Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université : éléments pour une didactique du structuralisme algébrique

Thomas **HAUSBERGER**

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, CNRS, Univ. Montpellier

thomas.hausberger@umontpellier.fr

Résumé

Il est question ici de la rupture liée à l'accès à la pensée structuraliste à la transition entre licence et master de mathématiques. Je présente mes analyses épistémologiques du structuralisme algébrique, en appui sur le travail des historiens et des philosophes, et montre comment ces analyses, croisées avec des analyses didactiques outillées par la Théorie des situations didactiques, la Théorie anthropologique du didactique ou l'approche sémiotique de Duval, permettent de comprendre certaines difficultés des étudiants et de nourrir les ingénieries didactiques.

Je pose ainsi les premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : la dialectique objets-structures, prise en deux grands mouvements d'abstraction, l'idéalisation et la thématisation, distingués à la suite de Cavaillès et Lautman ; sa relation avec la dialectique syntaxe-sémantique ; la notion de praxéologie structuraliste, fondée sur la dimension méthodologique de la pensée structuraliste ; la notion de Parcours d'Etude et de Recherche formel dont l'enjeu est de faire vivre la dialectique objets-structures pour développer des praxéologies structuralistes. Enfin, j'expose mon travail d'ingénierie didactique autour de la « théorie des banquets », qui met en œuvre l'idée d'une phénoménologie didactique des structures mathématiques, empruntée à Freudenthal, pour enseigner la pensée structuraliste.

Mots clés

Structuralisme mathématique ; didactique de l'algèbre abstraite ; dialectique objets-structures ; praxéologies structuralistes

1. Prolégomènes

De mathématicien à chercheur en didactique des mathématiques

Ce texte reprend les grandes lignes de l'exposé que j'ai donné au séminaire national de l'ARDM en mars 2017 et dont la vidéo est disponible en ligne[1]. Cet exposé de présentation de mes travaux d'habilitation à diriger des recherches avait pour objectif de situer le contexte particulier de mes recherches et d'en dégager les grands axes, afin de faciliter l'accès à ma note de synthèse (Hausberger, 2016 HDR), pour le lecteur souhaitant approfondir.

Mes recherches se caractérisent en effet par le niveau avancé du curriculum auquel elles se situent (fin de licence, début de master de mathématiques pures) et par leur fort ancrage épistémologique, en appui sur le travail des historiens et philosophes. Ceci s'explique par ma trajectoire professionnelle particulière (j'ai mené des recherches en théorie des nombres - géométrie arithmétique, dans le cadre du programme de Langlands, pendant une dizaine d'années tout en

[1] http://mc.univ-paris-diderot.fr/videos/MEDIA170330124836611/multimedia/MEDIA170330124836611.mp4

investissant progressivement les champs de l'épistémologie puis de la didactique) et par un choix délibéré d'inscrire mes travaux en didactique dans un domaine et sur un thème qui me permettent de réinvestir mon expertise scientifique et ma pratique de mathématicien.

Le choix de l'algèbre abstraite est également lié à mon expérience d'enseignant à l'université : le module obligatoire d'algèbre de troisième année de licence de mathématiques m'a été confié pendant 8 années consécutives, sur des contenus variant de la théorie des groupes à celle des anneaux et des corps, selon l'habilitation en cours. Ceci fut l'occasion d'explorer tout d'abord le potentiel d'une approche favorisant les TICE (Guin & Hausberger, 2008), mais sans véritable appui sur les théories didactiques (ma reconversion thématique est ultérieure à l'écriture de cet ouvrage). Pendant cette période, j'ai pu constater d'importantes difficultés rencontrées par les étudiants dans l'apprentissage des structures algébriques, en phase avec la situation au niveau international, telle que la renvoie la littérature en éducation mathématique :

> The teaching of abstract algebra is a disaster, and this remains true almost independently of the quality of the lectures (Leron & Dubinsky, 1995, p. 227).

Cette citation, bien qu'un peu caricaturale, laisse entrevoir la présence d'un obstacle de nature épistémologique, résistant à l'action didactique. Plus tard, j'appellerai cet obstacle « le défi de la pensée structuraliste » (Hausberger, 2012). Si les recherches en didactique de l'enseignement supérieur portant sur l'algèbre linéaire (Dorier, 2000, p. 36) et la théorie des groupes (Lajoie & Mura, 2004) ont permis d'identifier des spécificités des apprentissages algébriques à l'université, notamment autour de la notion de concepts Formalisateurs-Unificateurs-Généralisateurs-Simplificateurs (FUGS ; Robert 1987), il est question ici d'une autre rupture. En effet, lors de l'entrée dans la pensée structuraliste à la transition entre licence et master de mathématiques, le caractère unificateur prend une dimension supérieure. L'enjeu n'est plus celui d'une théorie qui s'applique à des objets de natures différentes, mais celui d'un traitement unifié, systématique, des structures présentées axiomatiquement : on se pose à leur propos le même type de questions que l'on cherche à résoudre avec le même type d'outils, mettant en avant les ponts entre ces structures. Par exemple, la notion d'idéal renvoie à celle de sous-groupe distingué, en tant que « bonne » notion pour la construction de quotients, soulignant ainsi l'analogie formelle entre la théorie des groupes et celle des anneaux. Une compréhension fine de l'épistémologie du structuralisme mathématique, et en particulier algébrique, apparaît ainsi comme un prérequis nécessaire à l'action didactique. Notamment, il s'agit de mettre à l'étude la « méthode axiomatique » dans son usage structuraliste.

La période 2011-14 fut l'occasion, dans mes enseignements, de plusieurs expérimentations d'ingénieries en relation avec mes travaux de recherches en didactique. D'une part, je suis parti d'échanges sur un forum de mathématiques en ligne et ai proposé un usage novateur de retranscriptions de ces échanges pour des activités en classe. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2007), autour de la notion de praxéologie structuraliste que j'ai introduite en didactique de l'algèbre abstraite. Plusieurs articles sont issus de cette recherche-action (Hausberger, 2016 ; in press b ; in press c) qui fera l'objet de la deuxième partie de cet article, après les prolégomènes. D'autre part, j'ai développé l'ingénierie des « banquets » qui vise à faciliter l'entrée dans la pensée structuraliste. Cette ingénierie est présentée en détail dans ma note de synthèse en vue de l'HDR et constitue la partie originale de cette dernière (non publiée à ce jour ; deux articles sont actuellement en préparation). Elle s'appuie sur une étude épistémologique, croisée avec un cadre sémio-cognitif, à paraître (Hausberger, in press a). Les éléments saillants de cette ingénierie et quelques résultats obtenus seront mis en avant dans la troisième partie de ce texte.

Outre les cadres didactiques, l'ingénierie des banquets a été nourrie par mes lectures philosophiques. Notamment, l'ouvrage de Frédéric Patras « la pensée mathématique contemporaine » (Patras, 2001) a joué un rôle important dans un moment réflexif sur ma pratique de mathématicien, via l'épistémologie, lequel a précédé ma reconversion thématique vers la didactique. Dans la suite de ces prolégomènes, je vais rendre compte de ce questionnement et des relations entre philosophie et didactique des mathématiques qu'il a fait émerger, pour terminer avec un énoncé des différentes questions de recherche, issues de ce terreau fertile, que j'ai mise à l'étude dans mes travaux sur l'algèbre abstraite.

Pensée mathématique contemporaine et critique hüsserlienne

Patras (2001, chap. III Les origines des mathématiques modernes) caractérise la pensée mathématique contemporaine par la prédominance, dans la pratique mathématique, de la méthode « structurelle-transcendantale », c'est-à-dire la prédominance du structuralisme mathématique en tant qu'épistémologie particulière des mathématiques :

> L'esprit de la méthode est d'abstraire des objets étudiés leur substance formelle, à la manière dont le procédé d'abstraction transcendantale dégage les concepts de leur enracinement empirique […] : à partir de situations diverses et parfois sans liens apparents, dégager des concepts, des structures universelles, qui puissent permettre de traiter simultanément de questions relevant de domaines *a priori* distincts. L'algèbre fut l'élément moteur de la prise de conscience qu'il fallait en finir avec un traitement *ad hoc* des problèmes. De chacun d'eux, il convient de dégager à chaque fois les éléments universels, et cela avec le plus grand degré de généralité possible. Cette généralité n'est pas vaine, dès lors que le mathématicien y gagne en lucidité et en compréhension (Patras, 2001, p. 57).

Cette épistémologie, que Patras tout comme certains historiens (Corry, 1996) fait remonter à Gauss, s'est développée à travers les travaux des mathématiciens allemands des XIX^{e} et XX^{e} siècles, notamment Riemann, Hasse, Dedekind, Hilbert et Noether. En particulier, la généralisation de la méthode axiomatique prônée par Hilbert a joué un rôle important : le système axiomatique proposé par Hilbert pour la géométrie a ouvert le pas à des axiomatiques « formelles » où le processus d'abstraction concerne à la fois la nature des objets et la sémantique des relations. Le résultat est un système d'axiomes dans lequel objets et relations sont désignés par des symboles, et qui exprime les propriétés formelles des relations, généralement dans le langage de la logique formelle.

