DEVELOPPEMENT DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT AU COURS D'UN PROCESSUS DE *LESSON STUDY*

Stéphane **CLIVAZ**

Laboratoire Lausannois Lesson Study et UER MS, HEP Vaud, Suisse

stephane.clivaz@hepl.ch

Résumé

Ce texte présente une recherche en cours portant sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement utilisées et développées au cours d'un processus de lesson study mené avec des enseignants de l'école primaire. Notre modèle d'analyse intègre les catégories de connaissances mathématiques pour l'enseignement, les niveaux d'activité du professeur et les phases du cycle de lesson study. Plusieurs extraits d'un cycle consacré à la numération décimale de position sont analysés à l'aide de ce modèle.

Mots clés

Lesson study, connaissances mathématiques pour l'enseignement, numération, développement professionnel

Ce texte et la présentation faite au séminaire national de l'ARDM sont inscrits dans une rubrique traditionnellement intitulée « travaux en cours ». Ils visent à présenter quelques extraits des recherches que nous menons actuellement au sein du Laboratoire Lausannois Lesson Study dans le cadre d'un processus de *lesson study* (LS) accompli par un groupe d'enseignants lausannois à propos de leçons de mathématiques dans les degrés 5H-6H[1]. Les LS seront tout d'abord présentées, du point de vue de leur développement historique et de leur déroulement. Nous présenterons ensuite le travail réalisé par ce groupe LS et terminerons la première partie par la présentation du cadre théorique utilisé pour analyser les connaissances mathématiques pour l'enseignement en jeu lors d'un processus LS. La deuxième partie illustrera l'utilisation de ce modèle théorique par des extraits d'analyses portant sur plusieurs extraits d'un cycle LS consacré à l'enseignement de la numération décimale de position. La conclusion ouvrira enfin quelques pistes de réflexion.

[1] Le degré 5HarmoS correspond au CE2 en France et donc à des élèves de 8 à 9 ans. Le degré 6HarmoS correspond au CM1 en France, et donc à des élèves de 9 à 10 ans.

1 CADRE

Les *lesson study*, de Tokyo à Lausanne

Les *Jugyo Kenkyu*, littéralement études de leçons ou *lesson study* (LS), sont nées au Japon dans les années 1890. Dans le mouvement d'occidentalisation du Japon caractéristique de l'ère Meiji (1868-1912), les écoles se sont elles aussi occidentalisées. Des milliers d'étudiants ont été envoyés en Europe et aux USA et plus de 3'000 enseignants et formateurs occidentaux ont été recrutés. Pris dans ce courant de réformes, des enseignants des écoles primaires attachées aux écoles normales nouvellement crées ont commencé à se réunir afin d'observer des leçons, en particulier de mathématiques, et de les examiner de manière critique (Inagaki, 1995, cité par Shimizu, 2014, p. 359). Ces LS se sont ensuite généralisées dans l'ensemble du Japon. Dans les années 1990, suite aux études internationales montrant les bonnes performances des élèves japonais en mathématiques, l'étude TIMSS[2] a comparé en détail les leçons de mathématiques de 8ème année[3], notamment japonaises et étatsuniennes. Les chercheurs ont été frappés de constater que ces leçons variaient énormément d'un pays à l'autre, mais fort peu à l'intérieur d'une même culture. Stigler et Hiebert (1999) ont ainsi parlé d'un *Teaching Gap*, un fossé en matière d'enseignement, en particulier entre le Japon d'une part, et l'Allemagne et les USA d'autre part. Ils ont par exemple mis en évidence (voir Figure 1) la part du temps de travail passé par les élèves à entraîner des techniques (*practice*), à appliquer des stratégies apprises auparavant (*apply*) et à inventer des stratégies (*invent/think*).

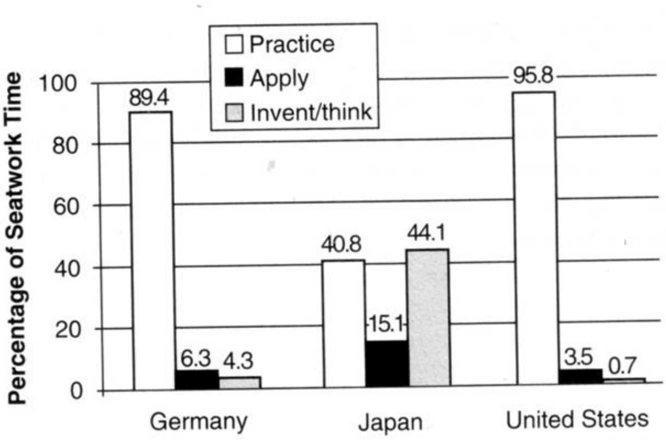


Figure 4.4. Average percentage of seatwork time spent in three kinds of tasks. *Source:* U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, Third International Mathematics and Science Study, Videotape Classroom Study, 1994–95.

Figure 1 : Comparaison du type de travail des élèves (Stigler & Hiebert, 1999, p.71)

En se basant sur les travaux de Yoshida (thèse qui sera publiée ultérieurement: Fernandez & Yoshida, 2004), Stiegler et Hiebert ont décrit ce qui, selon eux, expliquait pourquoi, par contraste avec l'enseignement essentiellement procédural aux USA, les enseignants japonais avaient un enseignement des mathématiques à la fois efficace et essentiellement axé sur la compréhension des mathématiques et la résolution de problème : la pratique des *Jugyo*

[2] Voir http://www.timss.org

[3] La 8ème année (degré international), 10ème HarmoS en Suisse, 4ème en France correspond à des élèves de 13 à 14 ans.

Kenkyu. Fort de cette promotion, et grâce en particulier aux travaux de Lewis qui a formalisé et popularisé les LS aux USA (Lewis, 2002, 2015; Lewis & Hurd, 2011), ce mode de développement professionnel s'est développé aux USA. Dans la méta analyse de Gersten, Taylor, Keys, Rolfhus et Newman-Gonchar (2014) un programme LS (Perry & Lewis, 2011) a par exemple été jugé comme un des deux seuls programmes de développement professionnel en mathématiques (sur 643) amenant une amélioration significative des résultats des élèves selon les critères du US Department of Education Institute of Education Sciences. Cette expansion est aussi visible en Europe du Nord et dans le reste de l'Asie. En Suisse romande, un laboratoire de recherche et de formation autour des LS, le Laboratoire Lausannois Lesson Study (3LS[4]) a été fondé à Lausanne en 2014.

Dans le modèle notamment pratiqué à Lausanne, les LS démarrent à partir d'une difficulté d'enseignement ou d'apprentissage identifiée par un groupe d'enseignants. Les enseignants analysent l'apprentissage visé, étudient la notion, consultent les divers manuels, étudient des articles de revues professionnelles, etc. Cette étude leur permet de planifier ensemble une leçon.

