Communauté UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématiques, sciences et technologies de l'information, informatique**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Thomas LECORRE

Thèse dirigée par **Sylvain GRAVIER** et
codirigée par **Isabelle BLOCH**

préparée au sein du **Laboratoire Institut Fourier**
dans **l'École Doctorale MSTII**

Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite

Elaboration d'un cadre basé sur un modèle de rationalité pour l'accès aux objets mathématiques complexes.

Thèse soutenue publiquement le **25 octobre 2016**,
devant le jury composé de :
Mme Isabelle BLOCH
Professeure émérite, Université de Bordeaux, Co-directrice
M Sylvain GRAVIER
Directeur de Recherche CNRS Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse
M Christian MERCAT
Professeur des universités Université Claude Bernard, Rapporteur
Mme Cécile OUVRIER-BUFFET
Professeur des universités, Université de Reims, Rapporteur
M Marc ROGALSKI
Professeur émérite, Université Paris Diderot, Président de jury
M Charles TOROSSIAN
Inspecteur Général de l'Education Nationale, Université Paris Diderot, Membre

Mots clefs : rationalité, limite, ingénierie, définition, Théorie des situations, débat scientifique

Résumé :

Cette étude cherche à déterminer des conditions d'accès des élèves de fin de secondaire au sens et à aux nécessités de savoirs complexes. L'étude de ces conditions, au sein de la théorie des situations didactique, conduit à développer un cadre pour l'élaboration d'ingénieries qui les modélise. Ce cadre se fonde sur deux principes interdépendants. Le premier principe vise à maintenir l'adidacticité des situations dans le cas des savoirs complexes de fin de secondaire et début de supérieur, et conduit à une adaptation de la théorie des situations. Le second principe vise à faire de la non contradiction le mode d'appréhension adidactique de l'activité mathématique et va conduire à l'élaboration d'un modèle de rationalités. Le cas de la construction des concepts de l'analyse, et de leur formalisation constitue alors en même temps un support à cette étude et un cas d'application paradigmatique de ce cadre. Ainsi, une ingénierie de la limite comprenant une succession des trois situations didactiques (nombres, quantificateur et limite) est développée et expérimentée. Les résultats tendent à montrer que les élèves commencent à s'approprier le formalisme de la limite et que leur type de questionnement a évolué dans le sens d'une prise en charge beaucoup plus importante du niveau théorique en jeu dans leur activité.

Keywords: rationality, limit, didactical design, definition, theory of didactical situations, scientific debates

Summary:

This study aims to establish the conditions that permit to students to achieve the raison d'être of complex knowledge. We deploy the Theory of Didactic Situations and go forward to develop a theoretical frame for the conception of didactical engineering which aims those conditions. This frame is based on two intertwined principles: 1) keep on the adidactic dimension of the situations that involve complex knowledge; 2) students' activities should avoid contradiction between what they may think and the reality they are attempting to figure out. Those principles shape the design of our theoretical construct of rationalities. This construct is used to design a didactical engineering on the formal definition of limit. The results illustrate the potent of this construct, particularly in showing the evolution of students' thinking towards the theoretical level.

Remerciements :

Quand j'ai repris mes études en débutant par un Master de Didactique, il y a six ans, je n'imaginais pas que je commençais une aventure aussi intense, riche émotionnellement et intellectuellement, aussi riche de rencontres, d'échanges stimulants, tant sur le plan personnel que sur le plan professionnel…Ce fut, à ce titre, une véritable aventure, mais aussi l'apprentissage d'un nouveau métier.

Je tiens d'abord à remercier sincèrement tous ceux qui n'ont pas cru en mon projet, car ils m'ont donné l'obligation d'aller chercher le meilleur de moi-même. Je remercie également tous ceux qui ont cru en mon projet, leur soutien a été une aide précieuse.

Je souhaite remercier ceux qui m'ont accompagné dans cette formation :

Sylvain Gravier, mon directeur de thèse qui a su me guider avec ses conseils avisés et me désorienter avec ses questions qui ébranlaient parfois mes certitudes.

Isabelle Bloch, ma directrice de thèse avec laquelle j'ai beaucoup partagé, qui par son exigence de rigueur, m'a amenée à être beaucoup plus exigeant moi-même, et qui a su détendre les moments difficiles de ses traits d'humour fameux. Ses connaissances profondes et étendues ont été des aides précieuses.

Je souhaite remercier les membres du jury, d'avoir accepté d'étudier mon travail de près :

Cécile Ouvrier-Buffet, rapporteur, qui a su me conseiller pour des améliorations significatives du document final et au-delà, avec bienveillance et pertinence.

Christian Mercat, rapporteur, qui a pointé des aspects importants qui m'aideront pour mes futures publications.

Marc Rogalski qui a su manifester son intérêt assez tôt pour mon travail de recherche.

Charles Torossian qui, lors d'une discussion au sujet de ma carrière, m'a décidé d'entamer cette thèse.

Je souhaite remercier toute la communauté didactique dans son ensemble pour l'accueil qu'elle réserve aux nouveaux venus, y compris en cours de formation. Lors des écoles d'été par exemple, j'ai particulièrement apprécié de me sentir immédiatement membre de la communauté.