Dans son Manifeste « L'architecture des mathématiques » (Bourbaki, 1948), Bourbaki fait la promotion de l'usage structuraliste de la méthode axiomatique (qui diffère de la fonction logique que lui assigne Hilbert, par exemple pour démontrer l'indépendance du cinquième postulat d'Euclide ou étudier la cohérence du système). L'idée de structure y apparaît d'une part comme un concept régulateur de la pensée, sous forme métaphorique ou programmatique, pour désigner, de façon assez floue, une architecture cachée derrière des objets ou des théories mathématiques. D'autre part, elle est formalisée, de façon précise et rigoureuse, en termes de structures particulières comme les groupes, les espaces vectoriels ou espaces topologiques. Bien que Bourbaki, dans son traité « Les Éléments de mathématique » (publié à partir de 1939), définisse mathématiquement la notion de structure, sa définition ne sert que de cadre général et n'est pas mathématiquement « fonctionnelle » (Corry, 1996, p. 324), à la différence de la théorie des catégories, introduite par Mac Lane et Eilenberg (Mac Lane, 1996). Cette dernière constitue une véritable métathéorie mathématique des structures, mais il s'agit d'un point de vue très surplombant, qui est hors d'atteinte des étudiants de licence ou début de master lorsqu'ils apprennent la théorie des structures algébriques. En définitive, pour les mathématiciens du milieu du XX^{e} siècle tout comme pour les étudiants (mis à part les étudiants de deuxième année de master qui se destinent à la recherche dans ce domaine précis des mathématiques), le concept de structure, faute de fondation mathématique, appartient essentiellement à « l'image du savoir », il fait office de *méta-concept*. Ceci soulève d'emblée le problème didactique suivant :

> As a consequence, students are supposed to learn by themselves and by the examples what is meant by a structure whereas sentences like “a homomorphism is a structure-preserving function” is supposed to help them make sense of a homomorphism (Hausberger, in press d).

Si les définitions par axiomes réalisent une séparation plus nette entre le logique et l’intuitif (d’où un niveau supérieur de rigueur, indispensable par exemple pour trancher le cas du cinquième postulat), le style d’exposition structuraliste laisse en général peu de place aux intuitions qui ont vu naître les formalisations mathématiques. Il en résulte une distance entre les mathématiques vécues par le mathématicien dans l’acte de création et celles que renvoient les textes du savoir, distance qui devient problématique lorsqu’il s’agit de comprendre les raisons d’être de ces formalisations, leur possibilité, et d’aborder la question du sens. C’est cette distance que pointe Patras en la dénonçant dans la tradition phénoménologique :

> En mathématique, l’objet savant est l’objet dans toute la violence aveugle de sa définition axiomatique, dépouillé de tout enracinement dans une pensée humaine et son cortège d'affects, d'incertitudes et d'espérances troubles. La chose pensée est celle qui se déploie dans une intuition, celle dont la présence habite et fait vivre le travail de recherche. La distance de l'une à l'autre est difficile à saisir en dehors d'une expérience : il faut éprouver la présence de la chose pensée pour comprendre sa spécificité, pour éprouver un sens là où auparavant il n'y avait qu'une certitude inerte (Patras, 2001, p. 158).

D’une façon générale, Patras dénonce ainsi « l’illusion d’une autonomie du discours mathématique » comme « sans doute la plus grave des erreurs qu’ait commises le structuralisme » (Patras, 2001, pp. 2-3). Pour y remédier, il devient indispensable de recourir à la théorie générale de la connaissance, c’est-à-dire à l’épistémologie. A l’opposé d’un « supplément d’âme », cette dernière doit se traduire par une modification effective du style d’écriture mathématique. Il s’agit de ne pas de se méprendre sur la difficulté de la tâche, comme le souligne Patras :

> Les acquis de la rigueur axiomatique étant uniformément admis, tous s’accordent aussi désormais à reconnaître la nécessité d’ajouter de la « matière » aux notions formelles, c’est-à-dire à se préoccuper dans tout texte mathématique d’intelligibilité tout autant que de cohérence. Il ne faut s’y tromper, c’est là l’exercice le plus difficile. Traduire l’idée d’une démonstration en langage formalisé est une simple affaire de patience, pourvu que l’idée soit exacte. Décrire cette idée, expliquer une motivation, est autrement difficile car c’est affaire de style et d’imagination (Patras, 2001, p. 135).

De fait, la lecture de Patras (2001) a questionné non seulement ma pratique mathématique de chercheur mais également ma pratique enseignante, à travers les questions mises en avant par le mathématicien-philosophe, lesquelles ne se limitent pas à la sphère de la création scientifique mais touchent également l’enseignement. Ceci n’est pas une coïncidence, si l’on se réfère d’une part à la tradition de l’implication des mathématiciens (tels que Klein, Poincaré, ou plus récemment Kahane) dans les questions relatives à l’enseignement, d’autre part aux relations entre recherche et enseignement qui se nouent lors de l’exercice du métier d’enseignant-chercheur à l’université (Winsløw & Madsen, 2007). Ainsi :

> Faire la part de modernisme dans le style d'exposition et de retour au système d'intuitions originales qui sous-tendent une théorie est sans nul doute l'une des difficultés majeures auxquelles est confrontée la pédagogie mathématique aujourd'hui, car la science est condamnée à être stérile si elle cesse de prendre appui sur une intuition pleine et vivante de ses contenus. C'est la conscience de cette stérilité qui gouverne les réactions de rejet de l'enseignement mathématique comme un bloc d'abstractions gratuites et dépourvues de significations tangibles (Patras, 2001, pp. 27-28).

Patras fait allusion à la réforme des « maths modernes », qui a rencontré les difficultés que nous connaissons. Le défi d’une écriture et d’une communication mathématiques faisant une part plus large à l’heuristique et aux racines phénoménologiques des structures mathématiques se transpose ainsi, depuis la sphère savante, aux dispositifs d'enseignement. Il se reformule alors en termes didactiques :

> En d'autres termes, le savoir mathématique est aussi pour beaucoup un savoir-faire, dont les règles sont celles d'une technique tout autant que d'une connaissance formelle. Les manuels conçus selon les règles de la méthode d'exposition structuraliste laissent souvent sur un sentiment d'incomplétude : le lecteur a bien compris les ressorts de la méthode, mais serait bien incapable de la faire fonctionner dans l'étude de situations concrètes (Patras, 2001, p. 136).

On l'aura compris, les considérations de Patras, qui portent en premier lieu sur le travail du mathématicien, ne tardèrent pas à résonner avec certaines notions et cadres théoriques didactiques élaborés dans le contexte de l'étude des phénomènes d'enseignement-apprentissage. Par exemple, la citation précédente souligne la dimension méthodologique de la pensée structuraliste (Bourbaki parle de méthode axiomatique) et appelle à un examen praxéologique des types de tâches structuralistes, dans l'esprit de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2007). Elle pose également le problème de la construction de situations, au sens de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), à même de conduire à cette « intuition pleine et vivante des contenus » que vise Patras, lorsque la méthode structuraliste tend à faire disparaître les objets derrière les structures abstraites et formelles. Le tableau ci-dessous synthétise les éléments marquants des thèses de Patras relevés dans les citations précédentes et les met en regard avec les éléments des cadres théoriques didactiques usuels qui me paraissent pertinents. Outre la fertilité d'un approfondissement de ces regards croisés entre philosophie et didactique, ce tableau nous rappelle également que l'écriture et la communication mathématiques revêtent indéniablement une dimension didactique.

philosophie de la création mathématique	*phénomènes et cadres didactiques*
illusion de l'autonomie du discours	illusion de transparence (Artigue, 1991)
distance objet savant - chose pensée	*concept definition - concept image* (Tall-Vinner, 1981)
intuition et conceptualisation, esthétique transcendantale	théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990), sémiosis et noésis (Duval, 1995), théorie APOS (Dubinsky, 1984)
phénoménologie du structuralisme	phénoménologie didactique des structures mathématiques (Freudenthal, 1983)
méthode axiomatique en tant qu'ensemble de techniques	praxéologies (Chevallard, 2007)

Tableau 1 : mise en regard philosophie-didactique

Des questions de recherche et un choix de cadres théoriques complémentaires

De ce terreau fertile ont émergé mes premières questions de recherche sur l'enseignement-apprentissage du structuralisme algébrique, encore à raffiner : Comment enseigner les techniques structuralistes en mettant en avant l'heuristique ? Quelles situations proposer engageant des objets ? Comment prendre appui sur l'origine phénoménologique des concepts structuralistes ? Pour y répondre, j'ai mobilisé différents *cadres didactiques complémentaires*, au sens où ces derniers vont permettre de mettre à l'étude des aspects complémentaires de ces premières questions.

Tout d’abord, j’ai choisi de me placer au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard, 2007), du fait de l’importance de la *dimension méthodologique* dans la pensée structuraliste. Il s’agit notamment de mobiliser les outils offerts par la TAD pour étudier, d'un point de vue institutionnel, la rupture liée à l'entrée dans la pensée structuraliste. En effet, je fais l’hypothèse que la mise en évidence des *techniques structuralistes* permet de faire apparaître les *raisons d'être* des concepts structuralistes et de *fonder l'unité* des pratiques en algèbre abstraite, pour un apprenant. Le cadre de la TAD me permet ainsi de mettre à l’étude les questions de recherche suivantes : Comment *modéliser la pensée structuraliste en termes de praxéologies* ? Si mon hypothèse précédente est fondée, comment favoriser le *développement de praxéologies structuralistes* ?
J’ai choisi également de mobiliser la Théorie des Situations Didactiques (TSD, Brousseau, 1998), afin de penser l'apprentissage de la pensée structuraliste en termes de *situations* (en relation avec des gestes structuralistes), et ceci malgré le problème de construction de situations fondamentales dans le cas des concepts FUGS (Rogalski, 1995). Ce choix est aussi motivé par l’usage classique de la TSD dans une démarche d’'ingénierie didactique. Selon l’agenda épistémologique présenté ci-dessus en suivant Patras, il s’agit alors de construire des situations renouant avec les racines phénoménologiques des concepts, dans l’esprit de la *phénoménologie didactique* de Freudenthal (1983). J’ai ainsi mis à l’étude les questions de recherche suivantes, dans le cadre de la TSD : Est-il possible de construire une situation fondamentale ou un ensemble de situations pour l'entrée dans la pensée structuraliste ? Si oui, comment organiser le milieu ? Comment prendre en compte le fait que la notion de structure est un méta-concept ?
Enfin, il apparaît nécessaire d’introduire un cadre sémio-cognitif afin de poser le problème de la *conceptualisation* d'une structure algébrique dans les *rapports du concret à l'abstrait*. Pour cela, j’ai mobilisé la sémiotique de Frege en lien avec un point de vue *théorie des modèles* sur les systèmes axiomatiques (Hausberger, in press a ; voir également la dialectique objets-structures comme cadre de référence, ci-dessous). J’ai également utilisé les travaux de Duval (1995) dans le but d’analyser le fonctionnement cognitif de la pensée dans une situation d'apprentissage. Ce cadre sémio-cognitif me permet d’étudier les questions de recherches suivantes : Comment les aspects épistémologiques, sémiotiques et cognitifs s'articulent-ils dans le déploiement de la pensée structuraliste ? Comment analyser le travail de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite et le favoriser ?