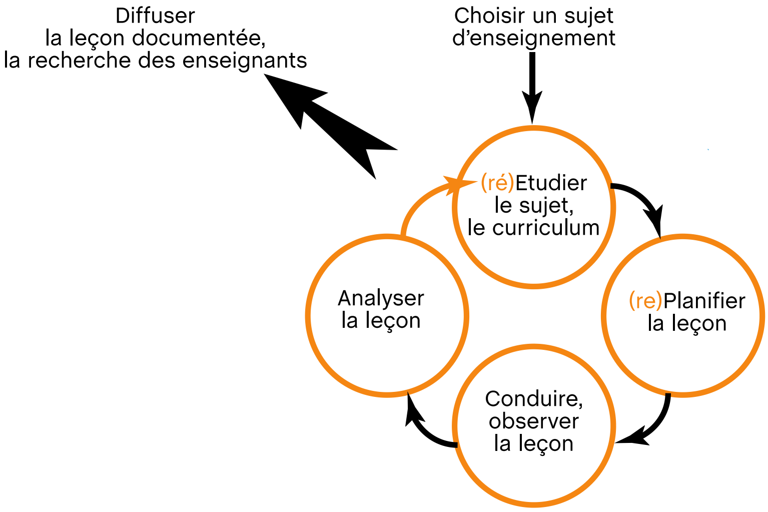


Figure 2 : Le processus LS (d'après Lewis & Hurd, 2011, p.2)

Même si les LS connaissent un certain nombre de variations au Japon et surtout dans leurs adaptations hors du Japon (Takahashi & McDougal, 2016), le processus reste codifié autour de ce schéma dont le cœur est la conduite et l'observation de la leçon de recherche (Shimizu, 2014), véritable phase expérimentale d'un processus de recherche. Les auteurs considèrent ainsi qu'une LS est

> un travail de recherche : elle procède à partir de travaux documentés antérieurs, ainsi que de questions et de buts précis; elle implique la formulation explicite d'hypothèses, ainsi que des points et des conditions d'observations pour les tester; elle organise des expérimentations avec un dispositif concret (la leçon) qui « intègre» les hypothèses et permet de les tester, et qui est évalué de façon souvent très rigoureuse; elle rend public (ou, au moins, partageable) ses résultats sous forme de document sous une forme standardisée, et permet donc en principe aux collègues de refaire l'expérience sous des conditions déterminées (Miyakawa & Winsløw, 2009b, p.83).

Au Japon notamment, cette leçon de recherche, ainsi que la discussion qui suit, sont souvent ouvertes à l'ensemble des enseignants de l'école, voire d'un district scolaire, permettant ainsi

[4] Voir www.hepl.ch/3LS

une diffusion de pratiques innovantes, voire une exploration de nouvelles leçons ou de nouveaux sujets d'enseignements lors de réformes curriculaires (Lewis & Takahashi, 2013).

Le groupe LSM et la recherche en cours

En suivant le modèle décrit plus haut, un groupe de huit enseignants de 5H-6H de deux établissements primaires de la région lausannoise a travaillé durant deux ans autour de leçons de mathématiques. Encadré par deux facilitateurs[5], qui sont pour l'un didacticien des mathématiques (l'auteur de cet article) et pour l'autre spécialiste des processus d'enseignement-apprentissage, le groupe *Lesson Study en Maths* (LSM) a effectué quatre cycles de leçons de mathématiques consacrées à la numération décimale, aux transformations géométriques et à la résolution de problèmes (deux cycles). Les deux facilitateurs ont plusieurs rôles : un rôle d'animateur dans lequel ils organisent les séances et les conduisent, un rôle de formateur d'enseignants, un rôle d'expert dans lequel ils amènent du contenu mathématique, didactique ou pédagogique et un rôle de participant à l'intérieur du dispositif avec l'écriture de plans de leçons finaux (disponibles sur le site du laboratoire 3LS) ou d'articles dans des revues professionnelles (voir par exemple Baetschmann *et al.*, 2015). Leur rôle a d'ailleurs évolué au cours du dispositif et selon les sujets abordés. Pendant les séances collectives, ils orientent, parfois imposent des choix didactiques, parfois laissent les enseignants faire leurs choix puis expérimenter lors des leçons de recherche (Clerc-Georgy & Clivaz, 2016). Les facilitateurs ont attendu la fin du dispositif LS pour analyser les données de recherche et pour séparer leur rôle de facilitateurs et de chercheurs. En ce qui concerne le didacticien, ces analyses visent à décrire les connaissances mathématiques pour l'enseignement en jeu dans le processus LS et nous allons maintenant décrire le modèle d'analyse de ces connaissances.

Le modèle d'analyse

Les connaissances mathématiques pour l'enseignement

À partir des travaux fondateurs de Shulman (1986 / 2007), de nombreuses recherches internationales ont été menées concernant les connaissances mathématiques des enseignants, la catégorisation de ces connaissances et leurs effets sur les résultats des élèves (Bednarz & Proulx, 2009; Tchoshanov, 2011). Ainsi que le mentionne la revue du National Mathematics Advisory Panel (2008), la plupart des recherches antérieures ont tenté de montrer un lien entre les connaissances mathématiques des enseignants primaires et les résultats en mathématiques des élèves. Ces liens ont été étonnement difficiles à exhiber et cette difficulté a conduit à de nombreuses catégorisations de ces connaissances (Clivaz, 2011, pp.23-41). La catégorisation la plus couramment utilisée est celle de Ball, Thames et Phelps (2008) qui proposent de classifier les différentes Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement[6] (CME) selon le découpage présenté à la Figure 3.

[5] Les deux formateurs-chercheurs du dispositif LS sont nommés, comme c'est souvent le cas en anglais, les facilitateurs (Clerc-Georgy & Clivaz, sous presse).

[6] Les termes de Ball *et al.* (2008) sont : Mathematical Knowledge for Teaching / Subject Matter Knowledge / Common Content Knowledge / Horizon Knowledge / Specialized Content Knowledge / Pedagogical Content Knowledge / Knowledge of Content and Teaching / Knowledge of Content and Students / Knowledge of Content and Curriculum.

La traduction est la mienne, comme toutes celles de cet article.

