PROJET DE « SOCLE »

La licence de MATHEMATIQUES

Société Mathématique de France
Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles
Société Française de Statistique

Contexte général

Afin d'éviter de trop grands écarts dans les différentes universités, la SMF, la SMAI et la SFdS proposent un cadre général pour la licence de mathématiques. Elles suggèrent une liste de notions que **tout étudiant doit maîtriser** lorsqu'il a obtenu une telle licence.

Une licence de mathématiques doit comporter, sur l'ensemble des six semestres d'études, **au moins une moitié – en horaire et crédits – d'enseignements de mathématiques**. Il est essentiel qu'elle contienne également, dans des volumes très significatifs, des enseignements d'ouverture et des enseignements portant sur les autres disciplines scientifiques, avec des orientations pouvant varier selon les situations et les objectifs choisis.

Il n'est pas question de définir un programme pour les enseignements de mathématiques. L'approche retenue est de présenter un **« socle »**, ensemble de chapitres ou thèmes qui doivent être traités au cours des six semestres de formation, qui ne sont en rien des intitulés d'Unités d'Enseignement, et dont le poids est estimé **à un tiers environ** du volume total de la licence, toutes disciplines confondues.

Un cursus complet de licence ne saurait donc se limiter à la présentation des éléments figurant dans ce socle. **D'autres points** seront inscrits dans chaque maquette, selon des modalités – enseignement obligatoire ou optionnel, place dans les six semestres, etc - variables selon les établissements. Bien entendu, un bon étudiant motivé peut suivre plus d'unités que les 180 crédits nécessaires pour une licence.

L'efficacité de l'enseignement de mathématiques en licence impose de veiller à la taille des Unités d'Enseignement en mathématiques, déterminée par les établissements mais qui ne doit pas être trop petite, à la répartition des enseignements, **qui ne doivent pas conduire à trop de morcellement**, et à l'organisation du contrôle des connaissances qui n'est pas une fin en soi et ne doit pas conduire à une dépense de temps et d'énergie démesurée.

Les enseignants de master, de préparation au CAPES, pourront donc s'appuyer sur ce socle de connaissances en principe acquises quelle que soit l'origine de leurs étudiants. Les étudiants poursuivant vers d'autres voies ou d'autres métiers en disposeront comme base de références, permettant d'exploiter leurs acquis en mathématiques.

Il y a plusieurs choix cohérents pour l'ordre dans lequel ces différentes notions sont présentées ainsi que pour la présentation de chacune d'entre elles. La pertinence de ces choix pédagogiques dépend souvent de contraintes locales. Même si quelques hypothèses sur cette organisation figurent ci-dessous, celle-ci est bien évidemment laissée à l'initiative de chaque université et de chaque équipe pédagogique. À elles de décider dans quelle mesure ces choix seront imposés aux enseignants.

L'existence d'unités indépendantes incite à construire des enseignements partant de résultats admis, ou justifiés heuristiquement, à partir desquels les autres résultats du cours sont démontrés correctement. Par exemple un cours d'intégration peut parfaitement reposer sur le théorème de Lebesgue alors que celui-ci ne sera démontré qu'en master.

La formation en licence doit permettre à l'étudiant d'améliorer sa perception de la démarche mathématique, en particulier :

- mise en place des « objets mathématiques », l'introduction d'une notion étant justifiée par des exemples, des motivations liées à son utilisation... , avant même l'énoncé de la définition et la présentation des théorèmes,
- rôle central de la démonstration, même si tout démontrer n'est pas un objectif en soi,
- organisation du raisonnement, ce qui suppose une certaine familiarisation avec les outils de la logique,
- compréhension des structures (en particulier à l'occasion des cours d'algèbre),
- mise en œuvre informatique des calculs formels, numériques, statistiques quand le sujet s'y prête.

Ce socle vise quatre grands objectifs :

- une bonne appropriation de R, R^2, R^3 du point de vue algébrique, analytique et géométrique,
- la résolution d'équations (linéaires, algébriques, différentielles),
- la notion d'approximation (dans divers cadres),
- l'étude de l'aléatoire (probabilités et statistiques) et du traitement de données.

Chaque étudiant ayant obtenu la licence de mathématiques doit, pour cela, posséder les connaissances correspondant aux neuf thèmes ci-après. Il doit être capable, pour chacun d'eux, de réaliser son activité mathématique, que l'on peut traduire par « exercice/problème/capacité de calcul », avec une capacité réelle d'autonomie. Les contenus précis à traiter doivent bien sûr l'être en partant des programmes du lycée.

Eléments du socle

0) Connaissances transversales

a. **Nombres réels**. Bornes supérieure et inférieure**. Nombres complexes**, se rappeler que l'introduction en terminale n'est pas suffisante pour entraîner une vraie familiarité.

b. **Langage ensembliste**. La présentation des probabilités peut être un bon moment pour une étude un peu plus systématique.

c. **Logique élémentaire, quantificateurs**. Par exemple en liaison avec les manipulations sur les limites.

d. **Notion d'algorithme**. Donner des exemples classiques.

1) Géométrie

Droites et plans. Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte. Changements de repère, transformations affines. Courbes paramétrées. Coordonnées polaires. Longueur, courbure. Notions élémentaires sur les coniques, applications en mécanique et en physique.

