

ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE A DES ELEVES DYSPRAXIQUES : ETUDE DU PROCESSUS D'ACCES A LA GEOMETRIE PAR LA CONSTRUCTION INSTRUMENTEE

Édith **PETITFOUR**

LDAR, Université de Rouen

edith.petitfour@univ-rouen.fr

Résumé

Notre recherche (Petitfour, 2015) vise à proposer une approche pour enseigner la géométrie plane élémentaire aux élèves dyspraxiques de cours moyen et de sixième, autrement qu'en leur faisant exécuter des constructions instrumentées, car leurs difficultés manipulatoires et organisationnelles empêchent tout apprentissage géométrique. L'approche, basée sur la sémiotique (Arzarello, 2006 ; Radford, 2002), s'inspire de deux courants des sciences cognitives : l'approche instrumentale en ergonomie cognitive (Rabardel, 1995) et le développement du geste en neuropsychologie (Mazeau & Pouhet, 2014). À partir de ces outils théoriques, mais aussi à partir de nos observations en classe d'élèves dyspraxiques de CM2 et de 6^e lors de séances de géométrie, nous avons élaboré un cadre d'analyse du processus d'accès à la géométrie par la construction instrumentée. Il nous permet d'identifier et de catégoriser les actions requises dans des tâches de construction géométrique pour mieux comprendre leur potentiel didactique et dépasser les difficultés des élèves. Ce cadre a servi à la conception et à l'analyse d'une expérimentation menée hors classe avec deux élèves de 6^e, dont une dyspraxique. Dans cet article, nous présenterons un aperçu de notre approche et nos premiers résultats expérimentaux.

Mots clés

Action instrumentée – Conceptualisation – Dyspraxie – Enseignement – Géométrie élémentaire – Travail en dyade.

CONTEXTE DE LA RECHERCHE ET PROBLEMATIQUE

L'enseignement de la géométrie plane élémentaire à l'école primaire et en début de collège s'appuie sur des expériences dans le monde sensible (manipulation de formes, pliage, travail expérimental avec calque) et sur des constructions instrumentées dans l'environnement papier-crayon (avec règle, équerre, compas, rapporteur) ou avec des outils d'un logiciel de géométrie dynamique. Ainsi, dans les programmes scolaires de 2008, il est spécifié que « l'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure » (BO n°3 du 19 juin 2008). Ce travail se poursuit au collège où il est précisé que « les constructions géométriques, avec leurs instruments traditionnels – règle, équerre, compas, rapporteur – aussi bien qu'avec un logiciel de géométrie, constituent une étape essentielle à la compréhension des situations

géométriques » (BO Spécial n°6 du 28 Août 2008). Les nouveaux programmes du cycle 3 (BO spécial n°10 du 19 novembre 2015) continuent à privilégier des situations portant sur des objets géométriques avec des types de tâches qui nécessitent l'utilisation d'instruments (reconnaître, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire). L'objectif annoncé est de faire émerger des concepts géométriques et de les enrichir. Par ailleurs, l'approche de la géométrie développée par Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2016) conforte l'idée de l'importance de la pratique de la construction instrumentée dans l'enseignement pour passer d'une géométrie physique (« géométrie des figures matérielles ») à la géométrie d'Euclide. Les activités géométriques dont le but est la réalisation d'objets graphiques représentant des objets géométriques constituent donc un moyen d'amener les élèves à l'acquisition de connaissances géométriques. Elles leur permettent d'exercer leur raisonnement, à travers la mobilisation des connaissances requises.

Cependant, cela ne fonctionne pas ainsi pour les élèves dyspraxiques à cause de leur handicap. Tout d'abord, leurs troubles du développement gestuel les empêchent de réussir l'exécution des actions qu'ils souhaitent réaliser avec des instruments : ils sont maladroits, réalisent des productions peu soignées, très imprécises, qui peuvent être refaites de nombreuses fois sans jamais donner un résultat visuellement satisfaisant. Par exemple, nous pouvons voir sur la figure 1 de telles productions réalisées par des élèves dyspraxiques de Cours Moyen :

- à gauche, un losange et un carré construits avec une équerre et une règle graduée à partir du tracé des diagonales : même si les techniques de construction observées sont correctes, les tracés ne conviennent pas ;
- à droite, trois essais successifs pour relier deux points à la règle : au premier essai la règle était un peu trop décalée par rapport aux deux croix, au deuxième essai la règle n'a pas été bien maintenue, au troisième essai les points de départ et d'arrêt du tracé n'ont pas été bien contrôlés.

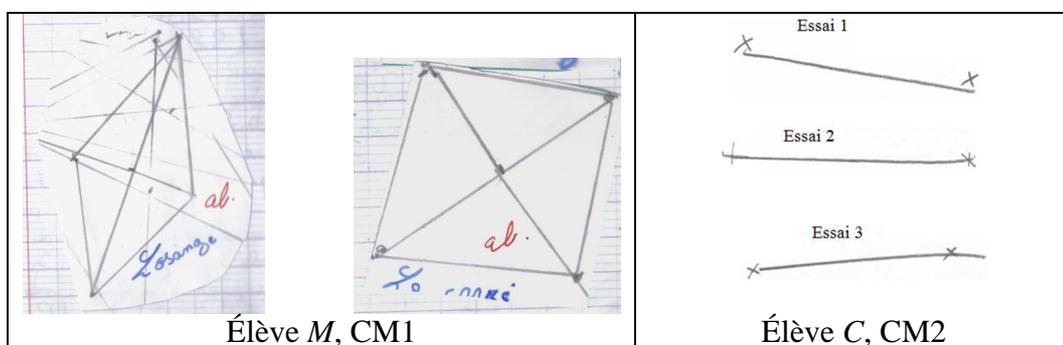


Figure 1 : Constructions instrumentées réalisées par des élèves dyspraxiques

Certains élèves dyspraxiques peuvent également peiner dans l'écriture manuscrite et avoir une très mauvaise calligraphie. L'écriture semble négligée, peu soignée, mais surtout, elle peut être illisible pour autrui tout comme pour l'élève lui-même. Toute communication par l'écriture est donc compromise, ainsi que l'on peut le constater sur la figure 2.

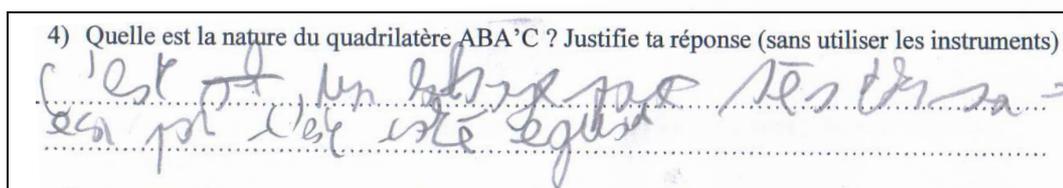


Figure 2 : Production d'un élève dysgraphique de 6^e

Enfin, certains élèves dyspraxiques peuvent aussi avoir des troubles des fonctions visuo-spatiales qui perturbent leur analyse visuelle des objets et qui mènent donc à une

représentation spatiale incomplète ou défectueuse. De plus, l'interprétation perceptive des propriétés métriques et la perception de l'orientation des lignes (en particulier les obliques) posent problème : la reconnaissance visuelle de propriétés sur des figures géométriques est donc compromise.