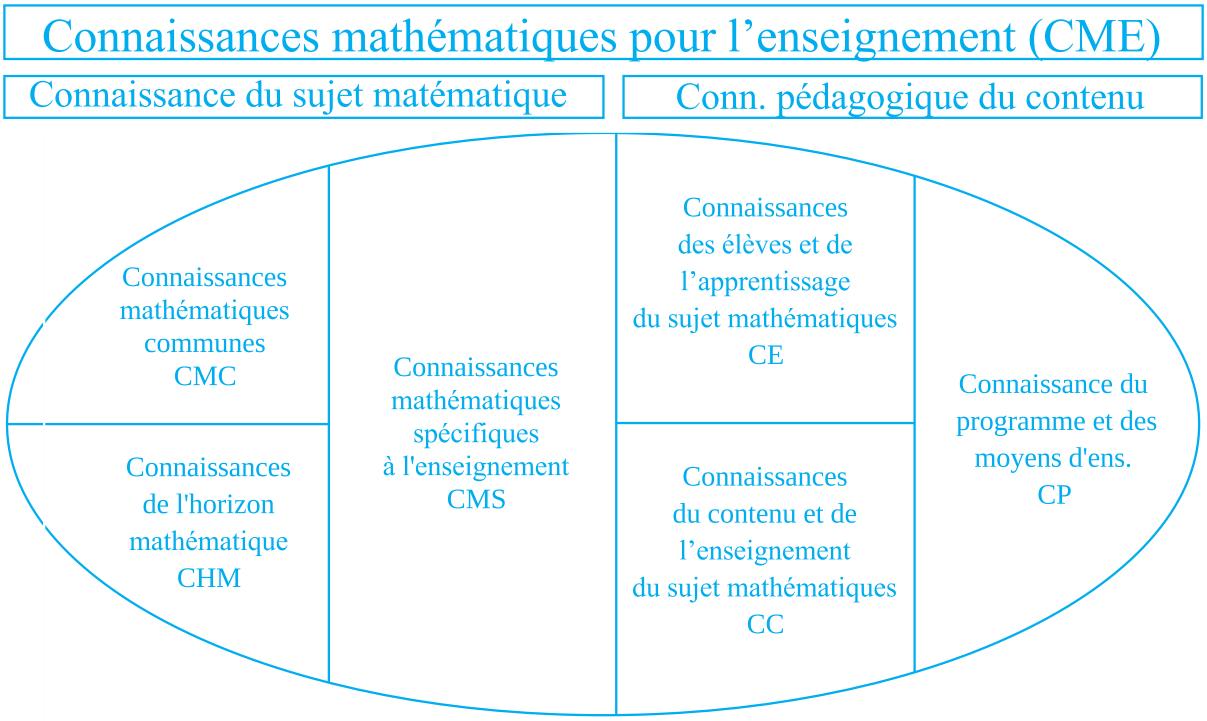


Figure 3. – Connaissances Mathématiques pour l’Enseignement (Ball et al., 2008, p.403)[7]

Une des particularités de cette classification est la mise en évidence de Connaissances Mathématiques Spécifiques à l’enseignement (CMS). Les CMS sont des connaissances mathématiques dont ne disposent pas d’autres professionnels utilisant les mathématiques. Ces CMS se distinguent des Connaissances Mathématiques Communes (CMC), mais aussi des connaissances pédagogiques du contenu :

> Knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. […] Important to note is that each of these common tasks of teaching involves *mathematical* reasoning as much as it does pedagogical thinking. (Ball, Hill & Bass, 2005, p.21)

Cette classification a permis de montrer l’influence des CMS sur les résultats des élèves (Hill, Rowan & Ball, 2005). Elle a également été utilisée pour tenter de décrire la *mathematical quality of instruction* au moyen d’observations de classes (Hill *et al.*, 2008). Toutefois, ainsi que le reconnaissent Ball et ses collègues (2008, p.403), cette classification demeure statique et n’est pas centrée sur *comment* les connaissances mathématiques de l’enseignant influencent l’enseignement et l’apprentissage. De fait, comme l’ont relevé Steinbring (1998) et Margolinas (2004) à propos de la classification de Shulman, ces catégories sont figées et ne sont pas « a good model for teacher’s activity, which is more complicated » (Margolinas, Coulange & Bessot, 2005, p.107). Comme l’affirment Davis et Renert, « this will require more fine-grained analyses than large-scale assessments » (2013, p.20). Cette finesse dans le grain d’analyse et une certaine mobilité dans l’analyse des activités du professeur sont présentes dans le modèle des niveaux d’activité du professeur (Margolinas, 1995).

[7] Ma traduction des termes de Ball *et al.*: Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) / Subject Matter Knowledge / Pedagogical Content Knowledge / Common Content Knowledge (CCK) / Horizon Knowledge HK) / Specialized Content Knowledge (SCK) / Knowledge of Content and Teaching (KCT) / Knowledge of Content and Students (KCS) / Knowledge of Content and Curriculum (KCC).

Les niveaux d’activité du professeur

Ce modèle a été développé par Margolinas (1995) qui a enrichi la structuration du milieu de Brousseau (1990) pour analyser les activités usuelles du professeur et *démêler* des pratiques qui sont imbriquées.

+3	Niveau noosphérien ou idéologique	[…] activité du professeur qui réfléchit de façon très générale à l'enseignement, ou bien, toujours en général, à l'enseignement des mathématiques. À ce niveau, l'activité du professeur n'est pas finalisée.
+2	Niveau de construction ou de conception d’un thème	[…] activité du professeur est de concevoir les grandes lignes de l'enseignement d'un thème. Du point de vue de l'ingénierie didactique, c'est à ce niveau qu'intervient de façon caractéristique la recherche d'une situation fondamentale. Si l'on considère l'observation des pratiques ordinaires, on pourrait parler à ce niveau de recherche de problématique.
+1	Niveau de projet de leçon	[…] activité du professeur qui détermine le scénario d'une leçon.
0	Niveau de la situation didactique	[…] action du professeur en classe. Il s'agit du *niveau de base* dans lequel les élèves et le professeur interagissent es-qualité ; et c’est pourquoi il reçoit le numéro zéro.
-1	Niveau d’observation ou de dévolution	[Niveau] de la dévolution ou de l'observation de l'activité des élèves.

Tableau 1 : Niveaux d’activité du professeur, d’après (Margolinas, 2002, p.142)

Les niveaux d’activité du professeur et les situations ne sont pas réduits au temps de la leçon en classe, même si certaines phases d’une situation didactique sont partiellement caractérisées par des situations de niveaux différents. Elles ne sont pas non plus temporellement successives (Margolinas, 1995, p.96) et chaque niveau peut être considéré dans le présent de l’action, mais aussi dans le passé ou le futur.

Notre modèle d’analyse des CME durant un cycle LS

En vue d’analyser les connaissances mathématiques que les enseignants utilisent et développent lors du processus LS, les catégories développées par Ball *et al.* (2008) offrent une catégorisation de ces connaissances à chaque étape du processus. Dans une autre direction, les niveaux d’activité du professeur (Margolinas, 2002) permettent de décrire les activités de l’enseignant lors de la leçon de recherche, mais aussi hors de la classe. Deux séries de travaux nous ont conduit à proposer un modèle d’analyse des CME en jeu lors du processus LS (Clivaz & Ni Shuilleabhain, 2016). Nous nous sommes basés tout d’abord sur les travaux de Ni Shuilleabhain (2015, 2016) qui a analysé les CME utilisées par des enseignants dans un cycle LS. Nous avons également pris appui sur la combinaison, au sens de Prediger, Bikner-Ahsbahs et Arzarello (2008), de la catégorisation des CME et des niveaux d’activité du professeur. Cette combinaison s’est révélée fructueuse (Clivaz, 2015a) dans nos recherches précédentes (Clivaz, 2011, 2014, 2016).
Ce modèle (voir Figure 4) vise à repérer et à catégoriser les CME utilisées par les enseignants à chaque étape lors du processus LS et à situer à quel niveau d’activité elles s’expriment. Il vise également à suivre ces connaissances au cours du processus et à tenter de percevoir leur développement.