Je remercie Marc Legrand, qui a guidé mes premiers pas dans la didactique il y a quinze ans déjà, avec lequel ces quinze années de collaboration à l'IREM furent passionnantes tant sur le plan humain que celui de la didactique et m'ont donné envie de poursuivre en tant qu'enseignant-chercheur.

Je souhaite remercier mes proches qui ont supporté de me voir beaucoup plus à mon bureau qu'à leur côtés…

Je souhaite remercier mes parents qui m'ont donné une éducation peu conventionnelle qui ne me prédisposait pas à l'académisme, mais plutôt à chercher et regarder autrement, ce que je crois être une qualité de nombreux chercheurs que j'ai rencontrés. Je remercie particulièrement mon père, qui m'a donné ces derniers mois des conditions de travail idéales pour achever une thèse, c'est-à-dire la possibilité de vivre en ermite sans se soucier du reste.

Enfin j'ai une pensée pour tous ceux qui, devenus amis, m'ont accompagné durant ces quelques années, et avec qui les échanges furent intenses et passionnants, et ont rendus ce parcours si plaisant, Imène, Marc, Christian, et d'autres…

Merci à tous pour ce chemin en votre compagnie, chemin qui ne fait que commencer…

Table des matières

Introduction et problématique 13
PREMIERE PARTIE 25
LA NOTION DE LIMITE : PROBLEMATIQUE DE FORMALISATION ET ETUDES DIDACTIQUES 25
Chapitre 1 - Définition de la limite : Formalisation et exigence cognitive 27
I Edification de la définition formelle : enjeux épistémologiques 27
I.1 Brève histoire de la limite 27
I.2 Formalisme de la notion actuelle de limite 30
I.3 Eléments de conception de définition en mathématiques 36
II Difficultés de conceptualisation de la définition de limite 41
II.1 Les difficultés liées à la notion de limite 41
II.2 Les difficultés liées à la notion de nombre 46
II.3 Les difficultés liées à l'interprétation de la double quantification 54
II.4 La perception de la nécessité de définir 70
III Conclusion 73
Chapitre 2 – Des ingénieries de la limite : Définition et nécessité de définition ? 77
I Le rôle de la définition formelle dans les ingénieries existantes 77
I.1 Des ingénieries didactiques paradigmatiques 77
I.2 Réinterroger les ingénieries à travers obstacle et conflit 83
I.3 Un questionnement du rôle de la rationalité dans la TSD 89
II Nécessité de la définition formelle : Un retour sur le concept de rationalité 91
II.1 La notion de rationalité dans quelques disciplines scientifiques 91
II.2 Etudes didactiques existantes sur la rationalité 96
II.3 Modèles de savoir et de constitution du savoir 128
III Conclusions 137
Chapitre 3 – Un modèle des rationalités émanant d'un besoin de la TSD 141
I Outils de la TSD 141
I.1 Synthèse des principales constructions de la TSD 141
I.2 Modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel 144
I.3 Première problématisation et étude de H1 145
II Un modèle des rationalités 147
II.1 Introduction 147

II.2 Première approche d'une modélisation des types de rationalités 147
II.3 Spécifications des types de rationalités 152
II.4 Transition de rationalité et effets de contrats associés 158
II.5 Éléments de plausibilité du modèle 170
II.6 Méthodologie d'usage de ce modèle 184
III Conclusion 190
Chapitre 4 – Une prise en compte du modèle des rationalités dans la TSD par le débat scientifique 193
I Débat scientifique : Un centrage sur la problématique des rationalités 193
I.1 Généralité sur le débat scientifique en classe 193
I.2 Le débat scientifique à partir de l'exemple de la balle rebondissante 195
I.3 Des adaptations de la TSD prises en charge par le débat scientifique 209
II La notion de transition de rationalités pour l'adidacticité 214
II.1 Différence entre niveaux de rationalités et phases de raisonnements 214
II.2 Les transitions de rationalités pour préserver l'adidacticité 215
III Projet de l'ingénierie : Méthodologie générale et progression des situations 221
III.1 Le schéma structurant les analyses expérimentales 222
III.2 La progression des situations 224
III.3 Conditions d'expérimentation 226
DEUXIEME PARTIE 229
INGENIERIE DIDACTIQUE DE LA NOTION DE LIMITE 229
Chapitre 5- Nombres : Première situation d'entrée 231
I Présentation et analyse a priori de la situation sur les nombres 231
I.1 présentation globale de la situation 231
I.2 Première situation : Le questionnaire sur les nombres de Claire Margolinas 232
I.3 Deuxième situation : La situation des nombres consécutifs 236
I.4 Troisième situation : La situation des nombres de proximité maximale. 245
II Analyse a posteriori de la situation des nombres 248
II.1 Analyse a posteriori de la première situation 248
II.2 Analyse a posteriori de la deuxième situation 252
II.3 Analyse a posteriori de la troisième situation 256
III conclusions sur la situation des nombres 260
Chapitre 6 Retour sur les difficultés d'interprétation de la double quantification 263
I Préquestionnaires Q1, Q2, Q3 et Q4 263