2. Les praxéologies structuralistes

Je développe dans cette section mes travaux effectués dans le cadre de la TAD. Pour mémoire, il s’agit de répondre aux questions de recherches : Comment modéliser la pensée structuraliste en termes de praxéologies ? Comment favoriser le développement de praxéologies structuralistes ? Les références pour cette section sont (Hausberger 2016, in press b, in press c).

Le forum sur les nombres décimaux

Commençons par un exemple permettant d’analyser le développement de praxéologies structuralistes par un collectif hétérogène d'apprenants sur un forum de mathématiques. Nous formaliserons la notion de praxéologie structuraliste par la suite.
Le fil de discussion qui nous concerne, visible à l'adresse http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,318936,page=1, est intitulé « les nombres décimaux ». Les échanges ont eu lieu probablement pendant un temps assez court, en 2007. l'intervention initiatrice du fil est le fait d'un forumeur, *Mic*, lequel met avant deux assertions et deux questions : A_1 (**D** est un sous-anneau de **Q**), A_2 (Tout sous-anneau de **Q** est principal), Q_1 (Comment le démontrer ?), Q_2 (Comment définit-on le pgcd de deux décimaux ?).

D'emblée, nous remarquons que les assertions A_1 et A_2 sont les deux prémisses d'un syllogisme dont la conclusion est « **D** est principal », assertion notée A_0 et qui est probablement visée par *Mic*. L'assertion A_2 est une généralisation de A_0 (nous notons $A_2=A_0^g$), dans l'esprit de la méthode structuraliste : la preuve recherchée se place au niveau de généralité supérieur (A_0^g), reflétant la pratique experte des mathématiciens qui d'une part postulent que cette généralisation est porteuse de simplification, d'autre part considèrent qu'elle est éclairante quant aux « raisons profondes » à l'origine du phénomène (la principalité de **D**). La question Q_2 lui est également liée : tant l'existence du pgcd que les diverses définitions (ou propriétés) du pgcd que l'on peut énoncer dépendent du type d'anneaux dans lequel on se place ; il est donc important de situer les décimaux au sein des grandes classes d'anneaux (intègre, factoriel, principal, euclidien).
L'investigation de ces questions va conduire un autre forumeur, *bs*, à porter la question à un niveau de généralité encore supérieur et formuler Q_1^g (tout sous-anneau d'un anneau principal est-il principal ?). Le forumeur *barbu rasé* y répond ensuite à travers une généralisation Q_1^{gg} de la question : il donne une classe de contre-exemples à l'assertion « toute propriété remarquable des anneaux (euclidien, principal, factoriel, noethérien, de Bezout) est stable par sous-anneau ». Un autre participant, *Toto le zéro*, énonce de son côté l'assertion A_3 (**Z**[*X*] n'est pas principal), destiné à fournir également un contre-exemple à la question Q_1^g qui porte sur une assertion universelle. Le forumeur Olivier G complète l'argument en affirmant A_4 (l'idéal (2,*X*) de **Z**[*X*] n'est pas principal). l'assertion A_3 fait l'objet d'une pluralité de preuves (données de façon incomplète sur le forum), lesquelles laissent apparaître une gradation au niveau de leur *dimension structuraliste* (voir ci-dessous).
L'étude des énoncés et des preuves de ce fil de discussion montre ainsi le fonctionnement de deux dialectiques fondamentales en algèbre abstraite, lesquelles sont reliées :
Dialectique particulier-général. La reformulation du problème avec un niveau de généralité supérieur (passage de A à A^g) apparaît comme une démarche employée à plusieurs reprises par certains membres du collectif. Ceci reflète les démarches expertes des mathématiciens en algèbre abstraite :

> Les structures sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié (Bourbaki, 1948).

Dialectique objets-structures. L'examen de la structure des objets, des généralisations éventuelles des énoncés et des preuves, de l'insertion de ces dernières dans la théorie constituée en tissu axiomatique fait des structures axiomatiques un *point de vue conceptuel généralisateur-simplificateur* pour démontrer des propriétés sur les objets. Réciproquement, un *contrôle sémantique* sur les énoncés axiomatiques s'exerce en les mettant à l'épreuve des exemples connus, donc des objets. En ce sens, la dialectique objets-structures s'apparente à une *dialectique syntaxe-sémantique*.

Formalisation de la notion de praxéologie structuraliste

La tâche discutée dans le forum est de type T : montrer qu'un anneau donné (e.g. **D**) est principal. Pour résoudre cette tâche, les participants ont introduit la généralisation T^g : montrer que tout sous-anneau d'un anneau principal donné (e.g. **Q**) est principal. Ceci nous amène à définir une *praxéologie structuraliste* comme une praxéologie visant la réalisation d'une tâche algébrique (d'un type donné T) en se plaçant à un *niveau de généralité* qui soit porteur de *simplification*, en appui sur les *concepts* et sur *l'outillage technologique structuraliste* (combinatoire des structures, théorèmes d'isomorphismes, théorèmes de structures, etc.). La *méthodologie structuraliste* vise ainsi à

remplacer une praxéologie [T/*/*/*] (où l'on ne sait pas bien quelles techniques *ad hoc* utiliser) par une praxéologie structuraliste [T^g, τ,θ,Θ], où T^g désigne une généralisation de T qui permette l'usage de techniques structuralistes.
Afin d'analyser de telles praxéologies, il s'agit de prendre en compte la *dimension structuraliste* de ces dernières, laquelle peut se concevoir selon différents niveaux : au premier niveau, la praxéologie comporte uniquement des *techniques élémentaires* ne mobilisant pas les structures au-delà de leurs définitions (donc d'un langage). Par exemple : montrer que **D** est principal en s'appuyant sur la preuve de la principalité de **Z**. Au niveau 2, la *technologie* mobilise des *théorèmes généraux* sur les structures ; par exemple : prouver que **D** est principal en montrant l'existence d'une division euclidienne (tout anneau euclidien est principal) ou en démontrant que tout sous-anneau de **Q** est principal. On peut alors parler de praxéologie structuraliste. A un niveau encore supérieur (niveau 3), le discours technologique revêt une fonction double : il vise d'une part à justifier la technique comme au niveau 2 (fonction logique) mais également, d'autre part, à rendre compte du choix et de la *portée* de la technique comme *procédant de la pensée structuraliste* (fonction heuristique), ce qui produit souvent un accroissement de la composante théorique. En d'autres termes, le niveau 3 rend explicite la *dimension méthodologique* de la pensée structuraliste, qui se traduit par une classe particulière de méthodes. Par exemple, questionner la stabilité par sous-anneau de la propriété de principalité vise au développement d'une praxéologie de niveau 3. On notera que la réponse à cette question est négative (d'où le travail sur des contre-exemples observé sur le forum). Dans l'esprit structuraliste, une autre généralisation, non suggérée par les participants, était possible et éclairante quant aux *ressorts* de la principalité de **D** : soit A un anneau principal et K son corps des fractions ; tout sous-anneau B tel que $A \subset B \subset K$ est principal.

Application aux problèmes de transition

Il s'agit d'utiliser la modélisation praxéologique afin de comprendre les ruptures suscitées par l'entrée dans la pensée structuraliste. Pour cela, je distingue, à la suite de Winsløw (2006), deux types de transition :

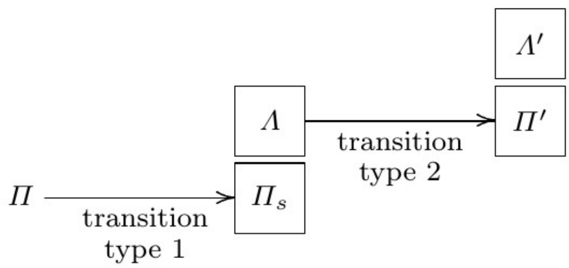


Figure 1 : Développement de praxéologies structuralistes, les deux types de transition

Le premier type consiste à passer d'un bloc de la praxis Π à une praxéologie structuraliste [Π_s,Λ] : il s'agit là d'une reformulation du passage de [T/*/*/*] à [T^g/τ/θ/Θ]. Par rapport à la situation de Winsløw, il ne s'agit pas seulement de compléter une praxéologie, mais de faire apparaître une praxéologie structuraliste. Les dialectiques particulier-général et objets-structures sont fondamentales à ce niveau.
Cependant, lors d'une transition de type 2, la *dialectique concret-abstrait* est amenée à fonctionner à un niveau supérieur. En effet, prenons l'exemple de l'énoncé suivant (extrait d'un manuel de préparation à l'agrégation de mathématiques) : soit A un anneau intègre noethérien tel que tout idéal premier est maximal ; montrer que A est principal. Cette tâche va prendre du sens, devenir concrète, par rapport à ses liens objectifs avec des praxéologies structuralistes antérieures, de façon à former une organisation mathématique régionale cohérente (voir Hausberger, in press b). En termes plus

formels, il s'agit là d'une praxéologie [Π',Λ'] construite sur les blocs du logos de praxéologies structuralistes [$\Pi_{s,i}$,Λ_i], lesquelles ont été développées à un stade antérieur de l'étude.
Je fais l'hypothèse qu'un *problème de transition* de type 1 est susceptible de se produire lorsqu'un enseignant adopte une approche « top-down » (Hausberger, 2016) et, posant en premier lieu le bloc du logos Λ, relie ce dernier plus ou moins artificiellement à un bloc de la praxis Π_s , c'est-à-dire sans se référer au bloc Π dont il est issu historiquement, comme un moyen de mettre en évidence les raisons d'être des concepts et des techniques. De façon similaire, un problème de transition de type 2 est susceptible d'apparaître lorsque les [$\Pi_{s,i}$, Λ_i] ne sont pas disponibles dans l'équipement praxéologique de l'apprenant ou que les liens entre Π' et les Λ_i sont trop faibles (voir Hausberger, in press b).