Le décalage entre ce que les élèves dyspraxiques cherchent à réaliser avec les instruments et ce qu'ils obtiennent graphiquement les contraint à focaliser leur attention sur les aspects manipulatoires et organisationnels des constructions au détriment des aspects conceptuels. La construction instrumentée ne peut donc pas produire les effets attendus pour ces élèves, et cela en dépit d'un apprentissage normal, malgré la répétition et l'entraînement. Mazeau et Le Lostec (2010), spécialistes en neuropsychologie, soulignent qu'à l'école l'enfant dyspraxique est très souvent mis en difficulté par la méthode d'enseignement, le matériel pédagogique utilisé, et non par les connaissances ou le concept à acquérir. Il est donc vain de persévérer dans les techniques d'enseignement habituelles :

Être dyspraxique, c'est donc être dans l'incapacité (totale ou partielle) d'inscrire cérébralement certains « programmes gestuels », en dépit d'une exposition et/ou d'un apprentissage normal des gestes considérés. Il en découle donc, lorsque le diagnostic de dyspraxie est porté, qu'il est inutile de continuer à proposer sans fin les mêmes apprentissages à l'enfant par les techniques habituelles, puisque justement, sa pathologie consiste en ce fait que, malgré la répétition et l'entraînement, il ne peut engrammer la ou les praxie(s) correspondantes. (Mazeau, 2008, p. 95)

En conséquence de l'approche de la géométrie par la construction instrumentée, préconisée dans les programmes scolaires, et des échecs importants rencontrés par les élèves dyspraxiques lorsqu'ils doivent manipuler des instruments, nous assistons souvent à un renoncement à cet enseignement. Par exemple, des dispenses peuvent être demandées dans des Projets Personnalisés de Scolarisation des élèves ou encore des enseignants spécialisés peuvent privilégier les apprentissages dans le domaine numérique, parce que cela leur paraît primordial, en laissant de côté le domaine de la géométrie qui semble inaccessible.

Dans notre recherche, nous avons voulu questionner les certitudes qui fondaient ce renoncement. Une première raison est qu'il nous semblait important de ne pas priver les élèves dyspraxiques des apports que pourraient avoir pour eux des apprentissages en géométrie. Dans une finalité pratique, la géométrie permet en effet de modéliser et de traiter des problèmes de l'espace physique, elle contribue aussi à la structuration de l'espace de l'individu et l'aide ainsi à agir dans sa vie quotidienne. Mais surtout, elle permet l'apprentissage du raisonnement avec une initiation à la démonstration possible très tôt dans la scolarité : la pratique du raisonnement déductif conduit à développer l'argumentation, la logique, la rigueur, l'esprit critique et contribue ainsi à la structuration de la pensée, à la formation du citoyen. Une seconde raison de ne pas renoncer à l'enseignement de la géométrie, non des moindres, est que les élèves dyspraxiques n'ont pas de difficulté raisonnementale en lien avec leurs troubles cognitifs, ils peuvent être très performants au niveau intellectuel. Les possibilités offertes par la géométrie d'apprendre à raisonner devraient donc leur être accessibles. Or, dans des types de tâches de construction géométrique, la manipulation des instruments constitue un réel obstacle au développement du raisonnement qui est visé, parce qu'elle nécessite un savoir-faire pratique que les élèves dyspraxiques ne peuvent automatiser. Ce savoir-faire, le plus souvent acquis en situation de façon implicite que par un enseignement explicite, est indispensable à l'obtention d'une construction précise et soignée. Nous faisons cependant l'hypothèse qu'il n'apporte rien au niveau de la conceptualisation géométrique recherchée. Ainsi, nous avons cherché à conserver les apports géométriques de la pratique de la construction instrumentée, tout en renonçant à développer des habiletés manipulatoires et organisationnelles qu'elle implique. Nous avons donc tenté de dissocier les aspects cognitifs liés à la conceptualisation en géométrie, des aspects pratiques problématiques pour les élèves dyspraxiques, dans ce qui est en jeu dans la construction instrumentée.

Dans la partie suivante, nous présentons le cadre théorique élaboré dans cette perspective. Il permet d'identifier et de catégoriser les actions requises dans des tâches de construction géométrique pour mieux comprendre leur potentiel didactique et dépasser les difficultés des élèves dyspraxiques. Nous l'avons complété par des outils d'analyse du langage et des gestes, outils que nous exposons dans une troisième partie. Ce cadre a alors servi à la conception et à l'analyse d'une expérimentation menée hors classe avec deux élèves de 6^e, dont une dyspraxique. Nous présentons cette expérimentation et ses résultats dans la dernière partie.

CADRE THEORIQUE

Nous avons élaboré un cadre théorique pour étudier le processus d'accès à la géométrie par la construction instrumentée en prenant appui d'une part sur deux courants des sciences cognitives, à savoir l'approche instrumentale en ergonomie cognitive (Rabardel, 1995) et le développement du geste en neuropsychologie (Mazeau & Pouhet, 2014) ; d'autre part sur des observations d'actions et d'échanges langagiers d'une quinzaine d'élèves dyspraxiques de CM2 et de 6^e lors de séances de géométrie durant la période janvier 2011 - janvier 2014. Ces élèves étaient scolarisés en milieu spécialisé ou en milieu ordinaire, avec l'accompagnement d'un Auxiliaire de Vie Scolaire ou sans.

Appuis théoriques en sciences cognitives

Dans l'approche instrumentale, Rabardel (1995) propose un modèle dans lequel il considère trois types d'interactions : celles entre le sujet et l'instrument, celles entre l'instrument et l'objet sur lequel il permet d'agir, et les interactions sujet-objet médiatisées par l'instrument : ce dernier est un moyen de l'action qui permet d'effectuer des tâches déterminées, il permet à la fois de connaître l'objet et de le transformer. L'artefact, objet matériel ou symbolique avec des caractéristiques permettant d'assurer l'accomplissement de buts spécifiques, devient un instrument au cours d'un processus de genèse instrumentale consistant en l'élaboration de schèmes d'utilisation de cet artefact.

Dans notre étude, la tâche du sujet consiste à utiliser un objet technique pour produire un objet graphique représentant un objet géométrique. L'objet technique est un instrument matériel (objet concret ou outil numérique). L'objet graphique, quant à lui, a un double statut dans cette tâche de tracé : celui d'instrument sémiotique (il donne des informations sur l'objet géométrique qu'il représente) et celui d'objet produit par un instrument matériel, c'est-à-dire l'objet technique.

Dans l'approche neuropsychologique, le geste avec un outil est défini comme un ensemble de mouvements coordonnés dans le temps et dans l'espace, dans l'intention de réaliser une action finalisée (Mazeau & Le Lostec, 2010). La neuropsychologie s'intéresse aux aspects cognitifs du geste, préalables aux aspects moteurs, en considérant l'intention préalable et l'intention motrice du geste, sa planification (organisation temporelle du geste) et sa programmation (organisation motrice et spatiale du geste spécifiant tous les détails pratiques de l'exécution motrice), les régulations ainsi que la prise de décision du sujet (Mazeau & Pouhet, 2014).

Dans notre cadre d'analyse, nous exploitons ces différents aspects cognitifs préalables à la réalisation d'une action instrumentée.

Cadre d'analyse de l'action instrumentée

Le sujet réalise des *actions instrumentées* lorsque dans son environnement de travail, il utilise des objets techniques pour produire des objets graphiques représentant des objets géométriques.

Intention d'agir

Le projet de réaliser une action instrumentée est engendré par une intention d'obtenir un objet graphique représentant un objet géométrique. Cette intention correspond à la *visée sémiotique* de l'action instrumentée. Elle est centrée sur les effets de l'acte, le but final, à savoir l'objet graphique porteur de propriétés géométriques ou l'objet géométrique défini par ses éléments caractéristiques. Elle est totalement indépendante de l'environnement de travail et des objets techniques qui seront utilisés. Par exemple, le sujet peut avoir l'intention de représenter une droite passant par deux points *A* et *B* donnés.