II Questionnaire Q5 266
II.1 Un autre questionnaire, pour quoi faire ? 266
II.2 Questions initiales 266
II.3 Variables didactiques 268
II.4. Les hypothèses sur l'interprétation 273
II.5 Éléments de conception et d'analyse a priori de Q5 274
II.6 Résultats bruts du questionnaire Q5 278
II.7 Typologie des réponses 279
II.8 Résultats nets du questionnaire Q5 284
II.9 Conclusion sur Q5 sur la classe expérimentale 291
II.10 Enquête sur un échantillon plus large 292
II.11 Conclusion sur le questionnaire Q5 299
Chapitre 7 Double quantification : Deuxième situation d'entrée 301
I Présentation et analyse a priori de la situation Q² de la double quantification 301
I.1 Remarques préliminaires 302
I.2 Une adaptation de la logique dialogique 302
I.3 Un jeu fondé sur l'interprétation de la double quantification : Q² 308
I.4 Définition de la situation de la double quantification Q² 320
I.5 Analyse a priori de la situation Q² 329
II Expérimentation et analyse a posteriori 338
II.1 Enjeux et conditions expérimentales 338
II.2 Résultats de la première partie 339
II.3 Résultats de la deuxième partie 341
II.4 Résultats de la Troisième partie 350
III Conclusions 354
Chapitre 8 - Situations de la limite 359
I Présentation 359
I.1 Métaphore fondamentale et enjeux épistémologiques 359
I.2 Cinq phases pour organiser la situation 360
II Analyse a priori de la situation 362
II.1 Phase I : Premières connaissances – Rendre licite le dessin – 362
II.2 Phase II : Question du voisinage de l'infini 365
II.3 Phase III : Déstabilisation de la conception naïve de la limite 375

II.4 Phase IV : Définition de limite 378
II.5 Phase V.1 : Définition de limite pour discriminer 387
II.6 Phase V.2 : Définition de limite pour démontrer 390
III Expérimentation et analyse a posteriori 392
III.1. Mise au point des apprentissages sur nombres et quantificateurs 392
III.2. Analyse locale par phase 393
III.3 Vision globale et éléments d'apprentissage 417
IV Conclusions sur l'ingénierie 419
Conclusion et perspectives de recherche 423
Bibliographie 431
Annexes 441
1. Typologie des mots utilisés 441
2. Fiche professeur pour situation des nombres 443
3. Vérification d'une hypothèse de prévalence AE sur EA dans les manuels 446
a- La quantification dans le manuel de seconde transmaths 447
b- La quantification dans le manuel de terminal transmaths TS 450
c- La quantification de quelques énoncés spécifiques dans huit manuels de Terminale S 456
4. Questionnaire de Dubinsky & Yiparaki (2000) 461
5. Questionnaire de Piatek-Jimenez 462
6. Questionnaires Q1, Q2, Q3, Q4, Q5 463
7. Diaporama de présentation et d'institutionnalisation du jeu Q² 471
8. Temps de rebond d'une balle rebondissante avec le modèle physique standard 473
9. Script de la situation de la balle rebondissante : jeunes chercheurs à EEDM18 2015 474
10. Script situation des nombres de proximité maximale du 18 09 14 504
11. Script de la situation Q² 526
12. Déroulement de la situation sur la limite 557
a) Déroulement de la Phase I 557
b) Déroulement de la Phase II 559
c) Phase III 565
d) Phase IV 571
e) Phase V 582

> Si tu veux construire un bateau, ne rassemble pas tes hommes et femmes pour leur donner des ordres, pour expliquer chaque détail, pour leur dire où trouver chaque chose. Si tu veux construire un bateau, fais naître dans le cœur de tes hommes et femmes le désir de la mer.
>
> Antoine de Saint-Exupéry

Introduction et problématique

1. Introduction à l'objet d'étude. Dans le film « L'entourloupe », Jean Pierre Marielle joue un démarcheur à domicile qui déclare que « Le plaisir d'un vrai vendeur c'est de vendre à des gens qui n'ont absolument pas besoin de ce qu'on leur propose ou qui n'ont pas de quoi se le payer. Quand ces deux cas sont réunis alors c'est là que le sport commence. ». On pourrait facilement faire le parallèle avec la situation du professeur face à ses élèves qui semblent ne ressentir ni le besoin, ni le sens des mathématiques qu'on leur propose. Mais cette question du sens et du besoin est interprétée autrement par l'élève. S'il est interpellé par les mathématiques qu'il apprend, avec un peu de spontanéité, il demandera volontiers « à quoi ça sert ? ». Et le mathématicien, lui, a encore une autre forme d'interprétation. Le sens et le besoin pour lui sont des questions fondamentales aussi, mais il parlera davantage de type de problèmes résolus, de force d'un résultat, c'est-à-dire de portée, mais aussi d'idée fondamentale… Le sens et le besoin des objets mathématiques constituent une problématique centrale de l'activité mathématique qui recouvre des réalités très différentes selon les acteurs.

