



HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Université de Montpellier
École doctorale Information Structures et Systèmes (I2S)

ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE DE L'ALGÈBRE
ABSTRAITE À L'UNIVERSITÉ ET PREMIERS ÉLÉMENTS
D'UNE DIDACTIQUE DU STRUCTURALISME ALGÈBRIQUE
Études croisées en didactique et épistémologie des mathématiques

Thomas HAUSBERGER¹
Université de Montpellier
IMAG² CNRS-UM 5149
Équipe DEMa³

Note de synthèse

Soutenue le 25 novembre 2016, devant le jury composé de

Michèle ARTIGUE, *Université Paris Diderot – Paris 7* (France), rapporteur
Marianna BOSCH, *Universitat Ramon Llull, Barcelone* (Espagne), examinateur
Alain BRUGUIÈRES, *Université de Montpellier* (France), examinateur
Viviane DURAND-GUERRIER, *Université de Montpellier* (France), examinateur
Ghislaine GUEUDET, *ESPE de Bretagne* (France), examinateur
Frédéric PATRAS, *Université de Nice Sophia-Antipolis* (France), rapporteur
Carl WINSLØW, *Université de Copenhague* (Danemark), rapporteur

1 thomas.hausberger@umontpellier.fr – IMAG cc051, Université de Montpellier, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 05

2 Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

3 Didactique et Epistémologie des Mathématiques

Table des matières

Note au lecteur.....	5
A. Introduction.....	7
B. Construction d'un cadre épistémologique, didactique et cognitif de référence pour le structuralisme algébrique.....	9
1. La transposition didactique de la notion de structure.....	9
a) Eléments d'épistémologie historique : Hilbert, Noether et Bourbaki.....	9
b) la notion de structure : un méta-concept.....	10
2. La dialectique objets-structures.....	11
a) Dialectiques lautmaniennes, idéalisation et thématization selon Cavaillès.....	11
b) Phénoménologie didactique du structuralisme algébrique.....	12
c) Théorie des modèles, syntaxe et sémantique.....	13
d) Les objets structuraux.....	13
3. La thématization du concept d'homomorphisme.....	14
a) Origine du questionnement.....	14
b) Transposition didactique et thématization : une analyse exploratoire de manuels sélectionnés.....	15
c) Théorèmes d'isomorphismes et « comparaison » des quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tant que groupes et anneaux : une étude empirique.....	17
C. Analyses didactiques et développements théoriques au sein de la TAD.....	18
1. Les praxéologies structuralistes.....	18
a) Origine de la notion de praxéologie structuraliste et motivations.....	18
b) Définition des praxéologies structuralistes.....	19
c) Etude des praxéologies structuralistes développées par un collectif d'apprenants sur un forum.....	20
d) Conclusion.....	22
2. Les PER formels : questionner les objets à l'aune des structures.....	22
a) Origine du questionnement et motivations.....	22
b) Approches top-down et bottom-up.....	23
c) Questionnement du monde et dialectique objets-structures.....	23
d) Les PER formels.....	24
e) La stratégie du média-milieu.....	24
f) Conclusion.....	26
D. Phénoménologie didactique du structuralisme algébrique, ingénierie didactique et sémiotique : la « théorie des banquets ».....	27
I. Introduction.....	27
II. La théorie des banquets.....	29
1. L'activité des banquets : une ingénierie didactique.....	29
a) L'ingénierie didactique : un pont entre la recherche et l'action.....	29
b) Discussion de la situation et des variables macrodidactiques qui lui sont liées.....	30
c) Organisation du milieu et scénarisation de l'activité.....	33
2. Analyse a priori.....	34
a) Etude des différents cadres et registres.....	34

b) Discussion de la tâche de construction de modèles en relation avec l'examen logique du système d'axiomes (question I 1).....	36
c) Discussion de la tâche de classification de modèles (question I 2).....	36
d) Discussion de la partie II (activité de définition et élaboration théorique).....	38
3. Rôle de l'enseignant et interactions entre dimensions a-didactiques et didactiques.....	41
4. Rappel des hypothèses et des questions de recherche en vue des expérimentations.....	42
III. Etude empirique.....	43
1. Analyse des conceptions relatives au méta-concept de structure.....	44
a) Elaboration du questionnaire et méthodologie d'analyse.....	44
b) Analyse des résultats et typologie de conceptions.....	45
2. Une expérimentation en classe de l'activité des banquets.....	49
a) <i>Axe 1 : abstraction-idéalisation</i>	50
b) <i>Axe 2 : abstraction-thématisation</i>	56
c) <i>Axe 3 : mise en relation des résultats précédents avec la typologie de conceptions</i>	61
3. Sessions en laboratoire.....	63
a) Analyse du travail du binôme d'étudiants avancés.....	64
b) Le binôme d'étudiants de niveau intermédiaire.....	69
IV. Conclusion.....	76
E. Conclusion générale et perspectives de recherches ouvertes par nos travaux.....	78
1. Structuralisme, phénoménologie et abstraction mathématiques : croisement des regards philosophique et didactique.....	79
2. Etudes praxéologiques sur le structuralisme algébrique.....	79
3. Travaux d'ingénierie didactique, avec pour cadres la TAD ou la TSD et la dialectique objets-structures.....	80
4. Apports de la théorie des champs concepts pour une étude cognitiviste de l'apprentissage de l'algèbre abstraite.....	81
Bibliographie.....	82
Annexes.....	87
Annexe 1 : la théorie des banquets (document distribué aux étudiants).....	87
Annexe 2 : conceptions des étudiants relatives au méta-concept de structure mathématique.....	89
Annexe 3 : Exemples de productions d'étudiants lors de l'expérimentation en classe de la théorie des banquets (question I 2 : activité de classification).....	91
Annexe 4 : Extrait des discussions du groupe des étudiants avancés (session en laboratoire).....	94
Annexe 5 : Extrait des discussions du groupe des étudiants de niveau intermédiaire (session en laboratoire).....	97

Note au lecteur

Le présent document reproduit la note de synthèse que j'ai rédigée pour obtenir l'habilitation à diriger des recherches. Il s'appuie sur l'ensemble des travaux qui figurent dans le dossier d'habilitation et n'est donc pas conçu pour être lu de façon autonome.

En particulier, les parties B et C de ce texte sont difficiles d'accès sans avoir pris connaissance des documents mentionnés ci-dessous (notamment les deux premiers). Pour autant, ces parties de la note de synthèse peuvent également servir de première approche, avant une lecture plus approfondie de ces références. La partie D est davantage détaillée que le reste du texte et présente des résultats non publiés à ce jour.

Liste commentée des documents adossés au présent texte :

- Hausberger, T. (in press). *La dialectique objets-structures comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique. Education et Didactique.*

Cet article expose le cadre épistémologique, didactique et cognitif que j'ai construit pour le structuralisme algébrique. Ce dernier met en avant la dialectique objets-structures ainsi que deux mouvements d'abstraction, l'idéalisation et la thématisation, à la suite de Cavailles et Lautman ; j'explique les liens entre cette nouvelle dialectique et la dialectique syntaxe-sémantique. Ce travail s'appuie également sur l'idée de « phénoménologie didactique » des structures mathématiques introduite par Freudenthal ; j'introduis des éléments de sémiotique qui permettent la discussion du processus de conceptualisation d'une structure abstraite ainsi que le rôle des objets mentaux. L'ingénierie « théorie des banquets » présentée dans la note de synthèse, du travail de conception à celui de l'analyse des données recueillies, est adossée à ce cadre.

- Hausberger, T. (2016c). *Comment développer des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite ? Recherches en Didactique des Mathématiques* 36(1), 97-142.

Ce travail se fonde également sur une étude épistémologique du structuralisme algébrique, mais celle-ci débouche sur des études didactiques et un travail d'ingénierie différents, du fait de leur inscription dans la Théorie Anthropologique du Didactique. Cette dernière me permet de mettre en avant la notion nouvelle, que j'introduis, de « praxéologie structuraliste ». Je montre la pertinence de cette notion pour décrire les organisations mathématiques de l'arithmétique des anneaux abstraits et analyser les praxéologies développées par un collectif hétérogène en situation adidactique sur un forum de mathématiques. L'étude de ces praxéologies vise également à éclairer le problème de transition engendré par l'enseignement des structures algébriques. Enfin, je propose un dispositif novateur utilisant la retranscription des échanges du forum pour favoriser le développement de praxéologies structuralistes en classe. Il s'agit de mon projet de développement de « PER formels » à l'Université, dédiés au « questionnement des objets à l'aune des structures », selon l'interprétation que je propose du « paradigme du questionnement du monde » dans le contexte de l'algèbre abstraite.

- Hausberger, T. (in press). The (homo)morphism concept: didactic transposition, meta-discourse and thematisation. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*

J'étudie dans cet article la transposition didactique des notions de morphisme, homomorphisme et isomorphisme, qui sont centrales en algèbre abstraite. A la différence des travaux antérieurs, qui se concentrent principalement sur la théorie des groupes, je mets l'accent sur le phénomène de thématization de ces notions (analogie formelle entre les théories des groupes et des anneaux), ce que permet l'entrée par le structuralisme algébrique. A travers une étude de quelques manuels choisis, je montre que le couple idéalisation-thématisation permet d'éclairer le processus de transposition opéré par les mathématiciens et les différents discours, de nature méta, qu'ils tiennent afin de motiver les concepts. Une petite ingénierie est présentée, dédiée à l'enseignement du concept d'homomorphisme d'anneau en appui sur les processus cognitifs de comparaison et d'identification (et de formation de quotients). La comparaison entre les analyses *a priori* et *a posteriori* permet de discuter du succès et des difficultés rencontrés par une telle approche.

- Durand-Guerrier, V., Hausberger, T. & Spitalas, C. (2015). Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 20. Strasbourg : IREM de Strasbourg, 101-148.

Cet article présente une étude exploratoire de l'acquisition par les étudiants de troisième année de licence de mathématiques des prérequis nécessaires à l'apprentissage de la théorie des groupes. Les données analysées sont celles recueillies par Christian Spitalas dans le cadre de son mémoire de Master 2. J'ai mis en avant dans cet article la notion d'exemple paradigmatique en algèbre abstraite et posé les premiers éléments du cadre épistémologique d'où naîtra la dialectique objets-structures. Les éléments d'analyse logique apportées par Durand-Guerrier permettent d'éclairer la complexité des tâches. Cette collaboration se poursuit actuellement par la clarification des imbrications entre praxéologies algébriques et logiques dans la description des praxéologies structuralistes (travail en cours). Ce travail a permis également de préciser la problématique de thèse de Spitalas, centrée sur l'étude des articulations entre définitions et exemples dans l'enseignement et l'apprentissage de la théorie des groupes.

A. Introduction

Les difficultés que rencontrent l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université (notamment les structures algébriques de groupe, d'anneau et de corps) sont reconnues par de nombreux auteurs (Nardi 2000, Durand-Guerrier et al. 2015, Hausberger 2013) et reflètent un problème de « transition » (Gueudet 2008), qui a lieu cette fois, par comparaison avec la transition lycée-université, à l'intérieur d'une même institution, et plus précisément à la transition entre licence et master de mathématiques, si l'on se réfère à la progression usuelle prévue par le curriculum en France.

De nombreux facteurs explicatifs sont liés à la nature épistémologique particulière du savoir enseigné (le « challenge de la pensée structuraliste », Hausberger 2012) et à ses conséquences didactiques que l'on peut analyser au sein du cadre épistémologique des savoirs FUGS (formalisateur, unificateur, généralisateur, simplificateur ; Robert 1987, voir également Hausberger 2012 p. 430). L'étude de la disponibilité chez les étudiants des prérequis nécessaires à l'apprentissage des théories algébriques abstraites, notamment la théorie des groupes (Durand-Guerrier, Hausberger & Spitalas, 2015) apporte également des facteurs explicatifs. Enfin, on peut émettre l'hypothèse que l'organisation didactique joue un rôle important : les effets d'un enseignement frontal des structures (de type « top-down », voir paragraphe C.2 b) ci-dessous) sont à étudier, et d'autres modalités d'enseignement et d'apprentissage seraient à proposer.

La majorité des travaux publiés dans la littérature de recherche en didactique des mathématiques se concentre, en dehors de l'algèbre linéaire, sur la notion de groupe. L'originalité du projet que nous présentons ici est de proposer une étude didactique des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage de l'algèbre abstraite d'un point de vue plus global, par l'entrée du structuralisme algébrique. Cette approche se distingue également des travaux antérieurs par un fort ancrage épistémologique. Elle se distingue en particulier du programme lancé par Ed Dubinsky (théorie APOS) aux Etats-Unis, lequel s'inscrit dans un cadre cognitiviste plutôt qu'épistémologique.

Le point de départ de nos travaux est une analyse épistémologique fine de la pensée structuraliste visant à approfondir le cadre épistémologique des concepts FUGS. Nous faisons en effet l'hypothèse qu'il est indispensable de tenir compte de la nature épistémologique particulière des concepts en algèbre abstraite. Notre étude épistémologique a été menée à la fois en appui sur les travaux existants relevant de l'épistémologie historique, sur des points de vue philosophiques sur le structuralisme mathématique, et sur une réflexivité personnelle sur la pratique de l'algèbre abstraite, en tant que théoricien des nombres. Cette étude a été ensuite mise en regard de différentes théories didactiques ou sémiotiques. Le but poursuivi est de construire un cadre épistémologique, didactique et cognitif de référence pour le structuralisme algébrique. Ce cadre, qui met en avant une dialectique que nous avons appelée « dialectique objets-structures » et que nous considérons comme fondamentale dans la pratique et la didactique de l'algèbre abstraite, fait l'objet d'un article à paraître (Hausberger, Education et Didactique, in press). Nous en présentons les grandes lignes au sein de la partie B de ce manuscrit, joint à des éléments concernant la transposition didactique de la notion de structure et du concept de morphisme (qui sont liés), lesquels ont fait l'objet d'un autre article, à paraître (Hausberger, IJRUME, in press).

Le fait que le structuralisme algébrique constitue une méthodologie nous dirige vers la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard 2007), afin de détailler, dans le langage de la TAD, les techniques, technologies et théories structuralistes, autrement dit de procéder à une analyse praxéologique du structuralisme algébrique. Ces études, que nous présentons au sein de la partie C du manuscrit, visent d'une part à éclairer le problème de transition, d'autre part à fournir des modèles praxéologiques de référence en vue de l'élaboration de parcours d'étude et de recherche (PER) destinés au développement des praxéologies, que nous appelons structuralistes, par des

étudiants en situation d'apprentissage. Nous donnons l'exemple d'un PER, réalisé en classe, questionnant la principalité de l'anneau des décimaux ainsi que la définition et le calcul du pgcd dans cet anneau. La référence principale pour cette partie est l'article Hausberger (2016c).

La dernière partie de cette note de synthèse présente un travail en grande partie non publié à ce jour, autour de la « théorie des banquetts » (la structure de banquet est une structure mathématique inventée, plus simple que la structure de groupe). Cette activité a été élaborée selon la méthodologie de l'ingénierie didactique, en appui sur la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) et la dialectique objets-structures. Dans une démarche de recherche-action, cette ingénierie vise à la fois à enseigner la pensée structuraliste en éclairant son fonctionnement par le biais du levier méta (Dorier et al., 2000) et à étudier le processus de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite par un étudiant en situation d'apprentissage. Ce travail fait l'objet de deux articles, en cours de rédaction, qui seront soumis prochainement aux revues *Educational Studies in Mathematics* et *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

B. Construction d'un cadre épistémologique, didactique et cognitif de référence pour le structuralisme algébrique

1. La transposition didactique de la notion de structure

Référence pour cette partie : Hausberger (Education et Didactique, in press), le structuralisme algébrique et Hausberger(2016c), la méthodologie structuraliste (section 2.2)

a) *Eléments d'épistémologie historique : Hilbert, Noether et Bourbaki*

La notion de *structure* provient de la constitution des mathématiques en tant que science des « relations entre objets », point de vue abstrait qui domine les mathématiques contemporaines depuis l'élaboration des axiomatiques formelles par Hilbert notamment. Ainsi que l'énonce Dieudonné (1987, p. 114) :

Peu à peu se dégage une idée générale qui se précisera au XXème siècle, celle de structure à la base d'une théorie mathématique ; elle est la conséquence de la constatation que ce qui joue le rôle primordial dans une théorie, ce sont les relations entre les objets mathématiques qui y figurent, plutôt que la nature de ces objets, et que dans deux théories très différentes, il se peut que des relations s'expriment de la même manière dans les deux théories ; le système de ces relations et de leurs conséquences est une même structure « sous-jacente » aux deux théories.

La pensée structuraliste se caractérise par une méthodologie et un style spécifique, qui font école à Göttingen autour de Noether dans les années 1920. Cette école *change la manière de prouver* en privilégiant les *preuves générales* limitant les calculs et en mettant en avant les concepts. Définir des concepts a pour objectif de reconstruire un domaine sur une nouvelle base, sur la base de concepts plus fondamentaux, plus généraux et plus « simples » :

Il faut s'appliquer à réduire un domaine mathématique à ses concepts fondamentaux les plus généraux, donc les plus simples, puis à construire et à reconstruire à l'aide de ces seuls concepts (Hasse 1930).

Il s'agit donc d'une *refondation mathématique*, portée par un projet qui relève du didactique (permettre l'intelligibilité d'un contenu structuré). Cette reconstruction apporte une vision nouvelle de la matière mathématique et ouvre la voie à des constructions inédites, à de nouveaux objets. En d'autres termes, *le didactique crée ici du mathématique*. De ce fait, les *raisons d'être* des concepts sont à trouver dans l'examen des preuves classiques, dont ils apparaissent comme les « ressorts » (phase d'analyse). Par exemple, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans les entiers est liée à la propriété que l'on énonce sous l'appellation « lemme de Gauss »⁴ et l'existence provient de l'impossibilité d'une chaîne infinie de divisibilité, c'est-à-dire du caractère « noethérien »⁵ de l'anneau. On construit ensuite des théories déductives en combinant ces principes de façon à produire des systèmes axiomatiques fertiles (comme celui définissant un groupe) tels que les théorèmes sur les objets considérés apparaissent comme des conséquences logiques de ces derniers systèmes (phase de synthèse).

Ainsi que le souligne Bourbaki dans un Manifeste célèbre intitulé « L'architecture des mathématiques » (Bourbaki 1948/1998) :

4 Si a divise un produit bc et a est premier avec b alors a divise c .

5 Toute suite d'idéaux croissante pour l'inclusion est stationnaire.

Son trait le plus saillant [de la méthode] est de réaliser une économie de pensée considérable. Les structures sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié.

En d'autres termes, Bourbaki met en avant la dimension outil (Douady 1986) des structures mathématiques là où, dans l'enseignement actuel, ils apparaissent à travers une dimension objet prépondérante.

b) la notion de structure : un méta-concept

Dans son travail d'historien, Corry (1996) distingue le « contenu du savoir » (*body of knowledge*) et l'« image du savoir » (*image of knowledge*). Le concept de « structure mathématique » appartient, selon cet auteur, à l'image du savoir. Corry souligne ainsi, à propos de l'ouvrage *Moderne Algebra* de van der Waerden (1930-1931), lequel a retranscrit les cours dispensés par Noether :

This textbook put forward a new image of the discipline that implied in itself a striking innovation: the structural image of algebra. In the forthcoming account, it is this specific, historically conditioned image of mathematical knowledge that will be considered as implicitly defining the idea of a mathematical structure. (p. 8)

Bien que Bourbaki, dans son traité *Les Éléments de mathématique* (publié à partir de 1939), définisse mathématiquement la notion de structure, sa définition ne sert que de cadre général et n'est pas mathématiquement « fonctionnelle » (Corry, 1996, p. 324), à la différence de la théorie des catégories, introduite par Mac Lane et Eilenberg (Mac Lane, 1996). Cette dernière constitue une véritable métathéorie mathématique des structures, mais il s'agit d'un point de vue très surplombant, qui est hors d'atteinte des étudiants de licence ou début de master lorsqu'ils apprennent la théorie des structures algébriques. En définitive, pour les mathématiciens du milieu du XX^e siècle tout comme pour les étudiants (mis à part les étudiants de deuxième année de master qui se destinent à la recherche dans ce domaine précis des mathématiques), le concept de structure, faute de fondation mathématique, appartient essentiellement à « l'image du savoir ». Ceci soulève d'emblée le problème didactique suivant :

As a consequence, students are supposed to learn by themselves and by the examples what is meant by a structure whereas sentences like “a homomorphism is a structure-preserving function” is supposed to help them make sense of a homomorphism (Hausberger 2013).

La définition informelle de la notion de structure que donne Bourbaki dans son manifeste (1948/1998) insiste sur le point de vue relationnel. Il est intéressant de noter qu'il s'agit davantage de la description d'une méthode qu'une véritable définition. Si le structuralisme est fondé sur la construction de concepts (comme ceux de groupe, d'anneau, de corps, qui sont des exemples de structures), le méta-concept de structure est à vocation davantage méthodologique que définitionnel. Il prend sens dans l'action. Cette remarque orientera notre travail d'ingénierie (voir parties C et D de la présente note).

Bourbaki insiste également sur le rôle des intuitions :

Or, chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé des résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique que nous avons décrite plus haut ; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut. (pp. 42-43)

Il se défend là d'une vision de la méthode structuraliste qui serait une réduction des mathématiques à l'application mécanique de règles logiques. De plus, ce que Bourbaki appelle « résonances intuitives particulières » fait directement écho à la « phénoménalité des structures mathématiques » dont il sera question plus loin lorsque nous présenterons la thèse de Freudenthal, et qui inspirera également notre travail d'ingénierie autour de la théorie des banquets.

2. La dialectique objets-structures

Référence pour cette partie : Hausberger (Education et Didactique, in press)

a) Dialectiques lautmaniennes, idéalisation et thématization selon Cavaillès

D'après Benis-Sinaceur (2010), Lautman introduit la notion de « dialectiques mathématiques » dans son « Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques » (Lautman, 2006). Les grandes dialectiques lautmaniennes sont les suivantes : concret/abstrait, structure/existence, local/global, ce que le philosophe subsume sous la dialectique matière/forme.

À la suite de Lautman, nous plaçons au cœur de notre modèle épistémologique de référence pour l'algèbre abstraite une dialectique que nous appellerons la *dialectique objets-structures*. Elle est fortement liée à la *dialectique concret-abstrait* et elle est à examiner en relation avec la notion d'*opération*, ou encore de relation au sens de la *logique des relations* de Carnap (1928, cité dans Patras, 2008 ; voir Hausberger, Education et Didactique, in press, pp. 4-6), c'est-à-dire une description des propriétés formelles des relations faisant à la fois abstraction de la nature des objets et de la sémantique des relations, en définitive une description de structure.

Cavaillès appelle « dialectique des concepts » cette dialectique matière-forme qu'il voit à l'œuvre dans l'« expérience mathématique » des années 1930, marquée par une irrésistible montée vers l'abstraction. Il rend compte de deux grands mouvements d'abstraction, l'un vertical, l'autre horizontal, qu'il appelle « idéalisation » et « thématization », dans la ligne de Husserl, et qui deviendront pour lui des « propriétés constitutives de l'essence de la pensée ». Plus précisément :

L'idéalisation, c'est le passage, nécessairement progressif, étalé sur une certaine « longueur d'enchaînement », de l'acte – additionner des nombres entiers, par exemple – au sens – additionner sans spécification d'individus – de la « liaison-acte » à la « liaison-type ». (Benis-Sinaceur 1987, p. 24)

En termes mathématiques, il s'agit du processus d'axiomatisation-formalisation, qui consiste à exprimer les propriétés formelles des relations dans le langage symbolique de l'algèbre abstraite. Cavaillès appelle ensuite « thématization » le fait que « les gestes accomplis sur un modèle ou un champ d'individus peuvent, à leur tour, être considérés comme des individus sur lesquels le mathématicien travaille en les considérant comme un nouveau champ » (cité dans Benis-Sinaceur, 1987, p. 24). Prenant la structure (les relations entre objets) comme objet, le mathématicien travaille, dans cette phase de thématization, à l'élaboration d'une théorie d'objets de niveau supérieur. Les deux mouvements d'idéalisation et de thématization ne cessent pas de se succéder : « Le processus de “thématization” superpose indéfiniment les formes-principes aux formes-opérations, les structures-concepts aux procédures idéalisées. » (loc.cit. p. 29)

La dialectique objets-structures qui nous concerne, avec ses deux mouvements d'abstraction, est une dialectique interne au déploiement de la pensée structuraliste. C'est également une dialectique épistémique : l'évocation des objets mentaux (fruits cognitifs de cette dialectique) et les rapports à la phénoménologie en témoignent. Notre principale préoccupation est maintenant de la constituer en une véritable dialectique didactique, c'est-à-dire d'étudier les modalités et les conditions de sa mise en œuvre en classe dans des situations d'apprentissage à même de favoriser le processus de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite. Cela nous amènera à considérer également la dialectique syntaxe-sémantique dont nous montrerons bientôt l'importance dans le cadre de l'enseignement et l'apprentissage des structures algébriques.

b) Phénoménologie didactique du structuralisme algébrique

Pour Freudenthal (1983), l'analyse phénoménologique d'un concept mathématique (ou d'une structure mathématique, au sens large pour Freudenthal, ou au sens précis de structure algébrique pour ce qui nous concerne), consiste à repérer le phénomène dont ce concept ou cette structure est le moyen ou le principe d'organisation et à décrire les relations entre concept-structure et phénomène. Ce couplage entre phénomène et principe d'organisation peut se situer à différents niveaux : celui du monde réel (Freudenthal parle de l'espace physique, de la sphère sociale), le formalisme mathématique étant engagé dans une modélisation du réel, ou à un niveau supérieur où ces formalisations, qui ont servi de principe d'organisation au niveau inférieur, sont prises pour objet (de la pensée) et entrent en tant que phénomène dans un nouveau couple phénomène/principe d'organisation. L'activité mathématique génère ainsi son propre contenu : ce processus est une forme de thématization.

La chronologie naturelle de l'apprentissage passe, pour Freudenthal, par l'enseignement d'objets mentaux avant celui des concepts correspondants. La constitution d'un objet mental se rapporte à la dimension opératoire de la connaissance alors que la constitution du concept se situe davantage du côté prédictif (selon les distinctions soulignées par Vergnaud, 2002). À cet égard, Eugenio et al. (2008) écrivent :

Constituting a mental object implies being able to give an account with it of all the uses in all contexts or being able to organize all the corresponding phenomena, in which case the mental object is well constituted. [...] Acquiring the concept implies examining how it was established in mathematics organized locally or globally in a deductive system. (p. 50)

Dans la démarche de Eugenio et al. (2008), l'analyse phénoménologique des concepts a pour objectif l'élaboration de modèles d'enseignement de l'algèbre élémentaire. L'approche phénoménologique apparaît naturelle, du fait du rôle du symbolisme algébrique en tant que système de signes modélisant des grandeurs dans des situations d'action sur le réel. L'algèbre est donc présentée comme un moyen d'organisation des phénomènes et se déploie dans un jeu dialectique entre syntaxe (manipulation du système de signes selon des règles en cours d'élaboration) et sémantique (interprétation de ces systèmes de signes en relation avec les objets et démarches d'action, ce qui permet de donner du sens et d'exercer un certain contrôle sur les manipulations syntaxiques).

Il s'agit maintenant d'adapter ce cadre au contexte de l'enseignement supérieur, en l'occurrence l'enseignement des structures algébriques, en tenant compte des spécificités de ce savoir par rapport à l'algèbre classique. Une phénoménologie didactique du structuralisme algébrique, comme nous l'avons vu, doit considérer *deux niveaux* : tout d'abord, le niveau de la structure (de groupe, d'anneau, etc.), qui apparaît en tant que principe organisateur de phénomènes impliquant des objets de niveau inférieur, voire du monde réel (ou à peine idéalisés) ; ensuite, le niveau du méta-concept de structure lui-même, qui est appelé à jouer un rôle architectural dans l'élaboration des théories mathématiques, en relation avec la méthodologie structuraliste. La présence de ce double niveau constitue un défi important pour les étudiants, que nous avons appelé le « challenge de la pensée structuraliste » (Hausberger, 2012).

Un objet mental associé à une structure algébrique est donc, en première instance, directement lié à la sémantique de la structure, c'est-à-dire à l'un des objets de niveau inférieur dont la structure est issue par le processus d'abstraction-idéalisation. Au sein du cadre posé par Duval (1995), nous nous proposons d'en détecter la trace en termes de ce que nous appelons un *objet mental externalisé*, c'est-à-dire une représentation sémiotique introduite par un sujet épistémique dans un processus d'apprentissage d'un concept mathématique, laquelle remplit une fonction d'objectivation en association avec une représentation mentale dont elle vise l'expression, et qui est amenée, notamment par une succession de traitements, à évoluer en une représentation sémiotique reconnue comme désignant le concept.

c) *Théorie des modèles, syntaxe et sémantique*

Les signes mathématiques sont organisées en formules et en énoncés qui sont construits en se conformant à des règles syntaxiques strictes. D'un point de vue logique, une définition par axiomes est une « phrase ouverte », sans valeur de vérité, qui peut être satisfaite ou non lorsqu'on assigne aux différentes variables des valeurs prises au sein d'un certain univers de discours : il s'agit là du point de vue sémantique sur la vérité introduit par Tarski (1944) et dont Durand-Guerrier (2005) montre l'apport pour l'analyse didactique du raisonnement mathématique et des preuves.

À la suite de Tarski, nous appelons *modèle* de la structure (au sein d'un certain univers de discours ou théorie hôte) toute donnée qui satisfait la définition axiomatique de la structure. Les modèles constituent le contenu sémantique de la structure mathématique axiomatique, son extension en tant que concept, par rapport au système d'axiomes qui la définit syntaxiquement.

Montrons maintenant que le processus d'abstraction-idéalisation est porteur d'une dialectique syntaxe-sémantique. Dans ce que nous appelons la « version syntaxique » de ce processus, les mathématiciens font abstraction de la nature particulière des objets et isolent les propriétés formelles des relations afin de construire la structure comme concept abstrait, c'est-à-dire produire un système syntaxique (l'axiomatique de la structure) exprimant la logique des relations. Ce processus procède d'un mouvement allant du sémantique au syntaxique. La « version sémantique » du principe d'abstraction-idéalisation en jeu dans les structures algébriques, en tant que processus générateur de concept, est appelé par les philosophes-logiciens « principe d'abstraction ». Il a été utilisé, par exemple, par Frege (1884) pour définir les nombres cardinaux et a été formalisé plus tard par Russell (1903) : dire que des « choses sont égales » parce qu'elles partagent une propriété commune, réduisant ainsi à un seul élément toute une classe, nécessite que la relation qui traduit cette propriété soit symétrique, réflexive et transitive (en d'autres termes, soit une relation d'équivalence). Cette version du principe d'abstraction-idéalisation nous permet ainsi de définir une structure comme un ensemble de classes de modèles, ce qui s'apparente bien à une description sémantique. La notion-clé est celle de relation d'équivalence qui est porteuse d'une dualité syntaxe-sémantique : se donner une relation d'équivalence est équivalent à se donner une partition. La relation d'équivalence en jeu ici est la relation d'isomorphisme ; cette seconde interprétation du principe d'abstraction-idéalisation constitue ainsi un mouvement du syntaxique au sémantique.

Finalement, nous voyons que la dialectique syntaxe-sémantique en jeu dans le principe d'abstraction-idéalisation, sous ses deux aspects, est liée à la dialectique objet-structures. La version syntaxique du processus d'abstraction-idéalisation engage un domaine phénoménal principal dont la structure est issue, en tant que principe organisateur abstrait, dans un mouvement des objets à la structure. Dans un second mouvement de la structure aux objets, la considération de la pluralité des modèles, en instaurant un jeu dialectique entre les deux niveaux objets-structure, invite, à travers la version sémantique du principe d'abstraction-idéalisation, à convoquer en fait plusieurs domaines de phénomènes. Dans cette dialectique concret-abstrait, les classes d'équivalence constituent un intermédiaire entre le domaine sémantique concret des objets et celui syntaxique abstrait de la structure. Le prix à payer est la transition des éléments aux classes.

d) *Les objets structuraux*

Ainsi que le formule et l'illustre Winsløw (2004, p. 4), les objets mathématiques se décrivent, du point de vue de la sémiotique, comme des « signes modulo des transformations préservant les objets (*object preserving transformations* ou OPT) ». Afin de construire un concept de structure (de groupe, d'anneau, etc.), dans un contexte de références multiples (la nature FUGS des concepts structuraux), il s'avère nécessaire de recourir aux « transformations qui conservent la structure » (*structure preserving transformations* ou SPT), c'est-à-dire les *isomorphismes*, qui sont définies en tant que bijections préservant les relations. Ceci nous permet d'associer à une structure axiomatique

ses « *objets structuraux* » (notre terminologie), c'est-à-dire les classes d'isomorphismes de modèles ou encore les modèles modulo SPT, de la même façon que les objets mathématiques sont construits à partir de représentations modulo OPT, en utilisant le principe d'abstraction.

L'idée derrière les objets structuraux est qu'une forme de réification doit avoir lieu afin de construire un concept (Sfard, 1991, p. 19) : « Reification is defined as an ontological shift – a sudden ability to see something familiar in a totally new light. » Afin que ce phénomène se produise, nous faisons l'hypothèse qu'une pluralité de modèles est nécessaire, empruntés à différents domaines des mathématiques et représentés dans une variété de registres sémiotiques. De façon analogue au contexte de Winslow, la coordination de ces représentations à travers les SPT devrait être cruciale afin de générer chez l'apprenant un schéma conceptuel de l'objet structural. Ce travail sur les représentations doit ouvrir la possibilité d'extraire des modèles (*templates*) un motif (*pattern*) (Resnik, 1997).

La pluralité des représentations sémiotiques permet également de mobiliser des processus de traitement internes différents selon les registres : dans le cadre du registre graphique, la reconnaissance d'un isomorphisme peut s'apparenter à un processus visuel de reconnaissance d'une congruence de formes, en relation avec l'étymologie même du terme isomorphisme, comparativement à d'autres registres dans lesquels le lien d'isomorphie, moins aisé à établir, requiert des manipulations syntaxiques en relation avec la définition formelle d'isomorphisme. Dans cet ordre d'idées, nous pouvons souligner le potentiel de la représentation des relations en termes de graphe, laquelle offre un point de vue abstrait synthétique (auquel la force de la représentation de nature géométrique n'est pas étrangère) sur la logique des relations, comparativement au point de vue axiomatique logique qui est un point de vue abstrait analytique. Cette représentation permet de développer une combinatoire des relations en appui sur des processus cognitifs engageant les sens, donc dans une approche phénoménologique.

3. La thématisation du concept d'homomorphisme

Références pour ce paragraphe : Hausberger (2013) et Hausberger (IJRUME, in press)

a) Origine du questionnement

Notre étude de la dialectique objets-structures a mis en évidence la place centrale de la notion d'isomorphisme dans le processus d'abstraction-idéalisation qui conduit à la conceptualisation d'une structure abstraite (l'étymologie souligne d'ailleurs le lien entre les concepts d'isomorphisme et de structure). Selon Leron, Hazzan et Zazkis (1995, p. 171), "the very concept of isomorphism is but a formal expression of many general ideas about similarity and differences, most notably, the idea that two things which are different may be viewed as similar under an appropriate act of abstraction". Ceci correspond à l'idée vague (mais cruciale et intuitive) que deux groupes isomorphes sont « essentiellement les mêmes » (du point de vue de la théorie des groupes). Une partie de la stratégie didactique employée consiste alors à aider les étudiants à faire sens d'une telle affirmation avant de formaliser le concept d'isomorphisme, lequel requiert la notion de fonction et une compréhension correcte de la quantification. Par ailleurs, Nardi (2000, p. 179) souligne le cumul de difficultés conceptuelles générées par les théorèmes d'isomorphismes⁶ : la propriété d'isomorphisme, la bijectivité, la définition de l'application sur un quotient. Elle met également en avant l'importance des arguments de nature épistémologique que l'enseignant apporte pour motiver les nouveaux concepts.

A notre connaissance, les études didactiques publiées se limitent essentiellement au concept d'isomorphisme de groupe. Au contraire, notre entrée par le structuralisme algébrique ambitionne de mettre en perspective l'enseignement et l'apprentissage du formalisme des théorèmes

6 Voir Hausberger (IJRUME, in press) pour un énoncé de ces théorèmes

d'isomorphisme pour différentes structures. Nous allons considérer ci-dessous le cas des anneaux : comparativement à la structure de groupe, de nouveaux phénomènes apparaissent, du fait qu'un anneau est en particulier un groupe, et que la théorie des groupes et celles des anneaux présentent des analogies formelles. L'analogie entre les énoncés pour les groupes et pour les anneaux n'est pas une coïncidence : elle provient du fait que la réécriture de l'algèbre classique en termes de concepts a été opérée de façon transversale, dans un acte d'abstraction que nous avons appelée, à la suite de Cavallès, la thématization. Comme le souligne van der Waerden (1930, 2nd ed. 1949, p. 51) : « Ideals bear the same relation to ring homomorphisms as do normal subgroups to group homomorphisms. Let us start from the notion of homomorphism ». Les raisons d'être de la notion d'homomorphisme (à la différence de la notion d'isomorphisme en tant que relation d'équivalence, laquelle relève essentiellement de l'idéalisation) sont ainsi liées à ce mouvement de thématization et fondent la méthode structuraliste, qui met l'accent sur la considération de sous-ensembles distingués (les sous-groupes normaux, les idéaux, etc.) et d'homomorphismes :

her [Noether] project was to get Abstract Algebra away from thinking about operations on elements, such as addition or multiplication of elements in groups or rings. Her algebra would describe structures in terms of selected subsets (such as normal subgroups of groups) and homomorphisms (McLarty, 2006, p. 188).

D'un point de vue didactique, il s'agit d'observer comment la thématization impacte les organisations mathématiques visibles en théorie des groupes et des anneaux, et comment la théorie des groupes sert d'appui à l'enseignement de la théorie des anneaux, puisque, selon l'ordre habituel du curriculum en France, l'apprentissage des groupes précède celui des anneaux. La description des praxéologies structuralistes (paragraphe 4 ci-dessous) s'inscrit dans cette démarche. L'ambition de cette première étude (Hausberger, IJRUME, in press), centrée sur la notion d'homomorphisme, est d'utiliser d'une part le couple idéalisation-thématization en tant que grille d'analyse de la transposition didactique du concept d'homomorphisme opérée par l'enseignant, en relation avec la manière dont ce dernier organise l'exposition des théories et met en avant un méta-discours pour motiver l'introduction des concepts (raisons d'être), d'autre part de tester le potentiel d'un ancrage épistémologique de l'apprentissage des théorèmes d'isomorphisme sur des processus cognitifs de comparaison et d'identification, dans le cas des anneaux, en tenant compte des phénomènes de thématization.

b) Transposition didactique et thématization : une analyse exploratoire de manuels sélectionnés

Le corpus est constitué de l'ouvrage *Modern Algebra* (van der Waerden, 1930) en tant que premier manuel disponible prenant ses sources dans les cours dispensés par Noether, et de deux manuels classiques : l'ouvrage anglo-saxon *Algebra* (Artin 1991) et le manuel francophone *Algèbre T.1 : Groupes et Anneaux* (Guin 1997). Cette sélection est motivée par son potentiel à révéler différents phénomènes au niveau de la transposition didactique opérée par les mathématiciens chargés d'enseigner l'algèbre abstraite. Elle permettra de se défaire de l'illusion de transparence (Artigue, 1991) sur la façon dont les mathématiciens véhiculent l'image structuraliste (Corry 1996) de l'algèbre abstraite, qui est loin d'être uniforme. Michael Artin est le fils d'Emil Artin (dont les cours ont également inspiré van der Waerden). C'est un expert en géométrie algébrique qui revendique une proximité philosophique avec Hermann Weyl, lequel se rattache au courant intuitionniste de Brouwer. De l'autre, Guin est un expert en théorie des catégories qui s'inscrit dans la tradition bourbakiste française.

Van der Waerden est le seul à thématizer la notion d'isomorphisme en s'appuyant sur le concept général de relation ; pour les autres auteurs, comme pour la majorité des manuels contemporains, un morphisme est synonyme d'application qui conserve les lois. Comme on le verra avec la théorie des banquets (seconde partie de la note de synthèse), ceci est insuffisant pour que les étudiants puissent

acquérir le point de vue relationnel (les mathématiques en tant que sciences des relations) sous-jacent au structuralisme et donner une définition d'isomorphisme en dehors du cas d'ensembles munis de lois de compositions internes. Van der Waerden utilise la notation $\cong$ pour un isomorphisme (deux groupes isomorphes sont « essentiellement » les mêmes) et $\mathfrak{G} \sim \overline{\mathfrak{G}}$ pour un homomorphisme (surjectif par définition, à la différence du concept actuel), appelé également « many-one isomorphism ». L'homomorphisme est donc présenté comme une relativisation du concept d'isomorphisme et l'auteur caractérise les images $\overline{\mathfrak{G}}$ en tant que groupes quotients, à travers un énoncé appelé « loi des homomorphismes de groupes » (de nos jours, le premier théorème d'isomorphisme). Lors de l'exposition de la théorie des anneaux, l'accent est mis sur l'analogie formelle avec la théorie des groupes, qui renvoie au phénomène de thématization.

Guin (1997) définit les homomorphismes avant les isomorphismes et préfère utiliser le terme « morphisme », mettant en avant la notion générale et adoptant un point de vue implicite de théorie des catégories. Son méta-discours développe l'idée qu'un morphisme « transporte la structure » (l'image d'un groupe par un morphisme est un groupe) de façon à permettre des comparaisons. Il ne motive pas la notion de sous-groupe normal en tant que noyau des homomorphismes, mais en tant que bonne notion pour fabriquer des groupes quotients, considéré comme un procédé général. Les trois théorèmes d'isomorphismes sont présentés comme des corollaires d'un théorème plus général établissant les conditions pour qu'un morphisme $f: G \rightarrow G'$ induise un morphisme $\bar{f}: G/H \rightarrow G'/H'$. Dans l'exposition de la théorie des anneaux, la thématization prend davantage la forme de l'application d'un principe d'économie (par exemple, la preuve du théorème ci-dessous à propos du morphisme $\bar{f}$ se réduit, dans le cas des anneaux, à affirmer que $\bar{f}$ est déjà défini en tant que morphisme de groupe, si bien qu'il « suffit de vérifier que c'est un morphisme d'anneaux, ce qui est immédiat ».) que la mise en évidence des analogies formelles. Les théorèmes sont parfois énoncés à un niveau de généralité encore supérieur. La généralité en tant que principe permettant de manifester les raisons profondes des faits algébriques, dans des mouvements croissants d'abstraction (au sens de l'idéalisation), avec pour horizon la théorie des catégories, semble sous-tendre l'exposition des notions.

