie et aux mathématiques est traduit par exemple par l'épistémologue anglais Whewell de la façon suivante : « ce qui est vrai jusqu'à la limite est vrai à la limite. » (Lakatos, 1976, p. 128, ou p. 166 dans la traduction française). Conformément à cela, Cauchy affirme d'abord dans son cours de l'Ecole polytechnique que la réponse est positive (Cauchy, 1821, p. 131-132). Et, comme le remarque Seidel (1847), le premier découvreur du phénomène de convergence uniforme, la démonstration ne semble pas très difficile en décomposant la somme de la série en somme partielle et reste. Voici son exposé de la démonstration fausse de Cauchy :

> « La preuve, sur laquelle repose cette Proposition à l'endroit où elle apparaît, consiste essentiellement en la remarque que l'on peut séparer la somme de la série totale en la somme d'un nombre n de ses premiers termes et en celle complémentaire de tous les suivants. D'après l'hypothèse de convergence de la série, quel que soit x cette dernière somme peut être rendue aussi petite que l'on veut en augmentant n. ; il en est de même de la variation qu'elle subira, lorsque x est faiblement changé ; l'incrément de la somme des n premiers termes diminue sans fin en même temps que la variation de x, de toutes façons, puisqu'elle est constituée d'un nombre fini de fonctions continues de x : il semble donc que l'on puisse choisir n suffisamment grand et l'incrément de x suffisamment petit pour que les variations des 2 parties, donc aussi de la série totale,

> puissent être rendues inférieures à une grandeur aussi petite que l'on veut, et donc la continuité de la somme de la série serait démontrée […] »

Cette démonstration est nécessairement fausse car, remarque Seidel, les séries de Fourier fournissent des exemples de séries de fonctions continues (trigonométriques) dont la somme est discontinue en certains points. Notons que, étant donné que l'article de Seidel est publié dans une revue scientifique, il pense qu'un mathématicien contemporain serait susceptible de produire une telle démonstration. Il ne s'agit donc pas là d'une mise en garde envers des débutants. On remarquera que dans cette rédaction ne figurent ni ε, ni *N* ni aucune inégalité, ce qui est conforme à la pratique de Cauchy. Seidel va reprendre la question en prenant l'option contraire, donc de la manière très contemporaine que nous rappelons ci-dessous, sans souci de respecter les notations de Seidel et sans préciser les ensembles de définition pour nous concentrer sur les problèmes de majoration.

Soit $f(x) = \sum_0^\infty u_n(x)$, il s'agit de démontrer la continuité de f en un point x_0. Pour cela, on écrit, en notant S_n et R_n la somme partielle et le reste de la série :

$$f(x) - f(x_0) = S_n(x) - S_n(x_0) + R_n(x) - R_n(x_0), \text{ d'où}$$
$$|f(x) - f(x_0)| \le |S_n(x) - S_n(x_0)| + |R_n(x)| + |R_n(x_0)|.$$

La convergence de la série entraîne en particulier que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout *x*, il existe *N* tel que, pour tout *x*, $n > N \Rightarrow |R_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$. La remarque essentielle de Seidel est que *N dépend de x* (mais Seidel n'introduit pas de notation du type N_x ou $N_{\varepsilon,x}$) et qu'il peut arriver que quand *x* décrit l'ensemble des valeurs permises, l'ensemble des valeurs de *N* ne soit pas majoré, ce qu'il appelle la convergence infiniment lente. Au contraire, si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble de ces valeurs est majoré, alors on peut trouver un nombre *N* valable pour tous les *x*, autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe *N indépendant de x,* tel que, pour tout x, $n > N \Rightarrow |R_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$. On dit dans ce cas qu'il y a *convergence uniforme* et on achève alors la démonstration e fixant tout d'abord une telle valeur de n et en utilisant ensuite la continuité de la somme partielle, ce qui permet d'obtenir $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tous les *x* d'un voisinage de x_0, d'où la continuité de *f* en ce point. La convergence uniforme est donc une condition suffisante pour que la somme de la série soit continue.