C'est précisément cette question du besoin et de l'intelligibilité des objets mathématiques que nous proposons d'étudier à travers les conditions épistémologiques et didactiques qui favorisent le besoin des théories mathématiques et mettent le sens de celles-ci au cœur du questionnement des élèves. Nous choisissons la définition de la limite comme paradigmatique de ce questionnement.

2. Notre objet d'étude. Pour aborder ce problème à la fois du besoin et du sens des théories mathématiques, nous nous plaçons dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998). Nous souhaitons que l'élève perçoive que, sous certaines conditions d'ordre épistémologique à préciser, un objet de savoir devient nécessaire : on en a besoin, et cela non pour plaire au professeur mais parce que si on entre dans une certaine problématique mathématique alors cet objet de savoir se révèle pertinent, adapté, et s'avère correspondre… à nos besoins. C'est-à-dire l'intériorisation de la nécessité de la discipline. Or pour que cette nécessité mathématique intrinsèque apparaisse nous pensons que la nécessité didactique extrinsèque doit provisoirement s'effacer ; la notion de « situation adidactique » de la théorie des situations a justement ce rôle : tenter d'affranchir le savoir des exigences du contrat institutionnel afin de rendre possible l'accès à son sens fondamental. Le professeur dévolue une situation de manière à ce que l'élève s'en empare et adopte lui-même le jeu des nécessités du milieu associé à cette situation. Nous placerons désormais notre étude et notre questionnement dans le cadre

de la TSD car elle se fonde sur la recherche des raisons intrinsèques des notions mathématiques et de la préservation de ce sens en cours de mathématiques.

Nous projetons de construire les éléments théoriques permettant de concevoir une ingénierie didactique de la définition de la limite. Nous visons à donner à cette étude un caractère paradigmatique concernant la motivation et le sens des objets mathématiques dans l'enseignement et l'apprentissage.

Notre démarche est gouvernée par un questionnement permanent que nous allons développer à plusieurs niveaux : quand on étudie la limite, qu'est-ce qui est transposable à l'étude d'un autre objet mathématique ? Qu'est-ce qui est propre à la limite ? Qu'est-ce qui est général de l'activité mathématique ? En d'autres termes notre étude ne vise pas la notion de limite pour elle-même, mais la limite comme prétexte à l'activité mathématique, et…. l'activité mathématique comme moyen de donner sens et besoin à la notion de limite.

Dans cette thèse nous avons donc deux enjeux fondamentaux, l'un à propos de la définition de la notion limite, et l'autre de ce que l'accès autonome à cette définition suppose comme intériorisation d'exigences épistémologiques, exigences constitutives de l'activité mathématique.

3. Intérêts de choisir la définition de la limite. La notion de limite et sa définition en epsilon sont des éléments fondateurs de la théorie de l'analyse standard, dans la mesure où elle fondamentalement liée aux autres concepts : dérivée, intégrale… La définition de limite constitue depuis toujours une difficulté majeure dans l'enseignement secondaire-début universitaire, les nombreuses études à son sujet en attestent (Tall et Schwarzenberger 1978, Robert 1982, Sierpinska 1985, Bloch 2000, Przenioslo 2004…). Or la définition de limite en epsilon est finalement apparemment utile, à ces endroits, surtout pour démontrer des théorèmes (l'algèbre des limites par exemple), théorèmes qui vont dispenser de l'usage de ce formalisme. La question du besoin et de l'intelligibilité des objets mathématiques est donc particulièrement aigüe pour la notion de limite.

Cet intérêt du choix de la limite pour cette question du besoin et de l'intelligibilité des objets mathématique peut se rencontrer au niveau épistémologique comme didactique. Sur le plan épistémologique, la définition de limite implique de nombreux concepts et propriétés mathématiques. Que l'on pense aux nombres réels et à leur propriété (Bergé 2008 ; Vivier 2015…), aux quantificateurs (Chellougui 2004) ou même à la notion de définition (Ouvrier Buffet 2003 2013). Peut-on hiérarchiser ces éléments théoriques ? Autrement dit, y en a-t-il qui sont indispensables pour fonder le formalisme de la définition de limite, y en a-t-il qui sont secondaires, c'est-à-dire non directement indispensables ? Sur le plan didactique, la définition de limite génère des questionnements qui nous placent au cœur de la question générale du besoin et de l'intelligibilité des objets mathématiques car chacun des éléments constitutifs de la limite pose la même question du besoin et de la nécessité. Les travaux didactiques montrent clairement que les difficultés des élèves/étudiants abondent pour tous ces éléments et ceux qui permettent d'aborder la limite (la logique, la validation…) : par exemple Dubinky & Yiparaki (2000) pour les quantificateurs, Bergé (2008) pour la complétude, Bloch & al. (2006) pour les nombres, Durand-Guerrier & Arsac (2003) pour la logique, Cabassut (2005) pour la validation...A priori les connaissances que supposerait l'étude épistémologique de la limite pour accéder au concept sont très nombreuses. Quels choix effectuer parmi ces connaissances pour rendre néanmoins la

notion de limite constructible et accessible ? Y-a-t-il des connaissances qui apparaîtraient, à première vue, comme des préalables pour l'étude de la limite mais que cette étude elle-même pourrait engendrer comme conséquence ?