Artin (1991), par contraste, met en garde dans sa préface contre l'abstraction et la généralisation croissante, et défend le point de vue que le cœur de l'activité mathématique consiste en la résolution de problèmes spécifiques (mobilisant des objets). Il suggère de relativiser l'importance de la construction des groupes quotients, pour des raisons que nous qualifions d'écologiques au sens de Artaud (1998) : à la différence de la théorie des anneaux dans laquelle l'arithmétique modulaire fournit des applications à la structure quotient, la présentation des groupes par générateurs et relations constitue, selon Artin, la « première utilisation sérieuse » des quotients en théorie des groupes. Des considérations qui s'apparentent à celles de la dialectique outil-objet (Douady, 1986) amènent donc Artin à retarder l'exposition de la structure quotient. Il s'appuie sur l'exemple paradigmatique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en tant qu'anneau quotient et présente le premier théorème d'isomorphisme en tant que « méthode fondamentale pour identifier des groupes quotients ». Il en donne une généralisation, appelée « mapping property of quotient group », laquelle énonce une propriété suffisante à l'existence d'un homomorphisme $\bar{f}: G/H \rightarrow G'$ induit par f , donc une version moins générale que Guin, introduite en tant qu'« outil pour travailler librement avec le concept de générateur et relations ». L'introduction des homomorphismes d'anneaux se fait en appui sur des exemples qualifiés de « particulièrement importants », comme l'unique homomorphisme $\mathbf{Z} \rightarrow A$ (définissant la caractéristique d'un anneau) et l'homomorphisme $x \mapsto P(x)$ d'évaluation d'un polynôme. La notion d'idéal est dégagée des propriétés particulières vérifiées par un homomorphisme d'anneau, tout en renvoyant à un chapitre ultérieur pour les raisons historiques (travaux de Dedekind autour des anneaux des entiers des corps de nombres). Le méta-discours sur les quotients d'anneaux insiste sur l'interprétation des quotients en tant qu'ajouts de nouvelles relations, ce qui permet d'interpréter, par exemple, le quotient $\mathbf{Z}[X]/(10X-1)$ en tant que modèle de l'anneau des décimaux. L'établissement de résultats

« significatifs » relativement à des problématiques d'objets apparaît donc comme le moteur de l'élaboration théorique, en accord avec le positionnement philosophique de l'auteur.

Notre brève étude (voir Hausberger, IJRUME in press, section 4 pour un commentaire plus détaillé des trois manuels) met en évidence dans les manuels la *tension* que suscite la dialectique objets-structures (en lien avec les dialectiques concret-abstrait et particulier-général) lorsque les spécialistes d'algèbre abstraite sont confrontés à la tâche de transposition didactique. D'un côté, des problématiques d'objets introduisent des asymétries dans l'exposition théorique (chaque théorie de structures possède sa « saveur », son histoire de problèmes, elle constitue une idéalisation relativement à des domaines de phénomènes spécifiques), de l'autre la méthodologie structuraliste fournit une unité théorique avec le phénomène de thématization et la théorie des catégories en tant qu'horizon (une nouvelle idéalisation). Cette thématization apparaît plus ou moins implicite ou explicite dans les manuels et la gestion de cette tension débouche sur des organisations mathématiques contrastées. Nous faisons l'hypothèse que le domaine de spécialité du mathématicien et son « épistémologie » (dans notre étude, nous avons pu observer des épistémologies contrastées que l'on peut mettre en regard avec l'opposition classique entre les courants philosophiques de l'intuitionnisme et du formalisme mathématiques) influent sur les choix qu'il opère.

Nous soutenons le point de vue que le processus de thématization nécessite une prise en charge didactique, à travers un méta-discours ad hoc explicite, et en ne perdant pas de vue les objets. La théorie des banquets, que nous allons exposer dans la seconde partie de cette note de synthèse, vise en particulier la thématization du concept d'isomorphisme.

c) Théorèmes d'isomorphismes et « comparaison » des quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tant que groupes et anneaux : une étude empirique

Nous avons réalisé une étude empirique destinée à tester le potentiel d'un ancrage épistémologique du concept d'homomorphisme d'anneau sur des processus d'identification et de comparaison, lors de l'apprentissage de la théorie des anneaux en troisième année de licence de mathématiques. La petite ingénierie que nous avons élaborée vise également à établir les raisons d'être du théorème de factorisation (le « mapping property » d'Artin, dans le cas des anneaux) en tant qu'outil universel pour la construction de quotients (tout quotient provient de l'application de ce théorème).

L'activité, proposée lors d'une séance de travaux dirigés en petits groupes après que les théorèmes d'isomorphismes aient été vus et démontrés en cours, débute avec les questions suivantes : « Rappeler la définition d'un homomorphisme d'anneaux $f: A \rightarrow B$. Lorsque f est un isomorphisme, on identifie souvent A et B . Quelles identifications pouvons-nous faire lorsque f est seulement injective (resp. surjective) ? ». Puis une preuve est demandée du théorème de factorisation d'un homomorphisme f à travers un quotient A/I . Il s'agit ensuite de comparer les quotients $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ en tant que groupes et anneaux (l'un s'identifie-t-il à un sous-objet, sous-groupe ou sous-anneau, ou à un quotient de l'autre ?) La question est généralisée à celle de l'existence et de l'unicité d'un homomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Pour cela, l'énoncé demande d'établir, au préalable, l'existence et l'unicité d'un homomorphisme $\mathbb{Z} \rightarrow A$ pour tout anneau A (voir Hausberger, IJRUME in press, section 5 pour un énoncé complet et des analyses a priori et a posteriori par question).

Les résultats obtenus mettent en évidence des rapports contrastés des étudiants à l'abstraction et à l'analogie. Certains étudiants manifestent de grandes difficultés à construire un modèle du groupe cyclique d'ordre 4 dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tandis que d'autres, qui ont forgé plus rapidement un concept de groupe abstrait, considèrent comme égaux des groupes isomorphes. Globalement, les étudiants associent un processus d'identification à une égalité et ont du mal à faire sens de la tâche demandée. Ceci montre la nécessité d'un travail didactique plus approfondi, en appui sur l'épistémologie et la sémiotique, dédié à éclairer dans les apprentissages les distinctions et les relations entre égalité et isomorphisme, inclusion et plongement (morphisme injectif), classe et représentant (dans le

contexte des structures), afin que le formalisme des homomorphismes puisse être ancré sur son fondement épistémologique de processus de comparaison et d'identification, dans la visée structuraliste. La pratique des mathématiciens est d'ailleurs loin d'être homogène et transparente : certains plongements sont considérés comme de véritables inclusions (par exemple $K \hookrightarrow K[X]$ ou $\mathbb{F}_p \hookrightarrow A$ pour A un anneau de caractéristique p), à la différence d'un plongement de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. La distinction entre égalité et isomorphisme, fondamentale en théorie des catégories, a été une motivation au développement de cette dernière.

Par contre, l'analyse des données empiriques présentées (Hausberger, IJRUME in press) montre un bon fonctionnement des dialectiques concret-abstrait et particulier-général, en relation avec l'objectif visé d'éclairer les raisons d'être du théorème de factorisation : la transition depuis des exemples spécifiques d'anneaux du type $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ au cas générique et la discussion de l'unicité de l'homomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ont amené une grande majorité des étudiants à prendre conscience de l'utilité et de la portée universelle du théorème de factorisation.

C. Analyses didactiques et développements théoriques au sein de la TAD

1. Les praxéologies structuralistes

Références pour ce paragraphe : Hausberger (2016c) et Hausberger (2016b).

a) Origine de la notion de praxéologie structuraliste et motivations

Un fait nouveau par rapport à l'algèbre linéaire, souligné dans Hausberger (2012), est le suivant : l'unification se situe à plusieurs niveaux

- le niveau 1 : une même théorie s'applique à des objets de nature différente ;
- le niveau 2 : la présentation axiomatique des structures en permet un traitement unifié (on se pose à propos des différentes structures le même type de questions que l'on cherche à résoudre avec le même type d'outils) mettant en avant les ponts entre ces structures ;
- le niveau 3 : ce qui était forme (les structures) devient pleinement objet à un niveau supérieur d'organisation, la théorie des catégories ou autre méta-théorie des structures.

Si le niveau 3 ne peut guère être abordé de façon réaliste avant la seconde année de Master, l'enjeu de la pensée structuraliste se situe au niveau 2, ainsi que le mettent en exergue les manuels d'algèbre abstraite à la suite de l'ouvrage de van der Waerden (1930). Ces manuels témoignent de l'application d'une méthode : "la méthode structuraliste".

En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard 2002), une méthode est un *ensemble de techniques*. La TAD, en effet, "considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une certaine technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ . En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'on nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*" (loc. cit.). Alors que l'algèbre abstraite apparaît souvent, du point de vue de l'apprenant, comme un ensemble de questions et de tâches isolées dont on a saisi ou non l'astuce en permettant la résolution, nous faisons l'hypothèse que la mise en évidence des techniques structuralistes permet d'éclairer les pratiques en algèbre abstraite, de faire apparaître leurs raisons d'être et d'en fonder l'unité.

Barbé et al. (2005) montrent comment le modèle épistémologique dominant du Calculus dans l'enseignement secondaire conditionne les organisations mathématiques dédiées à l'étude des limites

de fonction. De même, dans le contexte de l'algèbre abstraite, il s'agit d'étudier comment le modèle épistémologique du structuralisme mathématique se traduit en termes d'organisations praxéologiques dans l'enseignement des structures algébriques et la résolution de problèmes en algèbre abstraite.

La constitution d'un modèle praxéologique de référence pour l'algèbre abstraite vise également à éclairer le problème de transition suscité par cet enseignement, dans l'esprit du travail de Winslow (2006), qui, étudiant les praxéologies en analyse au sein de l'institution Université, constate que la transition du concret à l'abstrait que requiert la transition secondaire-supérieur se traduit, au niveau praxéologique, par le développement de nouvelles praxéologies dont le bloc praxique est construit sur le bloc du logos d'une praxéologie que l'étudiant maîtrise déjà. Si l'algèbre abstraite provient d'une réécriture conceptuelle de l'algèbre classique selon la méthodologie structuraliste, comment cette réécriture se traduit-elle en termes praxéologiques ? Y trouve-t-on des spécificités par rapport aux praxéologies en algèbre linéaire enseignées lors des deux premières années de licence ?

Afin de répondre à de telles questions, nous avons posé (Hausberger, 2016c) les fondements de la notion de praxéologie structuraliste que nous avons introduit en didactique de l'algèbre abstraite, en appui sur une étude épistémologique du structuralisme mathématique. Nous avons détaillé plus particulièrement les praxéologies structuralistes en arithmétique des anneaux abstraits puis analysé les praxéologies développées par un collectif d'apprenants sur un forum de mathématiques à propos d'une question portant sur la structure algébrique des nombres décimaux (voir également Hausberger 2015, août et Barquero et al. 2015, août pour d'autres analyses de ce corpus). Ces données empiriques permettent de donner corps à la notion de praxéologie structuraliste, fondée épistémologiquement, et de montrer sa pertinence dans l'analyse des praxéologies en algèbre abstraite.

b) Définition des praxéologies structuralistes

Les notions d'anneau, d'homomorphisme et d'idéal constituent un « fond théorique » dans lequel s'inscrit la théorie des anneaux factoriels, principaux et euclidiens. De nombreux auteurs (par exemple Guin 2013, Chap. I) font précéder ce chapitre d'un chapitre « généralités sur les anneaux » très abstrait (sans problématique sur des objets), en s'appuyant sur les analogies formelles entre les groupes et les anneaux dans la structuration de la théorie : par exemple, les sous-groupes distingués et les idéaux sont les noyaux des homomorphismes. D'autres auteurs (Colmez 2011) vont plus loin et posent, au sein d'un même chapitre « structures algébriques », en début d'ouvrage, la totalité des structures usuelles en algèbre ainsi que les notions structuralistes « usuelles » : « sous-truc » (selon l'expression de Colmez), morphisme, noyau et image, produits et sommes de « trucs », construction de quotients. Les concepts et résultats mis en avant dans de tels chapitres constituent typiquement, dans notre approche, les *techniques et technologies structuralistes* à dégager et mettre en relation avec les tâches en algèbres abstraites engageant des objets.

Nous illustrons notre propos à l'aide du type de tâche T_1^+ (montrer qu'un anneau est intègre). Une telle tâche peut être traitée à différents niveaux, selon l'importance de la *dimension structuraliste*. Particularisons au cas de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$:

- Au premier niveau (niveau 1), il s'agit de démontrer que la définition de l'intégrité est satisfaite, autrement dit qu'« un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul ». On écrit pour cela $(a+ib)(c+id)=0$, ce qui conduit à un système un peu pénible à résoudre dans les entiers, d'où probablement une impasse pour un grand nombre d'étudiants. Par contre, lorsque l'on réalise que $\mathbb{Z}[i]$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et qu'un élément non nul est inversible donc simplifiable, la preuve devient « triviale » : $zz'=0$ avec z non nul, donne, en multipliant par z^{-1} , la nullité de z' .

- Au niveau 2, on utilise toujours l'inclusion de $\mathbf{Z}[i]$ dans $\mathbf{C}$ mais on invoque le résultat général qu'un sous-anneau d'un corps est intègre. Le bloc technologico-théorique, réduit dans le niveau 1 aux propriétés des nombres complexes, intègre maintenant des résultats abstraits généraux, des structures. C'est ce type d'organisation mathématique qui est visée à la transition entre licence et master de mathématiques, et non l'organisation mathématique restant au niveau de la théorie des objets.
- Au niveau 3, on invoque qu'un corps est intègre et que l'intégrité est une propriété stable par sous-anneau. C'est le même bloc théorique que le niveau 2 en apparence mais la formulation de la réponse et son mode d'obtention sont différents : on n'applique plus un théorème du cours, mais le mode de pensée structuraliste par rapport à la question posée : elle concerne l'intégrité ; on raisonne alors en termes de classes d'objets, de relation entre ces classes (anneau-corps) et de conservation de la propriété (intégrité) vis-à-vis des opérations structuralistes sur ces classes (passage à un sous-anneau).

L'examen d'autres types de tâches en algèbre abstraite permet de mettre en évidence une dialectique entre le particulier et le général, où l'on essaie, pour résoudre de telles tâches, soit de généraliser/adapter des preuves connues, soit de généraliser l'énoncé à démontrer en conjecturant que le nouvel énoncé est vrai et porteur de simplifications. La *pensée structuraliste* se caractérise par des raisonnements *en termes de classes d'objets, de relations entre ces classes et de stabilité de propriétés par des opérations sur les structures*. Sur les exemples précédents, dès que le niveau 2 est atteint, nous pouvons parler de praxéologie structuraliste. De façon générale, une telle praxéologie va viser la réalisation de la tâche en se plaçant à un niveau de généralité qui soit porteur de simplification, en appui sur les concepts et sur l'*outillage technologico structuraliste* (combinatoire des structures, théorèmes d'isomorphismes, théorèmes de structures, etc.). La méthodologie structuraliste vise ainsi à remplacer une praxéologie $(T, *, *, *)$ par une praxéologie structuraliste $(T^g, \tau, \theta, \Theta)$, où T^g est une généralisation de T qui permette l'usage de techniques structuralistes. Nous allons observer ce phénomène plus en détail à travers le travail réalisé par un collectif d'apprenants en situation adidactique.

c) Etude des praxéologies structuralistes développées par un collectif d'apprenants sur un forum

Nous allons étudier le développement de praxéologies structuralistes par un collectif hétérogène d'apprenants sur un forum de mathématiques. Le fil de discussion qui nous concerne, visible à l'adresse <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,318936,page=1>, est intitulé « les nombres décimaux ». Les échanges ont eu lieu probablement pendant un temps assez court, en 2007. L'intervention initiatrice du fil est le fait d'un forumeur, *Mic*, lequel met avant deux assertions et deux questions : A_1 ($\mathbf{D}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$), A_2 (Tout sous-anneau de $\mathbf{Q}$ est principal), Q_1 : Comment le démontrer ?), Q_2 (Comment définit-on le pgcd de deux décimaux ?).

D'emblée, nous remarquons que les assertions A_1 et A_2 sont les deux prémisses d'un syllogisme dont la conclusion est « $\mathbf{D}$ est principal », assertion notée A_0 et qui est probablement visée par *Mic*. L'assertion A_2 est une généralisation de A_0 (nous notons $A_2 = A_0^g$), dans l'esprit de la méthode structuraliste : la preuve recherchée se place au niveau de généralité supérieur (A_0^g), reflétant la pratique experte des mathématiciens qui d'une part postulent que cette généralisation est porteuse de simplification, d'autre part considèrent qu'elle est éclairante quant aux « raisons profondes » à l'origine du phénomène (la principalité de $\mathbf{D}$). La question Q_2 lui est également liée : tant l'existence du pgcd que les diverses définitions (ou propriétés) du pgcd que l'on peut énoncer dépendent du type d'anneau dans lequel on se place ; il est donc important de situer les décimaux au sein des grandes classes d'anneaux (intègre, factoriel, principal, euclidien).

L'investigation de ces questions va conduire un autre forumeur, *bs*, à porter la question à un niveau de généralité encore supérieur et formuler Q_1^g (tout sous-anneau d'un anneau principal est-il

principal ?). Le forumeur *barbu rasé* y répond ensuite à travers une généralisation Q_1^g de la question : il donne une classe de contre-exemples à l'assertion « toute propriété remarquable des anneaux (euclidien, principal, factoriel, noethérien, de Bezout) est stable par sous-anneau ». Un autre participant, *Toto le zéro*, énonce de son côté l'assertion A_3 ($\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal), destiné à fournir également un contre-exemple à la question Q_1^g qui porte sur une assertion universelle. Le forumeur Olivier G complète l'argument en affirmant A_4 (l'idéal $(2, X)$ de $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal). L'assertion A_3 fait l'objet d'une pluralité de preuves (données de façon incomplète sur le forum), lesquelles laissent apparaître une gradation au niveau de leur *dimension structuraliste*.

- Une preuve élémentaire, via l'assertion A_4 , consiste à raisonner par l'absurde et écrire $(2, X) = (P)$. Ceci signifie que l'idéal (P) contient 2 et X , donc que P divise 2 et X . En raisonnant sur le degré, on montre que P est une constante puis que P est une unité de l'anneau $\mathbb{Z}$, donc ± 1 . Or une écriture $1 = 2U + XV$ est impossible dans $\mathbb{Z}[X]$, comme on le voit en l'évaluant en 0 pour des raisons de parité, d'où le résultat.
La preuve utilise la propriété $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$, valable dans $A[X]$ pour tout anneau intègre A . Cette propriété est une propriété structurale liant une structure multiplicative et une structure additive. Cependant, la dimension conceptuelle de la preuve reste peu visible et ne met pas en jeu les techniques structuralistes au-delà des *raisonnements logiques et ensemblistes à partir des définitions*.
- Une lecture plus *conceptuelle* de la preuve, qui sert aussi d'*heuristique*, est de questionner les *propriétés des éléments* 2 et X : on montre, toujours avec le degré, que ce sont des éléments irréductibles de l'anneau. Comme les unités de $\mathbb{Z}[X]$ coïncident avec ceux de $\mathbb{Z}$ (propriété valable pour tout anneau $A[X]$, A intègre), donc avec ± 1 , on voit que ces éléments ne sont *pas associés*, donc ils sont *premiers entre eux*. C'est pour cette raison que l'idéal $(2, X)$ est considéré comme un bon candidat pour fournir un idéal non principal. Enfin, si $\mathbb{Z}[X]$ était principal, l'idéal $(2, X)$ serait engendré par un pgcd. On conclut comme précédemment.
- Une dernière preuve consiste à remarquer que l'idéal (X) est inclus strictement dans l'idéal $(2, X)$. Ce fait est alors relié au *théorème structuraliste* bien connu en théorie des anneaux principaux : dans un anneau principal, tout idéal premier est maximal. Il suffit donc de montrer rigoureusement que (X) est un idéal premier non maximal. Une *technique structuraliste* consiste à raisonner sur le quotient $\mathbb{Z}[X]/(X)$ et montrer que ce dernier est un anneau intègre qui n'est pas un corps. La *technologie* repose sur les liens entre les propriétés d'un idéal et celles du quotient de l'anneau par cet idéal, liens qui sont établis sous forme de théorèmes dans la théorie des anneaux. Enfin, le quotient précédent s'interprète comme l'ajout de la relation $X=0$ à l'anneau $\mathbb{Z}[X]$: cet anneau n'est autre que $\mathbb{Z}$, à isomorphisme près, ce que l'on démontre en utilisant le « premier théorème d'isomorphisme », selon sa dénomination officielle, qui fait partie de l'*outillage structuraliste* standard. Les propriétés visées étant *stables par isomorphisme*, le résultat est démontré.

L'étude des énoncés et des preuves de ce fil de discussion montre ainsi le fonctionnement de deux dialectiques fondamentales en algèbre abstraite :

- *Dialectique particulier-général*. La reformulation du problème avec un niveau de généralité supérieur (passage de A à A^g) apparaît comme une démarche employée à plusieurs reprises par certains membres du collectif. Ceci reflète les démarches expertes des mathématiciens en algèbre abstraite et participe du développement de praxéologies structuralistes.
- *Dialectique objets-structures*. L'examen de la structure des objets, des généralisations éventuelles des énoncés et des preuves, de l'insertion de ces dernières dans la théorie constituée en tissu axiomatique fait des structures axiomatiques un point de vue conceptuel généralisateur-simplificateur pour démontrer des propriétés sur les objets. Réciproquement, un contrôle sémantique sur les énoncés axiomatiques s'exerce en les mettant à l'épreuve des

exemples connus, donc des objets. En ce sens, la dialectique objets-structures s'apparente à une dialectique syntaxe-sémantique.

d) Conclusion

La pratique de l'algèbre abstraite, qui engage des objets et des structures dans un rapport dialectique, se caractérise par un ensemble de techniques spécifiques que nous avons appelées structuralistes. En termes praxéologues, une tâche se décompose ainsi en sous-tâches abstraites telles que : démontrer qu'un idéal premier est maximal (en utilisant les quotients), ou « simplifier » un quotient (en utilisant les théorèmes d'isomorphisme) dont la technologie mobilise les théorèmes généraux sur les structures concernées. Ce travail de description et d'analyse des praxéologies est à poursuivre et à raffiner encore. Des avancées sont escomptées tant dans la compréhension du phénomène de transition que dans le contrôle didactique que les modèles praxéologiques permettront d'exercer. Au stade actuel de nos recherches, l'analyse des échanges d'un collectif hétérogène sur le forum a montré le développement de praxéologies structuralistes, du fait de praticiens expérimentés. En milieu didactique, la division de la tâche en sous-tâches est souvent réalisée par l'enseignant. Nous faisons l'hypothèse qu'un manque de recul des étudiants vis-à-vis de la méthode structuraliste, qui est également une heuristique, est un réel obstacle lorsqu'il s'agit de comprendre les raisons d'être de cette division et reconstituer le fil d'une démonstration présentant une dimension structuraliste importante. Un travail sur les preuves et l'usage de l'épistémologie en tant que levier méta (Hausberger 2012) nous apparaît comme un angle d'attaque pertinent pour faire face à cet obstacle.

2. Les PER formels : questionner les objets à l'aune des structures

Références pour ce paragraphe : Hausberger (2016c) et Hausberger (2016, janvier).

a) Origine du questionnement et motivations

Si la nature épistémologique particulière de l'algèbre abstraite en tant que FUGS est un facteur prépondérant à prendre en compte lors de l'étude des phénomènes liés à l'enseignement et l'apprentissage des structures algébriques à l'université, l'impact de l'organisation didactique est également à étudier. Nous faisons l'hypothèse que l'approche majoritaire « *top-down* », c'est-à-dire un enseignement frontal des structures qui se présente comme un discours théorique (propre à la contemplation, selon l'étymologie de *theoria*), contribue à faire des apprenants des spectateurs plutôt que des acteurs. En d'autres termes, l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université se situe souvent dans ce que l'on appelle, en Théorie Anthropologique du Didactique, le « paradigme monumentaliste » (Chevallard 2011).

Face à un tel constat, nous nous proposons de discuter ce que pourrait être une étude de l'algèbre abstraite dans le cadre du paradigme du questionnement du monde (Chevallard 2011) qui fait l'objet des développements récents de la TAD. Pour cela, il convient de chercher dans la pensée structuraliste à l'œuvre dans les théories des structures algébriques les *raisons d'être* des concepts. La considération des praxéologies particulières en algèbre abstraite que nous avons appelées *praxéologies structuralistes* apporte des éléments de réponse. A partir de ce modèle épistémologique de référence, nous soutenons le point de vue qu'un questionnement du monde en algèbre abstraite doit s'apparenter à un parcours d'étude et de recherche (PER) qui s'insère dans une approche « *bottom-up* » (voir ci-dessous) de l'enseignement des structures algébriques et présente une bonne vitalité des dialectiques fondamentales particulier-général et objets-structures. L'examen du fil de discussion sur le forum de mathématiques (voir 1 c) ci-dessus) nous a permis d'observer le développement de praxéologies structuralistes par un collectif hétérogène d'apprenant en contexte

adidactique. Nous discutons l'utilisation de ce média en tant que milieu afin d'engager des petits groupes d'étudiants dans un PER en classe dédié à l'apprentissage de praxéologies structuralistes dans l'esprit d'une « pédagogie de l'enquête ».

b) Approches top-down et bottom-up

L'observation des manuels et des polycopiés de cours (Guin 2013 et Perrin 1996, par exemple) montre que l'approche majoritaire de l'enseignement des structures algébriques est de type « *top-down* » : elle prend la forme d'un discours théorique mettant d'abord en place le bloc du logos (ou bloc technologico-théorique) L_i de l'organisation mathématique (ou praxéologie), puis articulant la théorie à la pratique (donc au bloc praxique, ou practico-technique) P_i à travers les exercices.

Notre première étape, dans la quête d'un nouveau paradigme pour l'algèbre abstraite, vise à « inverser » le mode d'exposition, en accord avec la genèse historique des concepts : nous opposons à l'approche « *top-bottom* » une approche « *bottom-up* », où l'on se donne le temps des généralisations successives, de la motivation de la construction des concepts. L'organisation des *moments* de l'étude (Chevallard 2002) est ainsi très contrastée entre les deux approches, ce qui rejaillit au niveau des organisations mathématiques. Bien que les praxéologies visées soient celles du programme, une approche *bottom-up* conduit à mobiliser des techniques de divers niveaux structuralistes. En effet, d'un point de vue praxéologique, l'enseignant pose d'abord un bloc praxique (T, τ) au sein d'une théorie en constitution, c'est-à-dire un bloc du logos partiel (θ_p, Θ_p) . La dialectique entre les deux blocs en relation avec l'application de la méthodologie structuraliste enrichit le bloc du logos, conduisant à un accroissement progressif du topos de l'étudiant qui est amené à s'approprier ou mettre en œuvre cette dialectique.

Cette approche vise en quelque sorte à faciliter une transition qui s'apparente à celle « de type 2 » identifiée par Winsløw (2006) : Winsløw, étudiant les praxéologies en analyse au sein de l'institution Université constate que la transition du concret à l'abstrait que requiert la transition secondaire-supérieur se traduit, au niveau praxéologique, par le développement de nouvelles praxéologies (P', L') dont le bloc praxique est construit sur le bloc du logos d'une praxéologie (P, L) que l'étudiant maîtrise déjà. En algèbre abstraite, il s'agit davantage d'une réécriture de l'algèbre classique sur la base de nouveaux concepts. L'approche *bottom-up* vise à accompagner ce mouvement de généralisation et de réécriture, lequel conduit également à de nouveaux objets, de nouvelles questions, en d'autres termes de nouveaux blocs praxiques.

c) Questionnement du monde et dialectique objets-structures

La seconde étape de la stratégie que nous proposons pour quitter le paradigme monumentaliste dominant consiste à envisager ce que pourrait être une étude de l'algèbre abstraite dans le cadre du paradigme du questionnement du monde.

Notre point de vue est le suivant : la formalisation est à la fois une mathématisation du monde (réel extra-mathématique) et, à un niveau supérieur d'abstraction, une réécriture conceptuelle des mathématiques antérieures (pré-structuralistes) en termes de structures, les objets mathématiques usuels faisant office de réel intra-mathématique. Dans cette perspective, questionner le monde en instaurant une dialectique fertile entre médias et milieux (Chevallard 2008), c'est *questionner les objets mathématiques eux-mêmes de telle sorte que l'on puisse observer, faire fonctionner et développer une dialectique entre objets et structures, les concepts structuraux étant construits ou mobilisés à travers ce jeu du questionnement*.

Comme nous l'avons vu lors de notre étude épistémologique, ce questionnement fondé sur la dialectique objets-structures est constitutif du sens des concepts structuralistes (raisons d'être en tant que ressorts) en relation avec la méthodologie structuraliste (raisons d'être en tant que

production de concepts unificateurs-généralisateurs-simplificateurs). La dialectique objet-structure va de pair avec la dialectique particulier-général.

Ainsi que l'illustre le Manifeste de Bourbaki (1998), ce que nous apparentons à une démarche de questionnement du monde en algèbre abstraite reflète la pratique experte des mathématiciens (dans sa logique de découverte et non son contexte d'exposition). Que transposer de ce questionnement dans un contexte d'apprentissage ? Comment le susciter, dans le cadre d'une approche *bottom-up* des structures algébriques et prendre en charge toutes les questions de nature topogénétique, mésogénétique et chronogénétique inhérentes à cette démarche ?

d) Les PER formels

Dans le formalisme de la TAD, il s'agit de discuter sous des contraintes K les conditions C de rencontre $\mathfrak{R}$ des étudiants X avec les praxéologies structuralistes $\wp$, ce que l'on note $\mathfrak{R}(K, C, \wp, X)$. Notre étude des praxéologies structuralistes, en appui sur l'épistémologie historique, a montré que ces dernières proviennent d'un mouvement de réécriture de l'algèbre classique qui pose la généralisation et l'unification comme des points de vue fertiles et simplificateurs. De ce fait, nous soutenons qu'une rencontre de ces praxéologies, lorsqu'elle est censée éclairer les raisons d'être des concepts, ne peut s'effectuer de façon immédiate, mais au contraire de façon graduelle et échelonnée. Ceci motive la mise en œuvre de parcours d'étude et de recherche en algèbre abstraite, les PER, par rapport à la notion d'AER, ayant également été introduits de façon à produire une rencontre non immédiate, graduelle et échelonnée avec tout un ensemble de praxéologies.

Afin de quitter le paradigme monumentaliste dominant en algèbre abstraite, nous plaçons parmi les contraintes K une insertion du PER dans le cadre d'un enseignement *bottom-up* des structures algébriques. Cette approche suscite d'emblée des questions de nature topogénétique et mésogénétique : afin d'assurer le fonctionnement des dialectiques particulier-général et objets-structures dans le cadre d'une construction progressive des concepts (l'élaboration théorique du cours), la question du rapport entre topos offert et topos possiblement investi devient cruciale ainsi que celle de la constitution d'un milieu suffisamment riche pour que la question mise à l'étude conduise au développement des praxéologies structuralistes (c'est-à-dire ne se limite pas à l'usage de méthodes élémentaires).

Le questionnement du monde en algèbre abstraite que nous voulons faire vivre est celui, exposé précédemment, du questionnement des objets mathématiques à l'aune des structures en cours d'élaboration. La question Q mise à l'étude concernera donc un domaine d'objets, l'enjeu didactique étant de créer les conditions C afin que s'instaure un rapport dialectique fertile entre objets et structures conduisant à la rencontre de praxéologies structuralistes *utiles* pour produire une réponse $R^\forall$. Se greffe également un nouvel enjeu : outre celui de la question Q , celui de l'abstraction et de la généralité en tant que vecteurs de compréhension et de simplification. Cet enjeu se place au niveau de la Discipline, au sein de l'échelle de co-détermination didactique de la TAD, mais il serait également à examiner au sein des niveaux supérieurs.

e) La stratégie du média-milieu

Nous appelons *média-milieu* le fil de discussion sur les nombres décimaux (présenté au paragraphe C.1 c), lequel constitue un média M portant la trace de son fonctionnement en tant que milieu, lors de l'élaboration du média. Nous avons analysé ce processus d'élaboration en termes de PER et de dialectiques, et mis en évidence le développement de praxéologies structuralistes par le collectif d'apprenants (Hausberger, 2016c).

Dans une démarche d'élaboration de situations didactiques (travail d'ingénierie) s'inscrivant dans ce nouveau paradigme de questionnement du monde en algèbre abstraite, à construire, nous proposons d'utiliser le média-milieu en tant que milieu lors d'une activité en classe s'apparentant à un second

PER. Cette activité s'inscrit dans le cadre d'un enseignement de type bottom-up de l'arithmétique des anneaux abstraits (voir loc. cit. section 5 pour davantage d'éléments de contextualisation). Ce n'est plus $Q=Q_1 \cup Q_2$ qui est soumis au débat mais le média M lui-même, polarisé par une question de l'enseignant Q_M relative à M et que l'on peut résumer en ces termes : quelles connaissances sur les nombres décimaux et sur les anneaux généraux peut-on extraire de ce média-milieu ? La question Q_M nécessite ainsi l'étude de Q tout en amenant l'apprenant à identifier à la fois des propriétés d'objets et des résultats de structure, donc à faire fonctionner la dialectique objets-structures.

Notre stratégie s'appuie sur les caractéristiques suivantes du média-milieu :

- Le média-milieu est susceptible de servir de milieu car les réponses ne sont pas institutionnalisées et sont en partie incomplètes ; ce n'est pas une fiction didactique mais un pan de réalité. Le média-milieu favorise la dévolution de la question Q car elle a déjà été réalisée au sein du forum ; les forumers ont le statut de pairs.
- Sans le média-milieu, le milieu est trop pauvre pour produire une résolution de Q à l'aide des praxéologies visées ; l'enrichissement du milieu par le média-milieu permet la discussion de conceptions erronées d'une part et de praxéologies avancées d'autre part.

Afin d'outiller les étudiants dans l'analyse, par petits groupes de 3-4 étudiants, du média-milieu, le professeur organise le travail via l'introduction d'un contrat spécifique d'annotation par des sigles portant sur la compréhension (?), la vérité des assertions (V et F), la validité des preuves (repérer une erreur E et la corriger si c'est possible, compléter par un argument manquant X, valider la preuve CQFD), l'appropriation et le questionnement (Q et R pour respectivement une question ou une remarque suscitées par un passage donné). La réponse à la question Q_M constitue une phase de synthèse relativement à cette phase d'analyse. L'enseignant conserve une posture de directeur d'étude tout au long du PER.

Alors que l'enseignement de l'algèbre abstraite s'apparente souvent à une visite d'œuvres dont l'appropriation par les étudiants est difficile, un tel usage des forums serait-il une piste viable pour que « la soumission à l'autorité cède la place à une culture partagée du questionnement » (Chevallard 2008) ? La notion importante que nous nous proposons d'examiner est celle de topos (Chevallard 2002) : l'algèbre abstraite s'apparente souvent à une visite d'œuvres parce que l'étudiant se retrouve incapable d'accomplir les gestes d'étude qui sont attendus de lui, si bien que le topos investi par l'étudiant par rapport au topos offert à l'étude est très faible. La praxéologie d'annotation du média-milieu est-elle susceptible de produire une « augmentation du topos » des étudiants, du moins du topos collectif ?

Une des difficultés de l'enseignement de l'algèbre abstraite consiste justement en la dévolution des praxéologies structuralistes, qui mobilise comme on a pu le constater des gestes spécifiques. Ceci conduit de nombreux enseignants à évaluer le savoir sur la base de types de tâches qui s'apparentent à des applications directes du cours ou à des questions traitées en travaux dirigés. Nous faisons l'hypothèse que la répartition topogénétique entre les groupes d'étudiants et l'enseignant effectué dans le PER d'annotation du média-milieu réalise un certain équilibre : il n'est pas attendu des étudiants de reconstruire une preuve complète qui résulterait en un topos offert trop important comparé aux capacités d'investissement par les étudiants, de sorte que l'enseignant se trouverait placé dans la fonction de correcteur d'exercices ; à l'inverse, le milieu est suffisamment ouvert pour placer les étudiants dans une posture active et non en simples lecteurs de preuves. Nous avons cependant constaté, au niveau des gestes accomplis par les participants du forum, que les niveaux de généralités les plus élevés ne sont pas investis par l'auteur de la question génératrice. En sera-t-il de même lors de ce second PER ? Nous allons apporter quelques éléments d'analyse *a priori* qui mettent en évidence l'importance d'un travail didactique approfondi au niveau des contenus mathématiques des situations proposées à l'étude.

Nous avons souligné qu'il s'exerce toujours en algèbre abstraite une tension entre l'emploi de méthodes élémentaires (dans notre cas, liées à l'arithmétique des entiers) et l'attaque des conjectures

par des points de vue conceptuels et généralisateurs, ce qui constitue un changement de paradigme. Un argument d'économie pousse dans un sens tandis qu'un argument de simplification pousse dans l'autre, autant que le caractère simplificateur puisse être rendu visible. Est-ce le cas dans le contexte de l'activité autour des décimaux ? L'apport de $A_2=A_0^g$ par rapport à A_0 ne se situe pas au niveau de la simplification de la preuve mais de la compréhension mathématique du phénomène, c'est-à-dire des « ressorts » de la preuve : l'existence d'une preuve générale utilisant uniquement la propriété que $\mathbf{D}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ est considérée par le mathématicien structuraliste comme une mise en évidence des « raisons profondes » à l'origine du phénomène. Dans la tension entre logique de l'économie et apports intellectuels, l'étudiant est-il sensible à cet argument ? Fait-il sens pour lui ? Par ailleurs, les deux questions Q_1^g et Q_1^{gg} obtiennent des réponses négatives, si bien que l'on peut se poser la question de la valeur que donne un étudiant à une méthode de pensée qui conduit à énoncer des généralisations abusives. Ceci suscite de façon évidente un problème de contrat. Notons qu'il existe cependant des généralisations qui sont des assertions vraies et mathématiquement éclairantes, par exemple « si K désigne le corps des fractions d'un anneau principal A et si B est un anneau tel que $A \subset B \subset K$, alors B est également principal ».

f) Conclusion

Nous avons proposé des modalités possibles pour une « pédagogie de l'enquête » en algèbre abstraite et discuté les difficultés que l'on peut anticiper. Ce travail fournit ainsi des pistes pour se diriger vers un paradigme du questionnement du monde en algèbre abstraite dans un contexte actuel où le paradigme monumentaliste dominant présente un constat d'importantes difficultés rencontrées par les étudiants au niveau des apprentissages.

Le second PER (stratégie du média-milieu) a été expérimenté en classe, dans le cadre d'un enseignement de la théorie des anneaux en troisième année de licence de mathématiques. Nos analyses (Hausberger, 2016c) ont montré que, pour deux groupes, les dialectiques particulier-général et objets-structures sont absentes, si bien que ces groupes n'ont pu investir de praxéologie structuralistes. L'enrichissement par le média-milieu et la praxéologie d'annotation n'a donc pas réussi à augmenter le topos de ces groupes. Par contre, les autres groupes ont démontré des habiletés qui confirment la compréhension de certaines preuves, donc l'investissement des praxéologies structuralistes sous-jacentes. En particulier, nos analyses montrent le développement de praxéologies plus ou moins complètes par deux groupes, résultant d'un investissement par ces étudiants d'une partie conséquente du topos offert. Cependant, nous pouvons également observer les limites de la dévolution des praxéologies structuralistes : les gestes accomplis par les participants du forum relativement aux assertions A_1^g et A_1^{gg} sont peu investis par les groupes d'étudiants. Des facteurs explicatifs sont à trouver à la fois dans l'état d'avancement du cours (difficultés liées à l'approche bottom-up) et dans les éléments d'analyse a priori exposés précédemment.

L'investigation des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite est à poursuivre, en raffinant encore la décomposition des gestes et démarches structuralistes, en appui d'une part sur l'épistémologie contemporaine et d'autre part sur l'étude de manuels, et particulièrement de manuels anciens au sein desquels la méthodologie structuraliste n'a pas encore été naturalisée. Le rôle des dialectiques particulier-général et objets-structures est à approfondir, notamment leurs modalités de fonctionnement dans les cours et les manuels. Il s'agit ensuite de développer des ingénieries se donnant pour objectif de faire fonctionner ces dialectiques. Le travail d'ingénierie sur les PER engageant des savoirs formels abstraits à l'Université apparaît comme une piste prometteuse qui nécessite également le développement d'outils théoriques afin d'en évaluer l'impact sur les apprentissages.

D. Phénoménologie didactique du structuralisme algébrique, ingénierie didactique et sémiotique : la « théorie des banquets »

Résumé : En appui sur une étude épistémologique du structuralisme mathématique tel qu'en rendent compte les mathématiciens (Bourbaki) et les philosophes (Cavaillès, Lautman), sur l'idée de « phénoménologie didactique » des structures mathématiques introduite par Freudenthal, ainsi que sur des outils sémiotiques, nous avons construit (Hausberger, Education et Didactique, in press) un cadre de référence épistémologique, didactique et cognitif utile afin d'élaborer des activités mathématiques en algèbre abstraite ou d'analyser les phénomènes cognitifs en jeu dans le processus de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite. Ainsi qu'annoncé dans *loc. cit.*, nous présentons au sein de la présente note de synthèse un exemple de telle activité : la « théorie des banquets » (un banquet est une structure algébrique inventée, plus simple que la théorie des groupes, mais très riche d'un point de vue sémantique), qui a été élaborée suivant la méthodologie de l'ingénierie didactique. Elle vise à rendre fonctionnelle la dialectique fondamentale objets-structures, laquelle engage également les dialectiques concret-abstrait et syntaxe-sémantique, et à clarifier le méta-concept de structure mathématique en utilisant le levier méta. Des données empiriques collectées lors d'une expérimentation en classe ainsi que des sessions en « laboratoire » impliquant deux binômes d'étudiants sont soigneusement analysées en utilisant le cadre de référence. Les préconceptions des étudiants relativement au méta-concept de structure mathématiques ont été au préalable recueillies grâce à un questionnaire. Une typologie de conceptions est développée et mise en regard des productions des étudiants. Ces investigations conduisent à une meilleure compréhension des difficultés des étudiants en algèbre abstraite qui sont inhérentes à la pensée structuraliste.