Développer des praxéologies structuralistes : les PER « formels »

Dans une étude de l'enseignement-apprentissage de la modélisation à l'université, Barquero et al. (2013) ont identifié des contraintes qui handicapent le développement d'activités de modélisation : « l'applicationisme » (la théorie précède les applications) en tant qu'épistémologie dominante et le « monumentalisme » (les savoirs sont rarement questionnés et problématisés, loc. cit., p. 322) en tant que pédagogie dominante à l'université. En réponse à ce constat, les auteurs proposent de nouveaux dispositifs d'enseignement sous la forme de parcours d'étude et de recherche (PER, voir Winsløw et al., 2013). De façon similaire, l'approche dominante « top-down » des structures algébriques contribue à placer l'enseignement-apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université sous le paradigme monumentaliste. Se pose alors (Hausberger, in press c) la question de ce que pourrait être une étude de l'algèbre abstraite dans le cadre du « paradigme du questionnement du monde » (Chevallard, 2012) qui fait l'objet des développements récents de la TAD.
La première idée est la suivante :

> La formalisation est à la fois une mathématisation du monde (réel extra-mathématique) et, à un niveau supérieur d'abstraction, une réécriture conceptuelle des mathématiques antérieures (pré-structuralistes) en termes de structures, les objets mathématiques usuels faisant office de réel intra-mathématique. Dans cette perspective, questionner le monde en instaurant une dialectique fertile entre médias et milieux, c'est questionner les objets mathématiques eux-mêmes de telle sorte que l'on puisse observer, faire fonctionner et développer une dialectique entre objets et structures, les concepts structuraux étant construits ou mobilisés à travers ce jeu du questionnement (Hausberger, in press c).

La seconde idée repose sur l'hypothèse qu'un PER est approprié pour implémenter la dimension heuristique nécessaire au développement de praxéologies structuralistes (cf. discussion des dimensions structuralistes). Cependant, différentes questions écologiques se posent : par exemple, quelle serait une bonne question génératrice du PER lorsque l'abstraction et la généralité en tant que vecteurs de compréhension sont un enjeu important de l'étude ? Comment instaurer une dialectique fertile entre objets et structures ?
La troisième idée, en guise de réponse à ces considérations dans le cas de l'enseignement de l'arithmétique des anneaux, est de faire travailler les étudiants sur une retranscription des échanges du forum sur les nombres décimaux, laquelle constitue un média portant la trace de son fonctionnement en tant que milieu. Une analyse didactique du potentiel de ce média-milieu en tant que milieu pour un PER en classe a été menée au préalable (Hausberger, 2016). La question génératrice est alors la suivante : Quelles connaissances sur les nombres décimaux et sur les anneaux généraux peut-on extraire de ce média-milieu ? Pour mener à bien cette étude, différents outils d'annotations (usage de sigles) ont été fournis aux étudiants. Le lecteur pourra consulter (Hausberger, 2016) pour un compte-rendu détaillé de cette expérimentation et une analyse des résultats obtenus.

3. L'INGÉNIERIE DES BANQUETS

Je présente dans cette section un travail original que j'ai mené selon la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1990), avec pour cadres la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) et un cadre épistémologique et sémio-cognitif (la dialectique objets-structures, Hausberger, in press a) que j'ai développé en incorporant, entre autres, des idées de Freudenthal (1983) et de Duval (1995). Pour mémoire, il s'agit de répondre aux questions de recherche suivantes : Est-il possible de construire un ensemble de situations pour l'entrée dans la pensée structuraliste ? Comment analyser le travail de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite et le favoriser ? Les références pour cette section sont (Hausberger, in press a) et (Hausberger, 2016 HDR).
La structure de banquet est une structure que j'ai inventée ; elle ne se trouve donc dans aucun manuel et ne fait pas partie du curriculum. Son intérêt est de permettre une discussion, en classe, de la méthodologie structuraliste. Je vais expliciter les choix didactiques que j'ai opérés dans mon travail d'ingénierie et présenter certains résultats obtenus lors de son expérimentation en classe et lors de sessions en laboratoire. Mais tout d'abord, il s'agit d'exposer la théorie des banquets en tant que théorie mathématique structuraliste, afin que le lecteur puisse se familiariser avec cette nouvelle structure et les différents objets et représentations qui l'accompagnent.

Aspects mathématiques

La définition axiomatique de la structure de banquet est la suivante : un *banquet* est la donnée d'un ensemble E muni d'une *relation binaire* R tel que les axiomes suivants sont satisfaits : i) aucun élément ne vérifie $x\ R\ x$; ii) si $x\ R\ y$ et $x\ R\ z$ alors $y = z$; iii) si $y\ R\ x$ et $z\ R\ x$ alors $y = z$; iv) pour tout x il existe au moins un y tel que $x\ R\ y$.
Présentée ainsi, la structure apparaît avec toute la « violence de sa définition axiomatique », selon le mot de Patras (voir ci-dessus). S'il est en général aisé de nommer la première propriété (anti-réflexivité), les suivantes ne s'interprètent pas en termes de propriétés qui définissent les relations binaires usuelles (relations d'ordre et d'équivalence), d'où une première réaction de déstabilisation. Nous allons voir que le nom de la structure (les banquets) permet en général de « débloquer » la situation.
De fait, en tant que théorie mathématique abstraite, la théorie des banquets est susceptible d'une multiplicité d'interprétations : la structure de banquets possède une grande *diversité de modèles*, construits dans des *cadres mathématiques variés*, d'où découle une grande *diversité de représentations sémiotiques*. On peut distinguer une *interprétation empirique* (le nom de banquet est susceptible d'évoquer de lui-même des invités assis autour de tables ; ceci conduit à poser $x\ R\ y$ si et seulement si x est assis à la gauche - ou à la droite - de y) ou des représentations sémiotiques qui prennent pour cadre :

- la *théorie des ensembles* (la relation binaire est représentée par son graphe en tant que sous-ensemble de E^2), l'*algèbre matricielle* (la relation est regardée comme une fonction de E^2 dans $\{0,1\}$ et représentée par la matrice correspondante ; les axiomes disent que la diagonale ne contient que des 0, qu'il y a exactement un 1 dans chaque ligne et au moins un dans chaque colonne),
- la *théorie des graphes* ($x\ R\ y$ si et seulement si les sommets x et y sont reliés par une arête orientée de x vers y),
- la *théorie des fonctions* (d'après les axiomes (ii) et (iv), $x\,R\,y \Leftrightarrow y = f(x)$ définit une fonction f et les autres axiomes signifient qu'elle est injective et sans point fixe),
- enfin, la *théorie des groupes de permutations* (lorsque l'ensemble E est fini, alors f est bijective, autrement dit c'est une permutation sans point fixe et il est commode d'utiliser les représentations sémiotiques standards pour ces dernières, ce qui inclut l'écriture en produit de cycles à supports disjoints).

Ces remarques expliquent pourquoi la théorie des banquets est riche mathématiquement (sémantiquement et du point de vue de l'élaboration théorique) et pourquoi elle ne se trouve dans aucun manuel : en effet, elle est équivalente, dans le cas des banquets finis, à la théorie des permutations (sans point fixe). Cette équivalence est dissimulée : d'une part, une relation binaire est très différente d'une loi de composition interne, d'autre part, une familiarité avec le formalisme logique est nécessaire pour apercevoir le contexte fonctionnel derrière le dernier axiome. En outre, il s'agit d'une théorie plus simple que la théorie des groupes, ce qui favorisera le recul réflexif lorsque seront discutées les démarches structuralistes. Mais surtout, la structure de banquet est porteuse d'une *intuition* sous-jacente liée à l'*image mentale* de convives assis autour de tables (un banquet de mariage), conformément au but recherché : mettre en évidence l'ancrage phénoménologique des concepts, en suivant la pensée de Patras et de Freudenthal. Il est probable que le comportement des apprenants soit considérablement modifié si la structure était nommée « schmilblick », mais je n'ai pas encore testé cette hypothèse en laboratoire.
Voici les représentations sémiotiques produites par différents groupes d'étudiants de licence 3 de mathématiques :

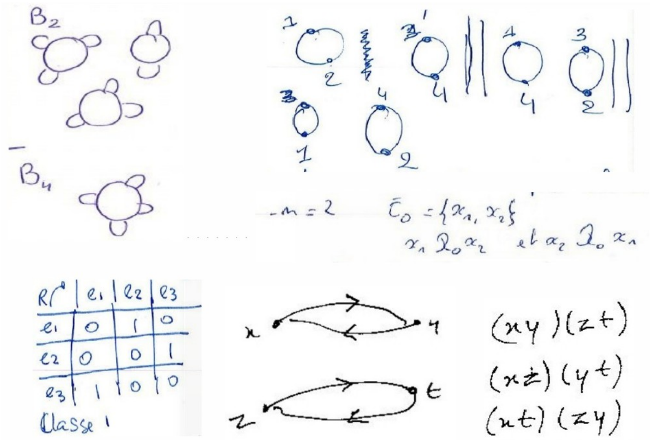


Figure 2 : Représentations sémiotiques produites par les étudiants

On reconnaît, en haut : à gauche des représentations à peine idéalisées des banquets de l'empirie, ou davantage idéalisées à droite ; au milieu : une représentation syntaxique sans sémantique particulière ; en bas, de gauche à droite : une représentation matricielle, l'usage des graphes et une représentation en produit de cycles.
La théorie des banquets, en tant qu'activité en classe, comporte une pluralité de tâches reflétant différentes démarches structuralistes :

- une tâche de *construction de modèles* en relation avec l'examen logique du système d'axiomes (il s'agit d'étudier si un axiome est conséquence logique des autres ou non, démarche qui implique la construction de contre-exemples permettant également de mieux cerner l'extension du concept de banquet) ;
- une tâche de *classification* de modèles (voir ci-dessous) ;
- une tâche de *définition axiomatique* des *tablées* : « On veut placer *n* personnes quelconques autour d'une table ronde. Une telle configuration s'appelle une tablée de cardinal *n*. Quelle relation entre les personnes pourrait-on poser afin de définir abstraitement une tablée ? Enoncer un système d'axiomes définissant abstraitement une tablée. » (il s'agit donc de la démarche inverse : on part de l'empirie et on recherche une modélisation) ;
- enfin, une tâche d'*élaboration théorique* : il s'agit de proposer une définition d'un *sous-banquet*, d'un *banquet irréductible*, du *banquet engendré* par un élément, puis d'énoncer et de prouver le *théorème de structure* des banquets (Tout banquet fini se décompose en une

union disjointe de tablées, analogue du théorème bien connu de décomposition d’une permutation en produit de cycles à supports disjoints).