C'est bien la question de la dépendance qui est centrale ici, et il est évident que dans une démonstration fausse comme celle que Seidel propose à la critique où ne sont explicités ni ε ni *N*, il est bien difficile de percevoir que *N* dépend de *x* ! Nous allons examiner maintenant comment Abel échoue aussi devant ce problème ; nous avons choisi Abel car :

- C'est un mathématicien de première envergure.
- Il écrit en français, ses œuvres sont facilement accessibles sur Gallica.fr, ce qui permet au lecteur de s'y référer et de se faire éventuellement une opinion personnelle.
- C'est un admirateur de Cauchy.

Or Abel (1826) constate comme Seidel que le théorème de Cauchy est erroné : il fournit un contre-exemple :

« la série

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - ...$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x, m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce. » (Abel, 1826, note p.224)

Ce contre-exemple est apparemment classique à l'époque, car Cauchy (1853) l'envisagera également par la suite en rectifiant son théorème, mais, contrairement à Seidel, Abel ne voit pas où est l'erreur. Toutefois, il entreprend de démontrer la continuité de la somme pour une série entière, ce qui est exact, mais à partir d'une démonstration dont nous allons voir qu'elle est fausse. Il généralise ensuite ce résultat, au moyen de la même démonstration et obtient cette fois-ci un théorème faux.

Notons pour commencer que la démonstration d'Abel apparaît déjà comme difficile à lire pour un mathématicien comme Liouville qui déclare « qu'il trouvait assez difficile à exposer (et même à comprendre) la démonstration qu'Abel a donnée de ce théorème important » (Liouville cité par Dugac, 2003, p. 108). Ceci soulève un problème : vu les imprécisions de rédaction communes aux mathématiciens de l'époque, se comprenaient-ils entre eux ? Nous laisserons cette question ouverte même si la remarque de Liouville incite à répondre « pas toujours ».

Revenons à Abel ; quelques précisions préliminaires faciliteront sa lecture. Tout d'abord, il utilise une définition d'une fonction continue qui lui est particulière, ce qui souligne le fait que cette notion n'est pas encore unifiée à l'époque. Abel écrit :

« *Définition*. Une fonction *fx* sera dite *fonction continue* de x entre les limites $x=a$ et $x=b$, si pour une valeur quelconque de x comprise entre ces limites, la quantité $f(x-\beta)$, pour des valeurs toujours décroissantes de β, s'approche indéfiniment de la limite *fx*. »

Le choix de cette définition est peut-être motivé par le fait qu'Abel désire montrer qu'une série entière réelle est continue y compris à l'extrémité positive de l'intervalle de convergence où il s'agit donc de continuité à gauche, donc β est certainement supposé positif. Ceci dit, la continuité aux autres points de l'intervalle ouvert de définition suppose d'envisager des valeurs négatives de β, et l'on ne peut que conclure comme Liouville que la démonstration n'est pas facile à suivre.

Comme les mathématiciens de son temps, Abel n'utilise pas de notation pour la valeur absolue et n'en parle même pas, alors que Cauchy l'appelle « valeur numérique ». Ses notations sont les suivantes : il désigne par $\varphi\alpha = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + ... + v_{m-1}\alpha^{m-1}$ et $\psi\alpha = v_m\alpha^m + v_{m+1}\alpha^{m+1} + ...$la somme partielle et le reste de rang m d'une série entière, sans mentionner l'indice m, là où nous écririons : $\varphi_m\alpha$ et $\psi_m\alpha$. En vu démontrer que la somme $f\alpha = \varphi_m\alpha + \psi_m\alpha$ est continue, il remarque :

« On pourra donc pour toute valeur de α, égale ou inférieure à δ, prendre m assez grand pour qu'on ait$\psi\alpha = \omega$. » Il a précisé auparavant que : « pour abréger, on représentera dans ce mémoire par ω une quantité qui peut être plus petite que toute quantité donnée ».