I. Introduction

Nos analyses épistémologiques (Hausberger 2013 ; Education et Didactique, in press ; IJRUME, in press, et ici même, la partie A de cette note de synthèse) nous ont permis de relier le problème de transition posé par l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite entre la licence et le master de mathématiques à la transition épistémologique suivante : “the systematization of the axiomatic method, after Hilbert, and the transition, after Noether, from thinking about operations on elements to thinking in terms of selected subsets and homomorphisms” (Hausberger, 2013, p. 2354). En effet, ainsi que le souligne Corry (2016) :

This image [algebraic structuralism] of the discipline [algebra] turned the conceptual hierarchy of classical algebra upside-down. Groups, fields, rings and other related concepts, appeared now at the main focus of interest, based on the implicit realization that all these concepts are, in fact, instances of a more general, underlying idea: the idea of an algebraic structure.

En d'autres termes, le saut épistémologique conduit à une *disparition des objets concrets au profit de structures abstraites surplombantes*. Ceci induit le problème didactique suivant : l'enseignement de l'algèbre abstraite tend à manifester un *déficit sémantique* relativement aux structures mathématiques, qui sont définies par des systèmes axiomatiques abstraits dont les aspects syntaxiques prédominent. Comment un étudiant construit-il, dans ces conditions, un concept abstrait de groupe (ou autre) ? En effet, sur quelles types de représentations peut-il s'appuyer lorsque le principe est justement de faire abstraction de la nature particulière des éléments ? De plus, l'étude de

la transposition didactique de la notion de structure a montré qu'il s'agit d'un méta-concept qui n'est défini mathématiquement dans aucun cours ni manuel de niveau Licence ou début de Master (et ne peut l'être, voir B.1 b) :

As a consequence, students are supposed to learn by themselves and by the examples what is meant by a structure whereas sentences like “a homomorphism is a structure-preserving function” is supposed to help them make sense of a homomorphism (Hausberger 2013).

Ainsi qu'annoncé dans Hausberger (2013) et dans Hausberger (Education et Didactique, in press), nous avons élaboré une activité destinée à amener les étudiants à adopter un recul réflexif relativement à la méthode axiomatique et à la pensée structuraliste, dans le cadre d'une structure plus simple que la théorie des groupes : la structure de banquet, une invention didactique. Cette activité vise à rendre fonctionnelles les dialectiques fondamentales objets-structures, concret-abstrait et syntaxe-sémantique (voir ci-dessous) et à clarifier le méta-concept de structure mathématique en utilisant le levier méta, c'est-à-dire “the use, in teaching, of information or knowledge *about* mathematics. [...]. This information can lead students to reflect, consciously or otherwise, both on their own learning activity in mathematics and the very nature of mathematics”(Dorier et al. 2000).

La théorie des banquets possède quelques points communs avec les exercices de mathématisation (Steiner 1968) élaborés par Steiner dans le contexte de l'enseignement secondaire lors de la réforme des « Nouvelles Mathématiques » (*New Math*), l'équivalent des « maths modernes » en France, et son approche « spirale » des concepts algébriques (Steiner and Kaufman 1969). Elle s'en distingue cependant par le niveau de réflexivité visé et la méthodologie de son élaboration, qui est celle de l'ingénierie didactique (Artigue 1990). Notre approche est également inspirée par la « phénoménologie didactique » des structures mathématiques de Freudenthal (1983).

Une pre-expérimentation de la théorie des banquets en tant qu'activité en classe a permis de confirmer son potentiel en terme d'enrichissement sémantique tout en mettant en évidence de grandes difficultés des étudiants à articuler syntaxe et sémantique ainsi qu'une incompréhension pour certains des principes d'abstraction en jeu dans l'algèbre abstraite. Cette pré-expérimentation a également mis en évidence le rôle important joué par les représentations sémiotiques. Dans un va-et-vient entre recherche et action, nous avons affiné notre cadre théorique épistémologique et didactique en développant notamment des outils sémiotiques. Des sessions en laboratoire impliquant deux binômes d'étudiants avancés ont été menés en parallèle d'une nouvelle expérimentation de l'activité en classe, laquelle a été précédée d'un questionnaire destiné à recueillir les conceptions des étudiants relativement au méta-concept de structure. L'analyse de ces données permet de donner des éléments de réponse aux questions suivantes : quelles conceptions sur le structuralisme mathématique les étudiants développent-ils après un apprentissage de l'algèbre linéaire et un premier apprentissage de la théorie des groupes ? Quels types de processus cognitifs mettent-ils en œuvre afin de faire sens d'une structure mathématique abstraite définie axiomatiquement ? S'appuient-ils sur des représentations mentales ? Comment s'engagent-ils dans une tâche de classification des différents modèles de cette structure (et comment interprètent-ils la tâche, quels types de représentations construisent-ils, formalisent-ils une notion d'isomorphisme de banquets) ?

Le cadre épistémologique, didactique et cognitif que nous avons développé sera publié prochainement (Hausberger, Education et Didactique, in press). Nous renvoyons le lecteur au manuscrit qui figure au sein des articles sélectionnés joints à cette note, ainsi qu'à la partie B.2 pour un résumé synthétique. Dans la suite de notre note de synthèse, nous exposons la théorie des banquets et détaillons ses aspects mathématiques et didactiques, en s'appuyant sur notre cadre (la dialectique objets-structures) et sur la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998). Nous présentons ensuite les données empiriques et nous les analysons à la lumière de la dialectique objets-structures, laquelle mobilise également les dialectiques concret-abstrait et syntaxe-sémantique. Nous étudions les représentations sémiotiques produites par les apprenants en relation

avec le processus de conceptualisation de la structure abstraite de banquet. Ceci enrichit considérablement les résultats partiels présentés au congrès CERME9 (Hausberger 2016a). Nous terminons par des conclusions et des perspectives ouvertes par ce travail.

II. La théorie des banquets

La théorie des banquets est une invention didactique destinée à l'enseignement de la pensée structuraliste. Ainsi que le stipule le texte introductif de l'activité, laquelle figure en annexe 1, « le but est de comprendre, sur un exemple simple, le fonctionnement d'une théorie structurale mathématique : d'où provient une telle théorie ? Comment est-elle formulée ? Quels types de questions se pose-t-on dans une théorie structurale et quels types de méthodes utilise-t-on pour y répondre ». Pour cela, il s'agit de placer l'apprenant en situation de construction d'une telle théorie, de l'accompagner dans cette construction grâce à un scénario articulant dimensions didactiques et adidactiques, et d'amener un niveau convenable de réflexivité par rapport à la « logique de l'action ». Nous allons préciser ces contraintes et analyser nos choix à l'aide des outils de la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau 1998). Nous suivons en cela la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue 1990 ; voir également Artigue 2009).

1. L'activité des banquets : une ingénierie didactique

a) L'ingénierie didactique : un pont entre la recherche et l'action

L'ingénierie didactique constitue un cadre à la fois pour la recherche en didactique et le développement des pratiques enseignantes, articulant ainsi la recherche et l'action. Elle propose une méthodologie dédiée à l'élaboration d'activités dans lesquelles l'intervention didactique est placée sous le contrôle de la recherche, au sens où cette intervention est pensée au sein d'un cadre théorique (la TSD) et se nourrit des résultats de la recherche. Réciproquement, les données empiriques relevées sont analysées afin de faire avancer la recherche.

La notion fondamentale est celle de *situation*, l'apprentissage étant vu comme un « processus d'adaptation », lequel dépend donc des caractéristiques de la situation. L'analyse épistémologique du savoir visé est fondamentale afin de construire la situation : la théorie s'efforce ainsi d'associer aux notions mathématiques des *situations fondamentales* qui en reflèterait leur « essence épistémologique ». Le processus d'adaptation est vu comme un jeu entre l'apprenant et un *milieu* avec lequel ce dernier interagit ; ce jeu est géré par le *contrat didactique*. L'enseignant est un acteur de ce jeu : son rôle est principalement d'organiser la relation entre les dimensions adidactique et didactique de la situation, à travers *la dévolution* et *l'institutionnalisation*. En effet, ainsi que le souligne Brousseau :

L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation adidactique. (Brousseau 1998, p.59).

La méthodologie de l'ingénierie didactique organise le travail en différentes phases : 1. Analyse préliminaire du savoir à enseigner (analyse de nature épistémologique, cognitive et didactique) 2. Elaboration de l'activité et analyse *a priori* 3. Implémentation 4. Analyse *a posteriori* et validation. Le processus de validation de l'ingénierie est de nature interne : il se fonde sur la comparaison entre l'analyse *a priori* présentant les adaptations escomptées et les erreurs attendues, qui sont souvent constitutives des connaissances, avec l'analyse *a posteriori* des productions des apprenants.

b) Discussion de la situation et des variables macrodidactiques qui lui sont liées

L'article Hausberger (Education et Didactique, in press) achève la réalisation de la phase 1 de l'ingénierie. Nous avons établi que la pensée structuraliste se caractérise par des rapports particuliers, de nature dialectiques, entre objets et structures. Afin de clarifier ces rapports, il s'agit de faire fonctionner les dialectiques fondamentales concret-abstrait (dans ses deux mouvements d'idéalisation et de thématization) et syntaxe-sémantique, qui sont liées. Dans notre approche phénoménologique, nous avons distingué le niveau de la structure (de groupe, de banquet) qui apparaît en tant que principe organisateur de phénomènes impliquant des objets de niveau inférieur, et le niveau du méta-concept de structure lui-même, qui est appelé à jouer un rôle architectural dans l'élaboration des théories mathématiques, en relation avec la méthodologie structuraliste. Par rapport au premier-niveau, nous avons mis en avant (Hausberger, Education et Didactique, in press, conclusion de l'article) une activité de définition axiomatique qui vise à constituer une mini-théorie, au sens de Tarski (1972), organisant un domaine de phénomènes (version syntaxique du principe d'abstraction-idéalisation, en tant que mouvement des objets vers la structure) ainsi qu'une tâche de classification des modèles (version sémantique de l'abstraction-idéalisation) relatifs à une structure donnée, définie axiomatiquement. Par rapport au second niveau, la méthodologie structuraliste se traduit par le développement d'une combinatoire des structures (si la structure considérée est celle de banquet, cela revient à définir des sous-banquets, le banquet engendré par un élément, la notion de banquet irréductible, une opération de réunion de banquets, etc.) ainsi que l'énoncé et la preuve de théorèmes de structure (dans notre contexte, un théorème de décomposition d'un banquet en une union de sous-banquets irréductibles).

Ces réflexions permettent d'organiser notre activité autour de trois pôles : une sous-activité de définition, une sous-activité de classification et une sous-activité d'élaboration théorique. De prime abord, il semblerait opportun de les placer dans cet ordre. Nous allons discuter cet ordre chronologique en tant que variable macro-didactique.

Nous nous heurtons d'emblée aux difficultés liées à la dévolution d'une activité de définition axiomatique, laquelle, comme nous l'avons vu avec Carnap, nécessite d'isoler les propriétés formelles des relations. Une piste est d'introduire une partie de discours méta ; la partie I de l'activité des banquets débute ainsi en ces termes :

Une théorie structurale est une théorie abstraite : elle parle donc d'objets dont la nature n'est pas spécifiée. On les note alors par des symboles : x, y, z ou α, β, γ , etc. Dans notre théorie des banquets, il n'y a qu'un seul type d'objets (dans d'autres théories, il peut y avoir plusieurs catégories d'objets : par exemple, les points, les droites et les plans dans la géométrie d'Euclide).

La nature des objets n'étant pas spécifiée, ce sont les relations entre les objets qui sont le propos de la théorie (par exemple, on dit qu'un point appartient à une droite en géométrie d'Euclide : c'est la relation d'appartenance, entre autres, qu'il s'agit alors de caractériser). Vous avez déjà formalisé différentes catégories de relations qui interviennent souvent dans les théories mathématiques : les relations d'ordre et les relations d'équivalence, deux exemples de relations binaires, définies par les axiomes bien connus qui expriment les propriétés formelles de ces relations. [...] Les lois de composition interne sur un ensemble (du type $(x,y) \rightarrow x * y$, comme l'addition et la multiplication des nombres) permettent également de définir des relations entre éléments de cet ensemble : par exemple $x * y * x * y = 1$.

Dans notre théorie des banquets, on considère une unique relation entre les objets, qui est une relation binaire notée R . Il s'agit alors d'explicitier les axiomes que vérifie la relation R . Ils constituent la présentation axiomatique de la théorie. Voici les axiomes de la théorie des banquets :

- (i) aucun objet ne vérifie xRx ;
- (ii) si xRy et xRz alors $y = z$;
- (iii) si yRx et zRx alors $y = z$;
- (iv) pour tout x , il existe au moins un y tel que xRy .

Le discours méta s'appuie sur l'exemple de la géométrie d'Euclide, qui est emblématique d'une théorie axiomatique portant sur des objets ; cependant, se placer au niveau d'une description de structure et non une description de relations revient à convoquer l'axiomatique de Hilbert qui n'a jamais été rencontrée par les étudiants. Le discours s'appuie alors sur la formalisation des types de relations pour introduire la logique des relations. Noter que l'exemple de la géométrie a permis d'introduire un point de vue relationnel par rapport à l'exemple de la structure de groupe qui met en avant la notion de loi. Ceci permet la dévolution de la présentation axiomatique de la structure de banquet, en tant que structure abstraite.

Le choix opéré est donc de ne pas débiter par une activité de définition axiomatique, malgré l'apport du discours méta. D'une part, il est probable que la dévolution d'une activité de définition, par rapport à une appropriation de la définition, nécessite des stratégies et artifices didactiques additionnels, compte-tenu de la nouveauté d'une telle tâche (l'étude d'une théorie structurale en algèbre abstraite débute par la *donnée* du système axiomatique) et du degré d'abstraction-formalisation en jeu. D'autre part, une telle tâche de modélisation par un système formel est fortement a-didactique et conduit à de nombreux systèmes possibles en vertu de ce que l'on appelle en épistémologie des sciences le pluralisme théorique. Notre but étant de développer une théorie structuraliste, il nous apparaît préférable de rigidifier le cadre de l'étude. C'est pourquoi l'axiomatique de banquet est donnée d'entrée de jeu et la sous-activité de définition proposée en deuxième partie de l'activité. Celle-ci s'appuiera de plus sur le formalisme des banquets, qui fournit le langage de haut-niveau requis pour la description de structure d'une tablée (la nouvelle structure visée, pour laquelle il suffit en fait de formuler un axiome supplémentaire par rapport à l'axiomatique des banquets). Le document distribué aux étudiants affiche ainsi le discours, de nature méta, suivant :

On veut placer n personnes quelconques (n est le cardinal de la tablée) autour d'une table ronde. Une telle configuration s'appelle une tablée. Il s'agit de construire une théorie abstraite des tablées.

En d'autres termes, la situation est maintenant inversée par rapport à la partie précédente : on part de situations concrètes et il s'agit d'élaborer une théorie abstraite. C'est en général de cette manière que sont construites les théories structurales mathématiques, mais cette partie de la démarche n'apparaît pas dans l'exposition des théories mathématiques qui sont en général présentées directement comme dans la première partie.

Nous nous confrontons maintenant à une seconde difficulté : l'apprentissage visé n'est pas la théorie des banquets (cette structure ne figure dans aucun manuel d'algèbre, ce n'est pas une notion du programme !) mais les modes de pensée à l'œuvre dans l'établissement de cette théorie, ce qui est un contexte nouveau par rapport à l'usage qui est fait habituellement de la TSD. Comment produire le niveau de réflexivité visé, puisque c'est la notion de structure elle-même en tant que méta-concept et la méthodologie structuraliste qui sont objet de l'enseignement ?

Le discours méta introduit dans le milieu dans les phases de dévolution et d'institutionnalisation contribue de façon significative à cet objectif. Cependant, quelle forme de réflexivité convient-il d'exiger des étudiants, à la suite de la réflexivité de l'enseignant, et comment la susciter ? Rappelons que notre public cible est constitué des étudiants de mathématiques, à la transition entre la licence et le master. La réflexivité dont nous parlons à propos de l'enseignant est une réflexivité sur les savoirs, sur la pratique mathématique de la sphère savante. Nous proposons de la doubler, en ce qui concerne l'apprenant, d'une réflexivité de sa part sur sa propre pratique mathématique, c'est-à-dire d'un niveau de méta-cognition, dans l'esprit de l'abstraction réfléchissante de Piaget (Beth and Piaget, 1961). Le choix du type de structure que nous proposons à l'étude constitue une nouvelle variable macro-didactique qu'il s'agit d'ajuster en tenant compte des connaissances algébriques des apprenants. Nous allons expliquer le choix de la théorie des banquets, ainsi que le choix d'une relation binaire, qui constitue également une variable didactique.

La pratique de l'algèbre abstraite des étudiants de troisième année de mathématiques qui se sont prêtés à nos expérimentations se limite à l'algèbre linéaire et à la théorie des groupes. Pour cela, nous avons choisi de développer une théorie des banquetts qui soit en proche parenté avec la théorie des groupes, de sorte, par exemple, que les démarches à l'œuvre dans la classification des banquetts de petits cardinaux puissent s'appuyer sur celles menées lors de la classification des groupes de petits ordres. Pour autant, nous avons veillé à dissimuler cette parenté : un banquet est défini au moyen d'une relation binaire alors que le groupe fait appel à une loi de composition interne ; les expérimentations menées jusqu'à présent ont montré que les étudiants ne font pas le lien avec les groupes de permutations avant de traiter la dernière partie de l'activité dont c'est le propos. La méthodologie structuraliste est liée, comme nous l'avons vu, à l'abstraction-thématisation. Pour un apprenant, il s'agit de repérer, dans la pratique des théories structurales, des invariants opératoires au sens de Vergnaud (1990), qui ouvrent la possibilité d'actions identiques dans des contextes analogues. Les étudiants ayant rencontré peu de contextes différents, il est important de permettre un rapprochement aisé avec les démarches de classification en théorie des groupes. Si cette généralisation des méthodes à un contexte proche n'est pas encore opératoire pour un certain nombre d'étudiants, ce qui nécessitera alors une intervention de l'enseignant, il est escompté à minima l'identification de ces invariants lors de l'institutionnalisation afin de favoriser une extension future.

Ce parallèle avec la théorie des groupes et les théories structurales déjà rencontrées est mené du début jusqu'au terme de l'activité. Ainsi le scénario prévoit-il un recueil de conceptions à propos du méta-concept de structure avant d'engager les étudiants dans l'activité à proprement parler (voir III 1. ci-dessous). Ceci favorise le positionnement réflexif et la mobilisation des connaissances algébriques. La phase finale d'institutionnalisation se conclut par le discours méta suivant au sein du document :

La volonté de décrire abstraitement des objets mathématiques afin de produire des théories générales conduit donc les mathématiciens à écrire des systèmes axiomatiques définissant les relations qu'ils décident de considérer entre ces objets. Les mathématiciens définissent ainsi différentes structures mathématiques abstraites. Les théories de ces structures établissent des conséquences logiques des systèmes axiomatiques en s'interdisant tout autre axiome.

On cherche notamment à classer les différents modèles de l'axiomatique considérée. Cette étude des modèles concrets se fait à « isomorphisme près », puisque la nature particulière des objets ne joue aucun rôle. Un des buts de la théorie est d'établir des « théorèmes de structure », c'est-à-dire de décomposer de façon canonique les modèles en un « assemblage » de sous-modèles les plus simples possibles (les briques élémentaires de la théorie).

Le mot structure s'emploie donc dans trois sens différents :

- on parle de la structure de groupe, d'anneau, de corps, etc. (ou de banquet) ;
- on parle de la structure abstraite d'un modèle donné (au sein d'une théorie structurale) : il s'agit alors généralement de caractériser la classe d'isomorphisme de ce groupe ;
- on parle de théorème de structure : on vient d'expliquer ce qu'il faut entendre par là.

Bien que ce ne soit pas indiqué sur le document, il est prévu, dans le scénario, que l'enseignant demande oralement aux étudiants d'énoncer les théorèmes de structure qu'ils ont rencontrés au sein des théories algébriques au programme. On peut penser au théorème de Jordan-Hölder de « dévissage » des groupes finis impliquant les groupes simples, ou bien au théorème de classification des groupes abéliens de type fini en termes de groupes cycliques, etc. Il est intéressant de noter que la notion de « théorème de structure » n'est ni définie ni expliquée avant ce discours final. Lors de la seconde partie de l'activité, lorsque le lien entre tablées et banquetts irréductibles est établi et qu'une opération de réunion des banquetts a été définie, il est demandé aux étudiants de faire sens par eux-même de cette locution : « II. 2 c) Définir une opération de *réunion* de banquetts. Énoncer et démontrer le *théorème de structure* des banquetts de cardinaux finis ». Il est attendu de

« l'image architecturale » portée par le terme « structure », de l'image mentale d'un banquet en tant qu'union disjointe de tablée et du contexte d'énonciation (juxtaposition des deux tâches au sein d'une même question) la formulation correcte de l'énoncé à démontrer : « tout banquet est réunion de banquets (et cette décomposition est unique à ... près) ». Il ne s'agit pas d'un effet topaze mais de la mise à disposition des éléments à même de produire chez l'apprenant une synthèse : la compréhension d'un phénomène de décomposition en sous-structures irréductibles en tant qu'ayant une portée structurale en relation avec un contexte donné possédant une forte dimension phénoménologique.

c) Organisation du milieu et scénarisation de l'activité

Comment organiser le milieu de façon à ce que les interactions entre l'apprenant et le milieu lors des situations d'action (construction et classification de modèles), de définition (axiomatique) et d'élaboration théorique (toutes ces situations combinent des dimensions d'action, de formulation et de preuve, mais selon le cas, l'une ou l'autre des dimensions est prépondérante) débouchent sur les apprentissages visés ?

Etant donnée la dimension méta-cognitive mise en avant précédemment, nous proposons de faire travailler les étudiants par petits groupes de 3-4 personnes. La communication entre pairs favorise en effet l'explicitation des stratégies d'action afin de les rendre intelligibles pour autrui, ce qui constitue un premier stade de recul méta-cognitif. Ceci génère des rétro-actions internes au niveau de chaque sous-système « groupe d'étudiants-milieu ». Nous avons vu par ailleurs que le document distribué aux élèves introduit du discours de nature méta sur les connaissances mathématiques dans le milieu. En termes de traces écrites, nous envisageons de demander à chaque groupe d'étudiants de rendre, à la fin de chaque séance (nous prévoyons 4 séances d'1h30 pour la totalité de l'activité), une réponse collective aux questions solutionnées. Chaque groupe désignera donc un rédacteur (qui peut être amené à varier d'une séance à l'autre). Ces traces permettront à l'enseignant, qui organise le temps de l'étude, d'orienter son intervention lors des phases d'institutionnalisation, ce qui constitue une seconde forme de rétro-action.

Il s'agit donc principalement d'un jeu impliquant différents sous-systèmes qui jouent contre une situation. Quel jeu imaginé entre les différents sous-systèmes ? D'une part, il est probable que les différents groupes communiquent en séances (pour se passer des « tuyaux » volontairement ou involontairement étant donnée la promiscuité) ; d'autre part, il est souhaitable que l'enseignant sollicite directement des rapporteurs au sein de quelques groupes lors des phases d'institutionnalisation, qui s'apparentent alors à une mutualisation. Etant donnée l'inter-dépendance entre questions (qui s'inscrivent dans une progression liée à la logique de l'élaboration théorique), il est important d'organiser de fréquents moments de mutualisation-institutionnalisation.

Malgré la présence du discours méta inscrit dans le document, il est probable, compte-tenu du niveau d'abstraction en jeu et de la complexité des notions, qu'il soit nécessaire d'enrichir encore le milieu, au-delà des communications officielles entre groupes. Seul l'enseignant peut jouer ce rôle. Aussi est-il important de prévoir une orchestration très fine entre dimensions a-didactiques et didactiques de l'activité. Un examen des variables micro-didactiques permettra de montrer l'importance à accorder aux cadres et registres de représentations sémiotiques introduites dans le milieu, lesquelles conditionnent les possibilités d'action lors de la réalisation des tâches. Il appartient donc à l'enseignant d'introduire au moment opportun ces éléments afin de produire l'enrichissement nécessaire du milieu.

Avant de discuter plus en détail ce rôle de l'enseignant et cette orchestration fine, nous allons présenter les aspects mathématiques de la théorie des banquets et donner des éléments d'analyse *a priori* en utilisant notre cadre épistémologique, didactique et cognitif de référence (Hausberger, Education et Didactique, in press et partie B.2 de cette note pour un résumé synthétique).

2. Analyse a priori

Nous avons déjà donné la définition d'un banquet au paragraphe précédent. L'énoncé, dans sa totalité, figure en annexe 1.

a) Etude des différents cadres et registres

En tant que théorie mathématique abstraite, la théorie des banquets est susceptible d'une multiplicité d'interprétations : la structure de banquets possède une grande diversité de modèles, construits dans des cadres mathématiques variés, d'où découle une grande diversité de représentations sémiotiques. Nous allons présenter ces diverses interprétations et discuter les jeux de cadres (Douady 1986) et de registres (Duval 1995).

- *Interprétation empirique* : le nom de banquet est susceptible d'évoquer de lui-même (ou bien à la lecture du document distribué en intégralité) des invités assis autour de tables. Ceci conduit à poser xRy si et seulement si x est assis à la gauche (ou droite) de y . A la différence des autres domaines d'interprétation, prouver que cet univers de discours permet d'interpréter la totalité de la théorie des banquets revient à démontrer le théorème de structure (décomposition d'un banquet en une union de tablées). On peut aussi s'imaginer une table rectangulaire et mettre en relation les personnes qui se font face, en tant que modèles particuliers.
- *Théorie des ensembles* : l'ensemble E est décrit en nommant ses éléments et la relation binaire est représentée par son graphe en tant que sous-ensemble de E^2 . Cette représentation n'est pas très performante car elle n'"encode" pas beaucoup de structure.
- *Algèbre matricielle* : une relation binaire peut être regardée comme une fonction de E^2 dans $\{0,1\}$ (vrai/faux), donc être représentée par un tableau à double entrée, c'est-à-dire une matrice. Ce tableau constitue, d'une certaine manière, l'analogue de la « table du groupe ». Dans cette interprétation, les axiomes disent que la diagonale ne contient que des 0, qu'il y a exactement un 1 dans chaque ligne et au moins un dans chaque colonne. On démontre facilement, en dimension finie, qu'il y a exactement un 1 par ligne et par colonne, autrement dit il s'agit d'une matrice de permutation.
- *Théorie des graphes* : xRy si et seulement si les sommets x et y sont reliés par une arête orientée de x vers y . Les axiomes disent que d'un sommet part une unique arête et aboutit au plus une. De ce fait, il est assez aisé de distinguer si deux représentations définissent le même graphe, contrairement à la situation générale en théorie des graphes.
- *Théorie des fonctions* : d'après les axiomes (ii) et (iv), $xRy \Leftrightarrow y = f(x)$ définit une fonction f et les autres axiomes signifient qu'elle est injective et sans point fixe.
- *Théorie des groupes (permutations)* : Lorsque l'ensemble E est fini, alors f est bijective, autrement dit c'est une permutation sans point fixe et il est commode d'utiliser les représentations sémiotiques standards pour ces dernières, ce qui inclut l'écriture en produit de cycles à supports disjoints.

Cette diversité des interprétations et des modèles reflète l'unité et la créativité des mathématiques, ainsi que la richesse de la théorie des banquets. Les modèles peuvent être représentés au sein d'un registre mixte mobilisant la langue naturelle ou d'un registre purement symbolique. On peut voir apparaître des dessins, des figures géométriques, des tableaux, des matrices, des graphes, etc., qui constituent des systèmes de représentations de natures différentes. Lorsqu'un registre graphique est utilisé, ce peut être une figuration personnelle de personnes autour de tables, représentation à peine idéalisée, ou une représentation appartenant au savoir validé par l'institution, emprunté à la théorie des graphes. Bien entendu, on ne s'attend pas à ce que les étudiants établissent des connexions avec toutes ces théories. Par exemple, il est peu probable qu'ils fassent le lien avec la théorie des permutations (ce qui serait dommageable car il s'agit là du cadre mathématiquement le plus performant mais didactiquement le moins intéressant, comme nous pourrions le constater). Nous

faisons l'hypothèse que la difficulté d'un apprenant à interpréter la théorie des banquetts en termes de permutations est dû à un déficit de conceptualisation de la notion de fonction en tant que relation (par rapport à la notion de fonction en tant que formule), ce qui handicape l'interprétation fonctionnelle du système axiomatique (nous prévoyons que les étudiants utilisent le cadre fonctionnel afin de construire explicitement des modèles comparables à l'exemple fourni à la question I 2 c), par le choix de couples (E, f) et la vérification de la satisfaction des axiomes, mais ils ne réaliseront probablement pas que tout modèle peut s'écrire sous cette forme en vertu des difficultés à conceptualiser l'équivalence des cadres, dans le contexte que nous proposons). Se pose également l'obstacle des quantificateurs (même s'ils sont exprimés en langue naturelle dans le document distribué) : l'interprétation fonctionnelle nécessite « d'encapsuler » les axiomes (ii) et (iv), dont la combinaison se réécrit « pour tout x , il existe un unique y tel que xRy », en une fonction. Il s'agit pour cela d'être à même d'interpréter la succession d'un quantificateur universel et d'un existentiel comme un processus qui permet d'associer à une donnée en entrée un résultat en sortie, à l'image d'un algorithme qui demeure cependant non spécifié, sorte de boîte noire fournissant un résultat d'existence abstrait, non effectif (ce qui contraste avec les aspects effectifs généralement associés aux algorithmes). Il sera par contre intéressant d'observer l'importance que les étudiants accordent aux représentations connectées à la vie de tous les jours (interprétation empirique), donc au monde phénoménologique, et le rôle de l'image mentale des banquetts en tant que personnes assises autour de tables dans les raisonnements menés tout au long de l'activité. En d'autres termes, notre stratégie de susciter des représentations phénoménales a-t-elle fonctionné ?

Les modèles se distinguent par leur niveau de « généricité », lequel est très différent selon les cas : par exemple, (E, f) , où $E = \mathbb{N}$ et $f(x) = x + 1$, ou encore une matrice de permutation donnée, comparativement à une matrice de permutation générique dont les coefficients sont des indéterminées. La représentation matricielle fait abstraction de la nature des éléments : elle sous-entend une numérotation de ces derniers et définit la relation. C'est une description de relation (au sens de Carnap) ; lorsque les coefficients sont des indéterminées, cela devient une description de structure, mais sous une forme non axiomatique : le symbolisme matriciel fournit un langage de haut niveau à même « d'encoder » la logique des relations. Les étudiants sont susceptibles de développer la conception initiale d'un modèle en tant que couple (E, f) où E et f sont spécifiés (tel l'exemple de la question I 2 c), du fait de leur perception du contrat didactique. Leur rapport personnel du concret à l'abstrait est un autre facteur qui peut aboutir à la considération de modèles non génériques. Cependant, des représentations génériques de la relation R sont nécessaires afin de réaliser les tâches demandées par la suite dans une approche sémantique. Il est probable que ceci nécessite l'intervention de l'enseignant, afin d'enrichir le milieu. Le choix de l'introduction d'un nouveau cadre apparaît comme une variable didactique cruciale à discuter en relation avec les tâches demandées et les objectifs conceptuels poursuivis.

Examinons les processus de conversion d'un domaine d'interprétation à l'autre (on supposera pour simplifier que E est de cardinal fini, en accord avec le contexte empirique que suggère le nom de banquet) : une représentation de personnes autour de tables par des points numérotés sur des cercles (idéalisation du contexte empirique) se convertit aisément en un graphe orienté en rajoutant des flèches dans le sens des aiguilles d'une montre (par exemple) ; on associe à un graphe orienté sa matrice d'adjacence ; la reconstitution de la permutation s'effectue en lisant la position des 1 dans la matrice ; enfin, l'algorithme de décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints permet de retrouver les tables (une par cycle). Mise à part la dernière conversion, qui s'appuie sur un algorithme (en tant qu'aspect effectif d'un théorème bien connu sur les permutations), la difficulté principale pour un apprenant se situe au niveau de la flexibilité cognitive requise par un changement de cadre, dans le contexte que nous proposons.

b) Discussion de la tâche de construction de modèles en relation avec l'examen logique du système d'axiomes (question I 1)

Le cadre de la théorie des graphes est très performant pour construire des modèles : ce symbolisme offre un point de vue synthétique sur les relations qui apparente la tâche de construction de modèle à un « jeu de légos » avec des flèches, à une combinatoire que l'on peut effectuer en s'appuyant sur des représentations concrètes qui engagent les sens. C'est par contre un point de vue abstrait comparativement à la donnée d'un modèle explicite du type (E, f) , $E = \mathbb{N}$ et $f(x) = x + 1$, car ni les éléments ni la relation ne sont spécifiés. Il s'agit en effet d'une description de structure rendue possible par la force de la représentation graphique symbolique synthétique comparativement à l'axiomatique analytique. Des étudiants ayant suivi un cours de mathématiques discrètes sont susceptibles de construire de tels modèles. Les autres étudiants se limiteront probablement au contexte empirique ou à des modèles explicites. On peut s'attendre également à des descriptions syntaxiques, dans le cadre de 2 (ou 3) éléments, par exemple « xRy, yRx », les axiomes imposant une unique possibilité.

La discussion de l'indépendance des axiomes est une tâche nouvelle pour les étudiants. Dans le cadre de la théorie des groupes, ces derniers ont appris, par exemple, que $(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde et non un groupe car il ne vérifie pas l'axiome d'existence du symétrique. Cependant, la discussion de l'indépendance des axiomes n'est pas systématique en théorie des groupes : l'axiome du symétrique est dépendant de l'existence et de l'unicité du neutre, de sorte que certaines questions ne se posent pas. Malgré la familiarité des étudiants avec le raisonnement par contre-exemple, il est probable que l'approche sémantique de la négation d'une implication du type $i) \text{ et } ii) \text{ et } iii) \Rightarrow iv)$ ne soient pas une démarche naturelle pour eux, de sorte qu'ils restent bloqués dans des approches syntaxiques. Le but de ces questions n'est pas uniquement de répondre à un questionnement logique sur les axiomes : du côté de la sémantique, ces contre-exemples permettent de délimiter plus finement le concept de banquet, de comprendre l'apport de chaque axiome par rapport aux autres.

Il s'avère que le système d'axiomes présente une redondance : en dimension finie, $iii) \text{ et } iv) \Rightarrow ii)$; par contre, en dimension infinie, l'implication $i) \text{ et } iii) \text{ et } iv) \Rightarrow ii)$ est fausse. Le cadre fonctionnel est le plus performant afin de démontrer le premier point : ceci repose sur le fait qu'une application injective entre deux ensembles de même cardinal est bijective. Par contre, nous avons fait le choix didactique *a priori* de ne pas introduire ce cadre à ce stade de l'activité (le lien avec la théorie des permutations fait l'objet de la partie III). Nous proposons ainsi d'introduire le cadre matriciel et d'utiliser le fait que la somme de toutes les sommes partielles par lignes donne le même résultat que la somme de toutes les sommes partielles par colonnes : ceci permet de démontrer qu'il y a exactement un 1 par ligne et par colonne. Le cadre matriciel ne convient cependant pas à la dimension infinie : le second point nécessite ainsi le point de vue théorie des graphes, qui permet d'imaginer un contre-exemple, à partir de deux arêtes aboutissant sur un même sommet (afin de contredire l'axiome $ii)$), puis le prolongement à l'infini de ces deux arêtes en deux chaînes d'éléments afin de satisfaire les autres axiomes.

c) Discussion de la tâche de classification de modèles (question I 2)

Le cadre le plus performant pour la tâche de classification est celui de la théorie des permutations : par contre, la traduction de la définition d'un isomorphisme dans ce cadre pose une difficulté conceptuelle supplémentaire : permutation et isomorphisme sont tous deux des bijections qui jouent des rôles différents. Un travail syntaxique de transformation d'écriture au sein du registre symbolique est nécessaire afin de découvrir que deux permutations sont isomorphes si et seulement si elles sont conjuguées. La caractérisation, bien connue en théorie des permutations, d'une classe de conjugaison par le type d'une permutation représentant la classe permet alors de résoudre directement le problème de classification. Comme nous l'avons noté précédemment, il est peu

probable que les étudiants emploient ces méthodes avant qu'ils ne soient incités à le faire et guidés par l'énoncé (partie III de l'activité).

Les méthodes restantes se divisent en deux catégories : d'un côté une approche à dominante syntaxique, qui s'apparente aux raisonnements menés dans le cas de la classification des groupes de petits ordres, de l'autre une approche à dominante sémantique, qui utilise les modèles génériques empruntés à la théorie des matrices ou des graphes. Il sera nécessaire cependant, dans chaque cas, d'articuler syntaxe et sémantique à un moment donné du raisonnement.

- Approche à dominante syntaxique : dans le cas de trois éléments x, y, z , quitte à effectuer une permutation, nous pouvons supposer xRy (en vertu de i) et iv)) ; nécessairement, (yRx ou yRz) et (zRx ou zRy), toujours d'après i) et iv). Parmi les quatre cas, seul yRz et zRx est possible, en vertu des axiomes ii) et iii). Le raisonnement est similaire avec quatre éléments, mais il nécessite de répéter plusieurs fois des considérations du type « quitte à permuter... ». On aboutit à deux classes : xRy, yRx, zRt, tRz et xRy, yRz, zRt, tRx . Il est prévisible que les étudiants s'arrêtent à ce stade, alors qu'il s'agit encore, d'une part de justifier que ces deux classes sont bien distinctes, d'autre part de montrer qu'elles sont non-vides, donc d'en exhiber un représentant (complément sémantique). Le premier point nécessite la notion d'isomorphisme, en fait la connaissance de propriétés invariantes par isomorphisme qui permettent de distinguer les deux classes. Dans le cas des groupes d'ordre 4, bien connu des étudiants, on invoque la présence ou non d'un élément d'ordre 4. L'analogie dans notre cas consiste à repérer une propriété de cyclicité : dans le cas du deuxième type trouvé précédemment, la relation permet de « relier » tous les éléments, de « proche en proche ». Raisonner sur l'ordre d'un élément revient, dans notre contexte, à raisonner sur le cardinal de la « chaîne » issue d'un élément, nouvelle notion assez intuitive du fait de l'image mentale du « chainage », en fait de succession comme dans le cas des entiers naturels, qui est aisée à formaliser (en introduisant, par exemple, une notation R^k), avec un bouclage éventuel, donc une cyclicité, qui est automatique dans le cas d'un cardinal fini. Les groupes cycliques, dont ceux constitués par les racines de l'unité, s'appuient également sur cette image mentale du cercle. S'il est peu probable que les étudiants s'engagent dans une telle formalisation, excepté ceux qui sont particulièrement à l'aise avec le formalisme, il est probable par contre que le motif de cyclicité soit reconnu et mis en avant. Le but des questions 2 c) et 2 d) est d'amener les étudiants à expliciter cette image mentale dans le formalisme des relations. Enfin, la construction d'un représentant pour chaque classe est aisée, soit en s'appuyant sur les banquets empiriques, soit sur les graphes, soit sur le modèle de la question 2 c). Notant B4 le banquet cyclique d'ordre 4, il est possible que certains étudiants introduisent, par analogie avec la théorie des groupes, des notations du type $B2 \times B2$, alors que l'opération « produit cartésien de banquets » n'a pas de sens. L'opération structuraliste appropriée la « réunion » (disjointe) des banquets, sera introduite dans la partie II.
- Approche à dominante sémantique : on utilise le fait que la théorie des matrices ou des graphes permet de représenter tous les cas possibles. Il s'agit donc de différencier les classes. Les graphes permettent de traiter rapidement le cas de 3 éléments : il permet de remplacer le raisonnement invoquant les axiomes par une succession d'actions, comme dans un « jeu de légos ». On obtient ainsi deux possibilités de rajouter des flèches entre trois lettres x, y, z et on se convainc facilement que le sens de rotation des flèches n'a pas d'importance grâce à un traitement au sein de ce registre graphique symbolique : on passe de la première configuration à la dernière (voir figure 1 ci-dessous) en rétablissant le sens anti-horaire, ce qui ne change pas la nature de la représentation en tant que graphe, puis en remarquant qu'il s'agit du même motif à permutation près des lettres x et y . Sans formaliser de notion d'isomorphisme, le principe d'abstraction, dans sa version naïve d'abstraction de

la nature des éléments (premier sens du verbe abstraire), permet de se convaincre qu'il s'agit de la même classe d'isomorphisme, dans le sens premier du terme (avoir même forme).

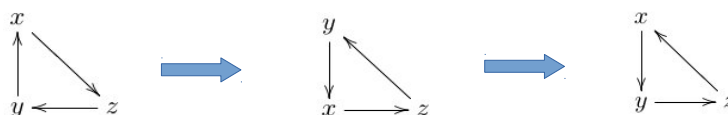


Figure 1 : établissement du lien d'isomorphie par une succession de traitements au sein du registre des graphes

On notera qu'un argument du type « quitte à permuter les éléments, on peut supposer que la flèche est orientée de x à y » permet de se dispenser de ce raisonnement. Cependant, il est probable que les étudiants considèrent les modèles de façon exhaustive. La situation est un peu plus compliquée dans le cas de 4 éléments, car le nombre de configurations est plus élevé. Des connaissances de théorie des graphes (notamment changer de représentation afin de supprimer les « croisements » de flèches) permettent de se ramener facilement soit au cas du graphe cyclique, soit au cas du graphe ayant deux composantes connexes formées de deux éléments reliés par une flèche double. Le processus visuel de reconnaissance de forme permet de conclure, en faisant abstraction des lettres. Il est également possible de raisonner à permutation près d'éléments, ce qui limite le nombre de cas à considérer.