La tâche de classification, qui sera discutée plus en détails à l’aide de traces de travaux d’étudiants, s’énonce comme suit :

a) Classifier les banquets de cardinal $n \leqslant 3$.

b) Classifier les banquets de cardinal 4.

c) Que dire de **Z**/4**Z** muni de la relation $i\ R\ j \Leftrightarrow j = i + \bar{1}$?

d) Comment caractériser abstraitement le banquet précédent (i.e. caractériser sa structure abstraite de banquet parmi les différentes classes de banquets, en fait caractériser sa classe) ?

Figure 3 : la tâche de classification des banquets de petits cardinaux

Aspects didactiques

La théorie des banquets est une activité qui a pour objectif de faciliter l’accès à la pensée structuraliste. Elle vise à rendre fonctionnelles les *dialectiques fondamentales objets-structures*, *concret-abstrait* et *syntaxe-sémantique*, et à clarifier le *méta-concept* de structure mathématique en utilisant le *levier méta*, c'est-à-dire « the use, in teaching, of information or knowledge *about* mathematics. […]. This information can lead students to reflect, consciously or otherwise, both on their own learning activity in mathematics and the very nature of mathematics » (Dorier et al., 2000, p. 151).

Un discours méta est ainsi introduit, de façon explicite, dans l’énoncé distribué aux étudiants ; à titre d’exemple, l’activité des banquets débute en ces termes :

> Une théorie structurale est une théorie abstraite : elle parle donc d’objets dont la nature n’est pas spécifiée. On les note alors par des symboles : x, y, z ou α, β, γ, etc. Dans notre théorie des banquets, il n’y a qu’un seul type d’objets [...] La nature des objets n'étant pas spécifiée, ce sont les *relations* entre les objets qui sont le propos de la théorie […] (Hausberger, 2016 HDR, Annexe 1)

De paire avec ce discours tenu par l’enseignant est également attendu, du côté des étudiants, un niveau de méta-cognition, dans l'esprit de l'abstraction réfléchissante de Piaget (Piaget & Beth, 1961). Le choix du type de structure constitue alors une variable macro-didactique qu’il s’agit d’ajuster en tenant compte des connaissances algébriques des apprenants. C’est pourquoi j’ai choisi de développer une théorie des banquets qui soit en proche parenté avec la théorie des groupes, de sorte, par exemple, que les démarches à l’œuvre dans la classification des banquets de petits cardinaux puissent s’appuyer sur celles menées lors de la classification des groupes de petits ordres. Pour un apprenant, il s'agit de repérer, dans la pratique des théories structurales, des invariants opératoires au sens de Vergnaud (1990), qui ouvrent la possibilité d'actions semblables dans des contextes analogues. Si cette généralisation des méthodes à un contexte proche n’est pas encore opératoire pour un certain nombre d’étudiants, ce qui nécessitera alors une intervention de l'enseignant, il est escompté *a minima* l’identification de ces invariants lors de l'institutionnalisation afin de favoriser une extension future.

Ce parallèle avec la théorie des groupes et les théories structurales déjà rencontrées est mené du début jusqu'au terme de l'activité. La phase finale d'institutionnalisation se conclut par le discours méta suivant au sein du document support distribué en classe :

> La volonté de décrire abstraitement des objets mathématiques afin de produire des théories générales conduit donc les mathématiciens à écrire des systèmes axiomatiques définissant les relations qu'ils décident de considérer entre ces objets. Les mathématiciens définissent ainsi différentes structures mathématiques abstraites. Les théories de ces structures établissent des conséquences logiques des systèmes axiomatiques en s'interdisant tout autre axiome.
> On cherche notamment à classifier les différents modèles de l'axiomatique considérée. Cette étude des modèles concrets se fait à « isomorphisme près », puisque la nature particulière des objets ne joue aucun rôle. Un des buts de la théorie est d'établir des « théorèmes de structure », c'est-à-dire de décomposer de façon canonique les modèles en un « assemblage » de sous-modèles les plus simples possibles (les briques élémentaires de la théorie).
> Le mot structure s'emploie donc dans trois sens différents :
> - on parle de la structure de groupe, d'anneau, de corps, etc. (ou de banquet) ;
> - on parle de la structure abstraite d'un modèle donné (au sein d'une théorie structurale) : il s'agit alors généralement de caractériser la classe d'isomorphisme de ce modèle ;
> - on parle de théorème de structure : on vient d'expliquer ce qu'il faut entendre par là. (Hausberger, 2016 HDR, Annexe 1)

Les cadres et registres introduits dans le milieu constituent une variable micro-didactique importante à souligner : en effet, des représentations génériques de la relation *R* sont nécessaires afin de pouvoir réaliser les tâches demandées par une approche sémantique. Il est probable que ceci nécessite l'intervention de l'enseignant, afin d'enrichir le milieu par l'introduction du cadre matriciel ou du cadre de théorie des graphes. Pour favoriser la dimension méta-cognitive, les étudiants travailleront par petits groupes de 3 à 4 personnes. Etant donnée l'inter-dépendance entre questions (qui s'inscrivent dans une progression liée à la logique de l'élaboration théorique), il est important d'organiser de fréquents moments de mutualisation-institutionnalisation. D'une façon générale, il est nécessaire d'orchestrer très finement les interactions entre dimensions a-didactique et didactique de l'activité, en s'appuyant sur l'analyse *a priori* (Hausberger, 2016 HDR, p. 41).
Selon la méthodologie de l'ingénierie didactique, le processus de validation de l'ingénierie est de nature interne et se fonde sur la comparaison entre l'analyse *a priori* présentant les adaptations escomptées et les erreurs attendues, avec l'analyse *a posteriori* des productions des apprenants. Le cadre didactique pour réaliser ces analyses est la dialectique objets-structures, qui fait l'objet du prochain paragraphe.

La dialectique objets-structures comme cadre de référence

Ce cadre incorpore différents contributions : des éléments d'épistémologie du structuralisme empruntés aux philosophes Cavailles (1994) et Lautman (2006), des idées empruntées à la phénoménologie didactique de Freudenthal (1983), un point de vue logique sur les structures issu de la théorie des modèles, enfin des éléments de la théorie de Duval (1995). Je vais présenter ces différents aspects de façon synthétique et renvoie le lecteur à (Hausberger, in press a) pour des compléments.
Selon Cavaillès, deux mouvements d'abstraction sont à l'œuvre dans la pensée structuraliste, l'*idéalisation* et la *thématisation*, lesquels s'exercent transversalement l'un de l'autre (l'un est perçu comme vertical, l'autre horizontal). Ils se succèdent de façon dynamique pour exprimer une dialectique entre forme et contenu, que Cavaillès appelle « dialectique des concepts ». A sa suite, Benis-Sinaceur (2014) décrit l'idéalisation en ces termes :

> Leaving aside or discarding all other aspects, especially specific substantial or space-time aspects. [...] it comes down to extracting a form from sundry situations [...] idealization follows from seeing or guessing some invariant basic properties attached to a plurality of apparently heterogeneous situations and it leads to a unifying view of the different domains on which we perform the same type of operations (Benis-Sinaceur, 2014, pp. 94-95).

Elle nous rappelle également le sens de la thématisation :

> Cavaillès appelle ensuite « thématisation » le fait que « les gestes accomplis sur un modèle ou un champ d'individus peuvent, à leur tour, être considérés comme des individus sur lesquels le mathématicien travaille en les considérant comme un nouveau champ » (Benis-Sinaceur, 1987, p. 24).

En d'autres termes, l'idéalisation consiste à extraire une forme, laquelle est ensuite thématisée en une théorie d'objets de niveau supérieur. L'idéalisation et la thématisation constituent ainsi les deux grands mouvements d'abstraction qui fondent, d'un point de vue épistémologique et cognitif, la dialectique objets-structures.

Pour Freudenthal (1983), l'*analyse phénoménologique* d'un concept (ou structure) mathématique consiste à repérer le phénomène dont ce concept est le *principe d'organisation* et à décrire les relations entre structure et phénomène. De telles considérations ont nourri le courant contemporain de la Realistic Mathematics Education (RME). Dans le but de clarifier les rapports du cadre que je propose avec celui de RME, on pourra noter que l'idéalisation s'apparente à la *mathématisation horizontale* de RME (une modélisation du réel), et la thématisation à la *mathématisation verticale* (une réorganisation à l'intérieur des mathématiques). Cependant, l'idéalisation ne se réduit pas à une mathématisation du monde réel et la thématisation est une mathématisation verticale particulière, propre au projet structuraliste.

Par ailleurs, il s'agit, dans le cas de l'algèbre abstraite (à la différence de l'algèbre élémentaire), de distinguer *deux niveaux* de principes organisateurs de phénomènes : d'une part, le niveau de la structure (de groupe, d'anneau, etc.), qui apparaît en tant que principe organisateur de phénomènes impliquant des objets de niveau inférieur ; d'autre part, le niveau du méta-concept de structure lui-même, lequel est appelé à jouer un rôle architectural dans l'élaboration des théories mathématiques, en relation avec la méthodologie structuraliste.