L'intention d'obtenir une représentation graphique d'un objet géométrique engendre le projet d'utiliser des objets techniques pour produire un objet graphique porteur de propriétés géométriques. Cela correspond à la *visée technico-figurale* de l'action instrumentée. Dans son intention d'agir, le sujet élabore une manière de réaliser l'objet graphique avec des objets techniques théoriques, sans tenir compte des aspects pratiques de mise en œuvre relatifs à ses capacités corporelles et aux caractéristiques physiques des objets techniques concrets. Ainsi, les objets techniques théoriques sont mis en relation avec les objets graphiques par le projet des différentes actions élémentaires à réaliser : choisir l'instrument, le positionner et tracer. Par exemple, pour représenter la droite (*AB*) dans l'environnement papier-crayon, le sujet envisagera de prendre une règle dans l'intention d'en utiliser le bord droit pour tracer un trait droit ; il projettera de placer ce bord sur les deux centres des croix représentant les points *A* et *B*, en laissant une partie de la règle de part et d'autre des points ; il concevra enfin de tracer un trait le long du bord de la règle, en commençant avant un point et en allant au-delà de l'autre.

Dans son intention d'agir, le sujet active des connaissances géométriques. Dans l'exemple du tracé de la droite (*AB*), il doit savoir que deux points distincts suffisent à caractériser une droite. Il active également des *connaissances graphiques* : nous appelons ainsi l'ensemble des connaissances qui permettent de discerner les informations graphiques pertinentes, à prélever visuellement sur un objet graphique, et qui permettent d'en interpréter la signification géométrique. Ces connaissances sont relatives au domaine de fonctionnement et au domaine d'interprétation de l'objet graphique (Laborde & Capponi, 1994). Dans l'exemple précédent, le sujet doit savoir qu'un point est représenté par une croix à côté de laquelle est écrit son nom et qu'il se situe graphiquement à l'intersection des branches de la croix. Il doit savoir qu'une droite n'est représentée qu'en partie, par un trait droit dont la longueur n'a pas d'importance et qui peut être prolongé comme l'on veut. Il doit savoir enfin que pour représenter une droite passant par deux points, les extrémités du trait tracé doivent au moins aller de part et d'autre des deux points. Le sujet active enfin des *connaissances techniques* concernant le lien théorique entre instrument et trace graphique. Elles sont construites dans les processus de la genèse instrumentale du sujet, au cours de laquelle instruments matériels et sémiotiques entrent en interaction. Ces connaissances sont celles des fonctions des instruments relatives au tracé géométrique et celles de leurs schèmes d'action instrumentée menant à la production de la trace graphique souhaitée. Dans l'exemple du tracé avec la règle, la fonction sollicitée pour cet instrument est celle de permettre le tracé de traits droits. Les schèmes d'action instrumentée consistent à fixer la règle sur le lieu du tracé souhaité et à tracer le long de la règle avec le crayon.

Intention motrice

L'intention d'agir engendre une intention motrice au sein de laquelle l'exécution corporelle de l'action instrumentée avec des objets techniques concrets est planifiée et programmée.

La *visée manipulative* de l'action instrumentée se définit par l'intention motrice de manipuler l'objet technique avec dextérité pour produire l'objet graphique. Elle correspond

aux aspects corporels en jeu pour la préhension et le positionnement de l'objet technique, ainsi que pour le tracé (position des mains, vitesse de tracé, lieu des appuis, etc.). Elle dépend à la fois des capacités corporelles du sujet et des caractéristiques matérielles de l'objet technique concret. Par exemple pour le tracé de la droite (AB), le sujet doit d'abord atteindre et saisir une règle (allonger sa main, préfigurer la prise nécessaire pour la saisir de façon la plus opportune). Il doit ensuite effectuer des mouvements pour positionner la règle selon différents schèmes d'usage possibles : ajustements successifs en glissant la règle tenue par les deux mains ou alors placement de la mine du crayon sur un point, avec la main dominante, puis placement de la règle contre la mine et pivotement jusqu'à l'autre point, avec l'autre main. Il doit enfin maintenir la règle, avec la main non dominante, doigts écartés sur la partie centrale de la règle et en ne dépassant pas le bord, pendant que la main dominante trace le long de la règle. La vitesse de tracé doit être contrôlée pour pouvoir arrêter à temps (le trait ne doit pas aller au-delà de la règle). La posture du corps doit permettre de voir le trait durant sa réalisation.

Une partie de la programmation du geste découle de l'action motrice et est relative aux relations spatiales entre objets techniques et objets graphiques. Ainsi, la perspective d'une réalisation concrète de l'action instrumentée conduit le sujet à réaliser des choix dans une *visée technico-figurale* : l'un concerne l'anticipation de la zone de tracé sur le support, l'autre concerne les ajustements de l'objet technique par rapport aux objets graphiques présents. Deux finalités possibles de l'action instrumentée peuvent alors orienter les choix du sujet :

- dans une *finalité géométrique*, il s'agit de produire une figure juste, c'est-à-dire visuellement conforme à la théorie : les propriétés géométriques sont produites par des déductions théoriques et l'utilisation d'instruments appropriés. Les imprécisions du tracé générées par la matérialité des objets techniques sont gérées par le codage, mais également régulées par l'activation de connaissances géométriques issues de déductions.
- dans une *finalité graphique*, il s'agit de produire un dessin précis : les propriétés géométriques peuvent être produites avec des instruments placés au jugé dès lors qu'elles sont vérifiées *a posteriori* par l'usage d'instruments appropriés. Une très grande précision est requise pour obtenir, sur l'objet graphique, les propriétés issues de déduction théorique sans convoquer le raisonnement. Dans cette même idée, Arsac (1989) évoque un dessin parfait, infiniment précis.

Dans une *visée organisationnelle* de l'action instrumentée, le sujet conçoit l'organisation de ses actions dans son environnement pour produire l'objet graphique dans de bonnes conditions. Cette organisation se situe à deux niveaux. Le premier concerne l'organisation des actions élémentaires en lien avec l'action instrumentée principale : il s'agit d'organiser temporellement ses gestes – simultanés ou successifs – et de hiérarchiser des séquences de mouvements. Le second concerne la conception de l'organisation des actions périphériques à l'action principale, comme se procurer les objets techniques, les apprêter, apprêter la surface de travail. Par exemple pour le tracé à la règle, concernant le premier niveau, le sujet doit d'abord prendre sa règle, ensuite la positionner et enfin la maintenir tout en traçant. Concernant le second niveau, il devra éventuellement sortir la règle de sa pochette de rangement et aiguiser son crayon, la feuille de tracé devra être posée sur une surface plane et l'espace autour devra être dégagé pour que la règle puisse être aussi posée à plat sur la feuille. Dans son intention motrice, le sujet met en jeu différentes connaissances et compétences. D'abord, des connaissances pratiques sur les caractéristiques matérielles des objets techniques, des objets graphiques et sur les capacités corporelles du sujet sont en jeu, à travers les compétences pratiques du sujet qui sont sollicitées : il doit être capable de mettre en œuvre ses connaissances pratiques pour manipuler de manière efficiente les objets techniques compte tenu de leur matérialité. Ensuite, des compétences visuo-spatiales sont sollicitées au

niveau de la représentation spatiale : le sujet doit être capable d'anticiper les relations spatiales entre son corps, les objets techniques et les objets graphiques, il doit être également capable de prélever des informations spatiales par une analyse visuelle. Des compétences pratiques sont également requises. Elles se caractérisent par la capacité du sujet à coordonner ses mouvements et ajustements posturaux concomitants réalisés avec l'objet technique dans l'espace (Mazeau, 2008). Enfin, des compétences organisationnelles sont en jeu : le sujet doit être capable de planifier ses actions en concevant l'organisation selon un plan déterminé.