Examinons pour finir l'approche sémantique à base de matrices : dans le cas de trois éléments, la position du 1 en première ligne détermine totalement la matrice ; il y a donc deux possibilités. On se rend compte qu'il s'agit de la même classe par le raisonnement suivant : permuter y et z dans la seconde matrice conduit à deux matrices des relations identiques. C'est donc à nouveau un processus visuel de congruence qui permet d'établir le lien d'isomorphie. Comment a-t-on compris qu'il fallait permuter ces éléments ? C'est l'examen des relations qui le dicte : dans un cas, xRy , yRz , zRx , dans l'autre xRz , zRy , yRx . Isoler les relations et les ordonner en faisant apparaître des cycles (la conversion en une représentation du type banquet empirique) constitue en définitive une procédure très performante pour comparer les structures. Le cas de 4 éléments est, comme précédemment, facilité par un argument de permutation des éléments *a priori*, plutôt que d'invoquer des isomorphismes *a posteriori*.

Si la notion de modèles isomorphes est susceptible de s'appuyer sur la reconnaissance des formes, la définition formelle d'un isomorphisme nécessite d'avoir intégré le point de vue syntaxique sur la notion d'isomorphisme en tant que bijection préservant les relations. En théorie des groupes, l'isomorphisme est défini comme une bijection préservant la loi, ce qui est conceptuellement différent, mais la proximité syntaxique des écritures $x*y$ et xRy devrait permettre aux étudiants de trouver facilement, outre le caractère bijectif qui est standard dans toute notion d'isomorphisme, la condition $\forall (x, y) \in E^2, xRy \Rightarrow \varphi(x)R'\varphi(y)$ définissant un isomorphisme $\varphi: (E, R) \rightarrow (E', R')$ de banquets. La construction effective d'un tel isomorphisme, par exemple entre les 2 banquets précédents d'ordre 3, s'effectue en comparant xRy , yRz , zRx et $x'Rz'$, $z'Ry'$, $y'Rx'$ (noter l'ajout des « ' », étape importante d'un point de vue sémiotique) : si φ associe x à x' , il associera donc y à z' et z à y' . Il sera intéressant d'observer si les étudiants s'engagent dans l'écriture de tels isomorphismes ou bien s'ils se satisfont de la reconnaissance intuitive de formes ou bien de l'image mentale de permutation de deux personnes assises autour de la table.

d) Discussion de la partie II (activité de définition et élaboration théorique)

L'activité de définition axiomatique d'une « tablée » s'appuie sur les banquets « empiriques » (il est peu probable que les étudiants posent d'autre relation que celle d'être assis à droite ou à gauche d'une autre personne) et la caractérisation abstraite du banquet cyclique de cardinal 4 demandée en

dernière question de la partie I. On peut ainsi définir une tablée comme un banquet tel qu'il est possible de numéroter les éléments de E de sorte que $x_i R x_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$ et $x_n R x_1$, où n désigne le cardinal de la tablée. La condition de banquet peut être omise en précisant qu'il s'agit là de toutes les relations entre éléments. Se pose la question de la tablée à 1 élément qui n'est pas un banquet : faut-il l'exclure ou non ?

L'activité de définition est en définitive assez modeste. Nous avons déjà expliqué les raisons de ce choix. Des études sont à mener afin d'évaluer les capacités de formalisation des étudiants, si l'on souhaite développer des activités de définition axiomatique plus ambitieuses. Notre propos est d'illustrer le fonctionnement de la dialectique concret-abstrait dans la construction théorique, d'où l'importance de cette phase de modélisation à partir de l'empirie. Cet objectif devrait être atteint, malgré la limitation de la prise d'initiative générée par le cadre de l'axiomatique des banquets.

L'élaboration théorique se poursuit avec un autre type d'activité de définition : il ne s'agit plus de modéliser abstraitement, mais de donner des définitions « structuralistes » de sous-banquet, banquet irréductible, banquet engendré par un élément, et de réunion de banquets. Ces définitions s'appuient sur le formalisme ensembliste et ses images mentales associées, du type diagrammes de Venn.

- Sous-banquet : (E', R') est un sous-banquet de (E, R) si et seulement si $E' \subset E$, $R' = R|_{E'}$ et (E', R') est un banquet. Cette dernière condition n'est pas automatique : si l'on s'imagine un banquet de l'empirie, on ne peut pas extraire aléatoirement des personnes, il faut isoler des tables entières. Ce phénomène est analogue au cas de la théorie des groupes, où l'on définit un critère de sous-groupe garantissant la stabilité de la loi et la stabilité par passage au symétrique, certains axiomes étant automatiquement vérifiés, mais pas la totalité. Dans notre cas, c'est l'axiome iv) qui pose problème : on peut ainsi remplacer la condition « (E', R') est un banquet » par la condition plus faible suivante :

$\forall x \in E', \forall y \in E, x R y \Rightarrow y \in E'$. Ceci correspond à la formalisation de la remarque précédente à propos des banquets de l'empirie.

- Banquet irréductible : la notion d'irréductibilité est une notion assez intuitive ; les étudiants connaissent par ailleurs la définition d'un groupe simple (ne possédant pas de sous-groupe distingué propre). Il est probable qu'ils posent rapidement la définition suivante : un banquet est dit irréductible s'il ne possède pas de sous-banquet autre que lui-même.
- Banquet $\langle x \rangle$ engendré par un élément : de façon analogue à la théorie des groupes (ou toute théorie algébrique structuraliste), plusieurs approches sont possibles. D'un point de vue structural (au sens de Sfard 1991), $\langle x \rangle$ est caractérisé par une condition de minimalité pour l'inclusion, parmi les banquets contenant x . Il est probable que certains étudiants adoptent d'emblée ce point de vue, par analogie avec la théorie des groupes. L'idée de génération à partir d'un élément fait par ailleurs référence à un processus d'itération (on itère en fait la condition du critère de sous-banquet, qui dit que toute la chaîne issue de x , ou encore la tablée contenant x , dans le cas de cardinal fini, est incluse dans $\langle x \rangle$; comme il s'agit par ailleurs d'un banquet, c'est $\langle x \rangle$). L'encapsulation de ce processus en un objet (en fait, une tablée !) procure ainsi une description explicite de $\langle x \rangle$ qui en assure l'existence. Les deux aspects sont importants et susceptibles d'intervenir dans les preuves ; bien que la démonstration de l'équivalence des deux soit immédiate, il s'agit de deux points de vue conceptuels assez différents (structural avec condition de minimalité versus processus encapsulé). Une autre façon d'obtenir l'existence se fonde sur un raisonnement structural classique : on montre qu'une intersection quelconque de sous-banquet est encore un sous-banquet, ce qui permet de définir abstraitement $\langle x \rangle$ en tant qu'intersection de tous les sous-banquets contenant x . Bien que ce soit peu probable, certains étudiants sont susceptibles

d'employer cette méthode, notamment si elle a été exposée et présentée comme générale dans le cours de théorie des groupes.

- Réunion de banquets : elle se fonde sur l'union de deux ensembles (et non le produit cartésien, qui est susceptible d'interférer dans les raisonnements, car il s'agit de la bonne notion dans le cas des groupes, contrairement à l'union alors que la situation est inversée ici). Cependant, il s'agit de postuler que les deux ensembles sont disjoints (réunir des banquets de l'empirie implique d'ailleurs des ensembles disjoints de convives) alors que le formalisme laisse ouvert cette possibilité d'une intersection non vide. Il est possible que les étudiants imaginent des méthodes d'« amalgamation » des ensembles (intercaler des personnes), perdant de vue la contrainte naturelle qui est d'imposer que les deux banquets de départ puissent s'identifier à des sous-banquets de leur réunion.

Les deux résultats théoriques importants à démontrer à partir de ces définitions sont les suivants : « les tablées sont les banquets irréductibles de cardinal fini » (question II 2 b) et « tout banquet fini est réunion de tablées, cette écriture étant unique à permutation près des tablées et au choix près d'un représentant de chaque tablee $\langle x_i \rangle$ » (théorème de structure). Ce théorème peut s'énoncer également en terme d'isomorphisme et des modèles spécifiques de banquets cycliques construits sur les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (question I 2 c). L'analogie est évidente avec le théorème de classification des groupes abéliens finis (noter cependant que la situation est plus complexe en théorie des groupes en raison du théorème bien connu en théorie des groupes sous le nom de « théorème chinois ») : un banquet fini est la réunion (disjointe) de banquets cycliques tout comme un groupe abélien fini se décompose en un produit de groupes cycliques. La véritable analogie se situe au niveau du théorème de décomposition d'une permutation en tant que produit de cycles à supports disjoints (partie III).

- Les tablées sont les banquets irréductibles de cardinal fini : la preuve de cette proposition constitue un petit exercice déductif à la portée des étudiants. La réciproque est immédiate en vertu de la caractérisation structurelle (minimalité) d'une tablee et la définition d'irréductibilité. Le sens direct se montre à l'aide du lemme suivant concernant les tablées : $y \in \langle x \rangle \Rightarrow \langle y \rangle = \langle x \rangle$. Il est probable qu'il soit admis par les étudiants, lesquels s'appuient sur l'image mentale du cercle.
- Théorème de structure : la démonstration de l'existence se fonde sur un raisonnement par récurrence sur le cardinal ; la clef est de remarquer que, pour b un banquet et $x \in b$, $b \setminus \langle x \rangle$ est encore un banquet. En définitive, il s'agit d'un algorithme de décomposition. L'unicité s'établit également par récurrence (sur la somme $k+l$ des nombres de tablées intervenant dans chacune des deux décompositions considérées), ce qui nécessite une plus grande maîtrise à la fois du formalisme et de la méthode de raisonnement par récurrence. La difficulté est identique à celle de la preuve de l'unicité de la décomposition canonique d'une permutation. Malgré le fait que cette démonstration ait été rencontrée par les étudiants, il est peu probable qu'ils parviennent à rédiger la preuve dans le cas tout à fait analogue qui nous concerne.

On notera que l'activité des banquets ne présente pas de dialectique définition-preuve, contrairement à l'élaboration des grandes théories de structures qui se fondent également, dans leur mouvement de réécriture de l'algèbre classique, sur l'analyse des preuves afin d'en identifier des « ressorts ». Ceci s'explique par le fait que la théorie des banquets-tablees modélise le réel et non une théorie intermédiaire qui fait office de domaine phénoménal d'objets.

3. Rôle de l'enseignant et interactions entre dimensions a-didactiques et didactiques

Dans le « jeu contre le milieu », les principaux leviers de l'enseignant sont la dévolution et l'institutionnalisation. Des situations de types différents se succèdent (situations d'action-classification, de définition-formalisation, de preuve), ce qui nécessite à chaque fois une dévolution spécifique pour accompagner le changement de contrat et rend souhaitable une institutionnalisation des définitions avant de se lancer dans les preuves. Nous avons montré également l'importance des cadres et des représentations sémiotiques disponibles pour la réalisation des tâches, d'où la pertinence d'enrichir le milieu dans des moments opportuns. Enfin, l'institutionnalisation doit permettre la mise en relation du discours de nature méta présent dans le document avec les situations proposées, et souligner l'analogie avec la théorie des groupes, qui est susceptible de demeurer implicite dans les démarches et procédures étudiantes.

Bien que notre propos ne soit pas d'étudier les pratiques enseignantes ni le fonctionnement du système didactique, nous listons ci-dessous les interventions de l'enseignant que nos analyses ont permis de motiver et que nous décidons d'inscrire dans le scénario. Elles seront utiles au lecteur qui souhaite expérimenter notre ingénierie dans son université et elles témoignent des nécessaires interactions entre dimensions a-didactiques et didactiques de l'activité.

- I 1 b) (dévolution) : expliquer le travail logique d'étude de l'indépendance des axiomes (disjonction de cas et approche sémantique par construction de contre-exemples);
- I 1 b) (enrichissement puis institutionnalisation) : introduction des représentations génériques sous forme de matrice ou de graphe. Les deux sont utiles si l'on souhaite démontrer l'implication $\text{iii) et iv)} \Rightarrow \text{ii)}$ en dimension finie et nier l'implication $\text{i) et iii) et iv)} \Rightarrow \text{ii)}$ en dimension infinie. Cet enrichissement est également bénéfique à la tâche de classification qui suit.
- I 2 a) (institutionnalisation) : discuter la tâche de classification des banquetts dans le cas de 3 éléments permet un ensemble de mises au point (cf discussion de la tâche ci-dessus). La réalisation de la même tâche dans le cas de 4 éléments permettra de vérifier l'acquisition des connaissances, tout en introduisant un nouveau phénomène.
- I 2 b)-d) (institutionnalisation) : la caractérisation abstraite d'un banquet cyclique sert dans l'activité de définition axiomatique des tablées. Il est souhaitable, à la fois d'un point de vue didactique et cognitif, de clôturer la partie I qui s'apparente à un mouvement de l'abstrait vers le concret, avant de s'engager dans la partie II qui procède d'une dynamique inverse.
- II 1) et 2 a) (institutionnalisation) : il s'agit de convenir d'une définition axiomatique de tablée ainsi que des autres définitions afin de s'engager dans les preuves. De même pour la définition de la réunion de banquetts (première partie de la question II 2 c)
- II 2 b) et c) (dévolution) : le raisonnement déductif attendu diffère, par sa nature, des preuves précédentes (utilisant le symbolisme algébrique ou des processus de reconnaissance de forme). Il est important de souligner le changement de contrat, par exemple en énonçant la proposition au tableau et en explicitant l'attente d'une démonstration. De même, lors de la dévolution de la preuve du théorème de structure, l'accent est à mettre sur la preuve de l'existence tout en indiquant, si nécessaire, la méthode par récurrence.
- II 2 (institutionnalisation) : il s'agit de travailler l'écriture formelle des preuves. Le résultat d'unicité peut être admis en argumentant qu'une preuve utilisant la décomposition d'une permutation sera donnée dans la partie III. Cette dernière, qui s'apparente à un exercice d'algèbre abstraite classique mobilisant les connaissances de théorie des permutations, peut faire l'objet d'un travail à la maison afin d'économiser le temps didactique ; nous ne commenterons pas davantage cette partie.

- IV (institutionnalisation) : il s'agit d'éclairer le discours méta précisant les trois sens du mot « structure ». L'enseignant pourra interroger les étudiants à l'oral sur les théorèmes de structure qu'ils ont déjà rencontrés afin de tester l'acquisition de la troisième acception de ce terme.

4. Rappel des hypothèses et des questions de recherche en vue des expérimentations

La théorie des banquets, en tant qu'ingénierie didactique, est une activité dédiée à l'apprentissage de la pensée structuraliste. En tant que telle, la principale adaptation escomptée par rapport au milieu adidactique est reliée au processus que nous avons appelé abstraction-thématisation, lequel implique un travail méta-cognitif et la reconnaissance d'invariants opératoires. Concrètement, il s'agit pour les étudiants de faire sens des tâches demandées et de les réaliser en appui sur les tâches similaires qu'ils ont accomplies dans le cadre de la théorie des groupes. Afin d'analyser si le processus d'apprentissage par adaptation se produit, nous pourrions observer les éléments suivants relatifs à la transversalité des méthodes entre les deux contextes des groupes et des banquets :

- Les étudiants conceptualisent-ils la structure de banquet, à l'image de celle de groupe, comme une donnée abstraite admettant une pluralité de modèles dans une pluralité de cadres ?
- Comment font-ils sens de l'action de classer ? Définissent-ils une notion d'isomorphisme (classification à isomorphisme près) ?
- Recherchent-ils des invariants permettant de distinguer deux classes (comme l'ordre des éléments en théorie des groupes, etc.) ?
- Identifient-ils une notion de cyclicité ? Sont-ils capables de la formaliser ?
- Sont-ils capables de définir une notion de sous-structure et de s'emparer de la notion de générateur dans ce nouveau contexte ?
- Sont-ils capables de définir une opération permettant de combiner les structures et de conceptualiser une décomposition en sous-structures simples/irréductibles ?
- Sont-ils capables de mobiliser les concepts dans des preuves ?

L'activité des banquets a été conçue afin de faire fonctionner les dialectiques fondamentales concret-abstrait et syntaxe-sémantiques, identifiées lors de notre étude épistémologique comme constitutives de la pensée structuraliste, en relation avec la dialectique objets-structures. Nous avons en fait identifié deux niveaux de couple « phénomènes - structure d'organisation de ce phénomène » : le premier niveau de la structure (de groupe ou de banquet) organisant les objets, et le niveau du méta-concept de structure organisant les théories structuralistes.

L'adaptation en situation adidactique dont nous avons parlé plus haut concerne le second niveau. Nous avons évoqué dans l'introduction la difficulté des étudiants à faire sens d'un tel concept qui n'est pas mathématiquement défini mais qui est amené à jouer un rôle organisateur des théories et un rôle cognitif dans la conceptualisation. Nous faisons l'hypothèse que les conceptions des étudiants relatives au méta-concept de structure sont fortement liées à leur conceptualisation d'une structure abstraite et aux procédures qu'ils développent et sont capables de développer dans les situations qui leur sont proposées mettant en jeu ces structures. Les deux niveaux sont en définitive liés, celui de l'abstraction-idéalisation et de l'abstraction-thématisation. Ces considérations motivent notre stratégie d'apprentissage. Afin d'étayer notre hypothèse, nous avons relevé grâce à un questionnaire les conceptions *a priori* des étudiants (avant qu'ils ne s'engagent dans l'activité) relatives au méta-concept de structure. La mise en relation de ces conceptions avec la façon dont les étudiants appréhendent et réalisent les tâches structuralistes proposées dans la théorie des banquets apportera des éléments de réponse quant aux liens identifiants et la validité de notre hypothèse.

Enfin, la théorie des banquetts revêt également une fonction diagnostique de l'état de fonctionnalité des dialectiques concret-abstrait et syntaxe-sémantique, relativement au premier niveau objets-structure :

- Les étudiants distinguent-ils bien deux niveaux (objets-structure) ? Ou bien observe-t-on un phénomène d'écrasement des objets par la structure ou de la structure par les objets ?
- Comment effectuent-ils la tâche de construction de modèles ? Quelle importance donnent-ils au contexte empirique ? Observe-t-on un enrichissement sémantique mobilisant une pluralité de cadres et de registres ? Cherchent-ils des interprétations sémantiques d'axiomes isolément ? Comment en effectuent-ils une synthèse en un tout cohérent ? Quels types de représentations synthétiques produisent-ils ?
- Classifient-ils uniquement les banquetts d'un domaine d'interprétation donné (au sein d'un cadre unique, avec pour prédilection celui de l'empirie) ou bien se posent-ils la question de la portée de leur classification ?
- Dans ce dernier cas, font-ils appel à une représentation générique ou bien à des méthodes syntaxiques ? Lors d'un travail syntaxique, effectuent-ils un retour vers le sémantique (par exemple, exhiber un modèle afin de montrer que la classe est non vide) ?
- La détermination de la relation d'isomorphie entre modèles s'effectue-t-elle en appui sur une formalisation de la notion d'isomorphisme (rigueur syntaxique) ou bien est-elle fondée sur un processus intuitif de reconnaissance de forme ? Autrement dit, la notion d'isomorphisme en tant que bijection préservant les relations émerge-t-elle ? Dans le second cas, quelles représentations sémiotiques accompagnent ce processus intuitif ? Peut-on y voir des objets mentaux (externalisés) ?

L'analyse des productions des étudiants à l'aide du cadre épistémologique, didactique et cognitif de référence que nous avons développé permet ainsi d'éclairer les difficultés que les étudiants rencontrent à faire fonctionner ces pôles de façon dialectique et les processus cognitifs qu'ils mettent en œuvre. Il s'agit pour cela d'examiner leurs productions sémiotiques, notamment au niveau des tâches impliquant le processus d'abstraction-idéalisation, dans ses aspects syntaxiques et sémantiques.

III. Etude empirique

L'activité des banquetts a été expérimentée au début du deuxième semestre de l'année universitaire 2013-14, avec des étudiants de troisième année de Licence de mathématiques ayant reçu un enseignement de théorie des groupes au premier semestre, avant que ces derniers ne s'engagent dans l'apprentissage de la théorie des anneaux et des corps. Les étudiants ont travaillé par petits groupes de 3 à 4 (7 groupes en tout), constitués pour l'ensemble du travail qui s'est étendu sur 4 séances d'1h30 chacune. Nous avons au préalable procédé à un recueil des conceptions des étudiants relativement au méta-concept de structure, également par groupes (les mêmes groupes que pour l'expérimentation de l'ingénierie des banquetts, formés par les étudiants-mêmes en fonction de leurs affinités). Ceci nous permet de faire émerger une typologie de conception *a priori* (la conception dominante d'un groupe) qui sera mise en relation avec les productions des groupes lors de la réalisations des tâches proposées au sein de l'activité des banquetts. Nous avons pu recueillir des données empiriques assez riches que nous présenterons et analyserons à l'aide de notre cadre épistémologique, didactique et cognitif de référence. Des sessions en laboratoire impliquant deux binômes d'étudiants nous ont permis d'autre part d'observer avec une granulométrie plus fine le travail des étudiants. Nous en rendrons compte et conclurons par une synthèse de nos résultats expérimentaux.

1. Analyse des conceptions relatives au méta-concept de structure

a) Elaboration du questionnaire et méthodologie d'analyse

Nous avons vu que le concept de structure est un méta-concept : aucune définition n'en est donnée, il appartient au discours véhiculé par les mathématiciens et les enseignants de mathématiques. Il ne s'agit donc pas de recueillir le *concept image* relatif à un *concept définition* au sens de Tall et Vinner (1981). Ce méta-concept a par contre un rôle de principe structurant, qu'il peut jouer, comme nous l'avons vu, à différents niveaux. Afin de vérifier qu'il joue cette fonction, nous avons posé aux étudiants les quatre questions suivantes :

1. Avec vos propres mots, expliquez ce que l'on entend par « structure mathématique ». Donner des exemples variés.
2. Pourquoi les mathématiciens élaborent-ils des théories de structure ?
3. Donnez des exemples de questions que se posent les mathématiciens à propos d'une structure, questions auxquelles la théorie de la structure va répondre.
4. On admet que $G = \{id, s_x, s_y, s_o\}$ forme un groupe, où les trois éléments distincts de l'identité sont deux symétries axiales et une symétrie centrale définies par un repère (O, x, y) du plan. Que pouvez-vous dire sur la structure de ce groupe ?

On notera qu'il est demandé à la première question une explication et non une définition. Si l'étudiant serait probablement en mal, ainsi que l'enseignant d'ailleurs, de fournir une définition mathématique (rappelons qu'il s'agit d'un méta-concept, voir B.1 b), la désignation de concepts unificateurs ne pose pas de problème : il est attendu de nombreux exemples de structures, que les étudiants ont rencontrés lors de leur scolarité. Il sera intéressant d'observer l'extension du méta-concept : quitte-t-il ou non le champ de l'algèbre dans le cadre d'une conception qui est recueillie pendant un module d'algèbre ?

Bourbaki donne également, dans son manifeste (Bourbaki 1998), une « explication » plutôt qu'une définition (Hausberger, Education et Didactique, in press ; voir manuscrit p. 6-7, in sélection d'articles), ce qui illustre le fait que le méta-concept de structure tient davantage un rôle méthodologique qu'une fonction définitionnelle. C'est pourquoi nous avons demandé les « raisons d'être » de ce méta-concept à la question 2. Nous attendons que les étudiants mettent en avant la dimension outil (Douady 1986), en l'occurrence son rôle de principe organisateur :

- principe organisateur 1 (PO 1) : au niveau de la dialectique objets-structure de niveaux 1-2 (cf Hausberger, Education et Didactique in press, figure 1) ; ceci doit amener les étudiants à mettre en avant les caractéristiques FUGS (Robert 1987) de ce savoir formalisateur-unificateur-généralisateur-simplificateur.
- principe organisateur 2 (PO 2) : au niveau de la dialectique de niveaux 2-3, c'est-à-dire le rôle structurant du méta-concept de structure dans l'élaboration des théories mathématiques. C'est la compréhension de l'abstraction-thématisation qui est en jeu.

Relativement à la méthodologie structuraliste, nous attendons des étudiants qu'ils soient capables de détecter des questions structuralistes qui organisent l'étude d'une structure (question 3). Il s'agit là d'une des dimensions objet (Douady 1986) du méta-concept de structure. Elle est liée à PO2, qui apparaît comme un principe organisateur interne à la théorie mathématique de structure. Nous attendons des éléments combinant dimensions opératoire et prédictives de la connaissance (Vergnaud 2002) : la mise en avant d'une combinatoire de structure (sous-structure, opérations de décomposition en sous-structures simples ou irréductibles, construction de nouvelles structures à partir d'opérations ensemblistes ou autres, etc.) ainsi que des théorèmes d'isomorphismes, des théorèmes de structure. Ces éléments font office d'invariants opératoires relatifs au méta-concept de structure, au sens de Vergnaud (1990). Les étudiants repèrent en effet ces invariants en comparant les différentes théories structurales qu'ils ont rencontrées. On peut également conjecturer qu'ils s'appuient sur un objet mental : l'idée de structure en architecture (un immeuble par exemple, structuré en appartements, lesquels se divisent en chambres, etc.). Pour

soutenir cette hypothèse, remarquons que « L'architecture des mathématiques » est le titre donné par Bourbaki à son manifeste.

Dans sa définition d'un concept, Vergnaud (1990) insiste également sur les éléments langagiers. Nous serons particulièrement attentif à ce point dans la réponse des étudiants à la première question (explication de la notion de structure). Nous nous attendons à trouver les unités signifiantes : ensemble, loi, relation, axiomes, etc. Un ensemble muni de lois fait référence à une conception que nous appellerons *ensembliste*, comparativement à la conception d'une structure en tant que système axiomatique, que nous appellerons *axiomatique*, ou la conception d'une structure en tant que modélisation abstraite mettant en avant les relations entre objets (conception *relationnelle*). Bien entendu, ces différents points de vue peuvent cohabiter.

Ces divers éléments nous permettent de construire le tableau suivant destiné à relever les réponses des étudiants :

définition	axiomatique
	ensembliste
	relationnelle
exemples	algébriques
	autres
raisons d'être	formaliser
	généraliser
	unifier
	simplifier
	autre
questions	combinatoire
	morphismes
	théorèmes de structure

Il s'agira ensuite de repérer si les principes organisateurs PO1 et PO2 sont fonctionnels. Pour cela, la mention des propriétés FUGS sera un indicateur de l'acquisition de PO1 tandis que la présence de questions structuralistes témoignera du fonctionnement de PO2. Nous souhaitons également développer une typologie de conception, en partant du triptyque axiomatique / ensembliste / relationnel mis en avant précédemment.

Enfin, le rôle de la question 4 est de vérifier que les étudiants sont capable d'identifier la structure abstraite d'un groupe donné (sa classe d'isomorphisme) en la situant par rapport à des modèles de référence connus d'eux. Il s'agit ici du groupe de Klein des isométries du rectangle, isomorphe au groupe produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, lequel constitue le modèle usuel si l'on se réfère à la classification des groupes abéliens. Des questions similaires sont posées au sein de la partie I de l'activité des banquets, dans le contexte de cette nouvelle structure inconnue des étudiants.

b) Analyse des résultats et typologie de conceptions

Par rapport au tableau présenté ci-dessus, nous avons rajouté lors du dépouillement une nouvelle catégorie « comparer, classer » au niveau des raisons d'être (question 2) et deux catégories « définition, propriétés » et « sémantique, dialectique objets-structure » au niveau des questions. Alors qu'il était attendu essentiellement des questions structuralistes en tant que réponses à la question 3, beaucoup de groupes ont impliqués les objets, ce qui montre l'importance de la dialectique concret-abstrait en tant que vecteur de sens pour les étudiants. L'attention prêtée par les étudiants aux questions définitionnelles est également un peu surprenante, étant donné qu'une

théorie structurale débute avec une définition axiomatique qui est posée en principe (la cohérence est assurée par l'existence d'un modèle). Ceci témoigne souvent, comme nous allons le voir, d'une incompréhension du principe d'abstraction.

Le tableau enrichi complété des réponses des étudiants est donné en annexe 2. Nous allons commenter les réponses de chacun des groupes. L'analyse de leurs réponses fait apparaître des nuances significatives qui témoignent de conceptions différentes, au niveau de chacun des groupes.

- **Groupe 1** : Ce groupe se place dans le paradigme ensembliste : « une structure permet de déterminer un ensemble grâce à des lois ». Bien que les étudiants évoquent une « classe comme en informatique » et plus loin « restreindre le domaine d'application d'une structure », ce qui les conduit à la notion de sous-structure, la formulation de leur réponse ainsi que les questions qu'ils énoncent (« quelles propriétés définissent une structure ? Sur quel ensemble une structure est-elle définie ? ») suggèrent une ambiguïté : les étudiants se placent-ils au niveau d'une définition de propriétés, selon la terminologie de Carnap (Hausberger, Education et Didactique, in press) ou d'une description de structure qui est la donnée des propriétés formelles des relations ? Si Bourbaki utilise également la locution « une structure s'applique à des ensemble », il précise « ensembles d'éléments dont la nature n'est pas spécifiée », et mentionne des axiomes que l'on suppose vérifiés par les relations, donc des propriétés formelles. Les étudiants ne semblent pas distinguer ce double niveau objets-structure, résultant d'un processus d'abstraction, ce qui est confirmé par l'absence de toute référence à un caractère FUGS. C'est toute la différence entre un exemple de groupe, qui est la donnée d'un ensemble et d'une loi spécifiés et la structure de groupe qui est la donnée d'axiomes relativement à une relation de composition interne sur un ensemble indéterminé. Nous considérons donc qu'il s'agit ici d'un phénomène d'*écrasement des structures par les objets* et qualifions cette conception de « **ensembliste de niveau 1** » (le niveau 1 étant celui des objets, le niveau 2 celui de la structure). Le principe PO1 n'est pas fonctionnel et l'incompréhension du principe d'abstraction-idéalisation handicape également la thématisation, de sorte que PO2 ne joue pas son rôle : l'unique question structuraliste mise en avant concerne la notion de sous-structure. En général, la définition d'un sous-groupe succède immédiatement celle de groupe dans l'enseignement de la théorie. Etant donnée la prégnance du niveau 1, il est probable que les aspects sémantiques prédomineront dans les procédures et raisonnements que ce groupe mettra en œuvre lors de la réalisation de l'activité des banquets.
- **Groupe 2** : La définition donnée « cela serait un modèle sur un ensemble défini par certaines règles qui nous permettent de comprendre les relations entre les éléments de l'ensemble » dénote une conception relationnelle et ensembliste. Modèle revêt ici le sens de modèle abstrait, qui constitue une modélisation. Si l'on interprète « règles » par « axiomes » plutôt que par « lois », ce qui est cohérent avec l'emploi du mot modèle, alors la formulation dénote également une conception axiomatique. « Peut-on établir des relations avec des problèmes concrets ? », en tant que question à propos des structures, témoigne de l'importance que revêt la dialectique concret-abstrait pour les étudiants. Le groupe mentionne « modéliser, généraliser, comprendre » en tant que raisons d'être des structures, par contre le rôle unificateur n'est pas soulevé. Cela suggère que la version syntaxique du principe d'abstraction-idéalisation est comprise, mais pas sa version sémantique. Bien que le principe PO1 soit bien identifié, la dialectique objets-structure semble dirigée principalement des objets vers la structure. L'unique exemple donné ($\mathbb{N}, +$) n'est pas un exemple de groupe, ce qui constitue une erreur mathématique grossière. Le mouvement de la structure vers les modèles pose en définitive problème aux étudiants de ce groupe, ce qui permet de douter de l'opérationnalité de PO1. Les principales questions structuralistes (« l'optimisation et la simplification » de la structure) présentent des formulations encore assez vagues. Il n'y a pas d'évocation de la notion de morphisme, de sorte que les aspects

relationnels se limitent aux éléments, ils ne s'étendent pas aux ensembles et sous-ensembles. Le principe PO2 est en cours d'acquisition. Nous qualifions cette conception de « *relationnelle* » : elle met en avant la logique des relations, de sorte que les aspects syntaxiques sont susceptible de prédominer.

- **Groupe 3** : La définition « ensemble d'éléments + ensemble de règles sur les éléments » dénote une conception ensembliste. Ici, règles a le sens de lois, il s'agit d'une description de propriétés et non une description de structure au sens de Carnap. Les étudiants ont pensé à un exemple de groupe, et non au groupe en tant que structure. Ils donnent par contre des exemples variés de structures algébriques. Le rôle généralisateur-simplificateur est bien pointé, mais pas la fonction unificatrice. Ceci ne nous permet pas de conclure que PO1 soit pleinement fonctionnel. Les aspects de combinatoire des structures (« construire d'autres structures à partir d'une structure », « découper en sous-structures plus simples ») sont par contre bien mis en avant, ainsi que la notion d'isomorphisme et de morphisme (« Y a-t-il équivalence entre structures ? Peut-on les comparer? »), sans cependant user de la terminologie employée par les mathématiciens, bien qu'elle soit connue d'eux. Les étudiants font référence à des actions qui ont lieu dans le monde phénoménal (construire, découper, comparer), en appuie sur des images mentales de type topologique permises par la conception ensembliste. Celle-ci a lieu au niveau des structures, c'est pourquoi nous qualifions cette conception de « *ensembliste de niveau 2* ». Le principe PO2 est fonctionnel. La prégnance des aspects combinatoires laisse entrevoir une prédominance du syntaxique.
- **Groupe 4** : La définition « ensemble muni de lois » témoigne d'une conception ensembliste présentant les travers déjà identifiés. Le point de vue généralisateur-unificateur est souligné dans une même formulation : « les théories de structures permettent d'associer différents ensembles à une même structure de façon à n'avoir à étudier qu'un représentant ». Ceci fait référence également à la version sémantique du principe d'abstraction-idéalisation, mais avec une classe unique, ce que l'on peut interpréter comme un déficit d'articulation avec la version syntaxique de ce principe (la notion d'isomorphisme est absente). « Résoudre des équations, étudier des fonctions » sont mentionnés en tant qu'applications. Les questions soulevées (« Sur quels ensembles sont valables une propriété donnée ? » par exemple) témoignent d'un formalisme tourné vers les objets, tout en réalisant l'économie de pensée soulignée. L'unique question structuraliste concerne la notion de morphisme, dans une formulation phénoménologique (« comment relier deux ensembles à l'aide d'applications ? »). Tout ceci suggère que PO1 est fonctionnel mais pas PO2. Le point de vue sémantique est probablement dominant. Nous qualifions cette conception de « *ensembliste dialectique* » : les étudiants distinguent bien deux niveaux et un principe d'abstraction reliant les deux.
- **Groupe 5** : Ce groupe mentionne, comme le précédent, « ensembles + loi » mais rajoute « Relations sur les éléments → structure ». Ceci suggère que le passage d'une description de propriétés à une description de structure, souligné par Carnap, est compris des étudiants. D'autres exemples de structures que des structures algébriques sont donnés (espace normé), ainsi que des types de relations (équivalence), ce qui témoigne de l'assimilation du point de vue abstrait axiomatique sur les relations. Le point de vue relationnel se traduit également au niveau des ensembles : parmi les raisons d'être du structuralisme, les étudiants mentionnent « Pour comparer des ensembles », « Faire des analogies entre des ensembles ayant la même structure (ex : se rapporter aux groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qu'on maîtrise plus »). Ceci traduit l'assimilation de PO1. La combinatoire des structures est mise en avant au niveau des questions : « Est-ce qu'elles sont conservées par certaines combinaisons ? Peut-on créer des ensembles structurés à partir d'éléments ou de sous-ensembles ? » ainsi que la notion de morphisme à travers l'idée d'un « transport » de structure (« Est-ce qu'elles se transportent ? ») qui est souvent véhiculée dans le discours méta des enseignants d'algèbre

abstraite. Le principe PO2 est donc également fonctionnel. Nous qualifions cette conception de « **structuraliste** » : les étudiants distinguent bien deux niveaux, les points de vue relationnels sont mis en avant pour chaque niveau, les deux principes organisateurs OP1 et OP2 sont opérationnels. Nous pouvons faire l'hypothèse que les raisonnements que mettront en œuvre ce groupe feront apparaître également un rapport dialectique entre syntaxe et sémantique.

- **Groupe 6** : Il s'agit de l'unique groupe qui mentionne explicitement le terme axiome : « un ensemble d'éléments sur lequel on définit des axiomes ». Le rôle simplificateur est mis en avant (« simplifier des problèmes ») ; l'unique question avancée par le groupe « Comment simplifier la structure ? » y fera ensuite écho. Les rapports du simple au complexe apparaît ainsi comme une clef de compréhension de la pensée mathématique pour ces étudiants. Par contre, les deux formulations « Mettre en évidence des similarités entre certaines structures/ensembles » et « Quelle(s) loi(s) régit les éléments de la structure » dénotent une confusion entre les deux niveaux objets/structure. Le passage d'une description de propriétés à une description de structure (donc l'énoncé d'axiomes) est probablement encore assez obscur dans l'esprit de ces étudiants. Les caractéristiques FUGS sont peu détaillées et les aspects combinatoires des structures sont absents. Ceci témoigne d'un principe PO1 encore en cours d'acquisition et d'un principe PO2 non fonctionnel. Nous qualifions cette conception de « **axiomatique** » : le point de vue formel syntaxique domine et est peu articulé avec les objets ; le point de vue relationnel de niveau supérieur (combinatoire des structures) est absent. C'est un point de vue déductif plutôt que structuraliste.
- **Groupe 7** : La définition donnée dénote un point de vue ensembliste ne faisant pas la distinction entre description de propriétés et description de structure. Les étudiants mettent en avant le rôle simplificateur ainsi que la fonction organisatrice des structures (« Dans le but de comparer et de créer des « catégories » de structures, de lois »). Il est possible que l'existence de la théorie mathématique des catégories soit connue de l'un au moins des étudiants du groupe. Ceci témoigne de l'identification de PO2. En termes d'applications, le groupe mentionne la quadrature du cercle et la résolution des équations algébriques, qui constituent deux grandes applications de la théorie des corps, laquelle sera enseignée dans la suite du module. Ceci s'explique par la présence d'un redoublant au sein du groupe. Les aspects FUGS sont mal identifiés, en relation avec une dialectique objets-structures qui transparait peu dans le discours des étudiants. La principale trace de cette dialectique se situe au niveau d'un exemple : le groupe met en relation la possibilité de calculer une puissance d'une somme de deux matrices en appliquant la formule du binôme de Newton avec le caractère d'anneau commutatif des matrices carrées. Cette formule est en effet applicable dans un anneau lorsque les deux éléments considérés commutent, mais l'anneau de matrice considéré n'est pas commutatif, ce qui dénote un manque de contrôle sémantique (les matrices sont le prototype d'anneau non commutatif) alors que le commentaire des étudiants vise l'acquisition d'un tel contrôle. Ceci montre que PO1 n'est pas fonctionnel. Enfin, la combinatoire des structures ne transparait pas et aucune question structuraliste n'est d'ailleurs formulée. Le principe PO2, s'il est identifié, est donc également non fonctionnel. Nous nommons cette conception « **ensembliste de niveau intermédiaire** », car il constitue un stade intermédiaire entre les conceptions ensemblistes de niveau 1 et 2.

L'étude des réponses des différents groupes fait apparaître en définitive de multiples nuances qui traduisent les difficultés des étudiants à organiser les différents mouvements d'abstraction et les différentes dialectiques que nos analyses épistémologiques ont permis de bien mettre en évidence. Il en ressort différents stades, différents agencements de ces caractéristiques de la pensée structuraliste. On peut également en imaginer d'autres : par exemple, une conception relationnelle dialectique, avec PO1 fonctionnel (et un rapport dialectique entre les deux niveaux objets-structure) mais PO2 non fonctionnel. Bien entendu, il ne s'agit que de conceptions a priori, forgées par les

étudiants sur la base du discours de nature méta diffusé par les enseignants d'algèbre abstraite et sur la réflexivité dont les étudiants sont capables, en relation avec la reconnaissance d'invariants opératoires dans leur pratique structuraliste de l'algèbre linéaire et de la théorie des groupes. Il s'agit d'éprouver cette typologie en la confrontant à la logique de l'action, au travail effectif des étudiants. Nous le ferons au paragraphe 2 c) ci-dessous, qui sera l'occasion de présenter sous forme de tableau synthétique les principales caractéristiques de ces 7 conceptions. Par ailleurs, notre typologie se fonde sur les signifiants visibles, sur les aspects mis en avant par les étudiants, qui ne couvrent pas la totalité de leur pensée. Enfin, il s'agit d'un travail réalisé en groupes, donc d'un recueil de conceptions de petits collectifs. Cette modalité favorise le recul réflexif demandé. Si l'agrégation de conceptions individuelles en un point de vue collectif est un phénomène complexe, notre typologie peut néanmoins également être mise à l'épreuve et retravaillée en l'utilisant pour l'analyse de conceptions individuelles.

Enfin, les réponses à la question 4 sont assez uniformes. Ceci traduit le fait que cet exemple a été traité en cours de façon approfondie. Une réponse type est la suivante : « G est abélien d'ordre 4. G est non cyclique car tous ses éléments sont d'ordre au plus 2. G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. » Comme il s'agit essentiellement d'une restitution de connaissances faisant un appel direct à la mémoire, ces réponses sont de peu d'utilité afin de distinguer des conceptions.

2. Une expérimentation en classe de l'activité des banquets

Les 7 groupes précédents ont travaillé sur la théorie des banquets pendant 4 séances d'1h30. Des phases de dévolution et d'institutionnalisation ont ponctué le travail : voir paragraphe II 3. Chaque groupe était tenu de rendre, à la fin de chaque séance, un document, rédigé collaborativement, retranscrivant les réponses et questionnements du groupe. Une rédaction rigoureuse n'était pas exigée, le document pouvant s'apparenter à un cahier de recherches. Il a été explicité que le travail ne serait pas noté, mais l'intérêt de l'activité en vue de l'étude des théories structurales au programme a été souligné, de façon à renforcer le contrat didactique.