Expliquons maintenant les apports de la théorie des modèles, laquelle offre un point de vue fertile pour appréhender les relations entre objets et structures, à travers la distinction entre syntaxe et sémantique ainsi que l'articulation entre ces deux aspects. Tout d'abord, une définition par axiomes est, d'un point de vue logique, une *phrase ouverte*. Les *modèles*, c'est-à-dire les instances qui satisfont ces énoncés, constituent alors le contenu *sémantique* de la structure, par rapport au système d'axiomes qui la définit syntaxiquement. Ceci nous amène à distinguer un point de vue syntaxique sur l'idéalisation, qui consiste à faire abstraction de la nature particulière des objets et isoler les propriétés formelles des relations (la « logique » des relations), et un point de vue sémantique qui met l'emphase sur les *classes d'isomorphisme de modèles*, lesquelles constituent un intermédiaire entre le domaine sémantique concret des objets et celui syntaxique abstrait de la structure. Le prix à payer est la transition des éléments aux classes. Je fais l'hypothèse que la conceptualisation de ces classes engage un processus de réification (au sens de Sfard, 1991), et appelle de ce fait *objets structuraux* les classes d'équivalences réifiées. De ce point de vue, la tâche de classification des modèles (à isomorphisme près) apparaît fondamentale pour la conceptualisation d'une structure abstraite.

Pour finir, mentionnons brièvement les apports de la théorie de Duval (1995), laquelle fournit les outils sémiotiques nécessaires pour appréhender ce processus de conceptualisation dans ses dimensions cognitives. Nous avons souligné le rôle des « banquets de mariage » en tant qu'*image mentale* qui porte l'intuition sous-jacente à la théorie des banquets. Selon Duval, il s'agit d'une représentation interne qui sert à l'objectivisation de la structure de banquet, alors que les observables sont les représentations externes produites par les apprenants (*sémiosis*), en particulier lors de la conceptualisation des objets structuraux (*noésis*). Nous serons particulièrement attentifs à ce type de représentations, lors de l'observation du travail des étudiants, ainsi qu'aux manipulations sémiotiques (traitements et conversions) qui sont nécessaires pour la détermination d'une relation d'isomorphie entre modèles et, plus globalement, la détermination des classes de modèles.

Nous allons maintenant illustrer le fonctionnement de ce cadre à travers l'analyse *a priori* de la tâche de classification des banquets de petits cardinaux (voir figure 3).

Analyse *a priori* de la tâche de classification

Les méthodes se divisent en deux catégories : d'un côté une approche à dominante syntaxique, qui s'apparente aux raisonnements menés dans le cas de la classification des groupes de petits ordres, de l'autre une approche à dominante sémantique, qui utilise les modèles génériques empruntés à la théorie des matrices ou des graphes. Il sera nécessaire cependant, dans chaque cas, d'articuler syntaxe et sémantique à un moment donné du raisonnement.
Dans l'approche à dominante syntaxique, prenons le cas de trois éléments x, y, z. Quitte à effectuer une permutation, nous pouvons supposer $x\,R\,y$ (en vertu de i) et iv)) ; nécessairement, ($y\,R\,x$ ou $y\,R\,z$) et ($z\,R\,x$ ou $z\,R\,y$), toujours d'après i) et iv). Parmi les quatre cas, seul $y\,R\,z$ et $z\,R\,x$ est possible, en vertu des axiomes ii) et iii). Le raisonnement est similaire avec quatre éléments, mais il nécessite de répéter plusieurs fois des considérations du type « quitte à permuter... ». On aboutit à deux classes : $x\,R\,y$, $y\,R\,x$, $z\,R\,t$, $t\,R\,z$ et $x\,R\,y$, $y\,R\,z$, $z\,R\,t$, $t\,R\,x$. Il est prévisible que les étudiants s'arrêtent à ce stade, alors qu'il s'agit encore, d'une part de justifier que ces deux classes sont bien distinctes, d'autre part de montrer qu'elles sont non-vides, donc d'en exhiber un représentant (retour sémantique). Le premier point nécessite la notion d'isomorphisme, en fait la connaissance de propriétés invariantes par isomorphisme qui permettent de distinguer les deux classes. Dans le cas des groupes d'ordre 4, bien connu des étudiants, on invoque la présence ou non d'un élément d'ordre 4. L'analogue pour les banquets consiste à repérer une propriété de cyclicité : raisonner sur l'ordre d'un élément revient, dans notre contexte, à raisonner sur le cardinal de la « chaîne » issue d'un élément, notion qui est aisée à formaliser (en introduisant, par exemple, une notation R^k), laquelle chaîne se referme dans le cas d'un cardinal fini. Les groupes cycliques, dont ceux constitués par les racines de l'unité, s'appuient également sur cette image mentale du cercle. S'il est peu probable que les étudiants s'engagent dans une telle formalisation, excepté ceux qui sont particulièrement à l'aise avec le formalisme, il est probable par contre que le motif de cyclicité soit reconnu et mis en avant. Le but des questions c) et d) est d'amener les étudiants à expliciter cette image mentale dans le formalisme des relations. Enfin, la construction d'un représentant pour chaque classe est aisée, soit en s'appuyant sur les banquets empiriques, soit sur les graphes, soit sur le modèle de la question c). Notant B4 le banquet cyclique d'ordre 4, il est possible que certains étudiants introduisent, par analogie avec la théorie des groupes, des notations du type B2 x B2, alors que l'opération « produit cartésien de banquets » n'a pas de sens. L'opération structuraliste appropriée (la « réunion » disjointe des banquets) sera introduite dans la seconde partie de l'activité.
Dans l'approche à dominante sémantique, on utilise le fait que la théorie des matrices ou des graphes permet de représenter tous les cas possibles. Il s'agit donc de différencier les classes. Les graphes permettent de traiter rapidement le cas de 3 éléments : il permet de remplacer le raisonnement invoquant les axiomes par une succession d'actions, comme dans un « jeu de légos ». On obtient ainsi deux possibilités de rajouter des flèches entre trois lettres x, y, z et on se convainc facilement que le sens de rotation des flèches n'a pas d'importance grâce à un traitement au sein de ce registre graphique symbolique : on passe de la première configuration à la dernière (voir figure 4 ci-dessous) en rétablissant le sens anti-horaire, ce qui ne change pas la nature de la représentation en tant que graphe, puis en remarquant qu'il s'agit du même motif à permutation près des lettres x et y. Sans formaliser de notion d'isomorphisme, le principe d'abstraction, dans sa version naïve d'abstraire la nature des éléments, permet de se convaincre qu'il s'agit de la même classe d'isomorphisme, dans le sens premier du terme (avoir même forme).

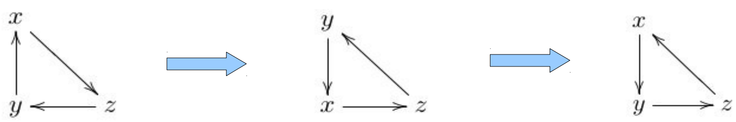


Figure 4 : établissement du lien d'isomorphie par une succession de traitements au sein du registre des graphes

La situation est un plus compliquée dans le cas de 4 éléments, car le nombre de configurations est plus élevé. Des connaissances de théorie des graphes (notamment changer de représentation afin de supprimer les « croisements » de flèches) permettent de se ramener facilement soit au cas du graphe cyclique, soit au cas du graphe ayant deux composantes connexes formées de deux éléments reliés par une flèche double. Le processus visuel de reconnaissance de forme permet de conclure, en faisant abstraction des lettres.

Examinons pour finir l'approche sémantique à base de matrices : dans le cas de trois éléments, la position du 1 en première ligne détermine totalement la matrice ; il y a donc deux possibilités. On se rend compte qu'il s'agit de la même classe par le raisonnement suivant : permuter y et z dans la seconde matrice conduit à deux matrices des relations identiques. C'est donc à nouveau un processus visuel de congruence qui permet d'établir le lien d'isomorphie. Comment a-t-on compris qu'il fallait permuter ces éléments ? C'est l'examen des relations qui le dicte : dans un cas, $x\,R\,y$, $yR\,z$, $z\,R\,x$, dans l'autre $x\,R\,z$, $z\,R\,y$, $y\,R\,x$. Isoler les relations et les ordonner en faisant apparaître des cycles (la conversion en une représentation du type banquet empirique) constitue en définitive une procédure très performante pour comparer les structures. Le cas de 4 éléments est, comme précédemment, facilité par un argument de permutation des éléments *a priori*, plutôt que d'invoquer des isomorphismes *a posteriori*.

Si la notion de modèles isomorphes est susceptible de s'appuyer sur la reconnaissance des formes, la définition formelle d'un isomorphisme nécessite d'avoir intégré le point de vue syntaxique sur la notion d'isomorphisme en tant que bijection préservant les relations. En théorie des groupes, l'isomorphisme est défini comme une bijection préservant la loi, ce qui est conceptuellement différent, mais la proximité syntaxique des écritures $x*y$ et $x\,R\,y$ devrait permettre aux étudiants de trouver facilement, outre le caractère bijectif qui est standard dans toute notion d'isomorphisme, la condition $\forall(x,y)\in E^2, x\,R\,y \Rightarrow \varphi(x)\,R'\,\varphi(y)$ définissant un isomorphisme $\varphi : (E,R)\rightarrow(E',R')$ de banquets. La construction effective d'un tel isomorphisme, par exemple entre les 2 banquets précédents d'ordre 3, s'effectue en comparant $x\,R\,y$, $y\,R\,z$, $z\,R\,x$ et $x'\,R\,z'$, $z'\,R\,y'$, $y'\,R\,x'$ (noter l'ajout des « ' », étape importante d'un point de vue sémiotique) : si φ associe x à x', il associera donc y à z' et z à y'. Il sera intéressant d'observer si les étudiants s'engagent dans l'écriture de tels isomorphismes ou bien s'ils se satisfont de la reconnaissance intuitive de formes ou bien de l'image mentale de permutation de deux personnes assises autour de la table.