Nous questionnons en particulier certains éléments fondateurs du concept de limite, la notion de nombre réel et pour le formalisme de la limite, la double quantification et les règles de la logique. En ce qui concerne les nombres réels, nous nous interrogerons à la fois en termes d'objets (quels sont les différents types de nombres impliqués dans la notion de limite ?), mais aussi en termes de propriétés sur ces objets (quelles propriétés des réels sous-tendent la construction de la définition de limite standard ?). Comment la quantification intervient-elle dans la définition de la limite ? Quel rôle joue-t-elle ? Quelles règles d'interprétation de la quantification peut-on mobiliser ?

Sur un plan didactique, pour ce qui est de la quantification qui est très présente dans la formalisation de la définition en epsilon de la limite, quelles sont les connaissances minimales pour pouvoir interpréter le formalisme en question ? Quels sens donner aux quantificateurs pour qu'ils puissent être manipulés, c'est à dire utilisés pour produire de nouveaux formalismes qui répondent des objets que l'on souhaite modéliser ainsi, et finalement se soumettre à des démonstrations ? Comment introduire la nécessité de se référer à des conventions d'interprétation de la double quantification pour donner un sens partageable aux phrases multi quantifiées ?

4. La question de la modélisation théorique. Cette question renvoie aux conditions théoriques didactiques d'élaboration d'une ingénierie didactique de la définition de limite construite sur la base de questionnements didactiques liées au besoin et à l'intelligibilité des objets mathématiques : quelles sont les conditions didactiques susceptibles, de rendre nécessaire un objet de savoir théorique comme la limite ? En particulier, quelles sont les conditions pour qu'un élève/étudiant puisse réaliser, d'une manière autonome, une grande partie du chemin qui le conduira à identifier cette nécessité ?

Ces conditions de l'activité autonome de l'élève pour la création de connaissances et pour aboutir finalement à l'institutionnalisation de l'objet mathématique visé sont précisément au cœur des situations adidactiques de la TSD :

> La situation est la seule chose sur laquelle le professeur peut agir pour susciter chez ses élèves les activités dont il espère qu'elles produiront les résultats voulus. La théorie des situations examine les effets des situations sur un actant rationnel et « économique »... (Brousseau 2002 p. 11)

Une question se pose : si « l'actant rationnel » de Brousseau est une hypothèse fonctionnelle pour les savoirs du primaire, qu'en est-il des savoirs complexes de fin de secondaire et du supérieur ? Les adaptations de la TSD pour ces savoirs complexes (Bloch 1999), négocient principalement l'adidacticité au profit de la notion de dimension adidactique et confient un rôle accru au professeur dans la situation. Le besoin de ces adaptations ne pourrait-il pas être interprété comme la nécessité de reconsidérer cette hypothèse de « l'actant rationnel » pour ces niveaux[1] ?

[1] En fait, de telles adaptations sont initiées dès le primaire (Margolinas 1995 ; Comiti Grenier & Margolinas 1995).

Comme Brousseau (2002), nous partageons la nécessité d'une certaine rationalité de l'élève faisant des mathématiques pour fonder la possibilité des situations adidactiques, aussi nous choisissons d'étudier précisément cette hypothèse afin de fonder notre modèle théorique pour les savoirs complexes tels que la limite.

En exprimant les conditions d'accès à la notion de limite comme des conditions portant sur la disponibilité d'une rationalité ou la possibilité de sa convocation, la question initiale du besoin et de l'intelligibilité peut se reformuler ainsi : Quel type de mise en œuvre choisir afin que la rationalité propre de l'élève et du groupe classe puisse jouer un rôle fondamental dans l'établissement autonome du rapport visé à la notion de limite ?

Notre étude devrait nous conduire à dresser un modèle théorique nourri par la TSD pour concevoir une ingénierie didactique sur la limite permettant de donner consistance aux aspects fondateurs de l'activité mathématique. Il s'agira ensuite, de construire une progression de situations didactiques qui mènent les élèves à considérer comme nécessaire le formalisme complexe de la limite, à l'utiliser et à développer des éléments relatifs à l'activité mathématique. Nous serons amenés alors à déterminer les moyens de vérifier l'effectivité de la minimalité recherchée : le modèle théorique des situations expérimentales que nous établissons, s'avère-t-il suffisant dans la contingence ? Cette série de situations a-t-elle produit ce que l'on visait, à savoir la possibilité pour l'élève de mobiliser sa rationalité propre afin de fonder le concept de limite ainsi que sa formalisation ? En d'autres termes, notre projet vise, en grande partie, à étudier les conditions théoriques à réunir afin qu'une définition comme celle de la limite devienne nécessaire aux yeux des élèves. Il y a deux manières d'entendre cette nécessité : la première concerne tout simplement la nécessité de définir. Quelles conditions réunir afin que la définition d'un objet comme la limite soit réclamée par les élèves eux même ; c'est-à-dire afin que cet objet devienne l'enjeu d'un processus de définition ? La deuxième manière d'entendre la nécessité concerne le formalisme : quelles conditions réunir pour que la "logique" utilisée évolue vers une logique mathématisée. Et finalement quelles conditions réunir pour que la validation, élément fondateur de l'activité mathématique, évolue vers la démonstration.