Ainsi, il exprime que le reste peut être pris aussi petit qu'on veut, et la phrase, quantifiée en α, indique pour nous que la majoration dépend de α mais l'absence de N et de ε ne permet pas de voir la dépendance. Abel achève alors la démonstration ainsi :

« Or $f\alpha = \varphi\alpha + \psi\alpha$, donc $f\alpha - f(\alpha - \beta) = \varphi\alpha - \varphi(\alpha - \beta) + \omega$.
De plus, $\varphi\alpha$ étant une fonction entière de α, on peut prendre β assez petit pour que

$$\varphi\alpha - \varphi(\alpha - \beta) = \omega \;;$$

donc on a de même

$$f\alpha - f(\alpha - \beta) = \omega,$$

ce qu'il fallait démontrer. »

La notation ω joue un peu le rôle de notre o, mais sans explicitation des variables : nous écririons successivement $\omega(n,\alpha)$ puis $\omega(\beta)$. La notation ω occulte ces dépendances et Abel ne relève pas du tout que le premier ω ne dépend pas en fait de x. Le principe de charité qui irait jusqu'à supposer qu'Abel s'en soit aperçu mais n'en ait pas fait mention ne s'applique pas ici car :

- d'une part, dans ce cas, Abel aurait certainement trouvé pourquoi l'énoncé de Cauchy était faux.
- D'autre part, Abel démontre ensuite une généralisation du théorème précédent dans laquelle les coefficients υ_k de la série deviennent des fonctions de la variable maintenant nommée x. Il recopie la démonstration antérieure et obtient cette fois-ci une majoration $\psi x < \left(\dfrac{\alpha}{\delta}\right)^m \theta x$ (le lecteur pourra ajouter des valeurs absolues). Ici, il a précisé la présence de x. Mais la démonstration se poursuit de la même manière : « Il s'ensuit qu'on peut prendre m assez grand pour qu'on ait $\psi x = \omega$ ». La conclusion est cette fois-ci fausse (pour un contre-exemple explicite, cf Dugac, 2003)

La difficulté à laquelle se heurte ici Abel est due à la notion de variable en analyse telle qu'elle est utilisée à cette époque : il y a des variables qui tendent vers zéro de façon autonome, en ce sens qu'elles ne sont pas fonction d'une autre variable. Il y a sous-jacente une représentation cinématique, mais sans que le temps soit jamais explicité, ce qui explique la définition de ω. Le fait de désigner par une seule notation tout ce qui tend vers zéro accentue encore la confusion qui est dans le concept de variable lui-même et bien sûr, Abel admet implicitement qu'une somme de variables qui tendent vers zéro tend elle-même vers zéro, alors que la simple explicitation des variables montrerait que l'on a affaire à une somme $\varpi(n,\alpha) + \omega(\beta)$! La position d'Abel introduisant une notation qui renforce les ambiguïtés est un peu extrême, mais cette difficulté concerne tous les mathématiciens de l'époque. Pour eux, comme pour les étudiants qui en restent à un modèle cinématique de la limite, les limites sont toujours monotones : une variable qui tend vers zéro est une variable qui *décroît* vers zéro.

Synthèse : les démonstrations d'Abel montrent bien les problèmes engendrés par la non-explicitation systématique des variables due au fait qu'à l'époque la notion de fonction existe mais est une notion seconde par rapport à la notion première de variable propre à l'analyse. Dans le cas d'Abel, les problèmes soulevés par la notation ω montrent comment peuvent se cumuler et s'imbriquer un problème conceptuel avec un choix de symbolisme. Contrairement à ce que nous avons vu antérieurement où un symbolisme bien choisi facilitait le raisonnement, ici le symbolisme accroît la difficulté déjà inhérente au concept de variable en analyse de l'époque.

CONCLUSIONS.