La modalité de travail en petit groupes, assez inhabituelle en travaux dirigés à l'université, ainsi que la dimension ludique de l'activité (l'étude d'une structure mystérieuse à élucider, impliquant le réel⁷), a permis une bonne dévolution de la situation. Un petit essoufflement a cependant été constaté en fin d'activité, lorsqu'il s'est agi de rédiger des preuves déductives rigoureuses, impliquant des enjeux davantage formels que conceptuels et cognitifs. Les facteurs psychologiques ainsi que la longueur de l'activité en terme de temps didactique expliquent ce phénomène. C'est pourquoi nous avons proposé que la partie III fasse l'objet d'un travail à la maison.

Ainsi que nous l'avons annoncé au paragraphe II 4, nous allons analyser ces données (productions des 7 groupes) selon 3 axes :

- **Axe 1** : l'abstraction-idéalisation, qui engage les dialectiques concret-abstrait et syntaxe-sémantique. Ceci inclut les analyses sémiotiques et les objets mentaux (externalisés). Nos analyses revêtent une fonction diagnostique. La fonctionnalité du principe OP1 est, entre autres, étudiée.
- **Axe 2** : l'abstraction-thématisation, en appui sur la théorie des groupes, avec sa dimension méta-cognitive. Il s'agit du principe OP2 mentionné dans le paragraphe précédent. Nos

7 On notera que l'activité débute par un poème d'Apollinaire, destiné à matérialiser un changement de contrat. Face au déficit sémantique constaté relativement aux structures abstraites qui prennent l'apparence d'entités « surplombantes » et « désincarnées » (à l'image de ce « palais don du roi qui comme un roi nu s'élève » du troisième vers du poème), l'effet psychologique recherché est d'amener les étudiants à « habiter » la nouvelle structure de banquet à l'aide des représentations qui leurs sont propres (à y mettre de la chaire comme ces « grands pâtés ces os à moelle et mirotons » du sixième vers), à la manière dont on s'approprie un poème à travers un vécu et des projections. Le dernier vers (« pour mes pensées de tous pays de tous les temps ») fait référence, dans une interprétation qui nous est propre, à l'universalité des structures mathématiques.

analyses à ce niveau visent à évaluer si la situation produit l'apprentissage visé de la pensée structuraliste, en terme d'adaptation vis-à-vis du milieu adidactique.

- **Axe 3** : mise en relation des résultats des analyses précédentes avec la typologie de conception développée au paragraphe précédent. Ceci éclaire le rôle du méta-concept de structure et motive notre stratégie d'apprentissage.

a) Axe 1 : abstraction-idéalisation

- **Groupe 1** : en première approche de la question I 1, les étudiants de ce groupe font le lien entre les axiomes (ii) et (iv), mais ils l'interprètent en tant qu'erreur de l'énoncé : « A propos du point (iv), n'est-ce pas plutôt 'unique' au lieu de 'au moins' ? ». En ce qui concerne la sémantique, ils ont beaucoup de mal à construire un modèle : leur unique proposition est $\{2,4\}$ muni de la relation de divisibilité. Cette réponse est erronée car l'axiome (i) n'est pas vérifié

Malgré l'enrichissement du milieu avec les représentations matricielles et les graphes, les étudiants classifient les banquets en s'appuyant sur une représentation idéalisée de personnes autour de tables (une numérotation de points sur des cercles) : voir annexe 3. Ils concluent à l'existence de 2 banquets de cardinal 3 et 9 banquets de cardinal 4, dont 6 à une « table » et 3 à 2 tables. En définitive, la théorie des banquets est pour ce groupe une théorie semi-empirique et non une théorie abstraite : il y a écrasement de la structure par les objets mathématiques qui, en tant que signes, font référence au réel. Le banquet cyclique $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ donné en exemple à la question c) est « modélisé » (selon le terme employé par les étudiants) par « le banquet de cardinal 4 à une table ». Les étudiants réussissent donc la conversion de registre du cadre fonctionnel vers le cadre empirique. Les banquets de l'empirie font office de modèles concrets vis-à-vis de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ qui se situe à un niveau d'abstraction supérieur, alors qu'il s'agit de deux modèles vis-à-vis de la structure abstraite de banquet. Les étudiants ne font pas sens de la demande de « caractérisation abstraite » de ce banquet, mais ils reconnaissent que les deux banquets sont « dans la même classe ». La reconnaissance de forme opère donc, après conversion de registre, alors que le groupe ne reconnaît pas, par exemple, que les 2 banquets de cardinal 3, représenté au sein du même registre, sont isomorphes. Ceci traduit une incompréhension du principe d'abstraction-idéalisation : une numérotation n'est pas une abstraction de la nature des éléments (abstraire, c'est faire disparaître cette numérotation, ce qui permet alors de distinguer les classes par reconnaissance de forme).

Lors de l'activité de définition axiomatique, le groupe ne définit pas de relation ni ne donne de système d'axiomes pour une tablée. Il affirme : « on a un banquet à n éléments vérifiant : si on numérote les éléments de E de sorte que $x_i R x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$ et $x_n R x_1$, on a un banquet qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de $\bar{i} R \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$ ». Le groupe a ainsi intégré l'image mentale de cycle et il la formalise dans le langage des relations, en une représentation structurelle synthétique alors que le langage axiomatique analytique est demandé. La structure de banquet coïncidant avec les banquets de l'empirie, qui comprennent les tablées, il n'y a, pour ce groupe, pas de raison de définir une relation. L'axiomatique abstraite ne joue finalement aucun rôle.

- **Groupe 2** : ce groupe effectue sa recherche de modèle (question I 1 a) par une approche syntaxique : en vertu des axiomes (i) et (iv), il conclut qu'il n'existe pas de modèle à 1 élément puis rédige : « $\{x, y\} \Rightarrow xRy$ et yRx modèle valide ». Malgré le discours méta présent dans le document (« Une donnée (E_0, R_0) spécifiée s'appelle un modèle de l'axiomatique ou plus simplement un exemple de banquet. Le concept de banquet est un concept abstrait, général alors qu'un modèle est concret et particulier »), ce groupe donne le statut de modèle à une telle description syntaxique. A la question I 1 b), il construit des contre-exemples dans le cadre fonctionnel en choisissant l'ensemble E parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\{0\}$ et

des fonctions du type $f(x)=x$ ou $f(x)=x\pm 1$. Dans la moitié des cas, ces contre-exemples ne conviennent pas, ce qui traduit un déficit de contrôle syntaxique. Les axiomes n'ont pas été interprétés d'un point de vue sémantique, ce qui handicape la construction des contre-exemples. Ceux produits le sont sur le modèle de l'exemple donné dans l'énoncé.

Lors de la tâche de classification, le groupe poursuit son approche syntaxique (voir annexe 3). Il traite le cas de 3 éléments à partir des relations obtenues avec 2 éléments, ce qui conduit à affirmer, de façon erronée, qu'il n'existe pas de modèle à 3 éléments. Ceci traduit un déficit de contrôle syntaxique et sémantique ; ce dernier contrôle est rendu difficile par le manque de modèles à disposition (ce groupe ne dispose pas des banquetts de l'empirie). Le groupe affirme l'existence de deux « classes possibles » dans le cas de 4 éléments et les décrit syntaxiquement en termes de relations. Il mentionne pour la seconde classe « on peut éventuellement le définir comme une union de banquetts de cardinal 2 ». Aucune justification n'est donnée : le groupe a-t-il raisonné à partir des axiomes, ou bien s'appuie-t-il sur une image mentale de banquetts ? Dans le cas de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, les étudiants dressent la liste des éléments qui sont en relation et conclut « on est dans le second cas. C'est donc un banquet » (alors qu'il s'agit du premier). Le « modèle symbolique formel » sert donc à vérifier qu'un objet donné satisfait les axiomes de structure alors qu'en général (en théorie des groupes notamment) c'est la donnée d'un modèle qui permet de vérifier, par contrôle sémantique, que la représentation formelle obtenue correspond bien à une classe d'objets (il est nécessaire de garantir l'existence d'un banquet de cardinal 4 vérifiant les propriétés formelles isolées par l'analyse syntaxique, dans un acte qui relève de la synthèse). La réponse à la demande de caractérisation abstraite de ce banquet (« c'est un groupe cyclique ») montre une confusion entre les deux types de structures (banquet et groupe) : la cyclicité, repérée en tant que groupe, n'est pas thématifiée.

Lors de l'activité de définition axiomatique, le groupe définit la relation « être assis à la droite de » et énonce 3 axiomes : « i) il ne peut pas être seul sur sa table ii) il ne peut avoir qu'une seule personne à sa gauche iii) il y a obligatoirement une personne à la droite d'une autre ». L'énoncé syntaxique des axiomes qui est demandé prend donc la forme de l'interprétation sémantique de ces derniers dans le cadre empirique de modélisation du phénomène, ce qui traduit une incompréhension de la démarche d'abstraction-idéalisation qui vise une caractérisation formelle abstraite. Par ailleurs, la condition de cyclicité est totalement absente : les propriétés énoncées sont visiblement insuffisantes afin de caractériser les banquetts parmi les banquetts.

L'approche de ce groupe est donc essentiellement syntaxique ; la structure « écrase » les objets. Les étudiants montrent un déficit de contrôle syntaxique et sémantique et n'articulent pas syntaxe et sémantique. La dialectique concret-abstrait ne fonctionne pas, les étudiants ne distinguant pas les deux niveaux.

- **Groupe 3** : ce groupe déclare que la théorie est valide en exhibant le modèle empirique de 3 personnes, notées x, y, z , disposées autour d'une table ronde, avec pour relation « être à la droite de ». Après enrichissement du milieu avec les représentations matricielles et les graphes, les étudiants classifient les modèles, pour 3 éléments, dans le cadre matriciel. Face aux deux matrices possibles, le groupe « remarque que les banquetts associés à ces matrices sont isomorphes : on passe de l'un à l'autre en échangeant de place 2 personnes ». La notion d'isomorphisme n'est pas formalisée : malgré l'introduction de la représentation matricielle qui fournit un point de vue abstrait sur les relations, le concept de banquet pour ces étudiants apparaît indissociable du contexte des banquetts empiriques, dans lequel le concept d'isomorphisme est interprété sémantiquement. La représentation empirique, analysée en tant qu'union de banquetts (les étudiants ne perçoivent pas la nécessité de donner une définition formelle abstraite de cette opération), leur permet de conjecturer le nombre correct de classes dans le cas général de n éléments : une classe d'isomorphisme est

caractérisées par le nombre de personnes par tablées. En appui sur le concept d'isomorphisme en tant que bijection (donc de permutation d'éléments) et sur le contexte empirique, ce groupe a donc réussi à abstraire une représentation structurale de banquet, liée au théorème de structure des banquets. Cette représentation demeure une représentation mentale, mais elle est opérationnelle pour caractériser et dénombrer les classes. L'exemple $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est converti du cadre fonctionnel au cadre empirique, en passant par le cadre des graphes : les étudiants ont mobilisé ce nouveau registre en vertu de son aptitude à représenter graphiquement les relations (voir annexe 3) ; les flèches sont dessinées en arcs de cercles, ce qui fait le lien avec la représentation première sous forme de tables circulaires. Les étudiants ont donc développé un point de vue relationnel à la fois entre les éléments et entre les sous-ensembles (union de tables), en appui sur des images mentales qui leur permettent d'appliquer un processus intuitif de reconnaissance de formes. La représentation mentale sous forme d'union de cercles permet d'unifier les différents modèles.

Lors de l'activité de définition axiomatique, le groupe choisit la relation « être à droite de » et donne les axiomes de banquets, auxquels est adjoint l'axiome de renumérotation des éléments pour constituer un cycle, axiomes énoncés avec des quantificateurs. Les étudiants sont donc capables de mobiliser les deux dimensions syntaxiques et sémantique, mais n'articulent pas les deux au-delà de ce qui est permis par les représentations mentales (l'isomorphisme en tant que permutation de personnes).

- **Groupe 4** : ce groupe remarque que les axiomes (ii) et (iv) reviennent à demander l'existence et l'unicité de l'élément y en relation avec x puis donne comme modèle le banquet cyclique d'ordre 2, construit sur l'ensemble $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à l'image de l'exemple donné à la question c).

Après enrichissement du milieu, les étudiants décident d'utiliser, pour la tâche de classification, les tables de relations (voir annexe 3 ; ils se distinguent ainsi du groupe précédent qui a utilisé des matrices). Ils aboutissent aux deux possibilités dans le cas de 3 éléments ; comme il s'agit d'un point de vue abstrait sur les relations (à la différence des matrices qui ont le statut de modèles), ils considèrent qu'il s'agit de deux classes et en construisent des modèles sur l'ensemble $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Ils argumentent après coup qu'il s'agit en fait d'une même classe en construisant, de façon erronée, un isomorphisme (ils donnent une permutation circulaire). N'ayant pas distingué par des représentations sémiotiques différentes les éléments des deux ensembles, ils confondent en fait les automorphismes d'un des modèles avec les isomorphismes d'un modèle à l'autre. N'ayant pas donné de définition formelle d'isomorphisme, ils ne peuvent pas exercer un contrôle syntaxique. Dans le cas de 4 éléments, le groupe énumère toutes les tables possibles, ce qui est fastidieux. Ayant appris, suite à une intervention de l'enseignant, à extraire de la table des relations et à présenter de façon syntaxique synthétique les relations qui caractérisent le modèle, le groupe parvient à classer tous les cas en deux classes.

Ce groupe essaie donc, dans ses démarches, d'articuler syntaxe et sémantique. Il distingue bien deux niveaux. Les banquets de l'empirie n'apparaissent pas dans le travail rendu et les étudiants ne s'appuient pas sur de telles représentations mentales. La notion d'isomorphisme n'est pas reliée à la reconnaissance des formes, mais à un travail syntaxique sur les symboles. Outre des fonctionnements cognitifs différents, ceci peut s'expliquer par des positionnements épistémologiques différents, notamment le statut du réel vis-à-vis des objets et théories mathématiques : par exemple, peut-on accorder à un banquet empirique le statut de modèle ?

- **Groupe 5** : pour ce groupe, user de modèles empiriques afin de démontrer la cohérence des axiomes ne pose pas problème :

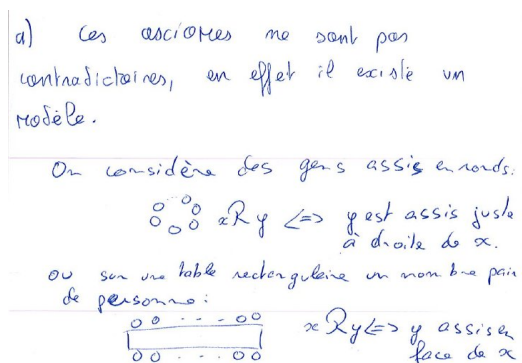


Figure 2 : modèles empiriques de banquets proposés par le groupe 5

Par contre, l'étude de l'indépendance des axiomes est interprétée de façon naïve et incorrecte: ces derniers sont tenus pour indépendants parce que « (i) concerne juste un élément, (ii) juste le second élément, (iii) juste le premier et (iv) juste l'existence ». Le groupe rajoute : « par contre, si dans (iv) unicité elle est de trop car impliquée par (iii) ». Les étudiants ont donc identifié des différences sémantiques entre axiomes, pris séparément, alors qu'il s'agit de considérer également des regroupements.

La tâche de classification est effectuée par une approche syntaxique. La rédaction apparaît assez elliptique, mais elle laisse entrevoir que les étudiants sont capables de justifier leurs raisonnements syntaxiques : « car si par ex ... », voir annexe 3). Dans le cas de 3 éléments, les étudiants mentionnent « à permutation près » ; dans le cas de 4 éléments, ils mettent en avant deux cas et donnent la liste des relations entre les 4 symboles. Aucun retour sémantique n'est effectué, ni de justification donnée quant au fait que les deux cas constituent deux classes distinctes. Les étudiants affirment que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ « correspond au premier cas » ; le mot classe n'apparaît qu'à la question d), lorsqu'il est fait usage explicitement de ce terme dans l'énoncé : « il appartient à la classe des banquets à 1 table ronde ou 'banquet cyclique' ». Ce dernier est caractérisé abstraitement par la possibilité de relier deux éléments quelconques par une « chaîne » (selon la terminologie des étudiants) d'éléments en relation. Les étudiants n'avaient probablement pas conscience auparavant qu'ils effectuent une classification à isomorphisme près, ce fait étant dissimulé derrière le symbolisme algébrique qui introduit un premier niveau d'abstraction ; l'ambiguïté est clairement mise en évidence par la mention « à permutation près » que nous avons relevée. Ils auraient dû indiquer qu'ils effectuent un raisonnement à permutation près (ce qui dissimule la notion d'isomorphisme) et non que le résultat est à permutation près, ce qui suggère plusieurs types.

Dans l'activité de définition axiomatique, les étudiants reprennent cette condition, qui remplace l'axiome (iv), et est donc également interprétée comme une condition d'existence (plus forte pour la table que pour un banquet). La relation considérée est toujours « être à la droite de » et chaque axiome, exprimé formellement, est justifié par son interprétation empirique, retranscrite à côté.

Ce groupe distingue donc bien deux niveaux : objets et structure, mais il n'articule pas syntaxe et sémantique dans la tâche de classification. La notion syntaxique manquante est celle d'isomorphisme et les étudiants ne s'appuient pas, à ce niveau, sur des images mentales, ce qui ne leur permet pas d'utiliser les processus de reconnaissance de forme. L'abstraction mise en œuvre par les étudiants est fondée sur l'usage du symbolisme et l'axiomatique, ce qui est insuffisant pour l'abstraction-idéalisation. Ce n'est qu'après-coup qu'ils développent l'image mentale de cycle, ce qui leur permet de caractériser abstraitement de façon formelle le banquet cyclique et de conceptualiser sa classe.

- **Groupe 6** : ce groupe envisage d'emblée les banquets de l'empirie : « x, y, z sont des personnes, R est la relation ' x est à droite de y ' ou ' y est à droite de x '. On peut modéliser cette structure par une table ronde. Alors les axiomes sont valides ». Il s'agit donc d'une « modélisation par le concret », au sens de la maquette de l'architecte et non d'une modélisation mathématique d'un phénomène, les étudiants mélangeant le terme « modèle » (d'une axiomatique) avec la démarche de modélisation. L'indépendance des axiomes est affirmée sans justification ; le groupe remarque une forme de symétrie dans les énoncés des axiomes (ii) et (iii) et conclut que ces derniers « impliquent la symétrie de R », ce qui constitue une extension sémantique erronée, au sens de la symétrie d'une relation binaire.

Après enrichissement du milieu, les étudiants se lancent dans la tâche de classification des modèles, directement avec le cas de 4 éléments, en mobilisant le tableau des relations, mais ils abandonnent suite au grand nombre de cas à considérer. Ils tentent ensuite de définir la notion d'isomorphisme dans le cas de deux éléments : ils se donnent deux tables de relations identiques mais relatifs à des couples d'éléments (x, y) et (x', y') distincts. La notion d'isomorphisme qu'ils formulent correspond à la notion de bijection, ce qui dénote une incompréhension de la définition générale d'isomorphisme : le groupe mentionne « Dans tous les cas, ϕ respectera R' et sera donc un isomorphisme », alors qu'il s'agit de respecter les relations, dans un mouvement « coordonné » (un isomorphisme coordonne les rapports entre 2 couples d'éléments). L'identité de structure est donc conceptualisée via l'identité des tables et reliée à la notion d'isomorphisme, mais la conceptualisation de la définition syntaxique de cette notion est incomplète.

Le questionnement de ce groupe est globalement assez pauvre (en quantité et en qualité) ; tant l'interprétation sémantique du formalisme que les manipulations syntaxiques posent des difficultés aux étudiants, qui éprouvent beaucoup de mal à engager des démarches.

- **Groupe 7** : avant de répondre à la première question, ce groupe signale le contexte des banquets de l'empirie, suscité par la lecture de l'énoncé : « réflexion sur l'énoncé : on a pensé à $R =$ 'personne à notre droite' ». La non-contradiction et l'indépendance des axiomes est affirmée sans justification. Les étudiants mettent cependant en avant leur caractère « simplifiable » : ils envisagent le regroupement des axiomes (ii) et (iii) d'une part, (i) et (iv) d'autre part.

Lors d'une première réalisation de la tâche de classification, ce groupe donne, sans grande justification, une classification s'appuyant à la fois sur l'analogie avec la théorie des groupes et sur les banquets de l'empirie : l'unicité dans le cas de 2 ou 3 éléments est reliée à la primalité de ces entiers, les notations B_4 et $B_2 \times B_2$ sont introduites, le premier étant illustré par le banquet circulaire et le produit cartésien par le banquet rectangulaire.

Après enrichissement du milieu, lors d'une seconde réalisation de la tâche, les étudiants justifient l'unicité des banquets de cardinaux 2 et 3 par des arguments de nature structuraliste (« plus petit banquet possédant au moins 1 élément », « unique car les 3 éléments sont en relation ») mais incomplets. Dans le cas de 4 éléments, le groupe fait appel à la fois à des représentations sémiotiques empruntés à la théorie des groupes et à la représentation des relations sous forme fonctionnelle (à un élément donné est associé un autre). Leur rédaction mélange de façon assez confuse les deux structures (voir annexe 3).

Ce groupe essaie donc, dans ses démarches, de mettre en relation un formalisme abstrait structuraliste et structurant emprunté à la théorie des groupes avec des représentations concrètes évoquées par l'axiomatique de banquet. Il se retrouve cependant en difficultés dans l'expression et l'utilisation des analogies qu'il perçoit et ne parvient pas à engager les concepts dans des preuves afin de justifier les résultats formulés sur des bases intuitives.

Ces analyses détaillées au niveau de chaque groupe (niveau d'analyse nécessaire dans l'optique de l'axe 3) nous amènent aux conclusions globales suivantes :

- **Dialectique concret-abstrait** : à part le groupe 4, tous les groupes mentionnent les banquets de l'empirie, souvent en premier lieu, ces modèles étant directement évoqués par le terme banquet et ses représentations intuitives phénoménologiques (les banquets de mariage). Ces représentations intuitives serviront souvent, tout au long de l'activité, d'images mentales afin de raisonner dans l'abstrait (voir dernier point ci-dessous). Les principaux modèles mathématiques construits par les étudiants sont des variantes de l'exemple donné plus loin dans l'énoncé ; ceux qui n'ont pas lu l'énoncé jusqu'à cette question se trouvent en difficulté pour interpréter sémantiquement le système d'axiome donc construire un modèle. Les modèles génériques (matrices et graphes), intermédiaires du point de vue concret/abstrait, n'apparaissent qu'au cours d'une discussion avec l'enseignant. Un enrichissement du milieu apparaît fondamental afin que les étudiants bénéficient de suffisamment de modèles, dans différents cadres, à unifier. Dans le cas contraire, une approche majoritairement syntaxique conduit à confondre le niveau formel des symboles et axiomes avec celui des modèles. En effet, plusieurs groupes ne distinguent pas bien les deux niveaux objets - structure, soit écrasant les objets par la structure, ce qui conduit à privilégier les aspects syntaxiques, soit écrasant la structure par les objets dans une approche sémantique souvent mono-cadre, ce qui les conduit à classer les banquets de l'empirie. De façon cohérente, ces groupes ne parviennent pas, dans la situation inverse de définition axiomatique, à fournir un système d'axiomes, malgré le support de l'axiomatique des banquets. Les étudiants qui réussissent à caractériser abstraitement le banquet cyclique s'appuient sur l'image mentale du cercle et la notion de processus cyclique, ce qui leur permet de conceptualiser abstraitement cette classe. L'incompréhension du rapport particulier du concret à l'abstrait en jeu dans l'algèbre structuraliste handicape ainsi la réalisation des tâches par les groupes concernés, tandis que ceux qui ont intégré ce rapport s'appuient sur des représentations mentales issues des domaines d'objets concrets afin de raisonner sur la structure abstraite.
- **Dialectique syntaxe-sémantique** : les groupes s'engagent dans la tâche de classification soit par une approche syntaxique, sans retour sur la sémantique (requis pourtant afin de vérifier que les classes sont non vides), soit par une approche sémantique, listant tous les cas dans un cadre donné, sans utiliser les possibilités de la syntaxe afin de réduire les cas (raisonnements à permutation près) et avec des difficultés à identifier les modèles isomorphes du fait de l'absence d'un concept syntaxique d'isomorphisme. Aucun groupe n'a entrepris de donner une définition d'un isomorphisme. Les contrôles syntaxiques et sémantiques apparaissent inexistantes ou insuffisants (par exemple, le groupe 2 affirme qu'il n'existe pas de modèle à 3 éléments), les étudiants n'articulent pas ou peu syntaxe et sémantique. Ils préfèrent utiliser des processus intuitifs de reconnaissance de forme à partir de représentations symboliques dans le registre graphique (graphes ou autre représentation combinatoire) capables d'assurer pour eux un certain couplage entre syntaxe et sémantique.
- **Représentations mentales et sémiotiques** : l'image mentale d'une union de cercles marqués de points numérotés semble guider les raisonnements formels de plusieurs groupes. Elles apparaissent en tant que représentations sémiotiques dans les productions de plusieurs groupes. Étant donnée leur fonction, nous les considérons comme des objets mentaux (au sens de Freudenthal) externalisés. Un processus complet d'abstraction consiste à effacer ces numéros, ce qui conduit à une représentation sémiotique de ce que nous avons appelé un objet structural. Le groupe 3 parvient ainsi à dénombrer correctement le nombre de classes d'isomorphisme, en appui sur ces représentations intuitives ; il interprète un isomorphisme comme une permutation de personnes (au sein d'une même table). Beaucoup de groupes établissent que deux modèles sont isomorphes en s'appuyant sur un processus visuel de reconnaissance de forme : ils réalisent pour cela une conversion sémiotique vers le registre graphique afin d'utiliser de ces représentations circulaires, qui permettent ainsi d'unifier différents modèles. Certains groupes (par exemple le groupe 1) n'arrivent pas à reconnaître

des modèles isomorphes au sein d'un même cadre, par une incompréhension du principe d'abstraction et par manque de conceptualisation de la notion d'isomorphisme qui constitue la théorisation de ces conversions et traitements, qu'il y ait ou non changement de cadre. La conceptualisation de la structure abstraite de banquet cyclique, qui se traduit par la capacité à en formaliser une description structurale, est réalisée par les étudiants en appui sur l'image mentale du cercle et la notion de processus cyclique.

b) Axe 2 : abstraction-thématisation

Notre analyse selon l'axe 1 a permis de discuter les premiers aspects de la thématization décrits dans la liste de questions posées au paragraphe II. 4. Nous allons maintenant, pour chaque groupe où ce sera possible, d'une part analyser plus précisément les rapports explicites que ces derniers établissent avec la théorie des groupes et décrire les fonctionnements analogiques, souvent implicites, que l'on peut inférer, d'autre part discuter les trois dernières questions dans la liste du paragraphe II. 4, relatives à l'activité d'élaboration théorique (question II 2 de la théorie des banquets), dont nous n'avons pas encore rendu compte. Certains groupes ont rendu peu de traces de leur travail⁸, pour cette dernière partie, ce qui limite nos analyses.

- **Groupe 2** : en réponse à la demande de caractérisation abstraite du banquet « $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de la relation $\bar{i} R \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$ » (questions I 2 c) et d), ce groupe dresse la liste des éléments qui sont en relation et la présente selon un motif cyclique, puis il répond « C'est un groupe cyclique ». Ceci montre que ce groupe sait faire sens d'une caractérisation abstraite de structure, dans le cas de la théorie des groupes, mais cette réponse est inappropriée dans le cas des banquets. Pour ce groupe, « ce qui caractérise la structure abstraite de ce banquet parmi les différentes classes de banquets » (selon la formulation de l'énoncé) est à trouver dans la structure particulière (de groupe) de l'ensemble sur lequel est construit le banquet, alors que cette structure intervient uniquement dans la définition de la relation R, afin d'en permettre la formulation fonctionnelle grâce à l'addition des classes d'entiers. La cyclicité n'est donc pas thématized du fait d'une confusion des structures due à leur imbrication, qui handicape le fonctionnement analogique. Le groupe s'appuie sur l'image mentale des banquets circulaires (« on peut éventuellement le définir comme une union de banquets de cardinal 2 ») plutôt que sur une analogie avec la classification des groupes d'ordre 4.

Lors de l'élaboration théoriques, les étudiants posent des définitions mais ne s'engagent pas dans les preuves : « Un sous banquet (E', R') d'un banquet (E, R) est un banquet avec $E' \subset E$. Un banquet irréductible est une tablée. $\langle x \rangle$ est le plus petit banquet contenant x ou encore qui n'admet pas de sous-banquets triviaux ». Les étudiants n'étudient donc pas davantage les propriétés (dans la liste d'axiomes) directement héritées par un sous-ensemble, afin d'établir un critère pratique de sous-banquet. La notion d'irréductibilité, qui est la négation d'existence de sous-objets, dont l'illustration en théorie des groupes est à trouver dans la notion de groupe simple, est décrite à travers l'identification des banquets irréductibles en tant que tabléés (peut-être à travers la reconnaissance topologique des composantes connexes, en rapport avec la représentation mentale), donc sans être capable d'en mettre en évidence, de façon discursive, le sens en tant que concept. La caractérisation structurale du banquet engendré (minimalité pour l'inclusion) est identifiée ; alors que l'on s'attendrait à une description en terme d'itération de la relation, afin de faire le lien avec la dimension de processus, dans l'esprit de la dualité processus/structure de Sfard dont nous avons parlé dans l'analyse a priori, le groupe effectue un lien avec l'irréductibilité. C'est la notion de tablée qui suscite cette connexion ; dans le cadre de la théorie des groupes, un groupe cyclique possède en général des sous-groupes. La notion de générateur n'est donc

⁸ Outre le phénomène d'essoufflement dont nous avons parlé, ceci est dû à un manque de vigilance de notre part, en tant qu'enseignant lors de l'expérimentation : un rappel du contrat et une meilleure dévolution de l'écriture des preuves aurait permis de recueillir des traces plus riches.

pas thématisée, tout comme l'irréductibilité. Ce groupe ne parvient pas à s'appuyer sur les modes de pensée en théorie des groupes.

- **Groupe 3** : ce groupe ne fait aucune mention explicite de la théorie des groupes dans les documents rendus. Les formalisations par le groupe des notions de sous-banquet et de banquet engendré laissent cependant apparaître un phénomène de sémiotique (symboles $<$ et R^k) traduisant une extension à un nouveau contexte de représentations sémiotiques empruntés à la théorie des groupes.

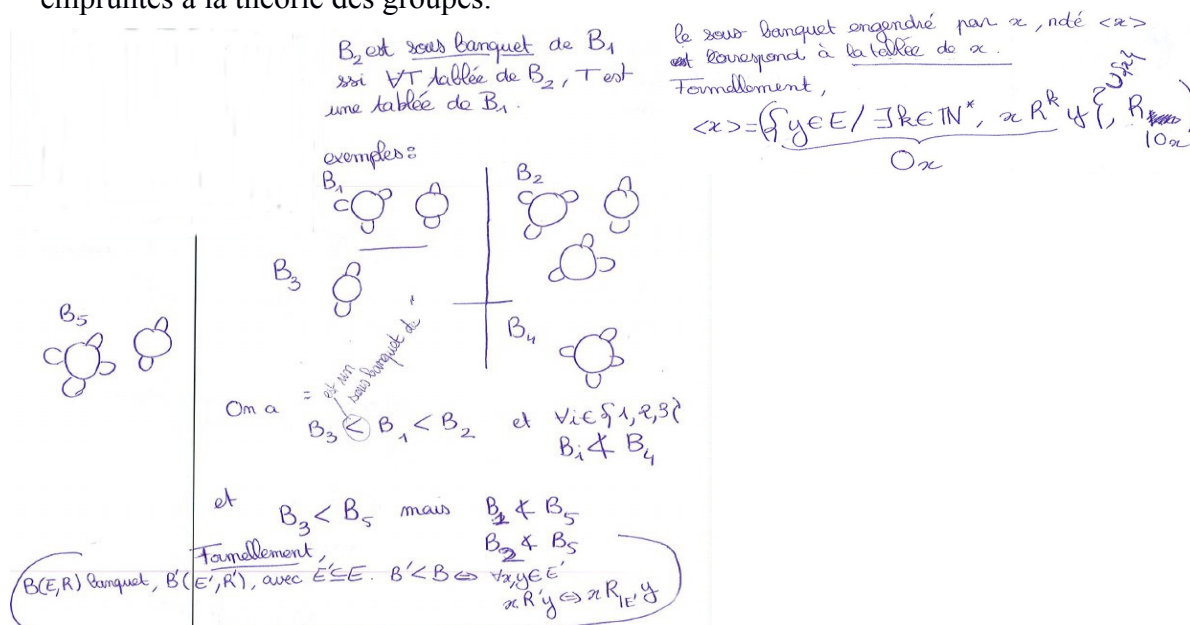


Figure 3 : travail de formalisation des notions de sous-banquet et de sous-banquet engendré, effectué par les étudiants du groupe 3.

Les étudiants effectuent ainsi leur travail de formalisation à la fois en appui sur les représentations phénoménologiques (et les images mentales associées) et sur l'analogie avec le contexte des groupes. La propriété de sous-banquet est analysée comme une propriété de congruence avec une sous-partie et retranscrite formellement par la coïncidence de R' avec la restriction de R à E' , ce qui est insuffisant. Les représentations des étudiants ne leur permet pas d'envisager une extraction de personnes ne se situant pas sur une même table. La stabilité du sous-ensemble sous la loi en théorie des groupes ($(x, y) \in H^2 \Rightarrow x * y \in H$) est également trompeur : $x R y \Rightarrow x R' y$, ou même l'équivalence entre les deux, ne convient pas dans le contexte des banquets (voir l'analyse a priori, paragraphe II.2 d) pour une expression correcte de la propriété de stabilité). Ces éléments montrent un début de thématisation, avec un fort appui sur les représentations phénoménologiques, donc le processus d'idéalisation.

- **Groupe 4** : ce groupe donne les définitions suivantes : « Soit (E, R) un banquet et $F \subseteq E$. On dit que (F, R) est un sous-banquet de (E, R) si (F, R) est un banquet. (E, R) est irréductible si $\forall F \subsetneq E$, (F, R) n'est pas un banquet. Soit $x \in E$. $\langle x \rangle = \{ y \in E, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } x R^k y \}$ = sous-banquet irréductible contenant x ». A la différence du groupe précédent, ce dernier considère ce travail de définition essentiellement comme une tâche formelle, qui ne nécessite pas d'engager explicitement la sémantique des banquets et leur sens phénoménologique. La restriction de R à F n'est pas distinguée de R , le groupe ne cherche pas à établir de critère de sous-banquet. La notion de sous-banquet engendré est directement liée à l'idée d'itération de la relation. Ce groupe a ainsi thématisé des propriétés formelles, qu'il retranscrit dans le cadre des banquets. Il n'hésite pas à s'engager dans la preuve

demandée à la question 2 b), ayant déjà identifié la coïncidence entre tablées et banquets irréductibles (dernière égalité avancée au niveau des définitions, qui tient lieu de propriété). Le lien processus/structural n'est cependant pas établi relativement à la notion de sous-structure engendrée : l'absence de conceptualisation de $\langle x \rangle$ en tant que minimal pour l'inclusion diminue la lisibilité de la preuve qui n'est pas « portée » par les concepts comme elle pourrait l'être. Les étudiants en recourent ainsi aux axiomes directement ; leur écrit laisse apparaître de nombreuses ratures, la dimension organisatrice⁹ (Battie 2003) des concepts n'opère pas.

(3) Il y a égalité :

$\subseteq$: tablée est irréductible : Soit (T, R) une tablée.
 Soit $x \in T$, $\forall y \in T$, Soit $V \subset T$, $\forall y \in V$, (V, R) n'est pas un banquet.
 Ce n'est pas un banquet car $(x) \neq (y)$ dit que l'on a un unique élément y tq on a xRy .

$\forall xRy$ et les autres axiomes de tablée sont vérifiés (car c'est un banquet) donc c'est une tablée.

Soit $x \in V$ tq $\exists y \in T \setminus V$ tq xRy . Par (ii) $\exists y' \in V$ tq xRy' $\Rightarrow (V, R)$ n'est pas un banquet (par (iv)).

$\supseteq$: Soit (E, R) un banquet irréductible.
 $\forall F \subset E$, (F, R) n'est pas un banquet. La seule négation possible est la (iv). (car $F \subset E \Rightarrow (i), (ii)$ et (iii)).
 Donc $\forall F \subset E$, $\exists x \in F$ tq $xRy \Rightarrow y \notin F$.
 Donc si on considère la famille $\mathcal{F}$ de (E, R) banquet, $\exists (C, R)$ sous banquet de (E, R) tq (C, R) cyclique car (i), (ii), (iv) : vérifiés.
 Si (E, R) est irréductible, il est donc cyclique.
 Donc c'est une tablée.

2) b) Les tablées sont les banquets irréductibles.

démo : Soit B un banquet étant une tablée.

Soit B' un s-banquet de B , soit $B' \neq \emptyset$, donc $\exists x \in B'$ donc $\langle x \rangle \subset B'$, or $\langle x \rangle = B$ donc $B \subset B'$ donc $B = B'$.

Donc $B' = \emptyset$ ou B .

Donc B est irréductible.

or B est irréductible, donc $\langle x \rangle = B$.

or : $\langle x \rangle$ est une tablée.

Donc B est une tablée. $\square$

Figure 4 : comparaison entre les démonstrations données par les groupes 4 (à gauche) et 5 (à droite) en réponse à la question II 2 b). Présence à droite d'une dimension organisatrice portée par les concepts.

Le groupe 4 a ainsi thématiqué des notions de théorie des groupes, mais cette thématisation se fonde sur le formalisme et l'axiomatique, elle n'a pas intégré un point de vue conceptuel relationnel au niveau ensembliste des structures (liens entre différentes sous-structures) ni acquis la dimension organisatrice (Battie 2003) des concepts vis-à-vis des preuves.

- **Groupe 5** : ce groupe donne essentiellement les mêmes définitions que le groupe précédent, à part la définition du sous-banquet engendré, qui est défini comme le plus petit sous-banquet contenant l'élément, puis décrit dans les mêmes termes que le groupe 4, sans justification. Ce point de vue structurel leur permet de donner une preuve conceptuelle de la caractérisation des tablées en tant que banquets irréductibles (voir figure 9). Les étudiants admettent implicitement qu'une tablée est engendré par l'un quelconque de ses éléments ; on

9 « La dimension organisatrice s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée. Ce raisonnement organise et structure les différentes étapes ; il nous permet de comprendre l'idée générale de la démonstration » (Battie 2003 p. 21)

peut faire l'hypothèse que l'image mentale de la table circulaire contribue à ce que ce fait soit tenu pour évident, donc ne nécessitant pas d'être énoncé en tant que lemme. Ce groupe donne ensuite une formalisation très rigoureuse de l'opération d'union de banquets mais ne dispose pas du temps nécessaire pour se lancer dans la recherche d'une preuve du théorème de structure, correctement énoncé (l'existence uniquement).

- **Groupe 7** : ce groupe fonde directement sa classification des banquets de cardinal inférieur ou égal à 4 sur l'analogie avec la classification des groupes de petits ordres : il affirme l'unicité de la classe de modèles pour 2 et 3 éléments sur la base de la primalité de ces nombres (ce qui constitue un raisonnement de théorie des groupes mobilisant la notion d'ordre d'un élément), introduit des notations B_4 et $B_2 \times B_2$ à l'image de C_4 (groupe cyclique d'ordre 4) et du produit cartésien de groupes (le produit cartésien de banquets n'est pas défini), voir annexe 3. Plus loin, il note $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et interprète $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme un groupe de permutation de 2 éléments, la notation fonctionnelle faisant le lien avec la notion de relation. Le parallélisme entre les deux structures apparaît également dans la formulation de la réponse du groupe à la question I 2 c) : « c'est un groupe cyclique (d'ordre 4), c'est un banquet », ainsi qu'à la question d) où le groupe énumère les relations jusqu'à boucler ($\bar{3} R \bar{0}$) puis les éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ jusqu'à $i^4=1$. Bien entendu, l'image mentale des banquets de l'empirie a suscité ce rapprochement, renforcé par des analogies, repérées par le groupe, au niveau de propriétés formelles des relations. Mais ce dernier essaie davantage de transférer les résultats de théorie des groupes à ce nouveau contexte plutôt que d'en thématiser les méthodes. La théorie des groupes sert essentiellement de théorie structurale permettant d'interpréter le domaine phénoménal des banquets et prédire des résultats. Le groupe se trouve incapable de transposer les démarches menées en théorie des groupes, dans ses aspects syntaxiques et sémantiques, à ce nouveau contexte.

Au niveau de l'élaboration théorique, ce groupe définit un sous-banquet avec la condition insuffisante $R'=R|_E$. Il illustre cette définition par un dessin de 2 tables qui diffèrent par l'omission d'une personne. La situation proposée ne correspond pas à une relation de sous-banquet : le second dessin est bien un « sous-dessin » du premier dessin, mais l'omission d'une personne induit de nouvelles relations qui modifient la structure, phénomène passant inaperçu des étudiants. Les étudiants ne parviennent donc pas à articuler syntaxe et sémantique sur cet exemple. Le sous-banquet engendré par un élément est décrit en tant que minimal pour l'inclusion et représenté sous forme circulaire avec des éléments x, x' et x'' . Une description en terme d'itérés de la relation n'est pas donnée, peut-être à cause du choix de la représentation sémiotique qui ne fait pas apparaître des indices x_i , donc l'ensemble $\mathbb{N}$ qui contient la notion de succession. Enfin, l'opération de réunion de banquets est étudiée, toujours en appui sur un dessin. Ce groupe propose, à partir de 2 tables, d'intercaler les personnes afin de former une table unique. Là encore, les relations entre personnes sont perdues, de sorte que le résultat de l'opération ne contient pas les banquets initiaux en tant que sous-banquets.