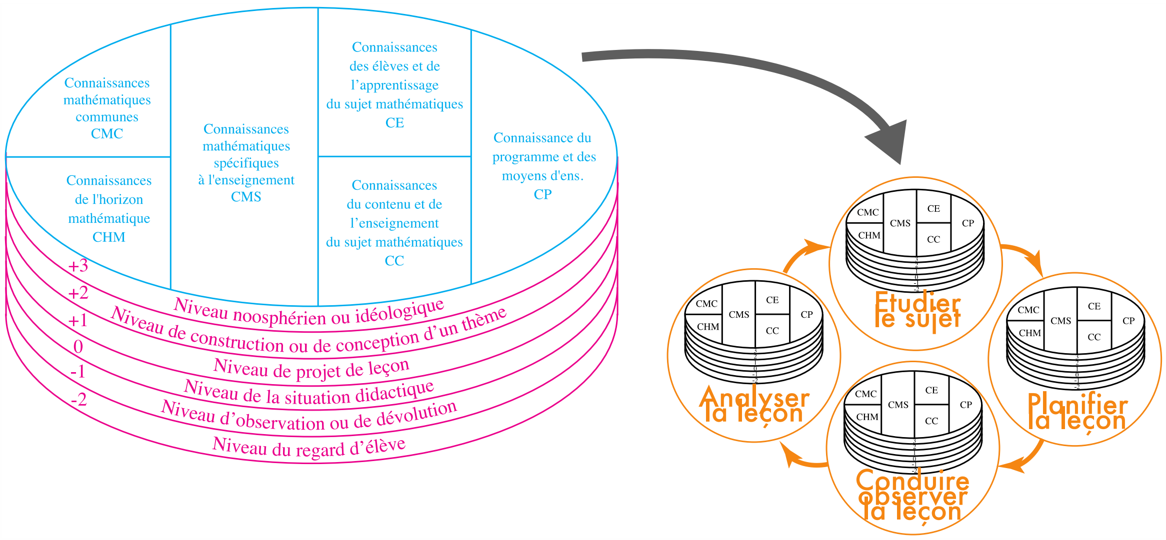


Figure 4. – Notre modèle d'analyse des CME durant un cycle LS

Il existe plusieurs types de groupes ou de communautés de pratiques dans lesquels les enseignants s'expriment à propos de leurs valeurs ou de questions générales concernant l'enseignement et l'apprentissage de manière générale ou à propos des mathématiques (niveau +3) ou à propos de l'enseignement et de l'apprentissage du sujet mathématique donné (niveau +2). Le processus LS a toutefois la particularité de permettre de recueillir également des données sur la préparation de la leçon (niveau +1). Le processus LS permet de plus d'analyser ce que fait l'enseignant en classe quand il enseigne (niveau 0) ou observe ses élèves (niveau -1), mais aussi de recueillir les réflexions et les observations des enseignants quant à ces niveaux +1, 0 et -1, tant durant les phases de planification ou d'analyse que durant la leçon de recherche elle-même. De plus, lors du processus LS et comme relevé par Fernandez, Cannon et Chokshi (2003) et repris par Ni Shuilleabhain (2015), les enseignants voient parfois certains éléments de la leçon « through the eyes of their students » (Fernandez *et al.*, 2003, p.176), s'exprimant même comme des élèves. Ce « student lens » nous semble être situé à un niveau encore en-dessous du niveau d'observation et nous en avons donc fait un niveau -2.
Ce modèle permet ainsi de suivre une CME à la fois durant les diverses étapes du processus et de la situer aux divers niveaux d'activité du professeur, comme nous allons le voir dans les analyses suivantes. Les CME sont ici considérées comme appartenant collectivement au groupe effectuant le processus LS et les individus ne sont pas distingués.

2 ANALYSES POUR UN CYCLE LS

Méthodologie

Le cycle LS dont nous présentons quelques analyses était le premier de la série et était consacré à la numération décimale de position. Il concerne sept réunions et deux leçons de recherche. Toutes les réunions du processus ainsi que les leçons de recherches ont été filmées, transcrites et codées dans un logiciel qualitatif d'analyse de données (NVivo). La durée totale transcrite est de plus de 17 heures. Les notes d'observation des enseignants (prise sur tablette avec l'application LessonNote[8]) ainsi que les plans de leçon produits par le groupe ont également été recueillis et codés. Nous allons présenter quelques extraits de l'analyse de ces données durant plusieurs phases du processus afin de mettre en évidence les CME utilisées et développées par les enseignants à divers niveaux d'activité. Nous faisons le choix de suivre la connaissance mathématique liée à l'aspect décimal (Serfati, 2005; Tempier, 2013) de la numération décimale de position.

Étude du sujet et du curriculum, planification de la leçon

Lors de la première réunion, les enseignants ont été encouragés à proposer des sujets pour les cycles LS à venir. Ce qui semblait leur poser le plus de problèmes, c'est justement la résolution de problèmes. Viennent ensuite les passages de centaines ou de milliers dans le système de numération et les transformations géométriques. Afin d'éviter de débuter le processus par le sujet le plus délicat, le groupe a retenu la numération pour le premier cycle.

Afin de mieux cerner le sujet, les facilitateurs ont lancé une discussion pour mieux savoir où étaient situées les difficultés liées à la numération et ont posé la question de savoir ce qui était délicat dans la numération.