1) On peut rendre compte des raisonnements mathématiques par les théories logiques, à condition de ne pas se limiter à la logique des énoncés.

Commentaire: *il en résulte qu'on peut en général analyser une erreur de raisonnement grâce à un modèle logique. Mais il n'en résulte pas qu'un apprentissage de la logique soit une remédiation. En revanche la logique présente l'avantage d'une théorie unifiée du raisonnement mathématique.*

.

2) L'expérience historique montre que les mathématiciens ont dû apprendre certains types de raisonnement modélisables par la logique.

Commentaire : *mais on peut conjecturer que le raisonnement est apparu en mathématique avant sa modélisation par une théorie logique.*

3) Dans chaque domaine des mathématiques on peut identifier des règles de raisonnement, des méthodes, des symbolismes, qui permettent de raisonner et qui sont des créations mathématiques.

Commentaire. *Cette conclusion, la principale de notre travail, peut aussi être présentée sous la forme suivante : suivant les domaines mathématiques considérés ce sont différents aspects de la logique qui apparaissent. Typiquement la démonstration en géométrie plane exhibe presque uniquement le raisonnement déductif, ce qui explique qu'elle soit le lieu privilégié de son apprentissage, alors que le calcul littéral fait disparaître toute trace explicite de la logique. Chaque domaine mathématique rend plus ou moins visibles certains aspects logiques du raisonnement en leur donnant de plus une forme très liée au contexte mathématique. Tout travail didactique sur l'apprentissage du raisonnement dans un domaine mathématique donné soit donc s'appuyer d'abord sur une description très précise des règles de raisonnement propres au domaine. Les exemples que nous avons donnés constituent des analyses encore assez grossières dont le seul but est d'étayer la conclusion ci-dessus. Celle-ci souligne la dimension de savoir-faire de l'activité mathématique, ce qui n'est pas contradictoire avec le fait que les mathématiques constituent évidemment un savoir.*

4) On n'apprend pas à raisonner en mathématiques, ni historiquement ni personnellement par l'étude de la théorie logique indépendamment des mathématiques.

Commentaire : *ceci tire la leçon, d'une part de l'antériorité historique du raisonnement mathématique par rapport aux théories logiques correspondantes, d'autre part des échecs de l'enseignement de la logique en vue d'améliorer le raisonnement mathématique. Mais ceci n'exclut pas a priori toute efficacité d'une réflexion logique dans un contexte mathématique donné.*

5) Les règles de la logique utilisées dans le raisonnement mathématiques sont pour la plupart évidentes en dehors de leur contexte mathématique, mais cette connaissance ne permet pas de les appliquer dans un domaine donné des mathématiques.

Bibliographie

Abel NH, 1826, Recherches sur la série $1+\frac{mx}{1}+\frac{m(m-1)x^2}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{1.2.3}+...$, Journal reine angew. Math. 1, 311-339, reproduit dans les Œuvres complètes, Kristiana (Grondhal), 1881, p. 219-250. Accessible par le site gallica-math.

Aigner M., Ziegler GM, 1998, *Proofs of the book*, Springer, Berlin. Traduction française par N. Puech et JM Morvan, *Raisonnements divins*, Springer-Verlag France, 2002.

Aristote, *Organon, III, Les premiers analytiques,* trad J Tricot, Vrin Paris, 1995

Arsac G, 1992, L'universalité des mathématiques, *bulletin de l'APMEP* n°385, p. 401-418

Arsac G, 1998, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*. Aléas, Lyon, 125 pages.

Arsac G, 1999, Variations et variables de la démonstration géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 19/3, p. 357-390.

Balacheff, N., 1987, Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics,* vol. 18, n° 2, Mai 1977, p. 147-176.

Behaj H, 1999, Thèse : Elements de structurations à propos de l'enseignement et l'apprentissage à long terme de l'algèbre linéaire, Université de Fès, Maroc.

Bosch M, Chevallard Y, 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble. p. 77-123.