Pour résumer, ce groupe montre des gestes de thématisation mais il a du mal à articuler les représentations concrètes avec le formalisme abstrait qui est le propos de la thématisation. Ceci se reflète, de façon cohérente, par des difficultés à articuler syntaxe et sémantique. Un manque de rigueur et de contrôle dans l'usage de la syntaxe et des concepts handicape, au niveau de l'étape de formalisation, les démarches analogiques menées par ce groupe, en appui sur la sémantique.

Ces analyses détaillées du travail des groupes nous permettent de dresser les principales conclusions suivantes :

- Seuls 2 groupes sur les 7 mettent en œuvre des démarches syntaxiques dans l'étude des banquets de petits cardinaux, ce qui montre un déficit de thématisation du calcul symbolique

associé à une structure abstraite, en lien avec les axiomes qui dictent les règles du jeu des opérations formelles autorisées. Aucun groupe n'a thématiqué la notion d'isomorphisme, contrairement à ce que nous avons prévu dans l'analyse *a priori*. Un isomorphisme n'est pas conceptualisé par les étudiants en tant que bijection préservant les relations, ce qui ne permet pas de rendre cette notion opératoire : l'isomorphisme entre banquets est ainsi établi essentiellement par la reconnaissance d'une congruence de formes. Les étudiants n'articulent pas syntaxe et sémantique, bien que cette dialectique soit constitutive de la notion de structure abstraite dans ses rapports aux objets, et qu'elle soit amenée à jouer, de façon naturelle, un rôle important dans la tâche de classification. Cette dernière n'est pas d'emblée conceptualisée, par beaucoup de groupes, comme ayant lieu à isomorphisme près. Tout ceci montre un déficit de thématisation de la notion de structure abstraite, dans ses rapports à des objets concrets, donc de la thématisation dans son rapport à l'idéalisation. Il faut noter cependant que les étudiants ont classifié des modèles uniquement en théorie des groupes, alors qu'une pluralité de contextes différents est nécessaire afin d'identifier des invariants opératoires. Il est fort probable que la portée conceptuelle de la classification des groupes de petits ordres ait difficilement été identifiée par les étudiants. L'activité des banquets, soutenue par l'action didactique de l'enseignant, peut permettre aux étudiants d'identifier ces invariants qui éclairent le fonctionnement des théories structuralistes. En particulier, la théorie des banquets est particulièrement pertinente afin de produire la thématisation de la notion d'isomorphisme, qui fait cruellement défaut, en soulignant son lien avec la notion de relation tout en le liant à son sens étymologique d'application conservant la forme, donc en articulant syntaxe et sémantique.

- Les processus de thématisation mis en œuvre par les étudiants s'appuient à la fois sur les représentations empiriques (et les images mentales associées) et sur la théorie des groupes. Certains groupes utilisent de façon abusive le formalisme de théorie des groupes et transfèrent des résultats plutôt que de transposer des méthodes et des modes de pensée. La thématisation de la notion de sous-structure pose des difficultés aux étudiants qui choisissent de préciser cette notion par un critère de sous-structure analogue à celui des groupes. Ces difficultés peuvent s'analyser comme des difficultés à articuler syntaxe et sémantique dans l'expression de la condition de stabilité. La notion de sous-structure engendrée par un élément est en général bien thématisée, grâce à l'appui offert par la représentation mentale de cycle et de processus cyclique. Seuls deux groupes montrent une capacité à s'engager dans une preuve. Le groupe ayant assimilé la dualité processus/structurel du concept de sous-structure engendrée par un élément parvient à exprimer la dimension organisatrice (Battie 2003) des concepts vis-à-vis des preuves. Le point de vue structurel sur le sous-groupe engendré (en tant minimal pour l'inclusion), la capacité à définir formellement une loi abstraite de réunion de sous-structures et à énoncer correctement un théorème de structure témoignent de la thématisation de la combinatoire des structures, donc d'un point de vue relationnel structural au niveau des ensembles. Cet aspect de la thématisation apparaît nettement dans les travaux du groupe 5 ; elle est en germe chez le groupe 3 et fait défaut chez les autres groupes.

c) *Axe 3 : mise en relation des résultats précédents avec la typologie de conceptions*

Le tableau ci-dessous résume les principales caractéristiques de la typologie de conceptions que nous avons dégagés vis-à-vis du méta-concept de structure :

Groupe N°	Conception	PO1	Concret-abstrait	Syntaxe-sémantique	PO2	Questions structuralistes
1	ensembliste de niveau 1 : la structure est une classe ensemble+loi(s) identifiée à l'un de ses représentants	NF	écrasement de la structure par les objets, absence de mention de caractères FUGS	dimension sémantique prédomine	NF	
2	relationnelle : la structure résulte de l'abstraction des relations	I	dirigé principalement des objets vers la structure, FGS	syntactique prédomine (logique des relations)	I	formulations vagues
3	ensembliste de niveau 2 : les structures en tant que point de vue abstrait combinatoire	?	peu de mention des objets, GS	syntactique prédomine (aspects combinatoires)	F	combinatoire + morphismes
4	ensembliste dialectique : deux niveaux objets-structure liés par un double mouvement généralisateur-unificateur	F	distinction des deux niveaux objets-structure en rapport dialectique, GU	sémantique éventuellement prépondérant	NF	morphismes
5	structuraliste : points de vue relationnels au niveau des objets (logique des relations) et des structures (combinatoire, morphismes)	F	les structures pour comparer et faire des analogies entre objets, U	rapport dialectique ?	F	combinatoire + morphismes
6	axiomatique : la structure en tant que système axiomatique qui symbolise un ensemble muni de lois	I	Confusion entre les niveaux objets-structure, S	syntactique prédomine	NF	
7	ensembliste de niveau intermédiaire : la structure comme principe d'organisation abstrait, mal relié aux objets	I	Deux niveaux sont distingués, mais leurs liens sont encore flous, S	difficultés à articuler les deux	I	

Sigles (relatifs à PO) : F = fonctionnel, NF = non fonctionnel, I = identifié mais non fonctionnel

Autres sigles : F = formalisateur, U = unificateur, G = généralisateur, U =unificateur

Nous allons maintenant synthétiser, sous forme d'un tableau similaire, les éléments principaux de nos analyses selon les axes 1 et 2, afin de pouvoir procéder à une comparaison. L'étude selon l'axe 1 (abstraction-idéalisation) permet de compléter les 3 premières colonnes du tableau et l'étude selon l'axe 2 (abstraction-thématisation) les deux dernières :

Gr. N°	PO1	Concret-abstrait	Syntaxe-sémantique	PO2	Thématisation
1	NF	Écrasement de la structure par les objets : la théorie des banquets est une théorie semi-empirique ; reconnaissance de banquets isomorphes uniquement au sein de registres différents par congruence de formes	Sémantique ; aucune axiomatique n'est donnée dans l'activité de définition	?	?
2	NF	Deux niveaux non clairement distingués : écrasement des objets par la structure (point de vue syntaxique) ; expression des axiomes dans la sémantique empirique lors de la tâche de définition	Syntaxique prépondérant ; déficit de contrôle syntaxique et sémantique	NF	Cyclicité non thématisée ; confusions entre les deux structures de groupe et de banquet ; générateur et irréductibilité non thématisés
3	A	Deux niveaux sont distingués : axiomes et domaine phénoménal. Le processus d'abstraction conduit à des représentations mentales opératoires mais non formalisées.	Articulation intuitive entre dimensions syntaxiques sémantiques à travers des représentations mentales (l'isomorphisme en tant que permutation de personnes autour d'une même table)	A	Un début de thématisation qui se caractérise par le transfert de rep. sémiotiques de théorie des groupes mais l'appui sur les représentations phénoménologiques (idéalisation) prédomine sur la thématisation
4	A	Deux niveaux clairement distingués mais pas de caractérisation abstraite. Pas d'appui phénoménologique ni processus de reconnaissance de forme.	Tentative d'articulation entre syntaxe et sémantique. Approche formelle non relationnelle-synthétique.	A	Thématisation de définitions sur une base formelle ; dim. organisatrice des concepts vis-à-vis des preuves inopérante due à la dim. structurale des concepts non acquise
5	A	Deux niveaux sont distingués mais peu articulés (classification syntaxique). Caractérisation abstraite en appui sur l'image mentale de cycle.	Pas d'articulation syntaxe-sémantique dans la tâche de classification	F	Thématisation des définitions ; dim. organisatrice des concepts vis-à-vis des preuves opérante
6	NF	La structure est « modélisée » par les représentations semi-empirique ; le rapport dialectique entre les deux niveaux n'est pas compris	Grandes difficultés à faire sens du formalisme	?	?
7	A	Deux niveaux sont distingués (structure et domaine phénoménal) et articulés à travers la théorie des groupes, par un raisonnement analogique intuitif	Extension sémantique abusive de la syntaxe de théorie des groupes	A	Thématisation par analogie directe avec la théorie des groupes ; difficultés à adapter les concepts en les confrontant au nouveau domaine d'objets

Sigles : F = fonctionnel, NF = non-fonctionnel, A = en cours d'acquisition

La comparaison de ces deux tableaux montre une forte corrélation entre les conceptions relatives au méta-concept de structure et la capacité des étudiants à interpréter et réaliser les tâches structuralistes de la théorie des banquets :

- l'écrasement de la structure par les objets qui apparaît dans la conception d'une structure au niveau du groupe 1 se traduit par la réalisation par ce groupe d'une théorie semi-empirique ;
- la conception relationnelle permet aux étudiants du groupe 2 d'engager une classification par des méthodes syntaxiques mais sans rapports dialectiques ;
- le principe PO2, fonctionnel chez le groupe 3, lui permet de développer des représentations mentales performantes et de mettre en œuvre des gestes de thématization, mais un déficit de conceptualisation du processus d'idéalisation en tant que dialectique handicape la formalisation des intuitions ;
- la conception ensembliste dialectique du groupe 4 est reflétée par ses tentatives d'articuler syntaxe et sémantique ; le principe structuraliste PO2 en défaut est à relier avec le manque d'appui sur des représentations mentales et une dimension structurale des concepts non acquise ;
- la conception structurale du groupe 5 lui permet de thématizer des définitions structuraliste et de mettre en œuvre la dimension organisatrice (Battie 2003) des concepts dans les preuves ; par contre, ce groupe n'articule pas syntaxe et sémantique dans la tâche de classification, ce qui peut-être mis en relation avec des aspects FUGS incomplets au niveau du recueil de conceptions ;
- la conception axiomatique du groupe 6 est à mettre en relation avec les difficultés des étudiants à faire sens du formalisme ; de même que l'axiomatique est le « degré 0 » de la structure (point de vue logique), un tissu conceptuel mettant principalement en avant cet aspect traduirait un niveau peu avancé de conceptualisation ;
- le stade de conceptualisation du groupe 7 (un méta-concept de structure en tant qu'organisant des liens, encore flous, entre objets et structures) est reflété par les démarches du groupe, lequel tente d'organiser les phénomènes en thématizing les résultats de théorie des groupes, sur la base d'analogies mal maîtrisées.

Ceci montre à la fois le rôle du méta-concept de structure dans la réalisation de tâches structuralistes en tant qu'orientant les actions du sujet et la possibilité, par un recueil de conceptions engageant la méta-cognition, de diagnostiquer un stade de développement de la pensée structuraliste qui est en accord avec les pratiques effectives des apprenants. Le développement du méta-concept de structure s'opère ainsi en relation avec la réalisation de tâches structuralistes, de façon réciproque. Ceci montre la pertinence d'accompagner l'apprenant dans ses tâches de méta-cognition visant un recul réflexif sur l'algèbre abstraite et motive, en tant que stratégie d'apprentissage, des activités du type la théorie des banquets. Nous soutenons que la théorie des banquets, en tant que théorie structuraliste simple dotée d'un discours de nature méta, constitue un levier majeur afin de faciliter ce processus de thématization qui est important pour l'apprentissage des théories algébriques de niveau Master.

3. Sessions en laboratoire

En parallèle de l'expérimentation en classe, nous avons proposé à quatre étudiants préparant l'agrégation de mathématiques à l'Université de Montpellier de réaliser l'activité des banquets, au titre d'entraînement à la pensée structuraliste bénéfique en vue du concours. Après obtention de leur accord, nous les avons réparti en deux binômes, de niveaux différents : le premier binôme correspond à des étudiants avancés : ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure, l'étudiant A est titulaire d'un doctorat de physique théorique ainsi que d'une maîtrise de philosophie ; en particulier, il a reçu un enseignement d'épistémologie des sciences et de théorie des modèles. Il a souhaité se réorienter vers l'enseignement et a choisi les mathématiques en raison d'une plus grande proximité

disciplinaire, par rapport à l'agrégation de sciences physiques. Il est en binôme avec un étudiant B, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, lequel débute actuellement une thèse de mathématiques. Ce sont en définitive deux étudiants brillants ; A est considéré par B comme un expert en algèbre abstraite (son domaine d'expertise se situe en effet à l'interface entre la physique et l'algèbre abstraite) et adopte, à plusieurs reprises, la posture d'enseignant. Le second binôme, en comparaison, se situe à un niveau intermédiaire entre les étudiants de fin de licence et ce binôme d'étudiants avancés. Les deux étudiants en questions, dénommés C et D, sont titulaires d'un Master Enseignement qui forme au métier d'enseignant de mathématiques ; ils ont réussi le Capès et ont souhaité tenter leur chance à l'agrégation avant d'effectuer leur année de stage.

Nous avons filmé le travail des deux binômes, d'une durée d'1h pour le premier et de 2h30 environ pour le second. Nous ne sommes pas intervenu, en tant qu'enseignant, dans les discussions du premier binôme. Le travail du second binôme, par contre, fut ponctué de plusieurs moments de dialogues, à analyser par le chercheur, entre le binôme et l'enseignant (nous combinons les deux postures). L'analyse de l'activité des banquets, menée dans le cadre de la théorie des situations didactiques, a montré en effet la nécessité d'une interaction fine entre dimensions adidactiques et didactiques dans la gestion de la situation.

Nous allons ci-dessous, d'une part analyser la production du binôme avancé, qui permettra d'observer les gestes experts du mathématicien en résolution de problème dans une situation structuraliste tout en identifiant d'éventuels nœuds de résistance : on sera, à ce niveau, particulièrement attentif aux cadres mobilisés et jeux de cadres, aux représentations sémiotiques et traces d'objets mentaux, à la manière dont se déploie la dialectique concret-abstrait et s'articule syntaxe et sémantique, dans la dynamique de l'action. Ces analyses pourront servir de contre-point par rapport au travail du second binôme (et celui des groupes d'étudiants). Nous détaillerons ci-après la discussion par ce binôme de la théorie des banquets, jusqu'à la question II 2 b incluse, qui constitue le point d'arrêt des traces étudiants que nous avons analysées au paragraphe précédent. Une retranscription de ces échanges figure en annexe 4. D'autre part, nous allons présenter le travail du second binôme relatif à la première partie de l'activité, en mettant l'accent sur un long dialogue, que nous retranscrivons en l'analysant, entre le binôme et l'enseignant, à propos de la classification proposée par les étudiants des banquets de cardinal 4. Il s'agit là d'un nœud de résistance relatif au processus d'abstraction-idéalisation, qui engage notamment la notion d'isomorphisme et qui est également visible au niveau de l'un des étudiants avancés. L'analyse de ce moment didactique entre l'enseignant et le duo d'étudiants nous éclaire à la fois sur une difficulté majeure de la conceptualisation d'une structure abstraite, rencontrée uniformément sur l'ensemble des groupes analysés, et sur la dimension didactique à apporter lors d'une réalisation de l'activité des banquets en classe, afin de produire l'apprentissage visé.

a) Analyse du travail du binôme d'étudiants avancés

L'étudiant A affiche d'emblée sa familiarité avec le mode de pensée structuraliste et, plus loin, le point de vue « théorie des modèles » en logique (« Classique, on spécifie la structure par des relations, d'accord » ; « Oui... il y a la théorie et les modèles »). Il interprète donc la tâche à la lumière d'un certain cadre théorique. Il sait que le sujet a été rédigé par un mathématicien (suite à la mention du copyright dans le sujet) qui apparaît à plusieurs reprises à la troisième personne dans ses propos (« là, il nous raconte ») ; le contrat, pour lui, est à la fois d'apporter la réponse attendue dans le cadre d'une tâche scolaire (du type un problème posé à un écrit de l'agrégation) et une réponse en adéquation avec le savoir savant. Lorsque B propose de définir les banquets irréductibles comme les tablées, il argumente que, dans ce cas, « la question b n'aura pas de sens », ce qui fait référence au contrat. Pour autant, A aura du mal à faire sens de la tâche de caractérisation abstraite du banquet $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (question I 2 c) : « caractériser abstraitement, ce n'est pas très clair... ». Il est pourtant d'usage de parler de « réalisations concrètes d'un même groupe abstrait », par exemple les racines quatrièmes de l'unité vis-à-vis du groupe cyclique C_4 , caractérisé par la propriété d'être engendré

par un élément d'ordre 4. La difficulté rencontrée par A pourrait s'expliquer par le fait que ce dernier est issu d'une communauté mixte, à l'interface entre mathématiques et physique. Une autre raison est à trouver dans le niveau conceptuel élevé auquel s'est placé le binôme : la discussion a fait émergé la notion de banquet irréductible et une preuve a déjà été esquissée, lors de la classification des banquets d'ordre 4, que les banquets irréductibles coïncident avec les banquets circulaires, anticipant l'élaboration théorique qui fait le propos de la partie II 2 de l'activité. Ainsi, lorsque B demande à A de statuer entre ces deux réponses possibles, en tant qu'expert du domaine, A choisit-il la notion d'irréductibilité. Cette notion (entendue par les deux étudiants en tant que synonyme d'indécomposable, ou encore, d'un point de vue topologique, de ne pouvoir se décomposer en plusieurs composantes connexes, à l'image d'un banquet décomposé en tablées) est probablement considérée par A comme d'une valeur théorique et d'un niveau d'abstraction supérieur à la notion de cyclicité, qui était pourtant la réponse attendue. Ces éléments montrent que le rapport particulier de A au savoir génère des phénomènes nouveaux, par rapport à ceux déjà observés. Le méta-concept de structure construit par A est relié à un champ conceptuel plus large à la lumière duquel il interprète les tâches. Nous voyons donc également un point commun : ceci illustre encore l'impact du méta-concept de structure. L'observation du travail de ce binôme avancé nous permet aussi de nous déprendre de l'illusion de transparence d'une formulation du type « comment caractériser la structure abstraite de ce banquet parmi les différentes classes de banquet ».

La dialectique entre concret et abstrait est visible dès les premiers échanges du binôme : les étudiants analysent d'une part les axiomes en termes de propriétés formelles de relations connues (antisymétrie, réflexivité), donc tentent de lire la situation nouvelle à travers les concepts connus, mais ils essaient également, d'autre part, de se raccrocher à des situations concrètes évoquées par la terminologie « banquet » : le lien est alors rapidement effectué entre les axiomes (ii) et (iii) et la situation des « banquets de mariage » : « il y a un type à droite et un à gauche, c'est l'idée, quoi » s'exclame A en riant. Cet étudiant avancé a bien intégré l'origine phénoménologique des théories mathématiques, ou du moins la pertinence de se faire des représentations mentales s'appuyant sur les sens afin de raisonner dans l'abstrait. Il y a pour lui une « idée » derrière une structure : c'est la thèse soutenue par Freudenthal qui met en avant des objets mentaux. Ce contexte empirique et les représentations mentales associées seront ainsi présents tout au long des échanges, comme métaphore dans les propos qui accompagne un discours plus formel (par exemple, un travail syntaxique sur les axiomes), ou comme stratégie pédagogique utilisée par A pour expliquer à B ses idées, lorsqu'il adopte la posture d'enseignant (« le truc circulaire, des personnes a,b,c autour de la table », « oui, c'est ça, parce que ses deux voisins de droite potentiels ont déjà un voisin », etc.). B également s'appuie sur ces représentations empiriques : « ça ferait un banquet à deux tables, en quelque sorte ».

Etudions maintenant plus précisément les cadres et jeux de cadres : les banquets de l'empirie ne sont apparemment pas considérés par le binôme comme constituant un modèle valable (ils servent essentiellement d'image mentale). Ces derniers vont se placer dans le cadre ensembliste afin de construire leur premier modèle : $E=\{a,b\}$ et $R=\{(a,b),(b,a)\}$. La relation binaire est donc regardée non comme une fonction à valeur dans $\{V,F\}$ (ainsi que le suggère l'énoncé), mais comme un graphe, point de vue très formaliste qui permet de décrire R de façon concise et ensembliste, comparativement à un tableau de valeurs de la fonction de deux variables. Les étudiants de licence, moins habitués à la formalisation, ont écrit simplement : « $n=2 : \{x,y\} \ xRy, yRx$ ». Ceci nous interroge alors sur le statut de modèle que revêtent de telles écritures : est-on du côté de la sémantique (les modèles), ou finalement de la syntaxe (la structure et ses axiomes) ? Le dialogue du binôme est éclairant à ce propos : les étudiants choisissent d'abord $E=\{x,y\}$ (des inconnues), puis $E=\{0,1\}$ (des nombres spécifiés), puis B propose $\{1,2\}$ (sans doute pense-t-il à une numérotation : on commence alors par 1 plutôt que par 0) ; finalement, le binôme adopte comme notation les lettres que l'on utilise, depuis Viète, afin de désigner les indéterminées, cette donnée connue mais non spécifiée. Ceci est tout à fait cohérent avec le statut de « modèle générique » (de cardinal 2) associé

à la donnée qu'ils proposent et désignent en tant que modèle. Alors que, mathématiquement et conceptuellement, il est fondamental de faire la distinction entre le niveau syntaxique de la structure et le niveau sémantique des objets, la notion intermédiaire de modèle générique pousse au questionnement : à la différence de l'écriture des étudiants, celle du binôme indique bien qu'il s'agit d'un modèle construit au sein d'un domaine d'interprétation (la théorie des ensembles). La structure est définie en appuie sur la théorie des ensembles (plus exactement, l'énoncé définit *un* banquet, et non la structure de banquet, comme la donnée d'un ensemble et d'une relation, de façon analogue à la définition d'un groupe), ce qui incite à confondre les niveaux. Dans un souci didactique, l'énoncé de la théorie des banquets note (E_0, R_0) un modèle, en tant que donnée spécifiée. Le dialogue du binôme attire notre attention sur le cas particulier des modèles génériques et la pertinence d'utiliser la notation de Viète afin de les différencier d'une écriture syntaxique. Il s'agit finalement, au niveau des structures, de difficultés conceptuelles qui sont en parenté avec celles du statut de l'indéterminée dans la pensée algébrique et dont la difficulté est bien connue au niveau de l'enseignement secondaire.

C'est la difficulté à construire « à la main » un contre-exemple vérifiant tous les axiomes sauf (ii) qui va amener A à introduire un nouveau cadre et effectuer un changement de cadre : « Donc ce truc, c'est bien gentil... il y en existe et au plus un, donc ce truc, c'est une fonction. A x on associe l'unique y tel que xRy et on a l'injectivité a priori ». B conçoit essentiellement cette nouvelle perspective comme un moyen conceptuel d'exercer un contrôle sur les modèles construits, et non un nouvel angle d'attaque plus conceptuel : « Oui, c'est bien ça. Ça aide à ne pas faire n'importe quoi. Revenons à... ». Le binôme se heurte alors à une autre difficulté : nier l'axiome (ii) revient à considérer non pas une fonction classique, mais une fonction multiforme qui peut prendre plusieurs valeurs. Par contre, le changement de cadre les amène à comprendre la nature de la difficulté qu'ils rencontrent : elle est liée au théorème bien connu d'équivalence entre injectivité et bijectivité dans le cas de cardinal fini. Ceci les conduit à chercher un contre-exemple en dimension infinie, donc d'introduire $\mathbb{N}$, d'où un retour vers le cadre ensembliste. Ceci traduit un remarquable jeu de cadres. Se greffe même un nouveau cadre, dissimulé : à $\mathbb{N}$ est associée l'image mentale de chaîne (idée de succession), ce qui conduit A à raisonner comme suit : « $(0,1)$, $(0,2)$ de façon à nier (ii), $(1,0)$ comme ça il a quelqu'un ; ensuite, le problème est de lier tous les autres : $(2,3)$... $(n, n+1)$. L'image mentale de la fonction en tant que relation orientée entre deux objets (A dira « il faut envoyer y sur quelqu'un »), la notion de chaîne provenant de $\mathbb{N}$ et le contrôle sémantique sur les axiomes qui s'exerce à l'aide d'images mentales du type « un voisin à droite et un voisin à gauche » (de sorte que A en arrive même à mélanger ces représentations mentales avec le langage fonctionnel dans des locutions du type « 2 antécédents à gauche » et même « 2 antécédents à droite ») amènent ainsi A à user implicitement du cadre des graphes, avec sa force opératoire, ce qui permet l'élaboration du contre-exemple précédent.

Analysons la façon dont le binôme introduit et utilise le concept d'isomorphisme : ce dernier apparaît pour la première fois lorsque, à la suite du modèle circulaire à 3 personnes (noté « (a,b) , (b,c) , (c,a) » par les étudiants), A raisonne à « numérotation près » afin de montrer que « c'est le seul ». B propose alors « (a,c) , (c,b) , (b,a) », ce qui fait dire à A « C'est le même modèle, à isomorphisme près ». Il s'agit ici d'un « argument d'isomorphisme » qui est accepté par B, sans qu'une définition d'isomorphisme n'ait été donnée dans ce nouveau contexte, sur la base d'une reconnaissance d'un raisonnement classique en algèbre. La suite des échanges montrera que ce type de raisonnement est encore flou dans l'esprit de B et nécessite d'amples précisions. En effet, dans le cas similaire de 4 éléments, celui-ci objecte « mais pour le coup, il peut y en avoir plusieurs, si on met a,b,c,d autour d'une table ». A poursuit alors sa leçon : « Oui, mais tu vas pouvoir trouver une bijection ce qui revient à faire une renumérotation. Si tu veux, les morphismes naturels là-dedans.... ça va être est-ce qu'il y a moyen d'envoyer E sur E' par une bijection qui envoie R sur R' ? Donc si tu as un modèle circulaire, tu vas pouvoir l'envoyer sur un modèle circulaire par une permutation, quoi ». La formulation de A fait le lien entre le raisonnement par permutation (renumérotation)

précédent et la notion d'isomorphisme et formalise cette notion avec un léger abus qui montre le couplage, dans l'esprit de A, entre « envoyer E sur E' » et « envoyer R sur R' » : la relation, vue ensemblistement, dispense A d'écrire la définition formelle d'un isomorphisme, quitte à prolonger la bijection sur $E \times E$ de façon naturelle. Cependant, le passage de cette définition à la conceptualisation de la possibilité de construire un isomorphisme entre deux banquets circulaires de même cardinal n'a rien d'évident, alors qu'un concept d'isomorphisme en tant que reconnaissance de forme permet tout de suite de constater une congruence. Il s'agit en fait de passer de la définition formelle d'un isomorphisme à la conceptualisation de « rapports coordonnés » entre éléments (si x est en relation avec y , alors il en est de même des images et réciproquement) puis au rapport coordonnés entre chaînes circulaires d'éléments. Ces difficultés expliquent sans doute la réaction « heu, oui » de B. Lorsqu'il est question de caractériser abstraitement une classe à la question c), B demande à A ce qu'il « entendrait par différentes classes de banquets ». Lors de la classification des banquets d'ordre 4, B a mis en avant la décomposition en somme directe comme organisant cette classification, dans l'esprit du théorème de structure. Ce qu'il perçoit est ainsi la dimension topologique de la classification : la présence d'une ou deux composantes connexes, et ce sont ces invariants de nature topologique qui lui permettent de distinguer les classes. Ceci est relié à la notion d'isomorphisme en tant que reconnaissance de forme. B, qui sait que la notion de classe est liée en mathématiques à la notion de relation d'équivalence, devrait avoir intégré que, dans le cadre d'un problème d'algèbre abstraite, la relation considérée est celle d'isomorphisme. C'est inhérent à la démarche d'abstraction-idéalisation elle-même qui fait abstraction de la nature des objets, ce qui revient à considérer les modèles à isomorphisme près (de façon à ne pas perdre de vue les relations). La réponse de A (« ce sont les classes d'isomorphisme, on n'en a pas parlé ») lui permet cependant de faire immédiatement le lien avec le raisonnement par permutation d'éléments, mais il enchaîne de nouveau sur la question de la décomposition en plusieurs composantes d'un banquet de plus de 4 personnes, ce qui montre bien l'importance pour lui de la dimension topologique. Les échanges au niveau du binôme avancé soulignent ainsi la permanence de l'obstacle suivant, qui apparaît comme un obstacle de nature épistémologique : le fait de désigner par des lettres (donc des indéterminés) les objets porte à croire que l'on procède à une abstraction de la nature de ces objets, de sorte que les 2 modèles génériques de cardinal 3 apparaissent comme deux classes différentes dans les conceptions spontanées. La notion de renumérotation, donc de bijection, permet de négocier cet obstacle, mais il s'agit ensuite de réaliser que toutes les bijections ne conviennent pas, ce qui conduit à la notion d'isomorphisme. Or la formalisation de cette notion pose des difficultés, comme on l'a vu, aux étudiants (elle a du mal à être thématisée), ainsi qu'à B. Notre stratégie est d'aider les étudiants à faire sens de ce formalisme en le connectant à l'idée intuitive de préservation de forme (et aux mécanismes associés de reconnaissance de forme), ce qui correspond à la façon dont B interprète spontanément la notion de classe.

Analysons maintenant l'activité de définition axiomatique menée par le binôme. Les étudiants discutent tout d'abord du choix de la relation parmi « être à gauche de » et « être à droite de ». Le choix du premier semble être présidé par le fait que a figure à gauche de b dans une écriture aRb , contrairement au fait que la seconde a été utilisée comme métaphore lors de la première partie de l'activité. Ceci attire notre attention sur le rôle des écritures mathématiques en relation avec les sens, la perception de la latéralité. Face au dilemme entre ne pas considérer la table à une personne et sortir du cadre de la théorie des banquets, A choisit la première solution sans hésiter, à la différence de B. Ce type d'élément déstabilisant dans le milieu joue ainsi son rôle, qui est d'éviter que le cadre des banquets ne soit « plaqué » sans que ne soit engagé un questionnement de modélisation, sauf pour l'expert qui a immédiatement compris la solution (« Mais tu peux toujours inclure ou exclure un cas particulier »). Le premier axiome supplémentaire (par rapport aux banquets) fourni par A s'avère insuffisant : A a pensé à demander l'existence d'un voisin de gauche (en plus du voisin de droite). Assez rapidement, un contrôle, peut-être d'ordre topologico-combinatoire en s'imaginant un graphe fournissant un contre-exemple, lui permet de s'en rendre compte, si bien qu'il propose une

nouvelle possibilité dont la formalisation est aussitôt reconnue par B comme la possibilité de « relier tout le monde ». C'est donc l'idée de connexité par arc, encore une notion topologique, qui dirige le formalisme de A et permet à B d'en faire sens. Bien qu'il s'agisse d'un problème d'algèbre abstraite, le cadre géométrique joue donc, en filigrane, un rôle important, à la fois parce que la théorie des tablées est une modélisation à partir du réel que la géométrie modélise, et parce que le mathématicien s'appuie sur le concret pour raisonner dans l'abstrait. La dialectique concret-abstrait faisant naître les concepts topologiques, ceux-ci servent à B afin de reconnaître les intentions de A (il parle ainsi de « chemin de x vers y », la notion de chemin appartenant bien à la topologie en tant que théorie mathématique). Par ailleurs, nous voyons que A n'a pas proposé la même définition que les étudiants de licence : il ne dit pas qu'une tablée constitue un cycle, mais que la tablée est connexe par arc, ce qui est différent. En définitive, malgré le cadre imposé par les banquets, il demeure la possibilité d'une pluralité de systèmes axiomatiques, ce qui renforce l'intérêt de l'activité.

Etudions maintenant les définitions proposées par le binôme : la définition de banquet irréductible fait apparaître un nouveau phénomène. En effet, A et B ne s'appuient pas sur l'étymologie du terme irréductible (d'où la réponse attendue : qui ne possède pas de sous-banquet propre), mais sur le concept d'indécomposable, bien qu'irréductible et indécomposable soient deux notions mathématiques bien différenciées dans les théories algébriques, ce qui est connu de A. Le constat, effectué au cours de la première partie, que les irréductibles coïncident avec les indécomposables dans la théorie des banquets et la mise en évidence du phénomène de décomposition en banquets circulaires amènent ainsi le binôme à poser le caractère indécomposable comme définition d'un banquet irréductible, ce qui les oblige à définir également la notion de somme directe. Ce point de vue conduit A à proposer, dans la lancée, de prendre comme définition d'un banquet irréductible celle d'une tablée, constatant que les indécomposables sont les tablées. Ce sera une intervention de B soulignant le contrat, comme nous l'avons déjà évoqué, qui permettra d'arrêter cette « dérive sémantique » par rapport au sens étymologique d'irréductible. Analysons maintenant les définitions d'un sous-banquet énoncées par le binôme : A et B proposent deux définitions différentes et discutent si elles coïncident ou non, en ayant du mal à statuer. Ainsi, pour A, « (E', R') est un sous-banquet de (E, R) si t 'as E' est inclus dans E et si R limité à $E' \times E'$ égale R' ». Comme nous l'avons déjà souligné, cette définition est incorrecte et traduit la conception erronée spontanée que cette condition de coïncidence de R' avec la restriction de R suffit pour assurer que (E', R') soit un sous-banquet. Le contrôle usuel, hérité des théories algébriques, consiste en la vérification d'une condition de stabilité, qui semble automatique, de sorte que les experts commettent la même erreur que les débutants. De son côté, B impose la condition que (E', R') soit un sous-banquet, en plus des conditions d'inclusion de E' dans E et R' dans R . Un sous-banquet est donc, tout comme A, pensé comme une sous-partie, en termes ensemblistes, mais la définition ensembliste des relations le conduit à n'imposer dans sa définition qu'une inclusion de R' dans R , ce qui est trop faible, ainsi que A le perçoit. Sa définition n'est correcte qu'en vertu de la condition requise que (E', R') soit un banquet. Ceci nous éclaire encore sur l'illusion de transparence relative à la définition d'une sous-structure : celle-ci s'opère sur la base d'une inclusion ensembliste, mais le formalisme peut, de lui-même, suggérer des bonnes et des fausses pistes. Un retour sémantique s'avère ainsi nécessaire.

Si le binôme définit et caractérise les banquets monogènes de façon correcte et rigoureuse, les tablées ne sont cependant pas immédiatement identifiées en tant que banquets monogènes de cardinal fini. Ceci va rendre un peu fastidieux la rédaction (hors extrait donné dans l'annexe 4) d'une preuve formelle rigoureuse, à partir des définitions posées, du fait que les tablées sont les banquets irréductibles (de cardinal fini). Ce n'est qu'au cours de la discussion, donc de la communication mathématique, avec ses nécessaires reformulations pour se faire comprendre d'autrui, que A va s'emparer de cette notion et utiliser la minimalité pour l'inclusion du banquet monogène. La dimension organisatrice (Battie 2003) des concepts, dans un milieu adidactique, prend en définitive

beaucoup de temps à s'exprimer. Ceci souligne l'importance des articulations entre dimensions adidactiques et didactiques lors de la réalisation en classe de l'ingénierie.

b) Le binôme d'étudiants de niveau intermédiaire

Ainsi que nous l'avons annoncé dans l'introduction du paragraphe, nous allons essentiellement présenter le dialogue entre ce binôme et l'enseignant portant sur la classification des banquetts d'ordre 4 que les étudiants C et D ont établie. Ceci nous permettra d'étudier de manière approfondie l'obstacle dont nous avons parlé impliquant la notion d'isomorphisme. Au préalable, nous allons préciser le cadre dans lequel se place le binôme pour effectuer le travail de classification et le cheminement qui l'a conduit à se placer dans ce cadre.

L'approche de la structure par ce second binôme met en œuvre, tout comme le premier binôme, une dialectique concret-abstrait, mais celle-ci ne mobilise pas les tabléés de l'empirie, qui n'apparaîtront pas, dans les travaux de ce binôme, avant la partie II (bien que ces derniers débutent leur travail par la lecture du sujet en totalité, selon les consignes données aux agrégatifs dans la préparation au concours). « Alors, c'est quoi cette structure ? » demande D. « La relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ ressemble à ça... le fait que $\mathbf{R}$ soit archimédien » répond C, puis il se ravise. Les étudiants analysent alors l'exemple donné dans l'énoncé comme « une sorte de shift sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ». En définitive, ils s'appuient à la fois sur des concepts et engagent les sens dans des processus de reconnaissance de formes (un « shift »). Ceci les amène aux représentations suivantes (figure de gauche) pour les axiomes (ii) et (iii) :

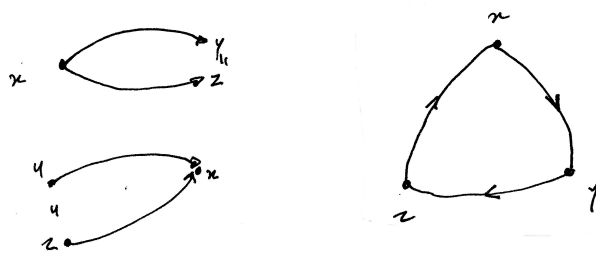


Figure 5 : représentations sémiotiques utilisées spontanément par le second binôme afin de faire sens des axiomes de banquet

Ainsi que l'exprime D en réalisant la figure : « globalement, on a un point x qui s'amène sur y et sur z , on a nécessairement l'égalité ». Les étudiants ont ainsi adopté, de façon spontanée et pour des nécessités de nature cognitive vis-à-vis d'un point de vue abstrait, la représentation de relations entre objets par des graphes orientés que suggère Carnap (Hausberger, Education et Didactique in press, p. 5) afin d'expliquer de façon pédagogique l'idée de structure de relation. Ceci leur permet de construire la représentation de droite de la figure 9 en tant que figuration d'un banquet de cardinal 3. Ils thématisent également l'exemple de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, et envisagent des « shifts à gauche et à droite » sur des ensembles tels que $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{R}$. Les banquetts sont donc, pour ce binôme et à ce stade, liés d'un point de vue phénoménologique à l'action de tourner dans le sens horaire ou antihoraire et de décaler à droite ou à gauche.

La première discussion avec l'enseignant est consacrée à la clarification du statut de ces représentations empruntées à la théorie des graphes :

Prof : Quel est pour vous le statut de ces dessins ?

D : Ceux-là, c'est pour expliciter un peu les relations, enfin (ii) et (iii), et celui-là [désignant le dessin de droite de la figure 5], c'est pour nous donner une idée d'un modèle qui ressemblerait à ça [désignant l'axiomatique des banquetts]

C : Dans le cas de 3, plutôt.

Prof : Est-ce que vous connaissez un domaine des mathématiques où l'on fait des dessins de ce type ?

C : Les graphes.

Prof : Est-ce que l'on peut considérer ce graphe comme un modèle de banquet construit dans la théorie des graphes ?

C : Je ne vois pas pourquoi cela n'en serait pas un.

D : A priori oui.

C : Dans le cas de 3, oui.

D : On peut aussi regarder le cas de 4.

Les étudiants considéraient donc davantage le graphe comme une « idée de modèle » qu'un modèle à part entière. Le contexte des graphes, introduit spontanément par les étudiants, n'a pas été identifié, sans l'aide de l'enseignant, comme une théorie mathématique qui donne aux représentations le statut de modèle. Comme pour le cas des représentations ensemblistes du premier binôme, il s'agit de modèles génériques qui questionnent la distinction entre abstrait et concret (idée de modèle versus modèle). Se posent également les questions de contrat, classiques en mathématiques en contexte scolaire, à propos du statut des représentations graphiques, ceci tant que les représentations n'ont pas été identifiées en tant que représentations validées par l'institution (comme un graphe). L'intervention de l'enseignant a permis de légitimer les représentations sous forme de graphe et de les relier à la notion de modèle. Afin de se familiariser avec cette approche, les étudiants étudient alors le cas de 4 éléments, ce qui les conduit à dessiner un graphe circulaire généralisant le modèle déjà construit. C prend alors conscience qu'il est possible d'avoir un graphe ayant deux composantes connexes, ce qui fait réagir D : « on est déjà en train de les classer en quelque sorte, enfin avec notre relation ». L'écriture de tous les graphes possibles est donc perçu comme une classification, mais limitée à un contexte donné. Ils n'ont pas perçu, à ce moment-là, que la théorie des graphes est à même d'interpréter la totalité de la théorie des banquets.

Après avoir considéré les cas élémentaires de cardinaux 1 et 2, les étudiants aboutissent, dans le cas de 3 éléments, à la représentation déjà introduite. C justifie l'unicité par ce raisonnement : « il faut tous qu'ils s'envoient quelque part, pas qu'ils s'envoient sur eux-mêmes et il ne faut pas qu'il y en ait 2 qui s'envoient sur le même. C'est le premier qu'on a dessiné ». Dans le cas de 4 éléments, C poursuit : « il y a le naturel 4 et les doubles transpositions, enfin ce qui ressemblait aux doubles transpositions... Non, tu as raison, ça peut être ça, mais à permutation près ». Ceci amène les étudiants à lister 9 banquets de cardinal 4 :

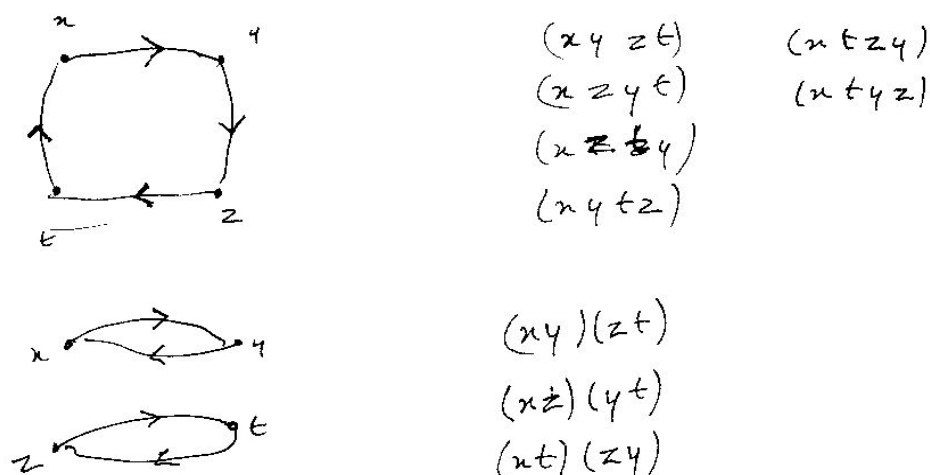


Figure 6: classification des banquets de cardinal 4 proposée par le second binôme.