Océane[9]	Le passage des dizaines.
Caroline	Mais chaque passage, chaque passage...
F-Stéphane	Qu'est-ce qui se passe dans le passage des dizaines?
Caroline	C'est qu'on a plus de choses pour écrire là-dessus quoi on est obligé d'utiliser les chiffres qui existent déjà. Donc on, on fait un passage pour revenir à un... En fait... Bah oui, c'est le boulier en fait, on doit déplacer de un à chaque fois qu'on arrive à un... un neuf à la fin. On doit déplacer d'un.
Océane	On échange un paquet de dix…

Dans ce passage, situé durant la phase d'étude du sujet, les enseignants se situent au niveau de la construction du thème (+2) et désencapsulent la connaissance mathématique de la numération décimale de position en base dix (*CMS*) en faisant référence à la fois à l'aspect décimal et à l'aspect positionnel de la numération. Afin de rendre plus concrète cette observation des difficultés liées à la numération, le groupe a décidé de travailler sur des erreurs d'élèves amenées à la fois par les enseignants et par les facilitateurs. L'une de ces erreurs était

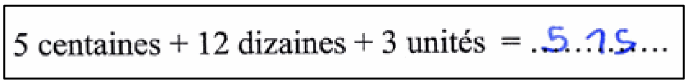


Figure 5. – Erreur d'élève[10]

Au cours de ce travail sur les erreurs d'élèves, les enseignants ont effectué les tâches semblables à celle de la Figure 5 de la même manière que s'ils avaient été des élèves, se plaçant au niveau du *regard d'élève (-2)*, leur permettant de décortiquer encore plus la CMS liée à la numération décimale de position durant la phase de construction du thème. La conclusion, apportée par les facilitateurs remonte ensuite au niveau +2 :

F-Anne	Ouais. C'est pas l'échange en soit... c'est un échange qui est particulier parce que c'est l'échange dans le système décimal, donc on voit bien y a les deux dimensions. Y a la dimension de position et y a la dimension décimale qui est révélée en échange.
F-Stéphane	Moi j'aime mieux parler de groupement que d'échange.

[8] Voir http://lessonnote.com

[9] Les prénoms des enseignant-e-s sont fictifs. Les facilitateurs, Anne et Stéphane, sont désignés par leur vrai prénom précédé de F- .

[10] Tirée de http://numerationdecimale.free.fr/index.php?option=com_content&view=article&id=133&Itemid=148

Océane	Ah d'accord.

C’est sur cette analyse d’erreur permettant de découvrir, au travers des erreurs des élèves (CE) les deux aspects de la numération décimale de position (CMS) que le groupe va proposer et analyser une tâche permettant de travailler l’aspect décimal de la numération de position. Cette tâche, sous forme de jeu de l’oie tirée de CapMath (Charnay, Combier, Dussuc, Madier & Madier, 2007), mettait en jeu des échanges de cartes « 1 centaine », « 1 dizaine » et « 1 unité » (Batteau & Clivaz, 2016).

Conduite et observation de la leçon, analyse de la leçon

Une première leçon de recherche a eu lieu dans la classe d’une enseignante du groupe. Durant la discussion suivant la leçon et en basant leur analyse sur leur observation des élèves, les membres du groupe ont déterminé que les échanges visés n’avaient pas vraiment eu lieu et que la tâche devait être modifiée pour conduire les élèves à vraiment pratiquer les échanges de centaines, de dizaines et d’unités. Cette tâche révisée (voir annexe et Batteau & Clivaz, 2016) a été conduite dans la classe d’une seconde enseignante dans sa classe.
Au début du jeu, lors d’un blocage dans un groupe, l’enseignante Édith (P) intervient auprès d’une élève, Julie (e). Cette élève n’a pas suffisamment de cartes « 1 dizaine » et « 1 unité » pour pouvoir donner 35. Elle propose alors d’échanger deux centaines.

Édith (P)	alors, deux centaines, ça fait combien ?
Julie (e)	deux cents.
Édith (P)	ça fait deux cents. [...] Trois dizaines, ça fait combien ?
Julie (e)	trente.
Édith (P)	tu m'as dit trois dizaines ça fait trente. Et pis deux unités ?
Julie (e)	deux.
[...]	
Édith (P)	On échange une centaine. C'est à dire que maintenant, là-dedans tu vas devoir récupérer combien de points ?
Julie (e)	euh dix dizaines.

Ce passage est situé au niveau 0 de la situation didactique. Dans ses interventions, Édith s’exprime en *nombre naturalisé* et demande à l’élève de traduire les nombres exprimés en unités de numération (Chambris, 2008) en nombre naturalisé, par exemple lorsqu’elle demande à Julie « deux centaines ça fait combien ? ». Pour sa part, l’élève s’exprime directement en unités de numération (sans repasser par le nombre en unités simples, par exemple lorsqu’elle dit « dix dizaines »). Dans ce cas, la CME est catégorisée de deux manières. Tout d’abord en tant que CE problématique, dans la mesure où Édith ne remarque pas, ou ne parvient pas à interpréter le raisonnement mathématique de Julie. Elle est également catégorisée comme CMS dans la mesure où Édith ne parvient pas à décortiquer la CMC de la numération décimale. De fait, le raisonnement expliqué par Édith revient au raisonnement suivant :

	1 centaine = 100
et	10 dizaine = 100
donc	1 centaine = 10 dizaines

Cette manière d’éviter les échanges en passant par les unités, justement pour expliquer les échanges, est analysée dans le plan de leçon diffusé sur le site du laboratoire 3LS :

> Souvent d’ailleurs, les échanges ne sont plus vraiment effectués et on passe par le nombre. Par exemple, si on demande d’échange 12 centaines en dizaines, beaucoup d’élèves (et d’adultes) vont passer par le nombre 1200, c’est-à-dire 1200 unités, pour dire que cela donnera 120 dizaines, sans parvenir à faire directement l’échange. C’est également de cette manière que souvent les enseignants expliquent cet échange à leurs élèves. Dans ce cas, nous sommes dans un cercle vicieux, puisque cela signifie qu’il faut avoir compris le système de numération pour comprendre les échanges !

Cette synthèse de la CMS reprend donc à la fois les observations faites par les enseignants et relevées dans leurs notes écrites durant la leçon de recherche (phase de conduite et d'observation de la leçon, niveau 0) et les discussions durant la phase d'analyse en les généralisant et en les décontextualisant au niveau de la conception du thème (+2).

Suite à la rédaction de ce passage du plan de leçon, une des enseignantes du groupe, Valentine, réalise qu'elle a observé par le passé le même type de difficultés chez ses élèves. À la fin de l'ensemble du processus, elle réalise ainsi que certaines erreurs de ses élèves sont probablement dues à sa façon d'expliquer l'échange de dizaines en unités.

Valentine moi, j'ai une autre question par exemple dans neuf cent soixante-trois, combien il y a de dizaines? Nonante-six. Moi, les miens d'élèves ils ont appris un truc entre guillemets. C'est que pour dire il y a nonante-six parce que, ils vont jusqu'à après le chiffre des dizaines et ils disent ce qu'il reste. Mais, j'ai pas su, j'ai pas dû savoir, je suis sûre qu'ils utilisent que le truc. Personne ne doit savoir pourquoi. Je ne sais pas comment leur faire. […] Moi, je transforme beaucoup en argent. Je dis en pièces de un franc. Y aura neuf cent soixante-trois pièces de un franc. Si on doit avoir que des billets de dix, et là qu'ils comprennent qu'il y en ait nonante-six des billets de dix. Enfin je veux dire.

Même si cette observation n'est pas directement reliée à une leçon, Valentine est au niveau d'observation (-1), même virtuelle, de ses élèves. Elle utilise la CMS développée dans le plan de leçon pour analyser les réponses de ses élèves (CE) en contraste avec la CMC consistant à passer par les unités de numération en nombre naturalisé. Cet effet de l'observation de la leçon de recherche et de son analyse sur l'analyse de Valentine sur sa propre pratique nous semble particulièrement intéressant.