CAGNAC G., RAMIS E., COMMEAU J. (1963*), Nouveau cours de mathématiques spéciales, tome 2, Analyse*. PARIS : MASSON.

Cauchy, A-L, 1821, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 1ère partie, *Analyse algébrique*, Debure, Paris.

Cauchy, A-L, 1853, «Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Tome XXXVI, p. 454-9, 14 Mars 1853*). Ce texte est reproduit dans les *œuvres complètes de Cauchy (Première Série, tome XII, p. 30-36).*

Changeux J-P, Connes A, 1989, *Matière à pensée*, Odile Jacob, Paris.

Dugac, 2003, *Histoire de l'analyse*, Vuibert, Paris

Durand-Guerrier V et Arsac G, 2003, Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spéficités de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 23/3, La Pensée Sauvage, Grenoble. p. 295-342.

Durand-Guerrier V et Arsac G, 2005, An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, *Educ stud in maths*, 60, 149-172.

DURAND-GUERRIER, V. 2005, *Recherches sur l?articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l?interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, Habilitation à diriger des recherches, IREM de Lyon.

Duval R. (1991), *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration.* Ed stud in mathematics, 22, 233-261.

Gardies J-L, 1997, *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*, Vrin, Paris.

Garuti, R.; Boero,P. & Lemut, E.: 1998, Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof', *Proceedings of PME-XXII,* vol. 2, pp. 345-352

GOCHET P., GRIBOMONT P. (1990), *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*. Vol. 1. Hermès,

HARDY (1908), *A course of pure mathematics*, Cambridge University Press, dixième édition, 1952.

Haug P-J,. 2000, *Mathématiques pour l'étudiant scientifique*, tome 1. Paris : EDP Sciences.

Hemily, 2006, *Textes fondateurs du calcul infinitésimal*, Ellipses, Paris.

Hilbert, 1899, *Les fondements de la géométrie*, traduction de la dixième édition, Paul Rossier éditeur, Dunod, Paris, 1971, 311 pages.

HOTTOIS G. (1989), *Penser la logique.* De Boeck Université.

Lakatos 1, 1976, *Proofs and refutations*, Cambridge. Trad française *Preuves et Réfutations,* Actualités scientifiques et industrielles n°1412, Hermann (1984) Paris.

LALANDE A, 1902, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presses Universitaires de France, Paris, tome 2.

Longo 2009, Theorems as constructive vision, in Fou-Lai Lin, Feng-Jui Hsieh, Gila Hanna, Michael de Villiers, (eds) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education,* The Department of Mathematics, National Taiwan Normal UniversityTaipei, Taiwan

Mueller, I, 1981, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid"s Elements*, Cambridge (Massachussets).

Netz R, 1999, *The Shaping of deduction in greek mathematics*, a study in cognitive history, Cambridge, 327 pages.

Pascal, 1985, *De l'esprit géométrique*, Flammarion.

Pedemonte B, 2005, Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration, ? *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 25/3, La Pensée Sauvage, Grenoble. p. 313-348.

Rouche N, 1989, Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Lyon. 496 pages, p.9-38.

Seidel, 1847, Note über eine Eigenschaft der Reihen welche discontinuirliche Functionen darstellen » (Note sur une propriété des séries qui représentent des fonctions discontinues) *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*. (pages 381-393).

Serfati M, 1999, La dialectique de l'indéterminé, de Viète et Frege à Russell, *Actes du séminaire d'histoire et épistémologie des mathématiques*, IREM de Paris Sud, p. 145-174.

Stokes GG, 1847, On critical values of the sums of periodic series, *Trans. Cambridge Philos. S*oc., 8, p. 533-583, reproduit in *Stokes, Math and phys. Papers*, Cambridge University Press, 1880, vol I, p. 236-313.

Thurston W P, 1994, On proof and progress in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc*. 30 (1994) p. 161-177 ; trad française : 1995, Preuve et progrès en mathématiques, *Repères IREM*,n°21, p. 7-26.