Les étudiants utilisent ainsi la notation sous forme de permutations (produit de cycles) en tant que notation commode abrégée, ce qui sera confirmé lors du dialogue avec l'enseignant. La représentation sémiotique sous forme de graphe a suscité une analogie avec la théorie des permutations, les flèches constituant une notation standard pour l'action d'une application sur des éléments. A la différence du cas de 3 éléments, les étudiants décident cette fois de considérer les différentes permutations possibles des 4 lettres x,y,z,t. S'engage alors le dialogue suivant :

- C : Il y en aurait 9.
 D : Après, on fait que réfléchir sur des objets que l'on connaît. Or depuis le début, on parle de structure.
 C : Mais attends, les éléments on peut toujours les numéroter. Qu'est-ce qui pourrait boguer ?
 D : Notre propre cohérence.
 C : Mais là, on a réfléchi sur les relations, on réfléchit pas sur les objets eux-mêmes, on n'a pas pris une relation particulière
 D : Bon passons.

Les étudiants ont ainsi bien franchi les différentes étapes mentionnées par Carnap : abstraire la nature des objets, ainsi que la nature particulière des relations pour se consacrer sur leurs propriétés formelles que donne à voir le graphe de façon synthétique. Et ils l'expriment dans une démarche méta-cognitive, dans une « abstraction réfléchissante » (au sens de Piaget 1961). Néanmoins, se pose l'obstacle dont nous avons parlé, lié au symbolisme du calcul littéral qui ne constitue pas une abstraction complète vis-à-vis des éléments. L'intervention de l'enseignant vise à amener les étudiants à dépasser cet obstacle, ce qui passe par la définition et la conceptualisation de la notion d'isomorphisme :

- Prof : Pour vous, c'est une classification abstraite parce que vous n'avez pas considéré des relations particulières et que, pour n'importe quel ensemble, vous pouvez numéroter les éléments et finalement vous ramener à x, y, z, t .
 D : Il y aurait donc 2 classes à isomorphisme près, ce genre d'objets et ce genre d'objets
 C : Là, du $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et là du $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en fait
 Prof : Vous pensez à la classification des groupes ?
 D : Nécessairement, on pense aux classifications que l'on connaît.
 Prof : Donc il y a 2 types d'objets et là, vous les avez énumérés tous sur x, y, z, t
 D : On a énuméré tous les isomorphismes possibles.
 Prof : Tous les quoi ?
 D : Tous les graphes, enfin tous les éléments...
 Prof : Vous avez listé tous les graphes orientés possibles sur x, y, z, t qui vérifient les axiomes.
 C : En fait, on a fait 2 sortes de représentations : la représentation graphique et l'autre qui nous évite de refaire tous les graphes.
 Prof : Et pourquoi dites-vous que ce sont deux classes ?
 C : Deux classes, c'est-à-dire ?
 Prof : Vous dites que ce sont 2 classes distinctes parce que...
 D : Oui, parce que nous...
 C : On a mis toutes les permutations derrière, de toute façon.
 Prof : Et pourquoi $(x \ y \ z \ t)$ et $(x \ y \ t \ z)$ seraient les mêmes ?
 C : Non, pas les mêmes, du même type.
 Prof : Que veut dire « être du même type » ?
 C : Je pense aux permutations. Il y en a une qui va boucler plus vite que l'autre. Je pense clairement à l'ordre qu'il y a derrière.
 D : Une bijection. On peut passer d'un élément de cette classe à un autre par une bijection, mais pas entre les 2 classes.
 Prof : Ne peut-on pas toujours trouver une bijection entre 2 ensembles de cardinal 4 ?
 C : Si !
 D : Ah oui, mais est-ce qu'elle va respecter la structure ?

La mention du procédé de la renumérotation par l'enseignant a ainsi rappelé à D les raisonnements de théorie des groupes où l'on classe à isomorphisme près. L'analogie devient frappante : on obtient deux classes dont l'une comprend des cycles et l'autre des permutations se décomposant en deux cycles d'ordre 2, ce qui est visible également dans la représentation sous forme de graphe. Bien entendu, l'enseignant souhaite que la conceptualisation de la décomposition en deux classes d'isomorphisme distinctes se fasse sur une autre base que celle d'une analogie dont la raison d'être mathématique passe inaperçue des étudiants (ce sera justement le propos de la partie III, qui met au clair mathématiquement le processus de conversion vers le cadre des permutations : la notion d'isomorphisme de banquets correspond à la conjugaison des permutations). Ce phénomène a également été observé dans le travail de plusieurs groupes lors de l'expérimentation en classe. D répond alors qu'il a énuméré « tous les isomorphismes possibles », ce qui correspond en effet à la démarche des étudiants, même si cette manière de s'exprimer est incorrecte : ces derniers ont

considéré, afin d'établir leur liste, toutes les permutations possibles des éléments qui préservent la décomposition en cycles du modèle considéré, autrement dit, ils ont listé toutes les permutations qui lui sont conjuguées (procédure correcte, comme nous l'avons vu, mais dont la justification nécessite la théorie qui fait l'objet de la partie III). Lorsque l'enseignant reprend le terme « classe » introduit par D, l'étudiant C manifeste son incompréhension : la conceptualisation de la classification en tant que liste de classes d'isomorphisme n'est donc pas acquise. Lorsque l'enseignant questionne la notion d'« identité » qui est sous-jacente, D introduit la notion de « type », suggérée par l'écriture sous forme de permutation. C'est finalement le contexte des permutations qui rappelle à C la notion d'isomorphisme en tant que bijection. La dernière intervention de l'enseignant vise alors à faire émerger la condition particulière qui définit un isomorphisme, parmi les bijections possibles, qui existent toujours entre deux ensembles de même cardinal.

Pour autant, de nouveaux échanges seront nécessaires afin d'amener à une formalisation de l'idée de « conservation de la structure » exprimée par D et de justifier rigoureusement que les neuf graphes dessinés constituent bien deux classes d'isomorphisme. Les étudiants continuent de s'appuyer sur l'analogie avec la théorie des groupes, dans une démarche de thématisation. L'analyse des échanges, dont une retranscription est donnée en annexe 5, nous renseigne ainsi sur le fonctionnement du processus d'abstraction-thématisation et nous permet de détecter les éventuels obstacles.

Nous observons tout d'abord que les étudiants savent démontrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes en tant que groupes grâce à la notion d'ordre et ont repéré l'analogie avec la situation des banquets d'ordre 4 (donc entre $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, R)$ et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ d'une part, et entre les banquets à deux composantes connexes et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'autre part). Ils souhaitent ainsi thématiser une notion d'ordre.

Différents obstacles se posent cependant à l'exploitation de cette analogie : tout d'abord, comme le leur fait remarquer l'enseignant, la notion d'ordre en théorie des groupes est liée à une loi de composition interne que l'on itère. Or une relation binaire est d'une autre nature qu'une loi de composition (comme le soulignera un des étudiants : « c'est pas du tout pareil ! »). D'autre part, l'opération naturelle sur les banquets n'est pas le produit cartésien comme dans le cas des groupes : les étudiants écrivent cependant $\{x, y\} \times \{z, t\}$, ce qui conduit à des éléments qui ne sont pas $\{x, y, z, t\}$ mais des couples et génère de l'incompréhension. C'est toute la différence entre une analogie qui mathématiquement se fonde sur un isomorphisme (les situations sont analogues parce que ce sont deux instances de la même structure abstraite) et une analogie où ceci ne peut l'être (les étudiants se posent d'ailleurs la question : « Qu'est-ce qui différencie $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, R)$ et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$? », parce que, paradoxalement, tout semble pareil alors qu'une relation binaire diffère d'une loi de composition interne !). En fait, l'analogie ne fonctionne pas sur la base de la nature de la relation-opération, mais en vertu de l'opération d'itération de cette relation-opération, autrement dit sur le concept de générateur : $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, R)$ est un banquet cyclique de même que $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique. Cela permet de définir l'ordre d'un élément en tant que cardinal du sous-banquet qu'il engendre (de la « chaîne » issue de x lorsque l'on itère R , c'est-à-dire de la composante connexe de x au sein du graphe) de même que l'ordre d'un élément est défini comme le cardinal du sous-groupe qu'il engendre. Ce déplacement de la relation-opération à son itération pose, comme nous pouvons le constater, une difficulté conceptuelle. Ceci montre aussi la différence entre les deux contextes : dans le cas du banquet cyclique de cardinal 4, tous les éléments sont d'ordre 4, alors qu'il n'y a que deux générateurs dans un groupe cyclique d'ordre 4.

La nécessité de définir formellement un isomorphisme n'est pas perçue par les étudiants tant qu'elle n'a pas été formulée par l'enseignant. La formalisation se révèle difficile, en vertu d'une grande résistance des étudiants à dépasser la conception de l'isomorphisme en tant que bijection, malgré les efforts déployés par l'enseignant. En termes sémiotiques, ces derniers écrivent « $\varphi : E_0 \rightarrow E_0$ » et non « $\varphi : (E_0, R_0) \rightarrow (E'_0, R'_0)$ ». La condition « φ est un isomorphisme si : si xRy alors $\varphi(x)R\varphi(y)$ »

à laquelle pense C définit un automorphisme et non un isomorphisme. Il corrige en E'_0 suite à une remarque de l'enseignant, mais n'introduit pas le R'_0 . Ceci aura comme conséquence que les étudiants, au lieu de vérifier la condition d'isomorphisme entre deux banquets spécifiés, transporteront par la bijection la structure de banquet de (E_0, R_0) pour construire un banquet sur E'_0 . Ceci donne l'illusion que toute bijection convient. Ce n'est qu'à la fin du dialogue que D intégrera qu'il y a 2 relations en jeu et conceptualisera la préservation des relations comme une bijection « coordonnant » deux relations. Les étudiants confondent également, lors de l'exemple de bijection ne préservant pas les relations donné par l'enseignant, la bijection en tant qu'isomorphisme et la bijection en tant que représentation d'un banquet (dans le cadre des permutations). Ceci les conduit à considérer un graphe croisé, ce qui est pour eux très déconcertant, car ils perçoivent alors une forme différente alors qu'ils ont l'intuition qu'il s'agit pourtant d'un banquet isomorphe au banquet cyclique. Ceci témoigne d'un manque de familiarité avec le concept d'isomorphisme de graphe (ce qui est naturel, puisque cela constitue encore une notion d'isomorphisme). Tout de long, l'étudiant C a du mal à accepter la définition d'isomorphisme que son intuition lui suggère (« On n'a toujours pas de définition exacte d'isomorphisme dans notre théorie ! »), par analogie avec les groupe (« C'est en faisant avec ce que l'on connaît déjà... Enfin, la définition d'isomorphisme de groupe, c'est ça. »). La distinction qu'il souligne entre $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, R)$ et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ le déstabilise. Traduire de façon formelle l'idée qu'un isomorphisme préserve les relations ne suffit pas, le critère d'une bonne définition est avant tout, pour lui, que celle-ci permette de montrer qu'il y a deux classes d'isomorphismes de banquets de cardinal 4 (« Si on la définit comme cela, c'est bon car entre eux il y a un isomorphisme et entre eux aussi »). Lorsque le graphe croisé déstabilise ce résultat, il doute à nouveau de sa définition d'isomorphisme. Finalement, lorsque la préservation de la forme est explicitée par l'enseignant en relation avec l'étymologie du mot isomorphisme et l'examen du « schéma de bouclage », l'étudiant D parvient à mettre en relation l'écriture formelle de l'isomorphisme en tant que bijection « coordonnant » les relations et la représentation sous forme de graphe qui « coordonne » des chaînes de relations. C'est une prise de conscience soudaine, un « quantum leap » comme le dit Sfard (1991) en commentant le phénomène de « réification », qui, d'un point de vue cognitif, est relié à la possibilité, offerte par la situation, d'une synthèse entre un point de vue formel et un point de vue phénoménologique engageant la vue à travers la reconnaissance des formes. Ceci permet ainsi de relier pleinement l'idée architecturale de structure, de nature topologique, avec son expression algébrique de bijection préservant les relations. Une telle activité contribue par là-même au développement du méta-concept de structure. Par ailleurs, l'analyse des raisonnements menés par le binôme montre combien le mouvement d'abstraction-thématisation (en l'occurrence de la notion d'isomorphisme à partir de la théorie des groupes) est lié à celui, transversal, de l'abstraction-idéalisation.

IV. Conclusion

Partant d'un constat de déficit sémantique dans l'enseignement des structures algébriques, qui tend à faire disparaître les objets au profit de structures abstraites « surplombantes » dont les étudiants ont du mal à faire sens, nous avons proposé, à la suite de Freudenthal, de retrouver et mettre au cœur de l'action didactique la phénoménalité dont ces structures sont issues et sur laquelle s'appuie le mathématicien professionnel pour raisonner dans l'abstrait. En d'autres termes, nous avons essayé de faire jouer leur rôle à ce que Freudenthal appelle les « objets mentaux ».

L'activité des banquets a été élaborée en utilisant la méthodologie de l'ingénierie didactique, en appui sur notre modèle épistémologique de référence (la dialectique objets-structures, Hausberger Education et Didactique, in press) et la théorie des situations didactiques, puis soumise à la contingence. L'activité méta-cognitive de l'apprenant requise par la situation dans le processus d'apprentissage par adaptation est soutenue par le discours méta inscrit dans le document distribué aux élèves et par une articulation fine entre dimensions didactiques et adidactiques. Ceci est supposé conduire à une thématization de notions structuralistes rencontrées par les étudiants dans le

contexte des groupes et de l'algèbre linéaire, notamment la notion d'isomorphisme. Nous avons fait également l'hypothèse que le méta-concept de structure de l'apprenant impacte sa capacité à réaliser des tâches structuralistes.

L'analyse des données empiriques recueillies lors de la réalisation en classe de l'ingénierie a permis de confirmer cette interrelation entre le développement du méta-concept de structure et le développement de praxéologies structuralistes, via l'examen de l'intégration des deux niveaux de principes organisateurs de phénomènes en jeu dans le structuralisme algébrique et des différentes dialectiques, d'une part dans une phase méta-cognitive sur le méta-concept (recueil de conception), d'autre part dans la réalisation des tâches proposées par l'activité des banquets. Ce travail a permis l'élaboration d'une typologie de conception qui identifie différents stades de conceptualisation du structuralisme algébrique lors de l'organisation par un apprenant des différents éléments épistémologiques fondamentaux constitutifs de l'algèbre abstraite en un tout cohérent et fonctionnel. Cette typologie est à mettre à l'épreuve de nouvelles données expérimentales, dans des travaux futurs.

L'activité des banquets a permis d'éclairer les rapports du concret à l'abstrait en algèbre abstraite, à la fois du point de vue épistémologique et du point de vue des apprentissages. Ceci vient soutenir la thèse que si les mathématiques sont formalisées, elles ne sont pas pour autant formelles et laissent apparaître différents aspects phénoménologiques dans leur élaboration par le mathématicien (l'étudiant A du binôme avancé n'est pas loin d'un mathématicien professionnel) et leur reconstruction par un apprenant. L'image mentale des banquets de mariage s'avère un point d'appui aux raisonnements syntaxiques sur les axiomes et aux tâches de classification et de caractérisation abstraite des banquets. Différents niveaux de couplage se produisent entre cette image mentale et le symbolisme mathématique, également porteur de gestes et d'images mentales, ce qui transparait nettement au niveau des dialogues lors des sessions en laboratoire et conduit, entre autres, à l'introduction de modèles en théorie des graphes et à l'utilisation de processus visuels de reconnaissance de formes. L'activité des banquets répond ainsi au projet de phénoménologie didactique des structures mathématiques soutenu par Freudenthal et contribue à rétablir une dialectique concret-abstrait en algèbre abstraite.

L'analyse des données empiriques, avec pour cadre la dialectique objets-structures, a montré que les étudiants n'articulent pas syntaxe et sémantique dans la tâche de classification des banquets. Plusieurs groupes distinguent mal le niveau des objets et celui de la structure. Nous faisons l'hypothèse que le point de vue de théorie des modèles utilisé dans la théorie des banquets est à même d'aider les étudiants à conceptualiser ces deux niveaux et leur articulation. Nous avons éclairé certains obstacles : d'une part, les étudiants distinguent mal un travail syntaxique sur les axiomes et l'écriture d'un modèle générique (la notation de Viète serait, comme nous l'avons vu, pertinente afin d'y remédier) ; ils ne perçoivent donc pas le rôle du retour sémantique. D'autre part, les modèles génériques sont perçus comme formant des classes distinctes du fait d'une conception erronée persistante relative au processus d'abstraction-idéalisation induite par le formalisme algébrique. Le dépassement de cet obstacle s'effectue via la notion d'isomorphisme.

La session en laboratoire avec le second binôme a permis d'éclairer certaines difficultés liées à l'abstraction-thématisation : la théorie des groupes s'avère un point d'appui majeur mais également un obstacle lorsqu'il s'agit de préciser les analogies, d'où la nécessité d'une intervention didactique afin que la méta-cognition conduise à la thématisation escomptée. Cette session en laboratoire a permis également de montrer la pertinence de l'activité des banquets pour la conceptualisation de la notion d'isomorphisme, en appui sur son étymologie.

En définitive, notre cadre théorique, appliqué aux données empiriques recueillies, a permis de mettre en lumière une grande richesse de phénomènes relatifs à l'apprentissage de l'algèbre abstraite et d'en produire des analyses assez fines. Ce travail contribue ainsi à la compréhension des difficultés des étudiants, en particulier celles qui sont inhérentes à la pensée structuraliste. La théorie des banquets, au prix d'une articulation fine entre dimensions adidactiques et didactiques,

constitue également une piste prometteuse pour favoriser les apprentissages. Nous envisageons de poursuivre nos expérimentations avec de nouvelles réalisations de l'ingénierie et des sessions complémentaires en laboratoire, impliquant cette fois-ci des étudiants de troisième année de licence (ayant reçu un enseignement de théorie des groupes), afin d'affiner encore notre compréhension des différentes strates de phénomènes dans ce processus de conceptualisation complexe d'une structure algébrique abstraite et ses enjeux didactiques.

E. Conclusion générale et perspectives de recherches ouvertes par nos travaux

Nos études épistémologiques ont permis de mettre en évidence une dialectique mathématique fondamentale en algèbre abstraite que nous avons appelée la « dialectique objets-structures », prise en deux grands mouvements d'abstraction : l'idéalisation et la thématization (selon la terminologie de Cavaillès). Ces éléments ont ensuite été mis en regard avec différentes théories didactiques : l'idéalisation avec des théories d'inspiration cognitive (Tall et Vinner, Vergnaud, la dualité processus/objet de Sfard) ou phénoménologique (Freudenthal) ou des théories sémiotiques (Duval), la thématization avec la Théorie Anthropologique du Didactique (notion de praxéologie). La dialectique objets-structures, incorporant ces éléments didactiques, a été proposée comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique. La notion de praxéologie structuraliste, fondée sur le point de vue que le structuralisme algébrique est une méthodologie, a été mise en avant pour éclairer les organisations mathématiques en algèbre abstraite et le problème de transition. Ces éléments constituent nos apports majeurs dans l'élaboration théorique en didactique de l'algèbre abstraite.

L'étude de la transposition didactique a été menée, relativement aux concepts de structures (groupes, anneaux, corps), au concept de morphisme et au méta-concept de structure, à la fois à travers le discours métamathématique des mathématiciens, notamment le Manifeste de Bourbaki (1998), et une étude exploratoire de manuels sélectionnés. Ce travail a mis en évidence des tensions suscitées par la dialectique objets-structures, d'où résultent des organisations mathématiques contrastées qui sont à analyser plus finement. Un modèle praxéologique de référence a été proposé pour l'arithmétique des anneaux abstraits. Parallèlement, nous avons mené une étude des échanges sur un forum de mathématiques, en situation adidactique, et montré le fonctionnement de la dialectique objets-structures ainsi que le développement de praxéologies structuralistes par le collectif.

Notre travail d'ingénierie didactique a été mené dans deux directions différentes suscitées par la mobilisation de deux cadres didactiques différents : la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard) et la Théorie des Situations Didactiques (TSD, Brousseau). D'un point de vue méta-didactique, ceci questionne l'impact de ces cadres dans le travail d'ingénierie et notamment les orientations implicites et explicites qu'ils génèrent. En TAD, le problème s'est posé en termes de conditions et de contraintes pour le développement de praxéologies structuralistes par des groupes d'apprenants. Nous avons mis en avant l'idée de Parcours d'Etude et de Recherche (PER) « formel », donnant un sens particulier au « paradigme du questionnement du monde » (Chevallard, 2012) inspiré de la dialectique objets-structures, et proposé un usage innovant de la retranscription des échanges du forum (la « stratégie du média-milieu »). Du côté de la TSD, nous avons élaboré une activité (la « théorie des banquets ») dédiée à l'apprentissage du méta-concept de structure et la thématization du concept d'isomorphisme. Une originalité du travail est liée au fait qu'il s'agisse d'un méta-concept, ce qui introduit un niveau élevé de réflexivité. Les données recueillies, analysées en prenant pour cadre la dialectique objets-structures, ont permis d'établir une typologie de conceptions relativement à ce méta-concept, de discuter la pertinence de la situation et d'éclairer le processus de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite par un apprenant.

Nos différentes contributions posent les premières pierres de ce que nous pouvons appeler une « didactique du structuralisme algébrique ». Dans la continuité, nous envisageons de développer nos travaux suivant plusieurs axes complémentaires :

1. Structuralisme, phénoménologie et abstraction mathématiques : croisement des regards philosophique et didactique

A la suite de Cavaillès et Lautman, nous avons placé la dialectique objets-structures, munie des deux mouvements d'abstraction que sont l'idéalisation et la thématization, au cœur de notre modèle épistémologique de référence pour l'algèbre abstraite. Les analyses épistémologiques conduites par les philosophes ont nourri la réflexion didactique. Croisant les analyses des philosophes avec les cadres didactiques, nous avons développé la dialectique épistémologique objets-structures pour la constituer en une dialectique didactique, au même titre que la dialectique outils-objets (Douady 1986), et montré sa pertinence pour les analyses didactiques et le travail d'ingénierie. Ceci souligne la fécondité des regards croisés entre philosophie et didactique des mathématiques. Réciproquement, les analyses fines des processus d'enseignement et d'apprentissage réalisées par les didacticiens s'offrent au philosophe comme un nouveau « laboratoire de la pensée » qui se situe, non plus du côté de la sphère de la création scientifique, mais du côté de la transmission des savoirs et des apprentissages. Diverses interactions sont donc envisageables entre didactique et philosophie en tant que domaines de recherche.

En particulier, les questions soulevées par le courant contemporain de la « philosophie de la pratique mathématique¹⁰ », fondé en tant qu'association (APMP) en 2009 afin d'en promouvoir le développement, entrent particulièrement en résonance avec les questions didactiques. En ce qui concerne notre programme de recherches sur la didactique de l'algèbre abstraite, les communications au dernier congrès de l'APMP telles que « definitions by abstraction and the nature of abstracta from Grassmann to Weyl » (Mancosu 2015) ou « 'Chasing' the Diagram – The Use of Space in Algebraic Reasoning » (De Toffoli 2015) en témoignent. Nous pouvons également citer l'article récent de Sinaceur (2015) : partant de considérations philosophiques sur l'abstraction, Sinaceur dégage une analyse épistémologique des différentes « facettes et niveaux » de l'abstraction mathématique en identifiant et exemplifiant différents types de processus à l'œuvre dans la pratique mathématique contemporaine qui conduit à la construction et au développement d'objets abstraits. Ces processus font référence, pour la plupart, à la pratique de l'algèbre abstraite et au structuralisme mathématique. Le croisement des regards philosophique et didactique sur l'abstraction mathématique en général et l'algèbre abstraite en particulier offre donc de multiples pistes de recherches.

Il s'agit enfin de souligner le potentiel de l'approche phénoménologique de Husserl. La thématization de Cavaillès tout comme la phénoménologie didactique de Freudenthal (1983) y trouvent certaines sources. De nouvelles modalités de développement de la phénoménologie husserliennes sont inspirées des théories mathématiques contemporaines comme la théorie des catégories : on peut citer le programme de recherches de Patras (1996 ; 2015), lequel soutient la thèse « qu'il existe en amont de la mathématique formelle ou de la logique mathématisée un arrière-fond de règles aprioriques de la pensée qui transcendent les compartimentements sectoriels usuels » (Patras 2015).

2. Etudes praxéologiques sur le structuralisme algébrique

La notion nouvelle de praxéologie structuraliste que nous avons introduite en didactique de l'algèbre abstraite ouvre un large champ d'investigations dont l'on peut escompter de nombreuses retombées tant pour la compréhension du problème de transition que pose l'algèbre abstraite, dans l'esprit du travail de Winsløw (2006), que pour l'étude du phénomène de transposition didactique qui est

¹⁰ <http://institucional.us.es/apmp/>

difficile à appréhender en fin de cycle universitaire étant donnée la proximité entre le savoir enseigné et le savoir savant, et pour le développement d'ingénieries (point 3 ci-dessous).

Il s'agit de décrire finement les praxéologies en algèbre abstraites, qui d'une part font apparaître différents niveaux structuralistes comme nous l'avons montré dans ce manuscrit, et d'autre part combinent et entremêlent des praxéologies logiques, ensemblistes et algébriques (travail en cours dans le cadre de la thèse de Julie Jovignot sur la notion d'idéal co-encadrée avec Viviane Durand-Guerrier). Le terreau de l'algèbre abstraite et le point de vue praxéologique que nous avons dégagé ouvrent de nouvelles perspectives pour les analyses logiques des énoncés et des preuves menées par Durand-Guerrier (2005) et la prise en compte de leurs conséquences didactiques.

Une partie importante de ce travail consiste à dégager les différentes organisations praxéologiques que l'on peut observer dans l'enseignement de l'algèbre abstraite à l'université, en relation avec les différentes organisations didactiques qui sont mises en place et qui se situent à différents niveaux entre une approche « *top-down* » et une approche « *bottom-up* » (voir paragraphe C.2 b de la présente note de synthèse). Ce travail, mené à des niveaux d'analyse très fins, devrait ouvrir la voie à de nombreuses exploitations, tant pour la compréhension des phénomènes didactiques que pour l'action didactique.

3. Travaux d'ingénierie didactique, avec pour cadres la TAD ou la TSD et la dialectique objets-structures

L'algèbre abstraite mobilise des concepts FUGS (Robert, 1987). Rogalski (1995), dans le cas de l'algèbre linéaire, souligne la difficulté à produire des situations fondamentales pour les concepts FUGS. Il met en avant l'importance de mettre en oeuvre des activités réflexives, faisant usage du levier méta (Dorier et al. 2000), et organisées autour de différents types de situations (qui s'enchainent éventuellement dans le temps de l'apprentissage) : des situations produisant une convergence entre les domaines à unifier ; des situations où il apparaît clairement *a posteriori* aux étudiants que, sans la nouvelle théorie unifiée, elles seraient très difficiles à étudier ; des situations de transfert d'un domaine à un autre, permises par une théorie unifiée (voir également Hausberger 2012).

Notre travail d'ingénierie vise à proposer et à expérimenter différentes stratégies répondant à ce problème des situations fondamentales en algèbre abstraite, qui offre un champ d'études et de recherches peu exploré en dehors de l'algèbre linéaire. L'entrée par le structuralisme algébrique permet de se positionner à des niveaux plus avancés du curriculum et de prendre en charge le phénomène de thématization tandis que l'approche phénoménologique permet de soutenir le mouvement d'idéalisation, comme nous l'avons montré avec la structure de banquets.

Au cours de notre travail, nous avons pu constater que la mobilisation des deux grands cadres développés par l'école française de didactique des mathématiques, la TSD et la TAD, produit des ingénieries de types différents et complémentaires. La TSD permet de penser les situations en tant que « jeu contre un milieu » avec un contrôle assez fin des variables didactiques, de l'organisation du milieu, des actions et rétroactions. La TAD met en avant et organise le questionnement dans des parcours d'étude et de recherche, en termes de chronogénèse, topogénèse et mésogénèse et de différentes dialectiques (medias-milieus, etc.). Cette dernière approche apparaît comme prometteuse pour produire une explicitation des raisons d'être des concepts (par la voie du questionnement) et éclairer le structuralisme algébrique en tant que méthode (développement de praxéologies). Nous envisageons de poursuivre et d'approfondir notre stratégie du média-milieu et interprétation du paradigme du questionnement du monde en relation avec la dialectique objets-structures et le développement de « PER formels » (paragraphe C.2) pour relever les défis posés par l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite.

4. Apports de la théorie des champs concepts pour une étude cognitiviste de l'apprentissage de l'algèbre abstraite

L'étude des praxéologies développées par le collectif sur le forum de mathématiques (paragraphe C.1 c de la présente note de synthèse) met en évidence à la fois des praxéologies structuralistes reflétant la pratique experte des mathématiciens et des praxéologies en développement dont le bloc théorique n'est pas consistant avec le savoir établi : la praxéologie met en jeu une technique plus ou moins adéquate, voire erronée, d'autant plus que la technologie demeure plus ou moins implicite. Nous faisons l'hypothèse que l'interprétation de ce phénomène en termes de théorèmes-en-actes et concepts-en-actes (Vergnaud 1990) pourrait apporter un éclairage complémentaire aux analyses conduites dans le cadre de la TAD en raison de l'origine cognitiviste du phénomène. Nous donnons ci-dessous deux exemples soutenant cette hypothèse.

Le premier exemple est la question structuraliste de la conservation de la principalité par sous-anneau. C'est le cas, on l'a vu, de la propriété d'intégrité. Cet énoncé aurait pu se présenter comme un théorème-en-acte, mais il est posé par un des forumers comme une conjecture. Le second exemple concerne la principalité de $\mathbb{Z}[X]$, avancée par l'auteur de la question génératrice du fil de discussion, et que l'on pourrait également interpréter comme un théorème-en-acte : $\mathbb{Z}$ est principal, donc $\mathbb{Z}[X]$ également. La principalité se transmettrait donc dans le passage d'un anneau A à l'anneau de polynômes $A[X]$ tout comme la factorialité. Il est cependant nécessaire d'interviewer les étudiants afin de mettre à l'épreuve cette hypothèse. D'autres facteurs explicatifs de cette conception erronée sont envisageables : par exemple, un anneau $K[X]$ est toujours principal lorsque K est un corps. Une généralisation abusive peut conduire à admettre la principalité de tout anneau de polynômes.

Nous faisons l'hypothèse qu'opérer avec des concepts revêt également une *dimension opératoire*, même si l'organisation de ces derniers sous la forme d'un discours appartient déjà, comparativement à une opération sur des objets, à la forme prédicative de la connaissance (Vergnaud 2002). Cette dimension opératoire peut être mise en évidence dans les apprentissages par l'identification de théorèmes-en-actes : *la question de la validité des arguments est alors secondaire devant l'opérationnalisation par l'apprenant de ses connaissances et modes de pensée structuralistes*. La formulation de l'assertion sous forme d'une conjecture plutôt que d'un théorème-en-acte peut s'expliquer soit par un manque de familiarité avec la mobilisation de concepts qui pousse à l'exercice du doute, soit par l'exercice d'un contrôle en voie d'acquisition, ou encore par une sorte de prédominance de la forme prédicative de la connaissance dans un tel discours mobilisant des concepts, même s'il ne reflète pas le fonctionnement cognitif de l'individu qui passe par la construction de schèmes.

En définitive, notre étude invite à examiner les théorème-en-acte en algèbre abstraite, et plus généralement les distinctions introduites par Vergnaud lorsque ce sont, par rapport au contexte classique des mathématiques du secondaire, les concepts eux-mêmes qui sont pris pour objet, autrement dit en relation avec la construction de schèmes en algèbre abstraite. C'est ce travail que nous nous proposons d'engager pour une étude cognitiviste de l'apprentissage de l'algèbre abstraite.

Bibliographie

- Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique – l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In *Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques* (p. 101-139). Caen: ARDM & IUFM.
- Artigue, M (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- Artigue, M. (1991). Epistemologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3).
- Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In Winsløw, C. (Ed.). *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08*. Sense Publishers, 7-16.
- Artin, M. (1991). *Algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc.
- Barquero, B., Florensa, I., Hausberger, T. & Romo, A. (2015, août). Collectifs d'élèves, étude et recherche en classe. *Actes de la 18ème école d'été de Didactique des Mathématiques, Brest*.
- Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de l'Université Paris 7.
- Benis-Sinaceur, H. (1987). Structure et concept dans l'épistémologie mathématique de Jean Cavaillès. *Revue d'histoire des sciences*, 40(1), 5-30.
- Benis-Sinaceur, H. (2010). Idées : le platonisme phénoménologique d'Albert Lautman. *Philosophiques*, 37(1), 27-54.
- Benis-Sinaceur, H. (2010, mars). *Emmy Noether et l'école algébrique allemande dans le premier tiers du XXe siècle : mathématiques, style de pensée et philosophie*. Communication aux Journées Noether, Lyon, France.
- Benis-Sinaceur, H. (2014). Factes and Levels of Mathematical Abstraction. *Philosophia Scientiae*, 18(1), 81-112
- Blanchette, P. A. (1996, juillet). Frege and Hilbert on Consistency. *The Journal of Philosophy*, 93(7), 317-336. Récupéré de <http://www3.nd.edu/~pblanche/frege-hilbert.pdf>
- Bourbaki, N. (1998). L'architecture des mathématiques. In Le Lionnais, F. (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Paris : Hermann. (Ouvrage original publié en 1948)
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La pensée sauvage.
- Carnap, R. (1928). *Der logische Aufbau der Welt*. Berlin : Weltkreis.
- Cavaillès J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie. Perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x*, 19, 45-75.
- Chevallard, Y. (2001). Les TPE comme problème didactique. In *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2001* (pp. 177-188). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*. Universidad de Jaén, pp. 705-746.

- Chevallard, Y. (2012). L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques : questions vives et problèmes cruciaux. In *Actes de la XVI^e école d'été de didactique des mathématiques* (Carcassonne, août 2011).
- Colmez, P. (2011). *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Palaiseau : Les éditions de l'Ecole Polytechnique.
- Corry, L. (1996). *Modern Algebra and the Rise of mathematical Structures*. Bâle : Birkhäuser.
- Corry, L. (2007). *History of Algebra*. Récupéré de <http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/algebra%20EB.pdf>
- Corry, L. (2016). Algebra. Dans *Encyclopædia Britannica*. Récupéré de <http://www.britannica.com/topic/algebra/Structural-algebra>
- De Toffoli, PS (2015, novembre). 'Chasing' the Diagram – The Use of Space in Algebraic Reasoning. *Communication à la 3^{ème} Conférence de l'Association for Philosophy of Mathematical Practise, Paris*.
- Dorier, J-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The meta lever. In Dorier (Ed.): *On the teaching of linear algebra*, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 151-176.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. (Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard Lyon 1). Récupéré de <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00201626/>
- Durand-Guerrier, V., Hausberger, T. & Spitalas, C. (2015). Définitions et exemples : Prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 20, 101-148
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.
- Eugenio, F. Y., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. New York : Springer.
- Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau : W. Koebner.
- Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100(1), 25-50.
- Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht : Reidel.
- Granger G. G. (1994). *Formes, opérations, objets*. Paris : Vrin.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the Secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254.
- Guin, D. (2013). *Algèbre II : Anneaux, Modules et Algèbre multilinéaire*. Collection Enseignement Sup L3M1M2. EDP Sciences.
- Hasse H. (1930) Die moderne algebraische Methode. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 39, 22-34.
- Hausberger, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds), *Enseignement des*

mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21^e siècle (pp. 425-434). Genève : Université de Genève.

- Hausberger, T. (2013). On the concept of (homo)morphism: A key notion in the learning of abstract algebra. In B. Ubuz, C. Haser, M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2346-2355). Ankara : Middle East Technical University.
- Hausberger, T. (2015, août). Dimensions collaboratives et dialectique média-milieu : un questionnement didactique autour d'une retranscription d'échanges sur un forum de mathématiques. *Actes de la 18^{ème} Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, Brest*.
- Hausberger, T. (2016a). Abstract algebra, mathematical structuralism and semiotics. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2145-2151). Prague: Faculty of Education, Charles University.
- Hausberger, T. (2016, janvier). Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université : vers un paradigme du questionnement du monde. *Actes de la 5^{ème} Conférence Internationale sur la Théorie Anthropologique du Didactique, Castro Urdiales*.
- Hausberger, T. (2016b). A propos des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger, T. (Ed.), *Proceedings of the 1st Congress of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Montpellier: University of Montpellier & INDRUM, 296-305.
- Hausberger, T. (2016c). Comment développer des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 36(1), 97-142.
- Hausberger, T. (in press). La dialectique objets-structures comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique. *Education et Didactique*
- Hausberger, T. (in press). The (homo)morphism concept: didactic transposition, meta-discourse and thematisation. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*
- Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique* (Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1). Récupéré de <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00346287v2/document>
- Lajoie, C. & Mura, R.. (2004). Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient, *Recherches en didactique des mathématiques*, 24(1), 45-80.
- Larsen, S. (2009). Reinventing the concepts of groups and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28, 119-137.
- Lautman, A. (2006). *Les mathématiques, les Idées et le Réel physique*. Paris : Vrin.
- Leron, U. & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly*, 102(3), 227-242.
- Leron, U., Hazzan, O., & Zazkis, R. (1995). Learning group isomorphism: A crossroad of many concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 153-174.
- Mac Lane, S. (1996). Structure in Mathematics. *Philosophia Mathematica*, 4(2), 174-183.
- Mancosu, P. (2015, novembre). Definitions by abstraction and the nature of abstracta from Grassmann to Weyl. *Communication à la 3^{ème} Conférence de l'Association for Philosophy of Mathematical Practise, Paris*.

- Nardi, E. (2000). Mathematics Undergraduates' Responses to Semantic Abbreviations, Geometric Images and Multi-level Abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), 169-189.
- Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve. Étude épistémologique et enjeux didactiques* [Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches]. Paris : Université Paris Diderot-Paris 7.
- Patras, F. (1996, novembre). *Phénoménologie et mathématiques*. Exposé au Séminaire de Philosophie et Mathématique de l'Ecole Normale Supérieure, Paris. Récupéré de http://www-math.unice.fr/~patras/articles/PhenomenologieMaths_SemENS96.pdf
- Patras, F. (2005). Phénoménologie et théorie des catégories. In Boi, L. (Éd.), *Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition* (pp. 401-419). Singapour : World Scientific.
- Patras, F. (2008). Carnap, l'Aufbau, et l'idée mathématique de structure. In J. Bouveresse & P. Wagner (Éds), *Mathématiques et expérience. L'empirisme logique à l'épreuve (1918-1940)* (pp. 33-54). Paris : Odile Jacob - Collège de France.
- Perrin, D. (1996). Cours d'algèbre. Editions ellipses.
- Piaget, J. & Beth, E. W. (1961). *Épistémologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*. Paris : PUF.
- Piaget, J. (1971). *Genetic Epistemology*. New York : W. W. Norton.
- Robert, A. (1987, novembre). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 47.
- Rogalski, M. (1995). Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire DidaTech n°169*. Grenoble : Université Joseph Fourier, p. 127-162.
- Resnik, M. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford : Oxford University Press.
- Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Steiner, H.-G. (1968). Examples of exercises in mathematization on the secondary school level. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1), 181-201.
- Steiner, H.-G., Kaufman, B. (1969). Checker games in operational systems as media for an inductive approach to teaching algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 1(4), 445-483.
- Tall, D.O. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with special reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tarski, A. (1944). The semantic conception of truth and the foundation of semantics. *Philosophy and Phenomenological Research*, 4(3), 341-376.
- Tarski, A. (1972). Concepts fondamentaux de la méthodologie des sciences déductives. In G. G. Granger (Éd.), *Logique, sémantique, métamathématique 1923-1944* (vol. 1, pp. 67-116). Paris : Armand Colin. (Article original en allemand publié en 1930)
- van der Waerden, B.L. (1930-1931). *Moderne Algebra* (2 vols). Berlin : Springer.
- Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2), 133-170.

- Vergnaud, G. (2002). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. Portugais (Éd.), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation* (pp. 6-27). Montréal : Université de Montréal.
- Weber, H. (1898). *Traité d'algèbre supérieure*. Paris : Gauthier-Villars.
- Winsløw, C. (2004). Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. *Nordic studies in Mathematics Education*, 9(2), 81-100.
- Winsløw, C. (2006). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In Rouchier, R. et al. (ed.), *Actes de la XIII^è Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, p. 1-12. Cédérom. Grenoble : La pensée Sauvage.

Annexes

Annexe 1 : la théorie des banquets (document distribué aux étudiants)

La théorie des banquets

Une mini-théorie pour appréhender la pensée structuraliste

Vers le palais de Rosemonde au fond du Réve
Mes rêveries pensées pieds nus vont en soirée
Le palais don du roi comme un roi nu s'élève
Des chaires fouettées des roses de la roseaie
...

Ah ! nom de Dieu ! qu'ont donc crié ces entrecôtes
Ces grands pâtés ces os à moelle et mirotons
Langues de feu où sont-elles mes pentecôtes
Pour mes pensées de tous pays de tous les temps

Palais. Appoli

Introduction

Vous ne trouverez pas cette théorie des banquets dans les manuels d'algèbre : c'est l'invention¹ didactique de votre enseignant. Le but est de comprendre, sur un exemple simple le fonctionnement d'une *théorie structurale mathématique* : d'où provient une telle théorie ? Comment est-elle formulée ? Quels types de questions se pose-t-on dans une théorie structurale et quels types de méthodes utilise-t-on pour y répondre ?