Exécution de l'action instrumentée

Suite à des activations des différentes visées de l'action instrumentée le sujet peut décider de passer à l'acte mentalement ou alors de façon concrète en exécutant les actions périphériques et l'action principale. Dans l'environnement papier-crayon, son action motrice est observable sur l'espace de la feuille de papier, posée sur la table, et ses conséquences graphiques sont perceptibles sur ce même espace, tandis que dans l'environnement numérique, l'espace d'action motrice (la table sur laquelle se trouve l'ordinateur) et l'espace perceptif (l'écran) sont disjoints.

Les tableaux suivants synthétisent le cadre théorique que nous venons de présenter dans l'environnement papier-crayon (Figure 3) et dans l'environnement numérique (Figure 4). Nous y représentons l'action instrumentée par une décomposition en quatre composantes (quatre colonnes), chacune répondant à une visée spécifique de l'action : organisationnelle, manipulateur, technico-figurale et sémiotique.

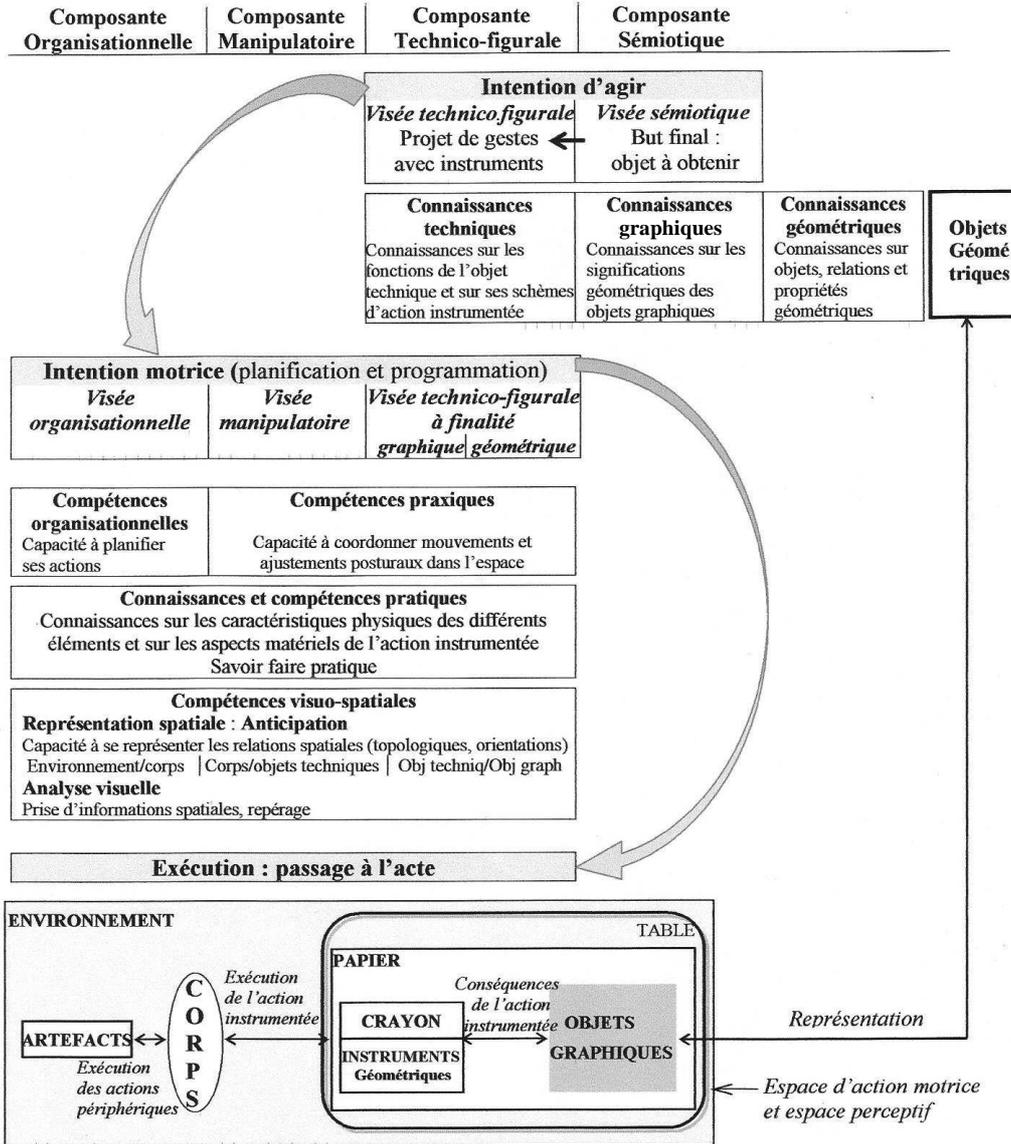


Figure 3 : Action instrumentée dans l'environnement papier-crayon

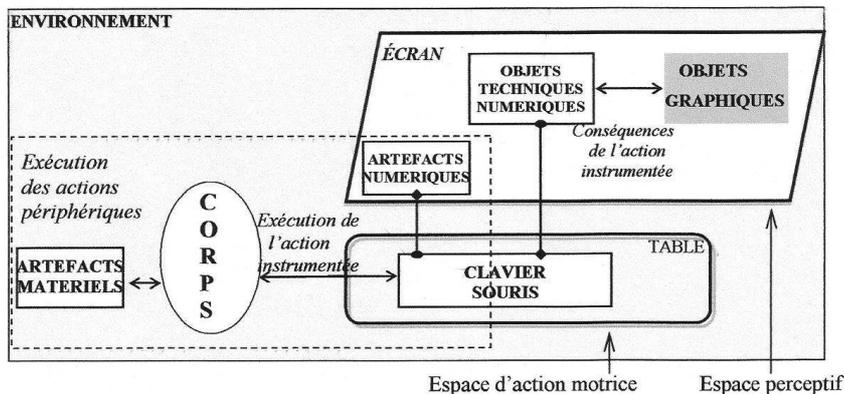


Figure 4 : Action instrumentée dans l'environnement numérique

APPLICATION DU CADRE THEORIQUE

Retour sur la problématique

Dans l'action instrumentée, les difficultés de l'élève dyspraxique se situent au niveau de l'intention motrice : il est défaillant au niveau des compétences organisationnelles, praxiques, pratiques et visuo-spatiales. Cela se manifeste dans l'exécution de ses actions et leur résultat et concerne donc les composantes organisationnelle, manipulateur et la partie perceptive de la composante technico-figurale (dans l'intention motrice) où une organisation temporelle, motrice et spatiale doit avoir lieu. Malgré un entraînement, même intensif, l'élève dyspraxique n'est pas en capacité d'automatiser ce que tout élève standard fait sans y penser. En revanche, il n'a pas de difficulté spécifique au niveau de l'intention d'agir, et c'est là que les connaissances géométriques se développent, dans les composantes technico-figurale et sémiotique de l'action instrumentée.

Nos premières propositions pour une expérimentation ont donc consisté à supprimer de l'action instrumentée de l'élève dyspraxique tous les aspects relatifs à l'intention motrice et à l'exécution de l'action, en mettant en place un travail en dyade où ces aspects sont pris en charge par l'autre dans un travail de collaboration avec un pair ou dans une situation d'aide par un Auxiliaire de Vie Scolaire ou par l'enseignant. Nous sacrifions ainsi délibérément le développement d'une autonomie matérielle de l'élève dyspraxique en classe pour encourager, travailler l'expression de son intention d'agir. L'élève aurait ainsi à :

1. activer son intention d'agir en donnant des instructions à l'autre,
2. éprouver cette action sans se préoccuper de ses caractéristiques manipulateurs fines, via l'activation de ses neurones miroirs (Rizzolatti & Sinigaglia, 2008), en observant l'action exécutée par l'autre,
3. bénéficier d'une rétroaction de l'action réalisée par l'autre, conformément à l'intention transmise.