5. Les différentes étapes pour accéder à la modélisation théorique. Reformuler la question du sens et du besoin des savoirs mathématiques complexes, en particulier celui de la notion de limite, en termes de rationalité de l'élève, conduit à aborder un certain nombre de questions pour concevoir une modélisation théorique des situations expérimentales, modélisation adaptée à ces savoirs complexes dans le cadre de la TSD.

La première question concerne la rationalité elle-même : comment définir ce que signifie « actant rationnel » et plus généralement comment questionner la rationalité ?

Cette question de la rationalité est une question fondatrice pour de nombreuses disciplines des sciences humaines (psychologie, sociologie, économie…) qui modélisent le comportement humain dans leur contexte d'étude en se fondant sur des modèles de rationalité propre (par exemple Boudon 2009). En didactique des mathématiques la rationalité est l'objet de diverses approches. Ces approches sont souvent locales dans le sens où elles étudient un seul aspect de la rationalité ; par exemple Balacheff à travers les processus de validation (1988), Ouvrier Buffet (2003 ; 2013) concernant les processus de définition et Durand Guerrier (2006) pour la logique. Il existe également des approches plus globales (Legrand 1990b ; Lerouge 2000 ; Boero

2014) où la rationalité est conçue dans une cohérence générale s'appliquant à l'ensemble de l'activité mathématique et où la rationalité se décline en plusieurs rationalités. C'est vers ce dernier type de modélisation que nous orientons notre étude car nous faisons l'hypothèse que le sens et le besoin d'un concept émergent davantage dans une cohérence globale quand celle-ci permet d'articuler les différents aspects mathématiques locaux. Il existe aussi d'autres approches globales voisines de la question de la rationalité, par exemple celles qui étudient le raisonnement (Bloch et Gibel 2011, par exemple). Ces approches-là focalisent leur étude sur l'activité mathématique de production de raisonnement à partir de la forme et/ou la fonction du raisonnement. Or « l'actant rationnel » de Brousseau que nous cherchons à définir est bien évidement un acteur de l'activité mathématique, il produit des raisonnements, mais ce qui le caractérise est avant tout sa quête de non-contradiction, ce qui le rend rationnel ; c'est ainsi que ses raisonnements sont motivés et peuvent s'interpréter. Et cette recherche va motiver la résolution des contradictions rencontrées au sein d'une même rationalité ou bien entre deux rationalités, ce qui motivera à son tour ce que nous appellerons les transitions de rationalités lorsqu'une rationalité s'avèrera insuffisante pour résoudre les contradictions qu'elle engendre. Dans le cadre de la TSD, concevoir une ingénierie de la limite visant le sens et le besoin de celle-ci, nous conduit à privilégier cette dimension fondatrice de la rationalité. Il s'agit donc de déterminer une modélisation de la rationalité qui se fonde à la fois sur cette condition de non contradiction et qui décline cette condition à tous les niveaux de l'activité mathématique. Comme nous avons besoin de spécifier l'activité mathématique et les connaissances, nous allons retenir le modèle des ordres de connaissances de Sackur et al. (2005) qui caractérise l'activité mathématique par différentes composantes des connaissances d'ordre 2 (définition, logique, validation, sémiosis) qui s'appliquent aux connaissances d'ordre 1 (les objets mathématiques y compris les théorèmes, les axiomes…). Dans cette optique de privilégier la cohérence globale dans la dimension épistémologique de l'activité mathématique nous trouvons dans la littérature des auteurs de modèles globaux de constitution du savoir scientifique (Lakatos 1984 ; Popper 1973 ; Hume 2006 ; Bachelard 1938 ; Kuhn 1962) présentés souvent comme les auteurs emblématiques de grands courants de pensée dans l'histoire de la science par les didacticiens des mathématiques et des sciences. Ces choix s'avèrent assez riches pour commencer à permettre de caractériser de manière suffisamment fine la notion de rationalité pour notre projet.

La deuxième question concerne les adaptations de la TSD à réaliser dans le cadre d'une préservation du caractère adidactique des situations pour les savoir complexes aux niveaux fin de secondaire, début de supérieur. Nous avons déjà évoqué que de telles adaptations pour les savoir complexes ont plutôt choisi de renforcer le rôle du professeur. Ces adaptations sont choisies essentiellement pour remédier à l'absence de situation fondamentale pour les savoirs complexes à ces niveaux-là, absence qui conduit à diminuer le caractère rétroactif du milieu objectif et donc à suppléer à ce manque (Bloch 1999). Nous nous demandons s'il est possible cependant de préserver l'adidacticité par d'autres choix d'adaptation, et si oui quels types d'adaptations peuvent réaliser cet objectif. Certains choix de la littérature introduisent le concept de métaphore fondamentale (Margolinas 1993 ; Legrand 1997) qui entend se substituer à celui de situation fondamentale. Mais si cette substitution facilite la constitution d'un référent épistémologique, cela ne résout pas le problème de la (relative) rétroactivité du milieu garante de l'adidacticité. La question est alors de savoir comment améliorer la rétroactivité au milieu ; pour