La "théorie des banquets" est plus simple, moins riche que les théories structurales classiques que l'on étudie en L3 de mathématiques (théorie des groupes, des anneaux et des corps). C'est son intérêt : elle fournit un domaine restreint d'investigation qui propice à une prise de recul. On pourra ainsi discuter les questions précédentes sans avoir recours à trop de "technicité mathématique".

Ce travail devrait donc à la fois permettre une prise de recul par rapport aux théories structurales que vous avez déjà rencontrées et faciliter l'apprentissage d'autres structures mathématiques, par la perspective ainsi dégagée sur la pensée structuraliste.

Partie I. Axiomatique de la structure de banquet et modèles de l'axiomatique

Une théorie structurale est une théorie abstraite : elle parle donc d'objets dont la nature n'est pas spécifiée. On les note alors par des symboles : x, y, z ou α, β, γ , etc. Dans notre théorie des banquets, il n'y a qu'un seul type d'objets (dans d'autres théories il peut y avoir plusieurs catégories d'objets : par exemple, les points, les droites et les plans dans la géométrie d'Euclide).

La nature des objets n'étant pas spécifiée, ce sont les *relations* entre les objets qui sont le propos de la théorie (par exemple, on dit qu'un point *appartient* à une droite en géométrie

d'Euclide : c'est la relation d'appartenance, entre autres, qu'il s'agit alors de caractériser). Vous avez déjà formalisé différentes catégories de relations qui interviennent souvent dans les théories mathématiques : les relations d'ordre et les relations d'équivalence, deux exemples de relations binaires, définies par les axiomes bien connus qui expriment les propriétés formelles de ces relations. Nous noterons xRy une relation binaire, qui peut être satisfaites ou non, donc prend l'une des deux valeurs V ou F . Les lois de composition interne sur un ensemble (du type $(x, y) \mapsto x * y$, comme l'addition et la multiplication des nombres) permettent également de définir des relations entre éléments de cet ensemble : par exemple $x * y * x * y = 1$.

Dans notre théorie des banquets, on considère une unique relation entre les objets, qui est une relation binaire notée $\mathcal{R}$. Il s'agit alors d'explicitier les axiomes que vérifie la relation $\mathcal{R}$. Ils constituent la présentation axiomatique de la théorie.

Voici les axiomes de la théorie des banquets :

- (i) aucun objet ne vérifie xRx ;
- (ii) si xRy et xRz alors $y = z$;
- (iii) si yRx et zRx alors $y = z$;
- (iv) pour tout x , il existe au moins un y tel que xRy .

Si l'on regroupe dans un ensemble les objets de la théorie, on peut dire qu'un banquet est la donnée $(E, \mathcal{R})$ d'un ensemble E muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ vérifiant les axiomes précédents. Ces derniers sont les axiomes de la *structure* de banquet.

Une donnée $(E_0, \mathcal{R}_0)$ spécifiée s'appelle un *modèle* de l'axiomatique ou plus simplement un exemple de banquet. Le concept de banquet est un concept abstrait, général alors qu'un modèle est concret et particulier.

(1) Examen logique du système d'axiomes :

- a) Cohérence : s'agit-il d'une théorie mathématique valide, i.e. les axiomes sont-ils non-contradictaires ? Ou encore : existe-t-il un modèle ?
- b) Indépendance (minimalité du système d'axiomes) : certains axiomes sont-ils conséquences logiques d'autres axiomes ou bien les axiomes sont-ils mutuellement indépendants ?

(2) Etude des banquets de petits cardinaux : le cardinal d'un banquet $(E_0, \mathcal{R}_0)$ est par définition le cardinal de l'ensemble E_0 .

- a) Classifier les banquets de cardinal $n \leq 3$.
- b) Classifier les banquets de cardinal 4.
- c) Que dire de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de la relation $\tilde{R} : \tilde{R} \Leftrightarrow \tilde{j} = \tilde{i} + \tilde{1}$?
- d) Comment caractériser abstraitement le banquet précédent (i.e. caractériser sa structure abstraite de banquet parmi les différentes classes de banquets, en fait caractériser sa classe) ?

1. ©Thomas Hausberger

Partie II. Elaboration d'une théorie abstraite des tablées et théorème de structure des banquetts

On veut placer n personnes quelconques (n est le cardinal de la tablée) autour d'une table ronde. Une telle configuration s'appelle une tablée. Il s'agit de construire une théorie abstraite des tablées.

En d'autres termes, la situation est maintenant renversée par rapport à la partie précédente : on part de situations concrètes et il s'agit d'élaborer une théorie abstraite. C'est en général de cette manière que sont construites les théories structurales mathématiques, mais cette partie de la démarche n'apparaît pas dans l'exposition des théories mathématiques qui sont en général présentées directement comme dans la première partie.

- (1) Construction du système d'axiomes :
 - a) Quelle relation entre les personnes pourrait-on poser afin de définir abstraitement une tablée ?
 - b) Énoncer un système d'axiomes définissant abstraitement une tablée.
- (2) Théorème de structure des banquetts.
 - a) Proposer une définition pour un *sous-banquet* et un banquet *irréductible*. Soit $b = (E, \mathcal{R})$ un banquet de cardinal fini et $x \in E$. Définir et caractériser le sous-banquet $< x >$ engendré par x .
 - b) Quel lien y a-t-il entre les tablées et les banquetts irréductibles ?
 - c) Définir une opération de *réunion* de banquetts. Énoncer et démontrer le *théorème de structure* des banquetts de cardinaux finis.
 - d) Appliquer ce théorème de structure aux banquetts de cardinal 4.

Partie III. Lien avec la théorie des permutations

- (1) Démontrer que l'application $b : \sigma \mapsto b_\sigma = (\{1, 2, \dots, n\}, \mathcal{R}_\sigma)$, où $i\mathcal{R}_\sigma j \Leftrightarrow j = \sigma(i)$, définit une bijection entre les permutations $\sigma \in S_n$ sans point fixe et les structures de banquet sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
- (2) Comment se traduit sur la permutation σ le fait que deux banquetts soient isomorphes ?
- (3) Comment se traduit en terme de banquetts la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints ? Que retrouve-t-on ainsi ?
- (4) On rappelle que le type d'une permutation est la liste des longueurs de ses différents cycles dans la décomposition canonique en produit de cycles à supports disjoints. Définir le *type* d'un banquet et montrer à l'aide des questions de cette partie III que deux banquetts sont isomorphes si et seulement si ils ont même type.

Conclusion

La volonté de décrire abstraitement des objets mathématiques afin de produire des théories générales conduit donc les mathématiciens à écrire des systèmes axiomatiques définissant les relations qu'ils décident de considérer entre ces objets.

Les mathématiciens définissent ainsi différentes structures mathématiques abstraites. Les théories de ces structures établissent des conséquences logiques des systèmes axiomatiques en s'interdisant tout autre axiome.

On cherche notamment à classer les différents modèles de l'axiomatique considérée. Cette étude des modèles concrets se fait à "isomorphisme près", puisque la nature particulière des objets ne joue aucun rôle. Un des buts de la théorie est d'établir des théorèmes de structure, c'est-à-dire de décomposer de façon canonique les modèles en un "assemblage" de sous-modèles les plus simples possibles (les briques élémentaires de la théorie).

Le mot structure s'emploie donc dans trois sens différents :

- on parle de la structure de groupe, d'anneau, de corps, etc. (ou de banquet) ;
- on parle de la structure abstraite d'un modèle donné (au sein d'une théorie structurale) ; il s'agit alors généralement de caractériser la classe d'isomorphisme de ce groupe ;
- on parle de théorème de structure : on vient d'expliquer ce qu'il faut entendre par là.

Annexe 2 : conceptions des étudiants relatives au méta-concept de structure mathématique

		1	2	3	4	5	6	7
définition	axiomatique		Cela serait un modèle sur un ensemble défini par certaines règles qui nous permettent de comprendre les relations entre les éléments de l'ensemble			Ensemble + lois Relations sur les éléments → structure	Un ensemble d'éléments sur lesquels on définit des axiomes	
	ensembliste	Une structure mathématique permet de déterminer un ensemble grâce à des lois . C'est comme une classe en informatique		Structure = ensemble d'éléments + ensemble de règles sur les éléments	Ensemble muni de lois			La structure mathématique s'associe à un ensemble, un groupe, etc. C'est une liste de propriétés qui définissent un ensemble d'éléments. On peut définir des “ sous-ensembles ” pour lesquels on peut associer d'autres structures.
	relationnelle							
exemples	algébriques	Corps, groupe, anneaux	Le groupe $(N, +)$	Groupes, anneaux, semi-anneaux, corps, algèbres, espaces affines	Structure algébrique, espaces vectoriels, corps, anneaux,...	Structure d'anneau, de groupe, d'espace vectoriel	Groupe, anneau, corps, algèbre, espace vectoriel,...	La structure d'espace vectoriel, de groupes, d'anneaux, de corps
	autres					Espace normé Structure avec une relation d'ordre, d'équivalence		
raisons d'être	formaliser, modéliser		Pour modéliser certains problèmes					
	comparer, classer					Pour comparer des ensembles		Dans le but de comparer et de créer des “ catégories ” de structures, de lois
	généraliser, « économie de pensée »		Et généraliser	Faire des généralités	Les théories de structures permettent d'associer différents ensembles à une même structure de façon à n'avoir à étudier qu'un représentant .			
	unifier, faire des analogies					Faire des analogies entre des ensembles ayant la même structure (ex : se rapporter aux groupes Z/nZ qu'on maîtrise plus)	Mettre en évidence des similarités entre certaines structures / ensembles	
	simplifier		Mieux les [problèmes] comprendre	Simplifier des problèmes	Avec les lois apportées par cette structure, on peut résoudre des		Simplifier des problèmes	Afin de simplifier des problèmes (structure quotient)

			Éventuellement aider les autres disciplines		équations, étudier des fonctions,...			
	autre raison	Les théories des structures sont élaborées pour résoudre des problèmes mathématiques fondamentaux						
questions	définition, propriétés	Quelles propriétés définissent une structure ? Sur quel ensemble une structure est-elle définie ?	Existe-t-elle ? L'ensemble est-il non vide ?	Peut-on mesurer, distinguer, quantifier les éléments d'une structure ?			Quelle(s) loi(s) régit les éléments de la structure ?	
	syntactique, combinatoire	Peut-on restreindre le domaine d'application d'une structure ? Peut-on trouver une structure à l' intérieur d'une structure ?	Peut-on l' optimiser , la simplifier ?	Peut-on construire d'autres structures à partir d'une structure ?		Est-ce qu'elles sont conservées par certaines " combinaisons " ? Peut-on créer des ensembles structurés à partir d'éléments ou de sous-ensembles ? Comment ?		
	morphismes			Y a-t-il des équivalences entre structures ? Peut-on les comparer ?	Comment relier deux ensembles à l'aide d'application ?	Est-ce qu'elles se transportent ?		
	théorèmes de structure		Peut-on l'optimiser, la simplifier ?	Peut-on découper une structure en sous-structures plus simples ?			Comment simplifier la structure ?	
	sémantique, dialectique objets-structures		Peut-on établir des relations avec des problèmes concrets ?		Sur quels ensembles sont valables une propriétés donnée ? Les ensembles sont-ils ordonnés ? Quelles sont les propriétés vérifiées par un ensemble ?			La quadrature du cercle est-elle possible ? Les équations sont-elles résolubles sur tel ou tel ensemble, telle ou telle structure ? Comment calculer $(M+N)^p$ où M, N sont des matrices carrées d'ordre n ? La structure d'anneau commutatif permet d'appliquer la formule du binôme de Newton.

Annexe 3 : Exemples de productions d'étudiants lors de l'expérimentation en classe de la théorie des banquetts (question 1 2 : activité de classification)

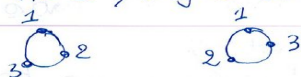
Groupe 1 :

2) a) Un banquet est un $|E_0| \leq 3$

Pour $n=1$, c'est impossible

Pour $n=2$, il y'a qu'un seul banquet

Pour $n=3$, il y'a 2 banquetts



b) Pour $n=4$

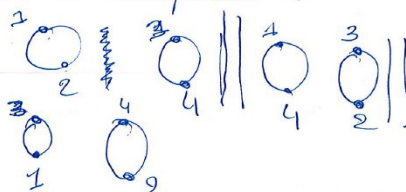
2 cas de figures

soit ils sont tous autour de la table. dans ce cas on a 3!

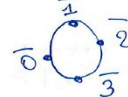
1 fois qu'on fixe le premier élément on a 3 choix pour son voisin de

droite, puis 2 choix pour le voisin de droite de celui là.

soit il y'a 2 tables donc 3 banquetts #



c) ça peut être modéliser par le banquet avec $|E_0|=4$ et une table.



d) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de la relation précédente est dans la même classe que le banquet à 4 éléments autour d'une seule table.

Groupe 2 :

2/ A. $\emptyset$ $n=0$

$n=1$ Il n'y en pas cf 1/A.

$n=2$ $\{x, y\}$ xRy, yRx

$n=3$ $\{x, y, z\}$

$xRy, yRx, zRx \Rightarrow z=y$ donc $z=y$ a perdu
 $zRy \Rightarrow z=x$ modifié à $z=x$ dans

b/ $\{x, y, z, t\}$ 3 cases possibles

• xRy, yRz, zRt, tRx

• On peut éventuellement le décrire comme une union de banquet à cardinal 2

$\{x, y, z, t\}$
 xRy, yRx, zRt, tRz

c)

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$\bar{0}R\bar{1}$
 $\bar{1}R\bar{2}$
 $\bar{2}R\bar{3}$
 $\bar{3}R\bar{0}$

On est dans le deuxième cas, c'est donc un banquet

d) C'est un groupe cyclique.

Groupe 3 :

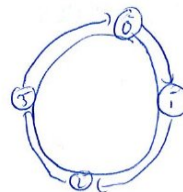
a) On a plusieurs matrices de relations possible pour $n=3$.

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que les banquetts associés à ces matrices sont isomorphes : on passe de l'un à l'autre en échangeant de place 2 personnes...
On a donc 1 unique banquet de taille 3.*

b) On remarque que l'union de deux banquetts est un banquet, ainsi on peut conjecturer que le nombre de banquetts de taille $n \geq 4$ est le nombre de décompositions en somme d'entiers ≥ 2 , plus 1.

$4 = 2+2$, on a donc 2 banquetts possibles ;
(Ils correspondent à une table de 4 ou 2 tables de 2)

c) C'est un banquet, il est isomorphe à la table de 4 :



$\rightarrow$ = en relation avec.

Groupe 4 :

2) a) $n \geq 3$.

* $n=0$ trivial

* $n=1$ impossible

* $n=2$. les banquetts sont de la classe à isomorphisme près :

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, R)$ avec $\bar{i} R \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$

* $n=3$. Pour trouver les classes, on réalise des tableaux représentant les choix possibles :

$$E = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$R \setminus$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	1	0
e_2	0	0	1
e_3	1	0	0

Classe 1

$R \setminus$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	0	1
e_2	1	0	0
e_3	0	1	0

Classe 2

→ classe 1: $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est un représentant avec $\bar{i} R \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$

→ classe 2 : un représentant est $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, R)$ avec

$$\bar{i} R \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$$

OK si on prend

$$\varphi : \{e_1, e_2, e_3\} \rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$\begin{array}{lcl} e_1 & \rightarrow & e_2 \\ e_2 & \rightarrow & e_3 \\ e_3 & \rightarrow & e_1 \end{array}$$

c'est une isomorphisme de la classe 1 à la 2 ⇒ une seule classe

(b) $n=4$

$R \setminus$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	1	0	0
e_2	0	0	1	0
e_3	0	0	0	1
e_4	1	0	0	0

classe 1

||

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$R \setminus$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	1	0	0
e_2	1	0	0	0
e_3	0	0	0	1
e_4	0	0	1	0

classe 2

$e_1 R e_2$ $e_2 R e_1$ $e_3 R e_4$ $e_4 R e_3$

Groupe 5 :

- 2) a) $n=0$ $\emptyset$ vérifie la relation
 $n=1$ non de pas car doit être en relation avec lui
 $n=2$ $E_0 = \{x_1, x_2\}$
 $x_1 \mathcal{R}_0 x_2$ et $x_2 \mathcal{R}_0 x_1$
 $n=3$ $E_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$
 $x_1 \mathcal{R}_0 x_2$ $x_1 \mathcal{R}_0 x_3$
 $x_2 \mathcal{R}_0 x_3$
 (car si par ex $x_2 \mathcal{R}_0 x_1$ alors $x_3 \mathcal{R}_0 x_1$ par transitivité)
 b) $n=4$ $E_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
 2 cas :
 - $x_1 \mathcal{R}_0 x_2$ $x_2 \mathcal{R}_0 x_3$ $x_3 \mathcal{R}_0 x_4$
 $x_4 \mathcal{R}_0 x_1$
 - $x_1 \mathcal{R}_0 x_2$ $x_2 \mathcal{R}_0 x_4$ $x_3 \mathcal{R}_0 x_1$ $x_4 \mathcal{R}_0 x_3$
- c) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$
 $\bar{1} \mathcal{R} \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{1} + \bar{1}$
 correspond au 1er cas
 d) il appartient à la classe des banquet à 1 table ronde ou "banquet cyclique"
- T table ronde : un ensemble d'éléments d'un banquet tels que $\forall x, y \in T$
 $\exists$ une suite $x_0, \dots, x_p$ d'éléments de T
 tels que $x_0 \mathcal{R} x_1$ $x_1 \mathcal{R} x_2$ $\dots$ $x_{p-1} \mathcal{R} x_p$
 $x_p \mathcal{R} x_0$

Groupe 6 :

2) a)

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	0	1	0
e_2	0	1	0	0
e_3	0	0	1	0
e_4	1	0	0	0

Pour $n=1$, on ne peut pas définir de banquet
 Pour $n=0$, on a le banquet trivial
 Pour $n=2$, tout (E, R) a comme table pour R :

x	y
x	F
y	V

Tout morphisme $\varphi: (E, R) \rightarrow (E', R')$
 avec la table pour R' :

x'	y'
x'	F
y'	V

Donc tout φ envoie soit
 x sur x' (et dans ce cas y sur y')
 soit x sur y' (et alors y sur x')

Dans tous les cas φ respecte R' et sera donc un isomorphisme.

Groupe 7 :

4) 2 et 3 étant premiers B_2 et B_3 sont les seul banquet d'ordre 2 ou 3.

$B_2 = \{2 \text{ personnes}, 3 \text{ personnes à sa droite}\}$

$B_3 = \{3 \text{ p}, R\}$

b) il y a B_4 et $B_2 \times B_2$.
 B_4 4 personnes
 $B_2 \times B_2$ 4 personnes
 3 personnes à sa droite

b) Banquets de cardinalité 4

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
 $\downarrow$
 a, b, c, d 4 éléments avec $\bar{1} \mathcal{R} \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{1} + \bar{1}$

a $\mapsto$ b
 b $\mapsto$ a
 c $\mapsto$ d
 d $\mapsto$ c

c) C'est un groupe cyclique, c'est un banquet d'ordre 4

2) Par exemple, c'est le groupe cyclique tel que :

$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$

ou sous forme de groupe :

$G = \{1, i, i^2, i^3\}$
 $i^4 = 1$
 $\forall y \in G, \exists m \in \{0, 1, 2, 3\} / y = i^m$

2) a) Banquets de cardinalité $m \leq 3$:

- $m=0$: Banquet trivial $\emptyset$
- $m=1$: Absurde car $(x) \Rightarrow x \mathcal{R} x$
- $m=2$: Unique (plus petit banquet possédant au moins 1 élément)
- $m=3$: Unique (car les 3 éléments sont en relation entre eux)

Annexe 4 : Extrait des discussions du groupe des étudiants avancés (session en laboratoire)

A : Classique, on spécifie la structure par des relations, d'accord.

B : Antisymétrie [à propos de l'axiome (i)]

A : C'est pas tout à fait ça, c'est la non-réflexivité ; il y a un seul type à droite et un à gauche, c'est l'idée, quoi [des rires] ; il y a une personne qui est assis tout seul à une table

B : Les éléments sont des personnes ? Et en relation si ensemble à table ?

A : Oui, c'est ça. La relation est d'être assis à la droite (ou à la gauche). Par contre, tu peux avoir au plus un type à droite et au plus un à gauche, il y a au moins un type à droite. Oui [continuant à lire]... il y a la théorie et les modèles. Pour montrer que c'est non contradictoire, on peut montrer qu'il y a un modèle. Je propose de prendre un type. Non, un type ne marche pas, 2 types assis l'un à côté de l'autre. Donc tu prends $E = \{x, y\}$. On peut aussi mettre $\{0, 1\}$.

B : $\{1, 2\}$?

A : Allez, on prend $E = \{a, b\}$ et pour la relation les couples (a, b) et (b, a) . Donc c'est bien un modèle.

B : [après réflexion] ok

A : Oui, un ensemble à 2 éléments, ils sont assis l'un en face de l'autre...évidemment, il y en a au plus un à droite et un à gauche, ils sont en relation avec celui qui est en face

B : Donc ça c'est l'existence. Et la cohérence ?

A : C'est pareil, si tu veux, il y a plein de modèles. Pour montrer l'indépendance, il faut montrer à chaque fois qu'il y a un modèle qui vérifie les 3 axiomes mais pas le quatrième.

B : Pour nier le premier axiome, il suffit de prendre (a, a) .

A : C'est tout à fait juste, le modèle à 1 élément vérifie (ii), (iii), (iv) sans vérifier (i). Ensuite... je pense qu'on va pouvoir nier chacun des axiomes.

B : Pour nier le deux, on prend (a, b) (a, c)

A : Un ensemble à 3 éléments, tu me dis $(a, b), (a, c)$. [...] Il faut que ce monsieur n'ait pas 2 antécédents à gauche... C'est pas évident de nier (ii) sans (iii). Si tu veux, on va faire facile, on peut nier (iv), c'est facile, il suffit de prendre l'ensemble vide car (ii) et (iii) commencent par si alors.

Donc ce truc, c'est bien gentil...il y en existe et au plus un, donc ce truc, c'est une fonction. A x on associe l'unique y tel que xRy . Et on a l'injectivité a priori.

B : Oui, c'est bien ça. Ça aide à ne pas faire n'importe quoi. Revenons au cas de $(a, b), (a, c)$; il faut qu'on complète... il faut au moins 3 éléments

A : 2 ça ne marche pas, il faut un peu plus

B : Ça complexifie quand même ; b, d, c, je ne sais pas...

A : Il faut construire une fonction qui est pas, qui est pas... ; si par contre (ii) et pas (iii)...

B : On veut nier (ii), donc ce n'est pas une fonction, justement

A : On peut commencer par nier (iii) si tu veux ; il faut une fonction qui n'est pas injective. $(x, y), (z, y)$, il faut envoyer y sur quelqu'un... on prend (y, z)

B : On a bien l'axiome (i)...

A : On a l'axiome (ii) car chacun n'a qu'un seul antécédent à droite...

B : On a nié (iii)... donc ça, ça marche.

A : Mais on ne peut pas inverser, ce n'est pas symétrique de nier (ii) et (iii).

B : On garde l'injectivité mais il peut y avoir deux images. [...]

A : Il faut peut-être un ensemble infini, c'est possible.

B : J'ai l'impression que ce n'est pas possible. [...]

A : C'est un truc de bijectivité qui fait qu'on a besoin d'un ensemble infini : $(0, 1), (0, 2), \dots (1, 0)$ comme ça il a quelqu'un, ensuite le problème est de lier tous les autres : $(2, 3), \dots (n, n+1)$

B : C'est bon.

A : Avec un ensemble fini cela ne doit pas marcher ; à un moment donné, ce type là, il faut qu'il ait quelqu'un.

B : Oui, oui, c'est une question de cardinalité.

A : Les banquets de petits cardinaux [le binôme attaque la question 2]

B : Est-ce qu'il peut être vide ?

A : Il a rien dit sur les objets, donc a priori ce sont des ensembles.

B : Donc $\emptyset, R = \emptyset$.

A : On a toujours des « pour tout » donc le vide ça marche, effectivement.

B : Le singleton... donc l'ensemble des relations sera vide.

A : (iv) et (i) sont incompatible donc il n'y a pas de banquet de cardinal 1. Deux, on a déjà vu, il y a un seul modèle de cardinal 2.

B : Le cardinal 3...

A : Le truc circulaire, des personnes a,b,c autour de la table. (a,b),(b,c),(c,a). Reste à voir que c'est le seul. (a,b) moyennant numérotation, c'est toujours valable

B : (a,c),(c,b),(b,a) ?

A : C'est le même modèle, à isomorphisme près.

B : C'est vrai.

A : (b,a)... il va avoir un soucis, car c va être envoyé sur quoi ? Si c est envoyé sur a ou b, comme a et b sont déjà atteints, on va nier (ii).

B : Si on avait (a,b) et (b,a) on ne saurait pas quoi faire avec c...

A : Oui, c'est ça. Parce que ses deux voisins de droite potentiels ont déjà un voisin

B : Donc c'est forcément (b,c) et on complète.

A : Le cardinal 4 sera peut-être plus intéressant. On va dire {a,b,c,d} ?

B : Oui.

A : Donc il y a le modèle circulaire... tu me suis ?

B : Toujours... mais, pour le coup, il peut y en avoir plusieurs si on les met a,b,c,d autour d'une table

A : Oui, mais tu vas pouvoir trouver une bijection ce qui revient à faire une renumérotation. Si tu veux, les morphismes naturels là-dedans.... ça va être est-ce qu'il y a moyen d'envoyer E sur E' par une bijection qui envoie R sur R' ? Donc si tu as un modèle circulaire, tu vas pouvoir l'envoyer sur un modèle circulaire par une permutation, quoi.

B : Heu, oui...

A : Donc on a toujours (a,b) ; on a toujours (b,c)... ah, est-ce que b peut s'envoyer sur a ? Ca ferait un premier branchement.

B : Ca ferait un banquet à deux tables, en quelque sorte.

A : Oui, c'est une possibilité. On peut avoir (a,b),(b,a),(c,d),(d,c). En fait, on reprend les banquets précédents, quoi. On a le banquet circulaire $R_{C,4}$, et on a, on pourrait dire, enfin une somme directe en fait. C'est une somme directe de banquets : $R_4 = R_2 \oplus R_2$. Est-ce qu'il y en a d'autres ? Je ne crois pas.

B : Est-ce qu'il y a d'autres sommes directes possibles ? Non, parce qu'il n'y a pas de banquet à une personne.

A : Tu pourras avoir en théorie des modèles « irréductibles », qui ne se décomposent pas en somme directe, et qui sont a priori différents du modèle circulaire. Mais là, si on a (a,b) et si on met (b,a), alors le reste est spécifié ; donc on va essayer de mettre (b,c). Si on met (c,d) on retombe sur le banquet circulaire ; (c,a) on est foutu. Donc c'est la seule possibilité, je ne sais pas si tu me suis...

B : [...] ok, donc on a nos deux modèles.

A : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$... donc là, il nous raconte... c'est juste le banquet circulaire, ça

B : Ah... ouai, oui, donc c'est notre premier modèle, le précédent.

A : $R_{C,4}$. Donc la caractérisation abstraite, c'est peut-être exactement ça, ce qu'on a dit. Un banquet irréductible... oui, c'est ça... Caractériser abstraitement, ce n'est pas très clair... Ce n'est pas le seul de degré 4, mais c'est le seul qui ne puisse pas s'écrire en fonction de plus petits, quoi.

B : Qu'est-ce que t'entendrais par différentes classes de banquets ?

A : Là, ce sont les classes par isomorphisme. On n'en a pas parlé.

B : Si, c'est ce qu'on a dit à propos de permutations d'éléments. Quoique, de manière générale, si on a un banquet à p personne, il va pouvoir se décomposer en... en banquets de moins de personnes.

A : Ici, il parle que de n=4, mais on peut sans doute étendre. C'est assez simple ; si $E = \{a_1, \dots, a_n\}$... voyons, c'est une fonction, comme on a dit et $f(a_i) \neq a_i$; si tu itères, à un moment donné, soit tu reviens sur un type précédent et tu as un sous-banquet, soit tu reviens aussi sur un type précédent mais tu as tout parcouru. Les banquets irréductibles, ce sont les banquets circulaires, en fait.

B : Donc, qu'est-ce qu'on répondrait en fait ? C'est un peu ton domaine de spécialité, n'est-ce pas ?

A : Oui, en effet. Je pense qu'on a répondu que c'est un banquet irréductible, quoi.

B : Ok. Donc question 2 d), c'est le seul banquet irréductible de cardinal 4.

A : Donc on peut passer à la partie II.

B : Ok

A : Il me semble qu'une tablée, c'est un banquet irréductible.

B : Alors... n personnes autour d'une table...

A : Donc là, on est sur un truc de cardinal fini et la relation c'est « être à la droite de », non « être à gauche de ». Puisqu'il nous demande d'aller du concret vers l'abstrait, donc c'est être à gauche de. aRb si a est placé à gauche de b. On fait exactement le chemin inverse de ce qu'on a fait tout à l'heure.

B : Euh... effectivement, si on lit R. Mais avant, on avait dit en terme d'« être à droite de ».

A : Oui, effectivement [rires]

B : Méfie-toi, c'était plus naturel de dire comme ça.

A : Ok, donc c'est la relation qu'on va utiliser pour définir la tablée : être à gauche de.

B : Donc on a une table ronde.

A : En fait, on a les axiomes des banquets plus un.

B : n est quelconque, donc il peut y avoir une seule personne, en particulier. Alors on n'a pas le premier axiome

A : Euh... si ! Tu n'es pas à gauche de toi-même. Mais tu peux toujours inclure ou exclure un cas particulier... donc si tu veux faire le lien avec les banquets, tu as vraiment intérêt à l'inclure

B : Euh, quand même

A : Sinon, tu n'auras pas les axiomes, tu seras dans un autre théorème : tu seras à gauche de ton voisin de droite et à gauche de toi-même

B : D'accord. Je vais essayer d'écrire les axiomes. Donc on n'a qu'un voisin de droite : aRb et aRc implique $b=c$; pareil à gauche

A : Moi, je dis, t'as les axiomes des banquets plus t'as le (iv) b qui dit : pour tout x il existe y tel que yRx ; c'est tout

B : ok

A : Non, cela ne va pas définir une tablée, ça. Tu dois dire que t'es à la même table que tout le monde. Tu dois dire : pour tout x et pour tout y il existe r et il existe $x_1, \dots, x_r$ tel que $x_1=x$, $x_r=y$ et...

B : Tu veux relier tout le monde

A : Oui, puisque tout le monde est autour de la même table

B : Oui, absolument. Il existe un chemin de x vers y, quoi, voilà. $x_i R x_{i+1}$, c'est tout.

A : Les sous-banquets et les banquets irréductibles, on en a déjà parlé tout à l'heure. On peut l'écrire mais c'est : (E', R') est un sous-banquet de (E, R) si t'as E' est inclus dans E et si R limité à $E' \times E'$ égale R' , quoi.

B : Un banquet irréductible ?

A : Ca, c'est un sous banquet. Un sous-banquet irréductible, c'est un banquet qui n'est pas somme directe de sous-banquet.

B : Donc une tablée en fait.

A : Ca, c'est un théorème en fait. Tu dois le monter. On l'a montré en fait, tout à l'heure.

B : C'est la question b)

A : C'est en fait ce que j'ai montré tout à l'heure : il suffit de faire les itérés et tu regardes quand tu t'arrêtes.

B : Donc il est irréductible s'il...

A : ne s'écrit pas comme somme directe

B : Ou tu peux écrire cet axiome : il existe un chemin entre deux quelconques de ses personnes

A : C'est une façon de faire, en effet... mais la question b) n'aura pas de sens, si tu définis les banquets irréductibles comme les tablées. Tu enlèves le sens de la question [rises] Donc voilà... Mais il faut définir la somme directe : E est l'union disjointe de E' et de E'' ... et plus quoi ? Et puis $R = \dots$ On dit que (E, R) est la somme directe de (E', R') et de (E'', R'') si ...

B : Tu prends des sous-banquets stricts

A : Tu as raison, puisqu'on a un banquet vide... donc stricts et non triviaux, quoi [rises] Voilà, de toute façon, s'il y en a un non strict, l'autre est non trivial [barrant non triviaux] Et R est l'union disjointe des deux relations, donc il n'y a rien qui lie une relation à l'autre, les tables ne se parlent pas.

B : Euh, je n'ai pas encore défini sous-banquet mais c'est simplement E' inclus dans E , R' inclus dans R et (E', R') est un banquet

A : Non, je ne dirais pas ça, moi. Je dirais que R réduit à $E' \times E'$ égale R' ... parce que sinon tu as les plus petits aussi, tu as des gens isolés

B : Non, justement, tu peux avoir personne qui est isolé

A : Peut-être cela revient au même, en effet

B : Un banquet, c'est une correspondance entre... Donc c'est bien défini, en fait.

A : On va dire que cela revient au même... Le banquet engendré, on va dire que c'est le plus petit sous-banquet de (E, R) contenant x, voilà... Alors, caractérisation... tu prends tout le monde, quoi, si t'as l'autre fonction de tout à l'heure, f qui à x associe l'unique y tel que xRy . On écrit $\langle x \rangle = \{f^n(x), x \in \mathbb{N}\}$. Je pense que ça marche.

B : Euh, c'est l'ensemble des éléments de E, euh, l'ensemble des couples où il y a un x dedans

A : Tu dirais ça ? Moi, je dirais que je prends les itérés. Et donc tu dis, à chaque fois je prends le voisin de droite, le voisin de droite, le voisin de droite... Là, c'est évident que tout sous-banquet qui contient x doit contenir ça, parce qu'il doit contenir le voisin de droite, donc le voisin de droite du voisin de droite, etc. En fait, ça, c'est l'ensemble E_x . La relation, c'est $R_x = R \cap (E_x \times E_x)$. Du coup, tu as (i),(ii),(iii) automatiquement comme tu as une sous-relation. La seule chose à montrer, c'est (iv), mais c'est évident.

B : ok [...]

Annexe 5 : Extrait des discussions du groupe des étudiants de niveau intermédiaire (session en laboratoire)

D : Il y a la bijection entre $Z/4Z$ et $Z/2Z \times Z/2Z$

C : Je pense qu'à l'ordre, c'est une histoire d'ordre.

D : Il y a une bijection, oui. Qu'est-ce qui pose problème ?

C : 3 est d'ordre combien ? 4. Dans $Z/2Z \times Z/2Z$, t'as pas d'élément d'ordre 4. Il y a pas de bijection entre eux.

Prof : Qu'est-ce que veux dire « classier les groupes d'ordre 4 » ?

D : Déterminer tous les groupes à isomorphisme près.

Prof : Et ici, y-a-t-il une notion d'isomorphisme ?

C : S'il y a une notion d'ordre ici, alors là, tous ces éléments sont d'ordre 2, et ici, ils sont tous d'ordre 4.

Prof : L'ordre est lié à une loi de composition interne que l'on itère. Est-ce que l'on a ça ici ?

D : [souples]

Prof : Vous ne pourriez pas définir une notion d'isomorphisme ?

D : Entre deux ensembles de même cardinal ?

Prof : On vous demande ici de classier les banquets.

C : oh là là.

D : E_0 est ici un espace à 4 éléments [désignant le graphe cyclique], mais là, il y a un produit cartésien [désignant le graphe se décomposant en deux composantes connexes].[...] Ici, on a $\{x,y,z,t\}$ et là $\{x,y\} \times \{z,t\}$

C : Ca veut dire quoi, cette croix ? Les éléments de cet ensemble, c'est quoi ?

D : Les couples

C : Je ne sais pas ce qu'on essaie de faire.

Prof : J'ai l'impression que vous avez une idée intuitive d'isomorphisme.

C : Qu'est-ce qu'on essaie de faire ?

D : La classification, donner des classes.

C : Mais il suffit de définir un ordre.

Prof : En théorie des groupes, est-ce que l'ordre suffit pour définir la notion d'isomorphisme ? [...] Est-ce que vous avez utilisé l'ordre afin de montrer que deux groupes sont isomorphes ?

D : Non, on l'a utilisé pour montrer qu'ils ne sont pas isomorphes.

Prof : On démontre que ce sont deux classes distinctes en définissant une notion d'ordre qui est invariante par isomorphisme. Vous devez montrer également que tous ceux-là sont isomorphes. Mais tant que vous n'aurez pas défini la notion d'isomorphisme, ce sera difficile, non ?

C : Est-ce que la notion d'isomorphisme dépend de la relation ?

D : On prend $\varphi : E_0 \rightarrow E_0$.

C : Il faut le faire dépendre de la relation : φ est un isomorphisme si : si xRy alors $\varphi(x)R\varphi(y)$. Si on la définit comme cela, c'est bon... car entre eux [désignant les permutations de longueur 4] il y a un isomorphisme et entre eux [désignant les « doubles transpositions »] aussi.

Prof : Est-ce le même E_0 ?

C : E'_0 .

Prof : Comment ça t'es venu ?

C : C'est en faisant avec ce que l'on connaît déjà... Enfin, la définition d'isomorphisme de groupe, c'est ça.

D : Mais ici, ce ne sont pas des groupes.

C : On s'en fou, depuis le début, on fait comme si.

D : Mais la relation binaire, c'est pas interne.

C : J'sais pas ; cela me paraît bien.

D : C'est quoi E'_0 ?

C : C'est l'autre ensemble. [souples]

Prof : Que pouvez-vous dire maintenant de l'exemple de la question c) ? Vous avez une classification ; que pouvez-vous dire sur cet élément ?

D : Ce serait le premier [après avoir converti l'exemple dans le registre des graphes, ce qui lui permet de reconnaître la cyclicité]

C : Le deuxième ne le vérifierait pas.

Prof : Comment allez-vous le démontrer ?

C : Avec ça [désignant la définition d'un isomorphisme, en soupirant]

D : Il faut construire un isomorphisme.

C : Entre qui et qui ? $Z/4Z$ et notre E_0 [désignant $\{x,y,z,t\}$] ?

D : Ouai.

C : De toute façon, oui. Alors à x qui associe 0, à y 1, z 2, t 3. Est-ce que cela marcherait ? Oui, mais sous quelle définition ? [...] On n'a toujours pas de définition exacte d'isomorphisme dans notre théorie !

D : Là, on les met juste en relation. Il faut se donner une flèche $E \rightarrow Z/4Z$, voir comment agit cette flèche.

C : Un isomorphisme, tu peux le définir en tant que chaque élément. Si tu as dit que tu envoies x sur 0 , y sur 1 , z sur 2 et t sur 3 , c'est bon... Il est pas unique, tu pourrais envoyer x sur 1 , z sur 0 , y sur 2 et t sur 3 . Ça donnerait un autre élément de là-bas [désignant les conjugués]. On s'en fou... Franchement, dans tout ça, on a l'ordre, c'est tout... Qu'est-ce qui différencie $Z/4Z$ muni de ça [désignant R] avec $(Z/4Z, +)$? Parce que c'est pas du tout pareil ! R est une relation binaire, mais pas $+$. A mon avis, c'est pas du tout pareil. Qu'est-ce qui différencierait les deux au final. On n'a pas la relation, oui, c'est ça c'est sûr.

Prof : Formellement, vous avez construit votre isomorphisme. Est-ce bien un isomorphisme ? Avez-vous effectué des vérifications ?

C : Pour moi, c'est juste renommer le nom des points qu'on avait donnés. Au lieu de les appeler x, y, z, t on les appelle $0, 1, 2, 3$.

Prof : Si maintenant le 0 je l'envoie sur le x , le 1 sur z , est-ce que cela serait un isomorphisme ? Si je fais $x z y t$, est-ce que cela donne un isomorphisme entre les deux banquets ?

C : Oui, c'est juste une question comment on nomme nos éléments.

Prof : Si l'idée c'est « on peut mettre n'importe quelle bijection entre les deux »...

D : Ah, il faut modifier l'ordre des flèches...

Prof : Car vous n'avez fait aucune vérification. Si je fais cette bijection : $x z y t$

C : Ben, on va faire le schéma : x s'envoie sur z ... [C dessine alors un graphe croisé qui relie les points dans l'ordre $x y z t$]

D : [rires à la vue du graphe croisé] On n'arrive pas à se défaire de ce que l'on connaît déjà.

Prof : Si 0 est en relation avec 1 , avec la définition de Pierre, il faut que $\varphi(0)$ soit en relation avec $\varphi(1)$, donc x avec z . Sur ce banquet là [désignant le graphe correspondant à $(x y z t)$] ce n'est pas le cas.

C : Oui, mais pour celui-là, c'est le cas.

Prof : Je veux vous convaincre qu'il y a une vérification à faire, comme en théorie des groupes. Vous avez du mal à formaliser les choses. Pour vous, c'est la notation avec les flèches qui traduit les relations. Et comme vous avez le même schéma de bouclage, vous voyez que vous avez les mêmes relations, c'est ça que vous dites de façon informelle.

C : Oui, c'est ça, on a le même schéma de bouclage. Mais là [désignant le graphe croisé]... je suis perdu.

Prof : Est-ce que la notion d'isomorphisme est claire ?

C : Ben, je ne sais plus du coup.

Prof : C'est quoi un isomorphisme ? C'est une application entre deux banquets : c'est une application bijective entre les ensembles sous-jacents aux deux banquets et en plus elles doivent...

D : Vérifier les relations.

Prof : Voilà, préserver les relations.

D : Le problème, c'est qu'on a R_0 et R_1 , on a deux relations différentes. Si on a $x R_0 y$ ce serait $\varphi(x) R_1 \varphi(y)$

Prof : C'est ça. Et du coup, vos permutations vous conduisent toujours au même schéma.

D : Celui-ci aussi [désignant le graphe croisé], si on le met en planaire.

Prof : Oui, et là c'est rigolo, parce que « isomorphisme » signifie avoir « même forme ». Votre représentation sous forme de schéma vous montre la forme. Finalement, on a deux formes différentes.

D : Oui, donc finalement, il faut aussi que ça préserve la relation, sur les deux ensembles.