L'élève dyspraxique conserverait ainsi la possibilité d'élaborer les schèmes d'utilisation des instruments, pas lors d'une manipulation effective, mais lors d'une observation de cette manipulation effectuée par quelqu'un qu'il guiderait par des instructions. Cela suppose donc de développer des compétences langagières et gestuelles pour communiquer en mettant en jeu les apprentissages géométriques visés.

Outils complémentaires d'analyse sémiotique de l'activité des élèves

Appuis théoriques

L'activité mathématique se développe à travers une pluralité de registres ostensifs : oral, écrit (graphisme et écriture), gestualité, matérialité (Bosch & Chevillard, 1999). Ces objets ostensifs, signes produits à travers différentes actions intentionnelles (parler, écrire, dessiner, faire des gestes ou manipuler un artefact), avec leurs modes de production et de transformation, ainsi qu'avec les relations entre ces signes et leurs significations, constituent un ensemble sémiotique (Radford, 2002). Considérant que les processus d'apprentissage sont multimodaux, nous nous référons au concept de faisceau sémiotique (Arzarello, 2006) afin d'étudier le développement dynamique des interactions entre les ensembles sémiotiques. Par ailleurs, nous nous situons dans une conception de l'apprentissage comme phénomène social (Vygotski, 1931/1978). Conformément à la théorie de l'objectivation (Radford, 2006 ; Radford, Demers, Guzman & Cerulli, 2003), nous considérons alors que la formation des concepts mathématiques peut se réaliser pour les élèves à travers des interactions sociales, dans un travail conjoint autour de la résolution d'un problème au cours de laquelle l'activation simultanée de signes donne du sens au contenu mathématique émergent.

Langage et gestes

Dans le cadre d'un travail en dyade sur une activité où des objets géométriques sont à obtenir de façon instrumentée, une variété de signes est observable : l'action du sujet avec les instruments et la production graphique obtenue, mais aussi le langage et les gestes à propos de cette action et de la production graphique.

Nous analysons le discours produit autour d'une action instrumentée en identifiant les visées de l'action auxquelles il se réfère. Par exemple, « Place la pointe de ton compas sur le point A et la mine sur le point B » est à visée technico-figurale tandis que « Ne tiens pas ton compas par les branches » est à visée manipulatoire. « Commence par tailler ton crayon » est à visée organisationnelle, « Fais une croix à côté de la lettre A pour représenter le point A » est à visée sémiotique. Dans la visée technico-figurale, nous définissons le *langage technique géométrique* : ce langage est relatif à la manipulation des instruments en lien avec des propriétés géométriques, sans mention de ces propriétés. Dans la conception de notre expérimentation, nous avons privilégié l'emploi de ce langage, lorsque le langage géométrique n'était pas encore maîtrisé, parce que au plus proche de l'action et en relation directe avec les concepts géométriques. Par exemple, le tracé d'une demi-droite d'origine A perpendiculaire à un segment [AB] donné peut être formulé en langage technique géométrique de la façon suivante : « Placer un côté de l'angle droit de l'équerre sur le segment [AB] et le sommet de l'angle droit sur le point A ; tracer le long de l'autre côté de l'angle droit de l'équerre jusqu'au point A. »

Tout comme pour le discours, nous analysons les gestes produits autour d'une action instrumentée en identifiant les visées de l'action auxquelles ils se réfèrent. Nous appelons *gestes mathématiques* tout mouvement du corps, spontané ou délibéré, réalisé dans l'air ou sur un support, en relation avec l'activité géométrique. Nous considérons alors les catégories de gestes suivantes, en lien avec les typologies des gestes communicatifs de Kendon (1988) et McNeill (1992) : déictique, mimétique, iconique, métaphorique et de structuration du discours. Dans notre expérimentation, nous avons privilégié l'emploi de gestes à visée technico-figurale ou à visée sémiotique, en complément du discours.

Comme gestes à visée technico-figurale, nous avons par exemple des gestes déictiques (Figure 5 à gauche) : suite à un positionnement erroné de l'équerre par un élève, l'enseignante parcourt les côtés de l'angle droit de l'instrument, puis parcourt la droite d et pointe le point A, objets graphiques avec lesquels l'équerre doit être mise en relation. Nous pouvons avoir aussi des gestes mimétiques (Figure 5 à droite) avec le mime de l'utilisation du compas pour tracer un cercle, les branches du compas étant incarnées par l'index et le pouce de la main (gestes mimétiques sans instrument) ou le compas étant manipulé de façon approximative (gestes mimétiques avec instrument).

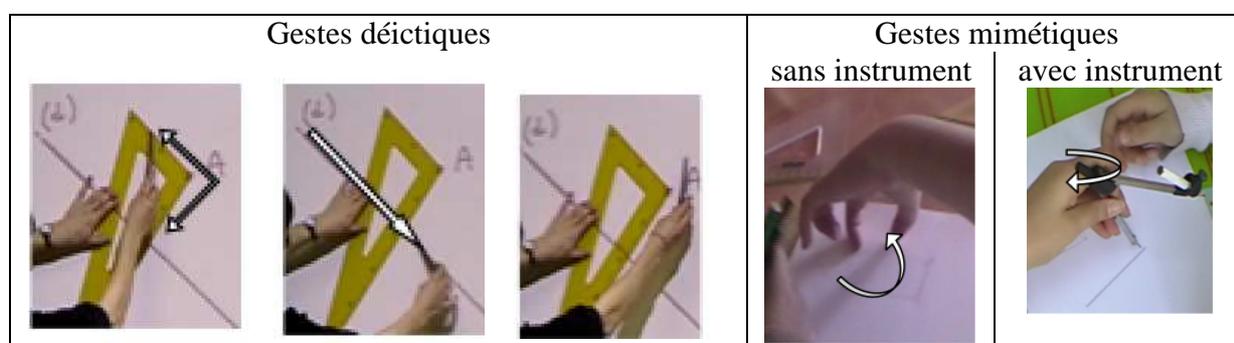


Figure 5 : Exemples de gestes à visée technico-figurale

Comme gestes à visée sémiotique, nous avons par exemple (Figure 6) un geste déictique avec le parcours de l'axe de symétrie d'une configuration symétrique, des gestes iconiques

représentant des objets géométriques (représentant statique ou dynamique d'un triangle) et des gestes métaphoriques exprimant un concept géométrique (propriété de conservation de longueurs).