cela nous identifions deux voies complémentaires dans le sens qu'elles peuvent être empruntées simultanément. Les rétroactions renvoient des signaux trop faibles, on peut donc, améliorer la capacité de réception et d'interprétation de ces signaux, mais aussi augmenter la force des signaux. Cela signifie de renforcer la sensibilité à la contradiction, ce qui engage la rationalité et de renforcer certains aspects du milieu, par exemple par le niveau d'interaction des élèves en utilisant le débat scientifique en classe. Cela suppose d'étudier la nature spécifique des rétroactions pour les savoirs complexes et en particulier d'étudier la notion de conflit cognitif (socio-cognitif dans le cadre de l'interaction des élèves) qui est une conséquence possible d'une rétroaction, conséquence conduisant à une réorganisation des connaissances. En effet lorsqu'une rétroaction vient contredire la connaissance engagée, il peut se produire un conflit cognitif, qui est lié à la prise de conscience aigüe d'une contradiction. Il s'agira aussi d'étudier les moyens de renforcer le milieu objectif dans les termes de la TSD.

6. Hypothèses de recherche. Notre première hypothèse de recherche concerne la possibilité de suivre l'évolution de la rationalité d'un élève, d'un groupe d'élèves, faisant des mathématiques dans le cadre de notre projet de recherche. Elle s'énonce comme suit, H1 *: Il est possible de modéliser la rationalité de manière à caractériser les étapes d'un accès adidactique aux notions mathématique avancées, en l'occurrence celle de la définition de la limite.* L'étude d'une telle hypothèse nous a conduit, dans un premier niveau, à la modélisation théorique de plusieurs rationalités, dans l'activité mathématique. Nous appellerons dès lors transition de rationalité le passage d'une rationalité à l'autre quand il a lieu.

Conformément à notre projet, cette hypothèse suppose dans un deuxième niveau, la mise en œuvre au niveau didactique de cette modélisation fondé au niveau épistémologique et mathématique. Cette mise en œuvre répond aux besoins d'une ingénierie didactique des notions mathématiques avancées, et plus particulièrement celle de la définition de la limite, dans le cadre de la TSD. Notre hypothèse étant, H2 : *Les adaptations de la TSD à la complexité des notions mathématiques avancées peuvent être prises en charge aux niveaux heuristiques du milieu des situations par le débat scientifique en classe. L'étude des transitions de rationalités permet, à son tour, de renforcer l'adidacticité des situations.*

Notre dernière hypothèse souligne l'efficacité du moyen théorique, avancé dans H2, pour analyser a priori et dans la contingence des situations expérimentales spécifiques à la définition de la limite. Plus précisément, H3 *: Il existe un milieu didactique suffisant pour permettre l'accès adidactique à la définition de limite, la rendant nécessaire dans le sens du besoin de définition et de l'intelligibilité de son formalisme. Ce milieu permet essentiellement de développer conjointement certaines connaissances nécessaires à cet accès et les niveaux de rationalités*[2] *et de transitions de rationalités qui vont le rendre possible.*

Nous abordons maintenant la méthodologie générale afin de montrer comment nous proposons d'étudier ces trois hypothèses.

7. Méthodologie générale. Finalement, notre projet a pour objet celui de déterminer les conditions théoriques de conception et d'expérimentation d'une ingénierie didactique. Ces conditions

[2] Nous utilisons ici le terme « niveaux de rationalités » pour désigner le fait qu'il existe a priori plusieurs types de rationalités que nous structurerons en niveaux de rationalités lors de notre modélisation.

portent sur la possibilité de développer les connaissances nécessaires spécifiques à la notion de limite. Elles portent également sur l'apprentissage de connaissances plus générales et liées à la question de la rationalité. Toutes ces connaissances devraient rendre possible cet accès adidactique à la notion de limite. Ce projet peut se résumer à travers nos trois hypothèses de recherche.

Nous étudions ces trois hypothèses à deux niveaux : le niveau théorique (partie I de la thèse) et le niveau expérimental (partie II de la thèse).

Sur le plan théorique, pour étudier l'hypothèse H1, nous fondons notre modèle de rationalités, et éprouvons la portée de cette modélisation sur les plans théoriques et pratiques (chapitre 3).

Afin de caractériser la rationalité, nous allons commencer par prendre appui sur des auteurs des disciplines des sciences humaines, champs où cette question a été traitée. Puis nous allons questionner leur portée et donc leur utilisation/transposition possible en didactique des mathématiques. Quels sont leurs appuis théoriques, y compris épistémologiques ? Y-a-t-il, indépendamment des disciplines, des invariants concernant les modélisations ? Il s'agira aussi de comprendre les raisons et motivations de ces modélisations. Quel rôle jouent les modèles de rationalité dans ces disciplines ? Pourquoi modélise-t-on la rationalité ?