Une analyse quantitative des codes obtenus

Les codes obtenus pour ce cycle LS consacré à la numération sont actuellement en cours d'analyse, mais leur nombre (2857) permet déjà d'envisager de représenter graphiquement quel type de CME apparaît à quelle phase du cycle et à quel niveau d'activité du professeur. Le Tableau 2 permet de voir que, sur l'ensemble du cycle, tous les types de CME sont présents dans le travail des enseignants quand ils étudient le sujet, planifient, enseignent, observent et discutent la leçon. Il permet aussi de montrer que, si tous les niveaux d'activité sont représentés, le niveau +1 du projet de leçon est le plus présent, mais aussi que certains types de CME sont plus liés à certains niveaux d'activité. Par exemple les CMS sont particulièrement présentes aux niveaux +2 et +1 alors que les connaissances liées à l'enseignement du sujet mathématique (CC) sont très développées au niveau +1, -1 et 0.

	CMC	CHM	CMS	CE	CC	CP
+3	0.0	0.2	1.1	0.1	1.0	0.5
+2	0.0	0.5	8.3	3.6	1.9	3.3
+1	5.7	0.0	7.7	0.7	20.3	6.6
0	0.1	0.0	2.0	1.4	10.2	0.3
-1	0.0	0.0	0.4	6.6	14.4	0.9
-2	0.9	0.0	0.0	0.8	0.5	0.0

Tableau 2 – Pourcentages de catégories de CME par niveau d'activité pour l'ensemble du cycle LS (total 100 pour l'ensemble du cycle)

La représentation graphique proposée à la Figure 6 permet, avec les mêmes codes couleur, de représenter également pour chaque phase du cycle les CME en jeu en fonction des niveaux d'activité. Il sera probablement intéressant de comparer ces répartitions sur plusieurs cycles LS afin de voir comment elles varient selon le sujet traité ou selon les habitudes de groupes. Nous comparerons également plusieurs groupes entre eux, en particulier ce groupe lausannois avec un groupe irlandais donc le cycle LS a été analysé par Ni Shuilleabhain (2016).

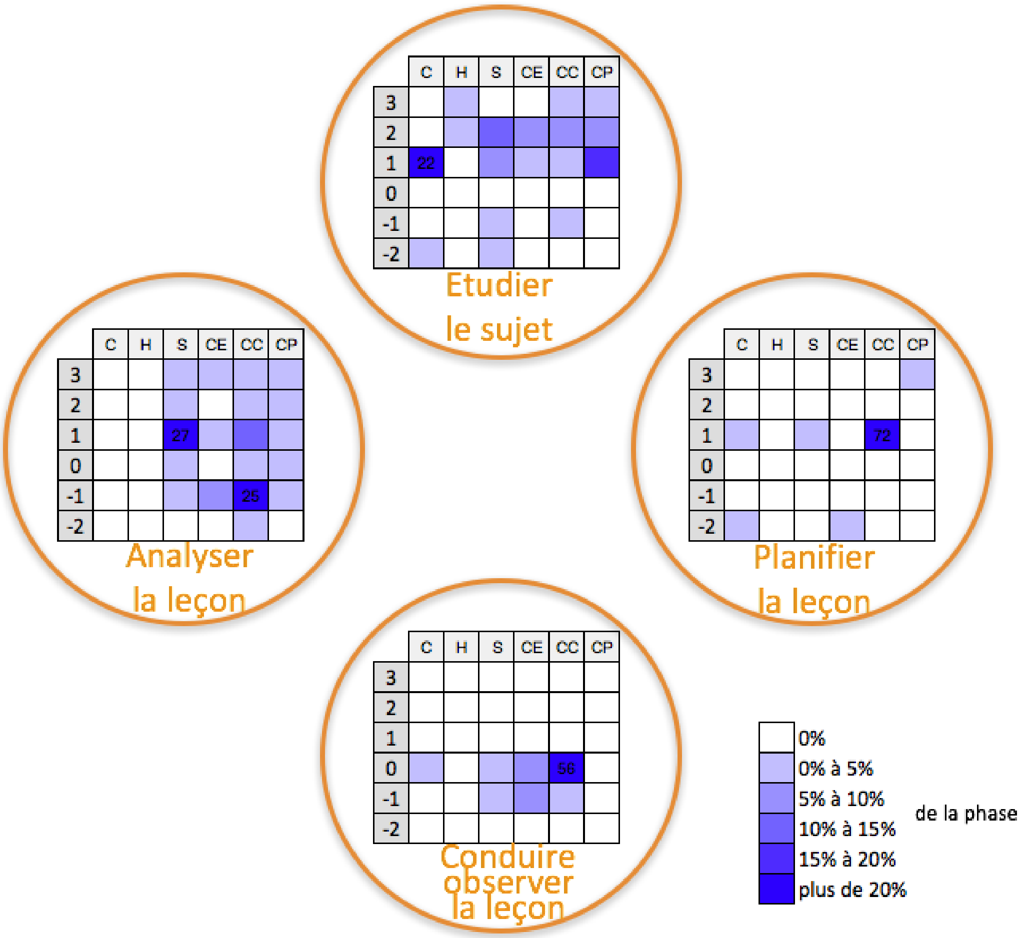


Figure 6. – Pourcentages de catégories de CME par phase du cycle LS et par niveau d'activité (total 100 par phase).

3 Pistes de reflexion et conclusion

Nous utilisons des modèles propres à la *mathematics education* et à la didactique francophone des mathématiques pour analyser certains éléments d'un processus LS en mathématiques et nous sommes ainsi les acteurs d'un apport réciproque : d'une part les cadres théoriques utilisés permettent une meilleure compréhension des processus en jeu dans les LS et répondent à une demande récurrente de théorisation du processus LS (voir par exemple Clivaz, 2015b; Miyakawa & Winsløw, 2009a; Potari, 2011) ; d'autre part les processus LS fournissent une source d'observation privilégiée sur le travail des enseignants et permettent une interaction authentique entre recherche et profession enseignante.

> Each approach takes into account different dimensions of mathematics education, and each of them could support the other, in order to develop a body of scientific knowledge in our domain on the one hand and to develop the practice of teaching mathematics in a specific culture on the other (Miyakawa & Winsløw, 2009a, p.200).

Un intérêt réciproque croissant entre la communauté des LS[11] et la communauté de *mathematics education* est d'ailleurs marqué notamment par de nombreuses contributions dans les colloques internationaux (ICMI, PME, CERME), par l'ouvrage collectif autour de Hart (Hart, Alston & Murata, 2011), par les articles de Shimizu (2014) et Runesson (2014) dans l' *Encyclopedia of Mathematics Education* (Lerman, 2014) ou encore par un numéro spécial de ZDM (Huang & Shimizu, 2016). Du point de vue francophone, des interactions entre didactique des mathématiques et LS sont mises en évidence notamment par Miyakawa et Winsløw (2009b) et par Clivaz (2015b). Nous poursuivrons ce dialogue que nous espérons fructueux au sein des deux communautés.