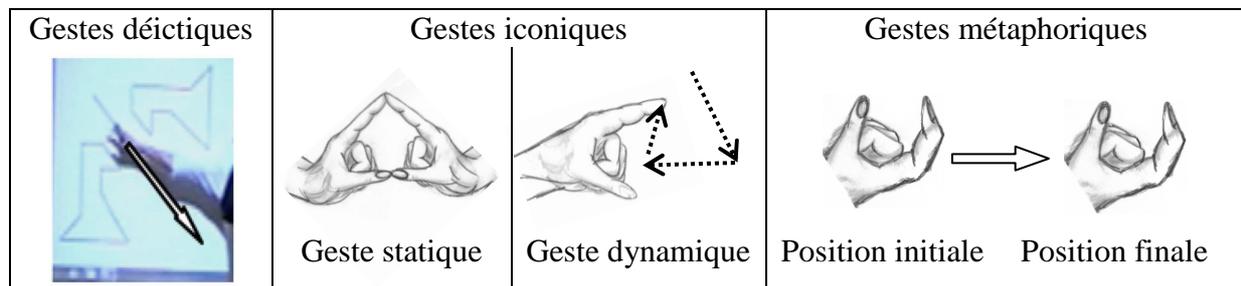


Figure 6 : Exemples de gestes à visée sémiotique

EXPERIMENTATION

Hypothèses et choix pour une expérimentation

Le but de notre recherche est de permettre à l'élève dyspraxique un accès plus étendu à des apprentissages géométriques que celui qu'il peut avoir par la pratique de la construction instrumentée. Ainsi, nous avons fait l'hypothèse qu'il pourrait apprendre et exercer son raisonnement s'il était libéré des tâches manipulatoires et organisationnelles liées à la construction instrumentée. Nous avons alors choisi que ces tâches pratiques soient prises en charge par un tiers dans un travail en dyade, en faisant l'hypothèse que le langage, en situation de communication et en appui sur une certaine expérience (regarder l'autre agir avec les instruments, ébaucher soi-même des gestes ou réaliser des schémas grossiers permettant d'identifier les relations entre les objets techniques et graphiques), serait susceptible de produire, au niveau des apprentissages géométriques, au moins les mêmes effets que l'exécution d'actions instrumentées. Lors de l'expérimentation, nous avons donc cherché à :

- développer et renforcer les capacités langagières de l'élève dyspraxique avec l'usage du langage technique géométrique,
- exploiter ses capacités raisonnementales en mettant l'accent sur les propriétés géométriques sur lesquelles se basent les constructions, en le rendant capable de les justifier.

Pour avoir une idée de la validité de ces hypothèses, mais aussi pour déterminer les conditions de mise en œuvre d'un dispositif de travail à deux qui réponde au mieux aux finalités d'apprentissages géométriques que nous poursuivons pour les élèves, nous avons mené une expérimentation.

Méthodologie de l'expérimentation

L'expérimentation a été menée avec deux filles de 6^e, l'une dyspraxique visuo-spatiale, l'élève *M*, l'autre n'ayant pas de difficulté particulière, l'élève *Bm*. Ces deux élèves ont toujours été dans la même classe et ont donc suivi les mêmes enseignements depuis le début de leur scolarité.

L'expérimentation devait être réalisée sur une durée suffisante pour permettre d'installer des moyens de communication appropriés entre les deux élèves. Comme il nous semblait impossible d'obtenir l'adhésion d'un enseignant pour changer ses habitudes d'enseignement sur un temps long avec toute sa classe parce que nous ne pouvions garantir que ces changements pourraient favoriser l'apprentissage pour tous ses élèves, nous avons envisagé

une expérimentation hors classe, en lien étroit avec l'enseignement donné en classe. Nous avons donc pris en charge un temps d'enseignement hors classe en travaillant principalement dans l'environnement papier-crayon afin de minimiser les écarts qu'il pourrait y avoir avec l'enseignement reçu par les élèves en classe. Bien que le complément d'enseignement donné aux deux élèves se soit déroulé hors classe, nous avons gardé les contraintes d'un enseignement en classe : tout ce que nous avons proposé y serait réalisable. L'objectif était que les propositions qui résulteraient de l'expérimentation soient transférables dans une pratique de classe, que ce soit dans le cadre d'une inclusion d'un élève dyspraxique en milieu ordinaire, avec ou sans Auxiliaire de Vie Scolaire, ou dans le cadre de l'enseignement spécialisé.

L'expérimentation s'est déroulée durant l'année scolaire de 6^e, au moment du passage d'une géométrie instrumentée à une géométrie théorique, lorsque des changements de regard sur les figures et des déconstructions dimensionnelles sont nécessaires (Duval & Godin, 2005 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014). La symétrie axiale nous a semblé un bon objet d'étude car, introduite dynamiquement comme transformation par des actions sur des objets de l'espace sensible, elle est ensuite considérée comme transformation ponctuelle, pour être alors utilisée comme outil de démonstration. Les propriétés de perpendicularité et d'égalité de longueurs mises en jeu dans cette transformation apparaissent et peuvent être étudiées au préalable dans la caractérisation et la construction des figures usuelles. Par ailleurs dans le rectangle, un changement de point de vue permet le passage de l'angle droit à la perpendicularité des côtés de l'angle : les constructions à l'équerre permettent de travailler ces notions. D'autre part, pour passer à la transformation ponctuelle, il est nécessaire que le cercle ne soit plus vu seulement comme une ligne fermée particulière, mais comme un ensemble de points équidistants de son centre : l'utilisation du compas pour les reports de longueur y contribue. Nous avons donc choisi de travailler le langage dans des situations de communication sur des constructions instrumentées de cercles, de triangles et de quadrilatères, à l'équerre et au compas, afin de le réinvestir dans des constructions où intervient la symétrie axiale.

L'expérimentation démarre à la fin de l'année scolaire de CM2 en 2013 et se termine à la fin de l'année scolaire de 6^e en 2014. Nous avons recueilli nos données sur 40 séances, avec des temps d'observation hors classe des deux élèves en fin de CM2 (3 séances filmées) et de l'élève *M* en début de 6^e (1 séance filmée), des temps d'observation de l'élève *M* en classe de 6^e (22 séances enregistrées), des temps de travail hors classe avec les deux élèves (8 séances filmées) et seulement avec l'élève *M* (3 séances filmées) et enfin des temps d'évaluation (3 séances filmées). Ces séances, dépendantes de la progression d'enseignement suivie par le professeur de mathématiques des deux élèves durant leur année scolaire de 6^e, sont réparties de façon inégale sur la période expérimentale. Nous avons ainsi alterné quatre périodes d'observation en classe de 6^e (une consacrée au cercle, une aux triangles et quadrilatères, une à la symétrie axiale et une dernière aux propriétés des figures usuelles) avec des séances de travail hors classe.

Présentation de l'expérimentation

Temps d'observation

Nous avons tout d'abord mené des observations d'un travail en dyade de l'élève *M* et de l'élève *Bm*, hors classe, sur des activités de construction avec règle graduée, équerre et compas (constructions à partir d'un schéma ou d'une figure à reproduire : voir des exemples en figure 7), en vue d'une évaluation diagnostique. L'une donnait des instructions à l'autre qui les suivait avec ses instruments. Il s'agissait d'une part d'identifier leurs moyens de communication et modalités de fonctionnement spontanés autour d'une activité géométrique

afin de déterminer ce qui pourrait être conservé et ce qui devrait être amélioré par la suite, et d'autre part de faire état de leurs connaissances géométriques et compétences dans l'exécution de tracés.

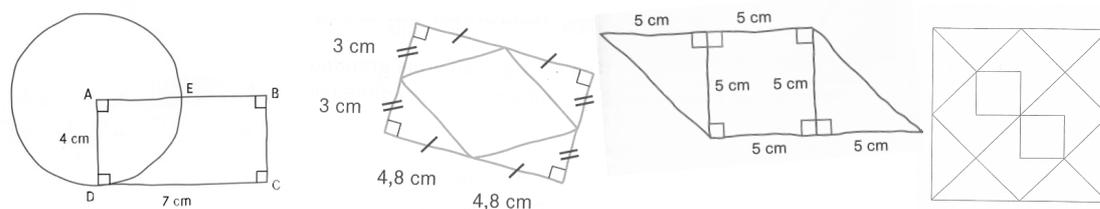


Figure 7

Nous avons ensuite observé l'élève *M* dans sa classe de 6^e, lors de séances de géométrie que nous avons aussi enregistrées. Nous étions à côté de l'élève *M* et avons pris des notes sur ce qu'elle faisait, de façon détaillée notamment lorsqu'il s'agissait de constructions instrumentées, nous avons pris des photos de ses productions en cours de réalisation lorsque c'était possible. Nous avons également relevé les gestes mathématiques produits par l'enseignante et les écrits au tableau. Ces données nous ont permis de reconstituer au mieux chacune des séances, sous l'angle de l'élève *M*. Nous avons ainsi assisté à 22 séances. Un objectif de ces observations était d'évaluer les difficultés et réussites de l'élève *M* en classe et d'analyser les aides qui lui étaient apportées le cas échéant, ainsi que leurs effets. Un autre était de voir de quelles façons les notions géométriques étaient abordées (par quels actions, langages et gestes) afin d'établir des moyens de communication langagiers (verbal et gestuel) cohérents avec ce qui se disait et se faisait en classe.