Résumons-nous : la tâche de classification des modèles, dans ses aspects sémantiques, revient à idéaliser les objets structuraux liés aux banquets de petits cardinaux. La thématisation des démarches et notions de théorie des groupes joue un rôle important. D'un point de vue cognitif, la reconnaissance d'une congruence de formes peut s'appliquer après conversion vers un registre sémiotique adapté, comme la théorie des graphes ou les banquets de l'empirie (éventuellement idéalisés sous la forme de cercles munis de points, une représentation externe possible pour les objets structuraux associés). L'articulation entre syntaxe et sémantique passe par la notion d'isomorphisme, à thématiser. Je fais l'hypothèse que le contexte des banquets est propice à cette thématisation, car il permet de s'appuyer sur les processus visuels (un isomorphisme conserve les relations, donc les chaînes circulaires), selon l'étymologie d'isomorphisme.

Eléments d'analyse *a posteriori*

Ce paragraphe synthétise quelques résultats obtenus et phénomènes didactiques identifiés, notamment lors de la réalisation de la tâche de classification. Différentes données ont été recueillies à cet effet : d'une part les traces de travaux en classe, par petits groupes de 4-5 étudiants (l'expérimentation, d'une durée de 6 heures, ayant lieu au tout début du second semestre de licence 3, à l'issue du module de théorie des groupes et avant d'aborder la théorie des anneaux et des corps) ; d'autre part, des captations vidéos de sessions en laboratoire avec deux binômes d'étudiants préparant l'agrégation de mathématiques.

Le premier phénomène remarquable concerne *l'ancrage phénoménologique* de la théorie des banquets, qui se révèle *opératoire* au sens où l'image mentale des banquets de l'empirie sert d'appui aux raisonnements syntaxiques sur les axiomes et au travail de classification. Montrons-le à partir des dialogues du premier binôme d'agrégatifs, en pointant en italique les éléments saillants :

A : Classique, on spécifie la structure par des relations, d'accord.
B : Antisymétrie [à propos de l'axiome (i)]
A : C'est pas tout à fait ça, c'est la non-réflexivité ; *il y a un seul type à droite et un à gauche, c'est l'idée, quoi* [des rires] ; il y a personne qui est assis tout seul à une table.
B : *Les éléments sont des personnes ? Et en relation si ensemble à table ?*
A : Oui, c'est ça. La relation est d'être assis à la droite (ou à la gauche). Par contre, tu peux avoir au plus un type à droite et au plus un à gauche, il y a au moins un type à droite. Oui [continuant à lire]... il y a la théorie et les modèles. Pour montrer que c'est non contradictoire, on peut montrer qu'il y a un modèle. *Je propose de prendre un type. Non, un type ne marche pas, 2 types assis l'un à côté de l'autre*. Donc tu prends $E=\{x,y\}$. On peut aussi mettre $\{0,1\}$.
B : $\{1,2\}$?
A : Allez, on prend $E=\{a,b\}$ et pour la relation les couples (a,b) et (b,a). Donc c'est bien un modèle. [...]
B : Le cardinal 3...
A : *Le truc circulaire, des personnes a,b,c autour de la table*. (a,b), (b,c), (c,a). Reste à voir que c'est le seul. (a,b) moyennant numérotation, c'est toujours valable.
B : (a,c), (c,b), (b,a) ?
A : C'est le même modèle, à isomorphisme près.
B : C'est vrai.
A : (b,a)... il va avoir un soucis, car c va être envoyé sur quoi ? Si c est envoyé sur a ou b, comme a et b sont déjà atteints, on va nier (ii).
B : Si on avait (a,b) et (b,a) on ne saurait pas quoi faire avec c...
A : Oui, c'est ça. *Parce que ses deux voisins de droite potentiels ont déjà un voisin.*
B : Donc c'est forcément (b,c) et on complète.
A : Le cardinal 4 sera peut-être plus intéressant. On va dire $\{a,b,c,d\}$? [...]
A : Donc on a toujours (a,b) ; on a toujours (b,c)... ah, est-ce que b peut s'envoyer sur a ? Ca ferait un premier branchement.
B : *Ca ferait un banquet à deux tables, en quelque sorte.*

Une autre illustration de ce caractère opératoire concerne, ainsi que le prévoit l'analyse *a priori*, l'usage de l'image mentale des banquets de mariage dans la reconnaissance de banquets isomorphes via un processus cognitif de reconnaissance de congruence de formes. A titre d'exemple, voici un extrait de la production d'un groupe lors de l'expérimentation en classe :

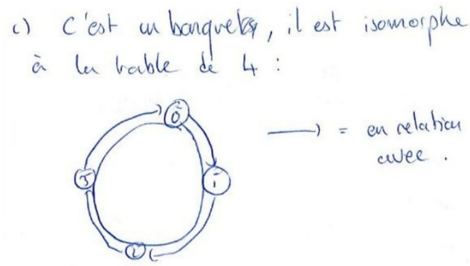
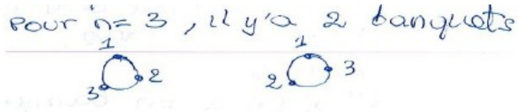


Figure 5 : Reconnaissance de l'isomorphie par conversion vers le registre des banquets empiriques et reconnaissance d'une congruence de formes.

On remarquera la présence simultanée de deux autres cadres, outre le cadre algébrique dans lequel est exprimé l'exemple considéré : la théorie des graphes et le cadre empirique (idéalisé sous forme d'un dessin schématique). A travers l'usage d'une pluralité de registres de représentations sémiotiques et la conversion entre registres, les étudiants parviennent à réifier la classe des banquets cyclique de cardinal 4, en lien avec la représentation mentale associée à la « table de 4 ».



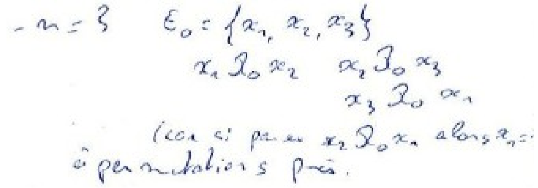


Figure 6a *Figure 6b*

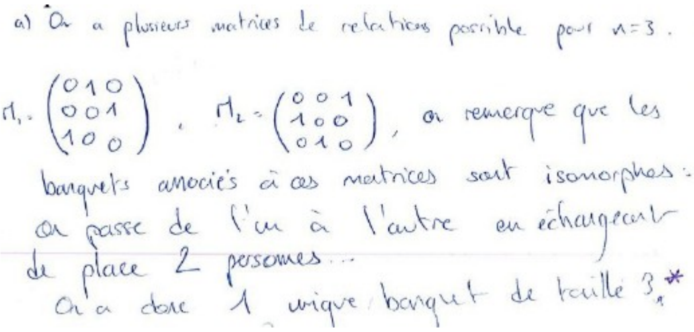


Figure 6c

Figure 6 : Articulation syntaxe-sémantique, comparaison du travail de 3 groupes différents

Un deuxième phénomène identifié concerne un *déficit d'articulation syntaxe-sémantique*, visible dans les productions en classe. En effet, comparons les 3 extraits de travaux d'élèves présentés dans la figure 6. Le premier groupe procède par une approche strictement sémantique (figure 6a) : pour ce groupe, la théorie des banquets est une théorie semi-empirique ; on observe un écrasement des structures par les objets. A l'opposé, le second groupe procède de façon syntaxique sans retour sur la sémantique (figure 6b). Enfin, la figure 6c montre une approche sémantique avec modèles génériques dans le cadre matriciel. Les étudiants s'appuient sur une notion intuitive d'isomorphisme ancrée dans le contexte phénoménal, ils ne produisent pas de définition syntaxique d'un isomorphisme.

En effet, les productions en classe ainsi que les sessions en laboratoire ont permis d'éclairer des *difficultés* sous-jacentes à la *thématisation de la notion d'isomorphisme*, que l'analyse *a priori* a sous-évaluées. De fait, la théorie des groupes, principal point d'appui à la thématisation, s'est également révélée un obstacle : ainsi certains étudiants utilisent-ils de façon abusive le formalisme de la théorie des groupes pour interpréter le domaine phénoménal des banquets, plutôt que de transposer les démarches de classification à ce nouveau contexte (figure 7). On observe un écrasement des structures de groupe et de banquet, favorisé par la notation $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ (alors qu'il est essentiel de distinguer le groupe ($\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, +) du banquet ($\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, R)) et la proximité des classifications des banquets et des groupes de petits cardinaux (ce qui n'est pas une coïncidence, étant donné le lien avec les groupes de permutations). Le produit cartésien de banquets n'a pas de sens et les étudiants ne s'engagent pas dans un processus de justification.

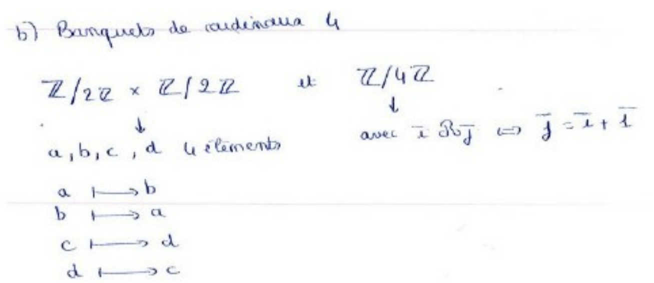


Figure 7 : La théorie des groupes en tant qu'obstacle à la thématisation

Pour finir, examinons certaines traces (figure 8) et certains échanges recueillis lors du travail en laboratoire du second binôme d'agrégatifs. Ce dernier a introduit spontanément le cadre de la théorie des graphes, mais uniquement à travers les représentations sémiotiques associées (la théorie mathématique sous-jacente ne sert pas de domaine d'interprétation des banquets), utilisées par le binôme afin de faire sens des axiomes de banquet : « Globalement, on a un point *x* qui s'amène sur *y* et sur *z*, on a nécessairement l'égalité » (discussion de l'axiome (ii)). Le mouvement du crayon, du point *x* au point *y*, placé à la droite de *x*, donc le geste, les conduit à représenter la relation sous la forme d'une flèche orientée. Ils empruntent ensuite au cadre des permutations une nouvelle notation, plus condensée, pour désigner les graphes produits (sans relier les deux théories).