Le travail d'analyse des données issues du groupe LSM est également effectué selon d'autres points de vue, avec d'autres questions et avec d'autres cadres théoriques. Ces analyses en cours, du point de vue historico-culturel ainsi que du point de vue de la double approche didactique et ergonomique en didactique des mathématiques ont été présentées à la 18e école d'été de didactique des mathématiques (Clivaz, Clerc-Georgy & Batteau, 2016). Elles ont notamment permis de mettre en évidence une évolution dans les rôles des formateurs et des enseignants quant au partage des savoirs (Clerc-Georgy & Clivaz, 2016), un travail d'adaptation des tâches mathématiques ou une prise de conscience des effets de l'enseignement sur l'apprentissage des élèves (Batteau & Clivaz, 2016). Les conclusions des analyses en termes d'évolution des CME sur les quatre cycles LS pourront donc être croisées avec ces résultats. La question notamment du rôle des facilitateurs dans l'évolution des CME devra être comparée avec les travaux étatsuniens et japonais à ce sujet (Takahashi, 2014; Takahashi & McDougal, 2016) et ces comparaisons nous conduiront probablement à préciser ce rôle dans les futurs projets menés au sein de laboratoire 3LS. Ces projets helvétiques tenteront aussi d'étendre ce type de développement professionnel à l'échelle d'une école et d'analyser l'influence au niveau de la culture des établissements scolaires, voire du système scolaire (Lewis, Perry & Hurd, 2009).

[11] Communauté représentée notamment par la World Association of Lesson Studies, WALS, voir www.walsnet.org

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BAETSCHMANN, K., BALEGNO, M., BAUD, E., CHEVALLEY, M., CLERC-GEORGY, A., CLIVAZ, S. et al. (2015). Une expérience de Lesson Study en mathématiques en 5-6 Harmos. *L'Educateur, 11*, 32-34. Consulté le 10 mai 2016, à http://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/laboratoire_3ls/EducateurLessonStudy11_2015.pdf

BALL, D. L., HILL, H. C., & BASS, H. (2005). Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (Fall 2005), 14-22, 43-46. Consulté le 3 janvier 2015, à http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/65072/4/Ball_F05.pdf

BALL, D. L., THAMES, M. H., & PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. Consulté le 24 janvier 2017, à http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389

BATTEAU, V., & CLIVAZ, S. (2016). Le dispositif de formation continue lesson study : travail autour d'une leçon de numération. *Grand N, 98*, 27-48.

BEDNARZ, N., & PROULX, J. (2009). Knowing and using mathematics in teaching conceptual and epistemological clarifications. *For the learning of mathematics, 29*(3), 11-17. Consulté le 3 janvier 2015, à http://flm-journal.org/Articles/90007B35446B191D39748441966D2.pdf

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(9.3), 309 - 336. Consulté le 3 janvier 2015, à http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00686012

CHAMBRIS, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Université Paris-Diderot-Paris VII,

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.-P., MADIER, D., & MADIER, P. (2007). *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant, manuel de l'élève et matériel photocopiable*. Paris: Hatier.

CLERC-GEORGY, A., & CLIVAZ, S. (2016). Evolution des rôles entre chercheurs et enseignants dans un processus lesson study: quel partage des savoirs? In F. Ligozat, M. Charmillot & A. Muller (Eds.), *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation* (pp. 189-208). Série Raisons Educatives, n°20. Bruxelles: De Boeck.

CLERC-GEORGY, A., & CLIVAZ, S. (sous presse). Evolution des rôles entre chercheurs et enseignants dans un processus lesson study: quel partage des savoirs? In F. Ligozat, A. Muller & M. Charmillot (Eds.), *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation*. Bruxelles: De Boeck, Raisons Educatives.

CLIVAZ, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. Consulté le 3 janvier 2015, à http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

CLIVAZ, S. (2014). *Des mathématiques pour enseigner? Quelle influence les connaissances mathématiques des enseignants ont-elles sur leur enseignement à l'école primaire?* Grenoble: La Pensée Sauvage.

CLIVAZ, S. (2015a). Des mathématiques pour enseigner? Quelques réflexions à partir d'un cas de combinaison de cadres théoriques. In L. Bacon, D. Benoit, C. Lajoie & I. Oliveira (Eds.), *Croisements variés de concepts, d'approches et de théories: les enjeux de la création en recherche en didactique des mathématiques. Colloque du groupe de didactique des mathématiques du Québec 2014.* (pp. 1-10). UQAM, Montréal. Consulté le 15 juin 2015, à https://www.academia.edu/12352746

CLIVAZ, S. (2015b). French Didactique des Mathématiques and Lesson Study: a profitable dialogue? *International Journal for Lesson and Learning Studies, 4*(3), 245-260. Consulté le 15 juin 2015, à http://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/IJLLS-12-2014-0046

CLIVAZ, S. (2016). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. *Recherche en didactique des mathématiques, 36*(2), 231-261.

CLIVAZ, S., CLERC-GEORGY, A., & BATTEAU, V. (2016). Lesson study en mathématiques : un dispositif japonais de développement professionnel des enseignants à l'épreuve du contexte suisse-romand. In Y. Matheron & G. Gueudet (Eds.), *Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 487-502). Grenoble: La Pensée Sauvage.

CLIVAZ, S., & NI SHUILLEABHAIN, A. (2016, 26 juillet). *Developing Mathematical Knowledge for Teaching in Lesson Study: Propositions of a Theoretical Framework.* Texte présenté au ICME 13, Hamburg

DAVIS, B., & RENERT, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 245-265. Consulté le 3 janvier 2015, à http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9424-8

FERNANDEZ, C., CANNON, J., & CHOKSHI, S. (2003). A US–Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and teacher education, 19*(2), 171-185.

FERNANDEZ, C., & YOSHIDA, M. (2004). *Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

GERSTEN, R., TAYLOR, M. J., KEYS, T. D., ROLFHUS, E., & NEWMAN-GONCHAR, R. (2014). Summary of research on the effectiveness of math professional development approaches. *Tallahassee, FL Southeast Regional Educational Laboratory at Florida State University*, 3-15.

HART, L. C., ALSTON, A. S., & MURATA, A. (Eds.). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Netherland

HILL, H. C., BLUNK, M., CHARALAMBOUS, C., LEWIS, J., PHELPS, G., SLEEP, L. et al. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511.