Concernant les séances hors classe de fin de CM2 - début 6^e, l'élève *M* manifeste des difficultés à donner des instructions précises et à se faire comprendre lorsque la figure est complexe : ses instructions langagières contiennent des implicites. Elle s'exprime essentiellement dans un langage courant avec de nombreux indicateurs spatiaux et termes déictiques associés à des gestes déictiques et mimétiques complétant ses manques langagiers, mais cela n'est pas toujours suffisant. Cela a donc conforté l'idée de la nécessité d'un travail d'appropriation d'un langage pour communiquer sur les actions instrumentées à réaliser, à savoir le langage technique géométrique.

Par ailleurs, nous n'avions pas prévu que l'élève dyspraxique soit en situation de manipuler les instruments dans le travail en dyade, mais il est apparu comme une évidence pour les deux élèves d'alterner les rôles. Nous avons donc intégré cette contrainte dans notre dispositif expérimental pour que chacune se sente dans une position égale par rapport à l'autre dans l'activité géométrique et s'investisse pleinement. Enfin, pour ce qui est des connaissances et compétences mises en jeu dans les activités proposées, l'élève *M* a manifesté des difficultés organisationnelles et manipulatoires conduisant à des productions imprécises lorsque cela a été à son tour de manipuler les instruments. Ces mêmes difficultés ont persisté tout au long de son année de 6^e en classe (manque d'organisation, manque d'anticipation, maladresse dans les positionnements d'instruments) malgré les aides apportées par l'enseignante et un entraînement important. Cela conforte donc l'idée de renoncer à développer l'autonomie de l'élève *M* dans des tâches « non conceptuelles ». En fin de CM2, l'élève *M* travaille spontanément dans une finalité graphique en s'appuyant fortement sur les relations spatiales, avec par exemple des placements de règle au jugé pour obtenir une direction perpendiculaire à une droite donnée ou pour reproduire des directions horizontales, verticales ou obliques lues sur des schémas. Ce travail spontané dans une finalité graphique a perduré pour l'élève *M* durant son année de 6^e, sans plus être toutefois systématique : nous avons donc cherché dans les séances hors classe à renforcer l'acquisition de techniques de construction valides dans une finalité géométrique.

Temps de travail hors classe

8 séances de travail en dyade ont eu lieu hors classe avec des constructions diverses à réaliser, en articulation avec l'enseignement en géométrie que les élèves recevaient en classe. Une appropriation du langage technique géométrique a été progressivement réalisée, d'abord pour les tracés de cercles et d'arcs de cercles avec le compas, ensuite pour les tracés d'angles droits ou de droites perpendiculaires avec l'équerre, enfin pour les prolongements de segments à la règle et pour les reports de longueur au compas. Ce langage a ensuite été réinvesti dans des constructions mettant en jeu la symétrie axiale et un travail sur les justifications de ces constructions a été réalisé lors des deux dernières séances.

Le travail en dyade s'est déroulé de la façon suivante, en deux ou trois phases à chaque fois :

1. Les deux élèves reçoivent une figure, sous forme de schéma ou de texte, à construire en vraie grandeur, elles échangent alors pour se mettre d'accord sur une technique de construction.
2. L'une donne des instructions que l'autre suit avec les instruments.
3. Les deux élèves échangent ensuite sur la validité de ce qui a été produit, au niveau du discours sur l'action et au niveau de l'action que cela a engendré.

La première phase n'existait pas lorsque seule une élève avait accès à l'énoncé. En outre, nous n'intervenons que dans la troisième phase pour aider les élèves à mener une réflexion sur les écarts entre ce qui devait être produit et ce qui avait été effectivement produit le cas échéant.

Des règles de fonctionnement ont été établies dans le but d'impliquer les deux élèves dans l'activité géométrique afin que les deux progressent. Tout d'abord, pour permettre une alternance des rôles avec la contrainte que l'élève *M* ne manipule pas les instruments, nous avons proposé de remplacer cette manipulation par la réalisation de dessins à main levée, mais cela n'a pas été concluant pour travailler le langage technique géométrique. En revanche, l'utilisation de gestes mimétiques a produit les effets voulus : l'élève *M* a pu se concentrer sur la précision du langage en tant que réceptrice pour positionner des instruments ou tracer, sans se préoccuper de la précision (le mime ne laisse pas de trace). Ensuite, pour éviter de réduire l'élève qui manipule à un rôle d'exécutant et pour favoriser l'utilisation d'un langage porteur de connaissances géométriques, l'élève qui donnait les instructions devait exclure de son discours tout guidage verbal simultané à l'action, du type « un peu plus à droite », « encore », « stop ». Enfin, pour éviter qu'une construction soit réussie malgré des instructions imprécises, l'élève qui manipulait devait agir en faisant ce qui lui semblait le moins probable, le plus éloigné des attentes de l'autre, tout en étant conforme à ses instructions.

Après la séquence d'enseignement en classe sur la symétrie axiale, trois séances hors classe avec l'élève *M* seulement ont été l'occasion de faire fonctionner un travail en dyade dans lequel l'activité géométrique était entièrement à sa charge.

Temps d'évaluation

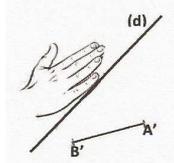
Nous avons proposé un test avec différentes constructions à réaliser, dont certaines à justifier, pour évaluer la pertinence des modalités de travail expérimentées hors classe, ainsi que leurs effets sur l'activité géométrique de l'élève *M*. Cette dernière a passé le test hors classe avec une Auxiliaire de Vie Scolaire (AVS) qui lui apportait des aides non mathématiques – organisationnelles et manipulatoires – en exécutant les constructions d'après ses instructions. L'AVS avait comme consigne d'agir en faisant le « moins probable » et de ne pas accepter d'instructions sous forme de « guidage manipulatoire » du type « avance un peu l'équerre jusqu'à ce que je te dise stop ».

L'élève *M* obtient de très bons résultats à ce test avec dix constructions réussies sur onze. Elle s'est montrée capable de communiquer des programmes de tracé que l'AVS a exécutés et

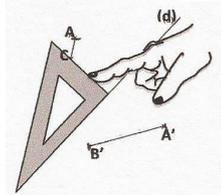
capable aussi d'élaborer des techniques de construction instrumentées correctes mettant en jeu des propriétés géométriques, qu'elle a su justifier pour certaines (quatre sur six). Voici par exemple un extrait des échanges sur la première construction du symétrique d'un point C appartenant à un segment $[AB]$ qui était à réaliser avec l'équerre seulement :

M : Dans la zone du segment AB
 // elle met sa main à plat au-dessus de (d) [Geste 1]
 euh, sur la droite d , il faut mettre un côté de l'angle droit de l'équerre, et l'autre côté de l'angle droit doit passer par C .
 AVS : Comme ça ?
 // Elle place l'équerre.
 M : Hm. On trace euh C jusqu'à la droite d
 // elle parcourt de C à (d) en l'air
 Là
 // elle parcourt de C à (d) sur la feuille [Geste 2]

Geste 1



Geste 2



L'élève M a progressé au niveau de ses apprentissages géométriques par rapport à des erreurs récurrentes sur lesquelles un travail a été réalisé dans les séances hors classe :

- les prolongements de segments sont maintenant réalisés avec un bon positionnement de règle ;
- les points sont bien représentés comme intersection de deux lignes et elle les considère comme telle alors qu'avant elle considérait l'arc de cercle comme un point ;
- pour le tracé de l'axe de symétrie de deux segments symétriques à la règle non graduée seulement, elle a été capable par elle-même de remettre en cause son projet de positionnement de la règle au jugé, ce qui n'était jamais arrivé jusque-là, et elle a su ensuite trouver une technique de construction correcte.