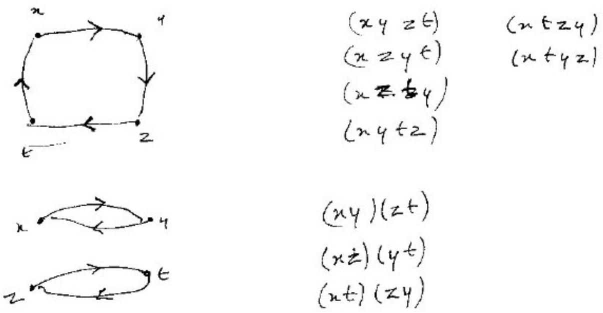


Figure 8 : Obstacle de la lettre dans le dénombrement des classes d'isomorphismes de banquets de cardinal 4

Les conclusions qu'ils en tirent se révèlent mathématiquement inexactes :

C : Il y en aurait 9.
D : Après, on fait que réfléchir sur des objets que l'on connaît. Or depuis le début, on parle de structure.
C : Mais attends, les éléments on peut toujours les numéroter. Qu'est-ce qui pourrait boguer ?
D : Notre propre cohérence.
C : Mais là, on a réfléchi sur les relations, on réfléchit pas sur les objets eux-mêmes, on n'a pas pris une relation particulière.
D : Bon passons.

La réflexivité dont font preuve les étudiants est remarquable : ces derniers soulignent bien qu'il s'agit de faire abstraction à la fois de la nature des éléments et de la sémantique des relations. Pour autant, le symbolisme algébrique (la lettre) donne l'illusion que le processus d'abstraction est complet. Il n'en est rien : une représentation sémiotique possible des objets structuraux consisterait à abstraire les étiquettes des sommets du graphe. Formaliser ce processus d'abstraction dans le langage algébrique consiste à thématiser la notion d'isomorphisme. Les étudiants y parviendront au terme d'un long échange avec le chercheur, qui intervient pour la première fois dans le travail. Ces échanges montrent à nouveau les difficultés liées à la thématisation, en appui sur la théorie des groupes.

D : Il y aurait donc 2 classes à isomorphisme près, ce genre d'objets et ce genre d'objets.
C : Là, du **Z**/4**Z** et là du **Z**/2**Z** x **Z**/2**Z**, en fait.
Chercheur : Vous pensez à la classification des groupes ?
D : Nécessairement, on pense aux classifications que l'on connaît.
Chercheur : Donc il y a 2 types d'objets et là, vous les avez énumérés tous sur *x*, *y*, *z*, *t* […] Vous avez listé tous les graphes orientés possibles sur *x*, *y*, *z*, *t* qui vérifient les axiomes. […] Et pourquoi dites-vous que ce sont deux classes ?
C : Deux classes, c'est-à-dire ? On a mis toutes les permutations derrière, de toute façon.
Chercheur : Et pourquoi (*x y z t*) et (*x y t z*) seraient les mêmes ?
C : Non, pas les mêmes, du même type.
Chercheur : Que veut dire « être du même type » ?
C : Je pense aux permutations. Il y en a une qui va boucler plus vite que l'autre. Je pense clairement à l'ordre qu'il y a derrière.
D : Une bijection. On peut passer d'un élément de cette classe à un autre par une bijection, mais pas entre les 2 classes.
Chercheur : Ne peut-on pas toujours trouver une bijection entre 2 ensembles de cardinal 4 ?
C : Si !
D : Ah oui, mais est-ce qu'elle va respecter la structure ?

4. CONCLUSION

L'activité des banquets a permis d'éclairer les rapports du concret à l'abstrait en algèbre abstraite, à la fois du point de vue épistémologique et du point de vue des apprentissages. Ceci vient soutenir la thèse que si les mathématiques sont formalisées, elles ne sont pas pour autant formelles et laissent apparaître différents aspects phénoménologiques dans leur élaboration par le mathématicien et leur reconstruction par un apprenant. L'image mentale des banquets de mariage s'avère un point d'appui aux raisonnements syntaxiques sur les axiomes et aux tâches de classification et de caractérisation abstraite des banquets. Différents niveaux de couplage se produisent entre cette image mentale et le symbolisme mathématique, également porteur de gestes et d'images mentales, ce qui transparaît nettement au niveau des dialogues lors des sessions en laboratoire et conduit, entre autres, à l'introduction de modèles en théorie des graphes et à l'utilisation de processus visuels de reconnaissance de formes. L'activité des banquets répond ainsi au projet de phénoménologie didactique des structures mathématiques soutenu par Freudenthal et contribue à rétablir une dialectique concret-abstrait en algèbre abstraite.

D'une façon générale, j'ai posé, dans les travaux présentés ici, les premières pierres d'une *didactique du structuralisme algébrique*, en m'efforçant de tenir compte et d'articuler des aspects épistémologiques, phénoménologiques, didactiques et cognitifs. Ces travaux soulignent le potentiel d'un croisement des regards entre philosophique et didactique, autour de thèmes tels que le structuralisme, la phénoménologie et l'abstraction mathématiques. Ils appellent également à poursuivre le travail d'ingénierie didactique, avec pour cadres la TAD et la TSD et la dialectique objets-structures. Du côté de la TAD, les études praxéologiques sur le structuralisme (algébrique et au-delà) ouvrent un vaste programme de recherches avec en vue des retombées importantes autant pour la compréhension des problèmes de transition que pose l'algèbre abstraite, que pour nourrir l'action didactique, par exemple sous forme de PER (« formels »).

Pour finir, mes travaux soulèvent également différentes questions de nature méta-didactique, posées à notre communauté comme de nouveaux défis et de nouvelles pistes de recherche : La philosophie pourrait-elle être utile à la didactique en dehors de l'épistémologie ? La didactique pourrait-elle être productrice de questions philosophiques ? En quels sens et comment ? Comment penser le méta-mathématique au sein des cadres didactiques ? Quel est l'impact de la technicité des mathématiques (à partir du niveau master) dans les travaux de recherche en didactique ? Les cadres existants sont-ils robustes et sinon, quelles adaptations s'agit-il d'apporter ?

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281–308.

ARTIGUE, M. (1991). Epistemologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 241-285.

BARQUERO, B., BOSCH, M. & GASCON, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 33*(3), 307-338.

BENIS-SINACEUR, H. (2014). Facets and Levels of Mathematical Abstraction. *Philosophia Scientiæ, 18(1)*, 81-112.

BENIS-SINACEUR, H. (1987). Structure et concept dans l'épistémologie mathématique de Jean Cavaillès. *Revue d'histoire des sciences, 40(1)*, 5-30.

BOURBAKI, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.) (1948, rééd. 1997), *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris : Hermann.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

CAVAILLÈS, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.

CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Éds.), *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique* (pp. 705-746). Universidad de Jaén.

CHEVALLARD, Y. (2012, July 8-15). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. *Regular lecture presented in the 12th International Congress on Mathematical Education* (ICME 12). COEX, Seoul (Korea).

CORRY, L. (1996). *Modern Algebra and the Rise of mathematical Structures*. Bâle : Birkhaüser.

DORIER, J.-L. (2000). Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspectives théoriques sur leurs interactions [Note de synthèse pour l'Habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier, Grenoble]. *Cahier du Laboratoire Leibniz, 12.*

DORIER, J-L., ROBERT, A., ROBINET, J. & ROGALSKI, M. (2000). The méta lever. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 151-176). Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

DUBINSKY, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeakoulujen Atk-Uutiset, 2*, 41–47.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht : Reidel

GUIN, D. & HAUSBERGER, T. (2008). *Algèbre – tome I : Groupes, Corps et Théorie de Galois*. Les Ulis : EDP Sciences.

HAUSBERGER, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21e siècle* (pp. 425-434). Genève : Université de Genève.

HAUSBERGER, T. (2016, HDR). Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université et premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : études croisées en didactique et épistémologique des mathématiques. *Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches*. Disponible en ligne à l'adresse : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01408565

HAUSBERGER, T. (2016). Comment développer des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 36*(1), 97-142.

HAUSBERGER, T. (in press a). La dialectique objets-structures comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique. *Education et Didactique, 11*(2).

HAUSBERGER, T. (in press b). Structuralist praxeologies as a research program in the didactics of Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*.

HAUSBERGER, T. (in press c). Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université : vers un paradigme du questionnement du monde. *Educaçao Matemática Pesquissa*. Numéro spécial consacré aux actes du 5ème congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (CITAD5).

HAUSBERGER, T. (in press d). The (homo)morphism concept: didactic transposition, meta-discourse and thematisation. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*.

LAJOIE, C. & MURA, R. (2004). Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(1), 45-80.

LAUTMAN, A. (2006). *Les mathématiques, les Idées et le Réel physique*. Paris : Vrin.

LERON, U. & DUBINSKY, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly, 102*(3), 227-242.

MAC LANE, S. (1996). Structure in Mathematics. *Philosophia Mathematica, 4*(2), 174-183.

PATRAS, F. (2001). *La pensée mathématique contemporaine*. Paris : Presses Universitaires de France.

PIAGET, J. & BETH, E. W. (1961). Épistémologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle. Paris : PUF.

ROGALSKI, M. (1995). Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? l'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire DidaTech – Université de Grenoble, 169*, 127-162.

ROBERT, A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahiers de didactique des mathématiques, 47.*

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematic, 22*(1), 1-36.

TALL, D.O. & VINNER, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with special reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2), 133-170.

WINSLØW, C. (2006). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In A. Rouchier et al. (Ed.), *Actes de la XIIIè Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 1-12). Cédérom. Grenoble : La pensée Sauvage.

WINSLØW, C. & MADSEN, L. M. (2007). Interplay between research and teaching from the perspective of mathematicians. In D. Pitta – Pantazi & G. Philippou, G. (Eds.), P*roceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2379-2388). Cyprus: University of Cyprus & ERME.

WINSLØW, C., MATHERON, Y., & MERCIER, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 267-284.