HILL, H. C., ROWAN, B., & BALL, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.
HUANG, R., & SHIMIZU, Y., (ED.). (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective. *ZDM, 48*(4). Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0795-7
INAGAKI, T. (1995). Meiji kyouju rironshi kenkyu [A historical research on teaching theory in Meiji-era]. *Tokyo: Hyuuron-Sya*
LERMAN, S. (Ed.). (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Netherlands. Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8
LEWIS, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia: Research for Better Schools.
LEWIS, C. (2015). What Is Improvement Science? Do We Need It in Education? *Educational Researcher, 44*(1), 54-61.
LEWIS, C., & HURD, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
LEWIS, C., PERRY, R., & HURD, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: a theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 285-304. Consulté le 2 novembre 2015, à http://dx.doi.org/10.1007/s10857-009-9102-7
LEWIS, C., & TAKAHASHI, A. (2013). Facilitating curriculum reforms through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 2*(3), 207-217.
MARGOLINAS, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques : actes du Séminaire national 1993-1994* (pp. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté le 3 janvier 2015, à http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418815/fr/
MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-155). Grenoble, France: La Pensée Sauvage. Consulté le 3 janvier 2015, à https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00421848
MARGOLINAS, C. (2004). Modeling the Teacher's Situation in the Classroom. In H. Fujita, Y. Hashimoto, B. Hodgson, P. Lee, S. Lerman & T. Sawada (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education* (pp. 171-173). Dordrecht: Springer Netherlands. Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-9046-9_38
MARGOLINAS, C., COULANGE, L., & BESSOT, A. (2005). What Can the Teacher Learn in the Classroom? *Educational Studies in Mathematics, 59*, 205-234.
MIYAKAWA, T., & WINSLØW, C. (2009a). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 199-218.
MIYAKAWA, T., & WINSLØW, C. (2009b). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants: Etude collective d'une leçon. *Education et Didactique, 3*(1), 77-90. Consulté le 17 février 2016, à http://education-et-didactique.bretagne.iufm.fr/IMG/pdf/Miyakawa_Winslow.pdf
NATIONAL MATHEMATICS ADVISORY PANEL. (2008). *Fundation for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education. Consulté le 3 janvier 2015, à http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf
NI SHUILLEABHAIN, A. (2015). *Developing Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge through Lesson Study: A Multiple Case Study at a Time of Curriculum Change.* Doctor of Philosophy Ph.D. Trinity College Dublin, Trinity College Dublin Library
NI SHUILLEABHAIN, A. (2016). Developing mathematics teachers' pedagogical content knowledge in lesson study: Case study findings. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 5*(3), 212-226. Consulté le 24 janvier 2017, à http://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/IJLLS-11-2015-0036
PERRY, R., & LEWIS, C. (2011). *Improving the mathematical content base of lesson study summary of results* Consulté le 24 août 2016, à http://www.lessonresearch.net/IESAbstract10.pdf
POTARI, D. (2011). Response to Part II: Emerging Issues from Lesson Study Approaches in Prospective Mathematics Teacher Education. In L. C. Hart, A. S. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education* (pp. 127-132). Dordrecht: Springer Netherlands. Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_10
PREDIGER, S., BIKNER-AHSBAHS, A., & ARZARELLO, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM, 40*(2), 165-178. Consulté le 3 janvier 2015, à http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z
RUNESSON, U. (2014). Learning Study in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 356-358). Dordrecht: Springer Netherlands. Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_90
SERFATI, M. (2005). *La révolution symbolique: la constitution de l'écriture symbolique mathématique*: Editions Petra.
SHIMIZU, Y. (2014). Lesson Study in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360). New York: Springer. Consulté le 17 février 2016, à http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_91
SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. Consulté le 24 janvier 2017, à http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4

SHULMAN, L. S. (2007). Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l'enseignement (G. Sensevy & C. Amade-Escot, trad.). *Education et didactique, 1*(1), 97-114. (Original publié 1986). Consulté le 3 janvier 2015, à http://educationdidactique.revues.org/121

STEINBRING, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), 157-189. Consulté le 26 février 2014, à http://dx.doi.org/10.1023/A:1009984621792

STIGLER, J., & HIEBERT, J. (1999). *The teaching gap. Best ideas from the worlds teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

TAKAHASHI, A. (2014). The role of the knowledgeable other in lesson study: Examination of comments of experienced lesson study practitioners. *Mathematics Teacher Education and Development, 16*(1), 4-21.

TAKAHASHI, A., & MCDOUGAL, T. (2016). Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. *ZDM*, 1-14. Consulté le 17 février 2016, à http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0752-x

TCHOSHANOV, M. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76*(2), 141-164. Consulté le 3 janvier 2015, à http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9269-y

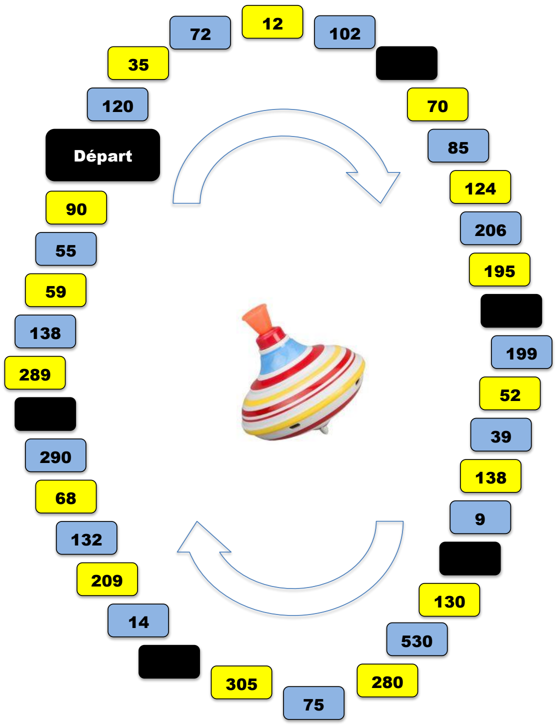
TEMPIER, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Université Paris-Diderot - Paris VII. Consulté le January 3rd, 2015, à http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00921691

ANNEXE : JEU DE LA TOUPIE

Matériel : 1 plan de jeu, 1 dé,
1 pion par joueur,
1 sachet d'unités, 1 sachet de dizaines,
1 sachet de centaines

Au départ, chaque joueur prend
3 cartes «1 unité»
3 cartes «1 dizaine»
4 cartes «1 centaine»

Les pions sont sur la case départ.

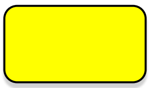


Jouer

Le premier joueur lance le dé. Il avance son pion du nombre de points indiqué.

Si le pion arrive sur :


Le joueur doit donner au joueur suivant (à sa gauche) exactement le nombre de points indiqué dans la case.


Le joueur doit donner au joueur précédent (à sa droite) exactement le nombre de points indiqué dans la case.


Le joueur ne donne rien.

Les cartes dans les sachets permettent de faire des échanges.

Le jeu s'arrête quand la maîtresse donne le signal.

Le gagnant est celui qui a le plus de points.