L'élève M obtient de meilleurs résultats au test que chacun des élèves de sa classe. Cette réussite peut s'expliquer par le travail renforcé en géométrie dont elle a bénéficié (11 séances réparties dans l'année). Le travail sur le langage l'a notamment rendue capable de mieux communiquer sur les actions instrumentées que les autres élèves, qui, lorsqu'ils réussissent leurs constructions, connaissent néanmoins des difficultés pour désigner les objets géométriques construits ou pour formuler les propriétés géométriques en jeu. Par ailleurs, un type de tâches de construction n'avait été travaillé que hors classe (construction d'un axe de symétrie d'une configuration symétrique, à la règle seulement). Le dispositif de travail en dyade mis en place a aussi contribué à la réussite de l'élève M : elle a pu ainsi être déchargée de tous les aspects pratiques des constructions qui la conduisent habituellement à l'échec. Les commentaires de son professeur de mathématiques sur sa copie au contrôle en classe sur le chapitre de la symétrie axiale attestent d'ailleurs cela (voir figure 8).

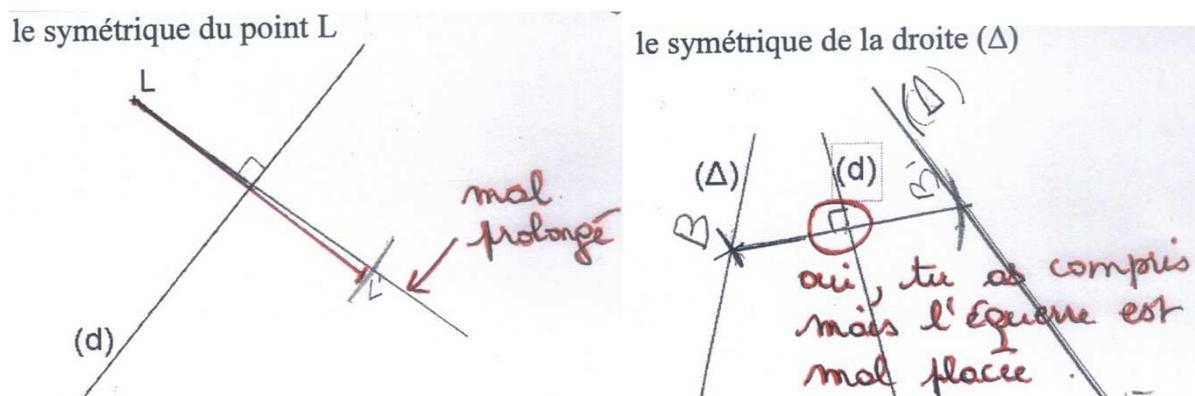


Figure 8 : Productions de l'élève M à un devoir en classe

Par ailleurs, les règles de communication ont aussi contribué à la réussite de l'élève *M*. Cette dernière s'est bien interdit l'emploi d'indicateurs spatiaux exclus du langage technique géométrique, de plus, elle a bénéficié des rétroactions que génère un positionnement de l'instrument le moins probable : cela a aidé à faire évoluer positivement ses instructions vers une technique correcte.

Nous avons également réalisé deux autres évaluations : une pré-expérimentale et une post expérimentale pour évaluer l'évolution spontanée de l'élève *M* dans ses domaines déficitaires pour lesquels nous n'avons proposé aucune intervention lors de l'expérimentation. Les tests neuropsychologiques révèlent une absence de progrès : l'élève *M* obtient des résultats très en dessous de la norme. Nous avons également proposé la construction d'un carré et une reproduction de figure au compas sur support quadrillé : les productions de l'élève *M* sont toujours aussi imprécises, en revanche, elle a progressé dans la manipulation des instruments, mais surtout, elle travaille dans une finalité géométrique.

CONCLUSION

Les résultats positifs obtenus à l'issue de l'expérimentation vont dans le sens de la validité de nos hypothèses : l'élève dyspraxique peut exercer son raisonnement en géométrie s'il est libéré des tâches manipulatoires et organisationnelles liées à la construction instrumentée et s'il est libéré de la culpabilité des échecs graphiques. Cela est possible lorsque ces tâches sont prises en charge par un tiers, dans un dispositif de travail en dyade, avec l'utilisation d'un langage technique géométrique, renforcé par une production de gestes.

L'expérimentation a permis de le vérifier pour un seul élève dyspraxique, dans un travail hors classe et sur quelques concepts de géométrie plane : cela constitue les limites de notre recherche. Les résultats nous permettent cependant de dégager des pistes pour une expérimentation plus large (en classe et avec d'autres élèves dyspraxiques) pour concevoir des modalités d'accueil de l'élève dyspraxique en classe créant des conditions d'apprentissage. Par ailleurs, nous faisons aussi l'hypothèse que les modalités de travail (travail en dyade, utilisation du langage technique géométrique) peuvent être tout autant bénéfiques pour les élèves ordinaires et en particulier ceux qui ont des difficultés dans les activités qui nécessitent des manipulations et ceux pour qui le passage de l'action instrumentée à son expression en langage géométrique pose des difficultés. De nouvelles recherches sont nécessaires pour vérifier ces hypothèses.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARSAC, G. (1989). La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans. In M. Artigue, J. Rogalski & G. Vergnaud (Eds.), *Actes de la 13^{ème} conférence PME* (pp. 85-92).
- ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 267-299.
- BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.
- DUVAL, R. & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.
- KENDON, A. (1988). The significance of gesture: how it is achieved. *Papers in Pragmatics*, 2, 60-83.
- LABORDE, C. & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des*

- Mathématiques*, 14(1), 165-210.
- MCNEILL, D. (1992). *Hand and Mind : What gestures reveal about thought*. Chicago : Chicago University Press.
- MANGIANTE-ORSOLA, C. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2016, à paraître). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain. In T. Barrier & C. Chambris (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'année 2016*. Paris : IREM de Paris.
- MAZEAU, M. (2008). *Conduite du bilan neuropsychologique chez l'enfant*. Elsevier Masson.
- MAZEAU, M. & LE LOSTEC, C. (2010). *L'enfant dyspraxique et les apprentissages. Coordonner les actions thérapeutiques et scolaires*. Elsevier Masson.
- MAZEAU, M. & POUHET, A. (2014). *Neuropsychologie et troubles des apprentissages chez l'enfant. Du développement typique aux « dys- »*. 2^e édition. Elsevier Masson.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, 222, 26-36.
- PETITFOUR, E. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6^{ème}*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
- RADFORD, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.
- RADFORD, L., DEMERS, S., GUZMAN, J. & CERULLI, M. (2003). Calculators, graphs, gestures and the production meaning. In P. N. B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27 Conference of PME (Vol. 4, pp. 55-62)*. Hawaii: University of Hawaii.
- RADFORD, L. (2006). Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.
- RIZZOLATTI, G. & SINIGAGLIA, C. (2008). *Les Neurones miroirs*. Paris : Odile Jacob.
- VYGOTSKI, L.S. (1931/1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press.