2) Algèbre linéaire

a. **Théorie élémentaire.** Calcul matriciel, méthode du pivot. Espace vectoriel et applications linéaires. Rang.

b. **Déterminants.** Calcul et emploi pour l'indépendance linéaire et le calcul de volumes.

c. **Théorie spectrale.** Valeurs propres et vecteurs propres, diagonalisation. Exemples d'applications : systèmes dynamiques, systèmes différentiels, analyse des données.

d. **Algèbre bilinéaire.** Formes bilinéaires et quadratiques, espaces euclidiens, espaces de Hilbert. Applications aux coniques.

3) Fonctions d'une variable

a. **Théorie élémentaire.** Etude locale (développements limités), étude globale (théorème des accroissements finis,…), fonctions usuelles.

b. **Intégrales et primitives.** Définition de l'intégrale et interprétation comme aire (la démonstration de l'existence n'est pas indispensable). Méthodes de calcul et de calcul approché. Théorème de la convergence dominée et applications.

c. **Equations différentielles.** Equations linéaires du premier ordre et du second ordre à coefficients constants (utilisation des nombres complexes et quelques applications en physique). Méthodes de résolution numériques. Exemples d'équations différentielles plus générales.

d. **Intégrales généralisées**.

4) Fonctions de plusieurs variables

a. Représentations graphiques. Surfaces, lignes de niveau, champs de vecteurs.

b. Calcul différentiel. Différentielle et plan tangent, recherche d'extrémum, formule de Taylor à l'ordre 2, utilisation du théorème des fonctions implicites. Gradient.

c. Intégrales multiples. Enoncé des théorèmes de Fubini et du changement de variables, calcul d'aires et de volumes.

5) Suites et séries

a. **Suites et séries numériques**.

b. **Suites et séries de fonctions**. Séries entières, séries de Fourier.

6) Probabilités et statistique

a. **Probabilités élémentaires.** Conditionnement, indépendance. Variables aléatoires discrètes et continues dans R et R^2. Convergence (loi faible et théorème central limite), usage pour les approximations. Simulation aléatoire, principe et applications.

b. **Statistique descriptive et inférentielle.** Analyse en composantes principales (en liaison avec le point 2.c), notion de qualité d'une représentation résumée de données. Modélisation aléatoire en statistique. Estimation et intervalle de confiance, problématique et exemple de tests (sur les paramètres : proportion, moyenne, variance ; du χ_2). Application aux sondages.

7) Analyse numérique

Méthodes de résolution de systèmes linéaires, d'équations f(x) = 0. Calculs approchés d'intégrales, de solutions d'équations différentielles. Mise en œuvre numérique par un logiciel adapté.

8) Arithmétique

Arithmétique de **Z**. Arithmétique des polynômes. **Z**/n**Z**. Corps finis (cas de Z/pZ). Applications aux codes ou à la cryptographie.

9) Structures de base

Notion de groupe, groupe des permutations, groupes de la géométrie (des déplacements, conservant une figure donnée), exemples de structures quotient.

En outre, la formation devra obligatoirement comprendre :

- l'apprentissage d'un logiciel de calcul (calcul formel ou calcul scientifique)
- la conduite de situation(s) de modélisation

Tous les thèmes peuvent donner lieu à des exercices de géométrie, en particulier 0 (nombres complexes), 2, 3, 4, 8 (racines de l'unité, géométries finies pour le codage), 5, 7, 9. Plusieurs d'entre eux, en particulier les thèmes 2 (théorie spectrale, formes quadratiques), 3, 4, 5, 7 (calculs explicites de moyennes, logiciels de simulation, méthodes de type Monte-Carlo) ont des applications en, ou utilisent, les probabilités et l'analyse numérique.

Il est également intéressant que la formation inclue certains problèmes classiques de la physique qui ont un fort aspect mathématique : mécanique classique, rudiments de relativité restreinte, de mécanique quantique pour des problèmes en dimension finie, de propagation de la chaleur...

Au delà du socle

Ce socle n'inclut pas de larges pans des mathématiques, accessibles pourtant par les étudiants de licence et pouvant figurer, selon les maquettes de chaque université, au titre de la nécessaire part « hors socle » de l'enseignement.

Il peut s'agir aussi bien d'approfondissements de notions faisant partie du « socle » que de « nouvelles notions », donnant lieu à un premier apprentissage, approfondissements et nouveautés pouvant dans certains cas être intimement associés.

Voici une **liste purement indicative** de telles nouvelles notions.

Algèbre générale
Applications industrielles de la statistique (fiabilité, contrôle de qualité)
Calcul différentiel
Equations aux dérivées partielles
Fonctions de variable complexe
Géométrie différentielle
Géométrie élémentaire et analytique
Histoire des mathématiques
Intégrales de surface, flux, formule de Green-Riemann
Intégration : transformées de Fourier, espaces L^2
Introduction aux mathématiques de la décision
Mathématiques discrètes : dénombrement, graphes, …
Méthodes numériques (pour l'algèbre linéaire, l'optimisation, …)
Modèles linéaires en statistique
Optimisation et analyse convexe
Processus stochastiques
Réseaux – pavages
Statistique non paramétrique
Systèmes différentiels et stabilité des solutions
Théorie des nombres
Topologie (de $\mathbf{R}^n$)