Les éléments de réponses relevés dans cette première approche du concept de rationalité devraient servir pour effectuer une lecture croisée en didactique des mathématiques sur le sujet. Nous nous intéresserons dans un premier temps uniquement aux apports des didacticiens faisant de la rationalité leur objet d'étude. Cette condition devrait nous permettre d'aborder la littérature à ce sujet de manière assez exhaustive. Nous présenterons les différents modèles de rationalités à travers essentiellement le filtre de deux questions, celle de l'adéquation à notre projet et celle des apports spécifiques du modèle abordé. Le modèle présenté est-il adapté pour déterminer ce qu'est la rationalité et un « actant rationnel » ? La dimension épistémologique est-elle fortement présente dans le modèle et sur quoi se fonde-t-elle ? Quelles sont ses particularités ? Si elle ne correspond pas entièrement à notre projet, comment recenser puis identifier les caractéristiques pertinentes pour notre étude ? Nous faisons le choix de concevoir un nouveau modèle de rationalité fondé sur la recherche de la non contradiction sur l'ensemble de l'activité mathématique pour notre étude et nous le mettrons à l'épreuve. Pour déterminer les éléments constitutifs de ce nouveau modèle nous étudions les modèles épistémologiques de constitution et de structuration des savoirs. De part ailleurs, nous chercherons un modèle de structuration de la connaissance pour le croiser avec les différents modèles précédents. Cette étude comporte donc deux axes, l'un concernant la manière de constituer le savoir, l'autre catégorisant le savoir. La mise en relation de ces deux axes devrait pouvoir permettre de modéliser différents types de rationalités.

Il s'agira alors de tester la plausibilité d'un tel modèle avant de l'utiliser pour notre ingénierie de la limite. L'hypothèse H1 ne sera vraiment validée que lorsque le modèle de rationalité aura montré son efficacité dans l'élaboration d'une ingénierie de la limite, élaboration que nous aborderons ensuite.

Sur le plan théorique, pour ce qui est de l'hypothèse H2, nous proposons de reprendre la notion de métaphore fondamentale décrite par Legrand (1997) et étudions les possibilités

d'améliorer la rétroactivité des milieux (chapitre 4). En particulier nous essayons d'identifier la cause de cette relative rétroactivité pour les savoirs complexes aux niveaux avancés. Nous proposons alors deux réponses complémentaires pour améliorer cette rétroactivité : la notion de milieu subjectif comme modification de la notion de milieu objectif pour renforcer l'interaction des élèves du milieu et l'étude des transitions de rationalités pour améliorer la perception des rétroactions. Ces trois adaptations nous conduisent à envisager le débat scientifique en classe comme la possibilité de leur donner réalité.

Sur le plan théorique, l'hypothèse H3 est la résultante des hypothèses H1 et H2 (modèle théorique permettant l'établissement du milieu requis) et d'une étude spécifique sur la notion de limite. Nous rappelons ici que la limite a été choisie comme objet de notre étude dans la double perspective de jouer un rôle premier (on veut fonder la limite) et aussi de paradigme de l'accès aux savoirs complexes. Ce dernier aspect, celui des savoirs complexes, suppose une acculturation aux connaissances et pratiques de l'activité mathématique que nous étudions sous l'angle de la rationalité, aux niveaux fins de secondaire et début de supérieur.

Nous commençons (chapitre 1) par aborder les enjeux épistémologiques de la définition de la notion de limite. Une brève étude historique de l'évolution de la notion à travers des moments clefs devrait nous permettre de mettre en évidence quelques-uns des éléments significatifs de cette notion et des raisons des ruptures qui aboutissent finalement à la définition : la notion de nombre, le besoin de formalisation, la question liée à la notion de définition, la question de l'utilisation de la définition de la limite comme outil de preuve. Ces éléments feront ensuite l'objet d'une étude approfondie en prenant en compte toutes les composantes qui interviennent dans la définition formelle de la limite : rôle des nombres, des majorations/minorations utilisant ces nombres et de l'égalité des réels, interprétation des énoncés quantifiés, différents éléments de conception d'une définition en mathématique et le rôle d'une telle conception dans un processus de validation.

A la lumière de cette étude épistémologique, nous abordons les difficultés des élèves concernant la définition formelle de la limite. Les difficultés liées à une notion sont repérées à partir des erreurs récurrentes des élèves. Dans le cadre de cette recherche, nous abordons essentiellement celles qui sont provoquées par certaines conceptions des élèves, mais aussi celles qui se manifestent à travers des obstacles épistémologiques similaires à ceux qui ont pu être repérés comme associés à des périodes de stagnation théorique (persistantes dans des définitions non valides) dans l'histoire de la construction de la notion.

Or, comme mentionné par la TSD, les difficultés rencontrées sont des occasions d'apprentissage dès que le milieu construit le permet. Par conséquent, pallier à de telles difficultés revient à trouver le moyen de dépasser les obstacles épistémologiques et/ou les conceptions qui les matérialisent. Cette étude devrait donc nous donner, en plus, la possibilité d'anticiper des conflits cognitifs potentiels, et de prévoir une manière de les susciter d'une façon constructive dans la perspective de l'accès à ce savoir complexe qu'est la limite.

Nous abordons, ensuite, la question des ingénieries (chapitre 2) qui ont été construites pour tenter de surmonter les difficultés identifiées précédemment. Nous sélectionnons quelques ingénieries représentatives de l'accès à la définition formelle de limite, et les interrogeons du

point de vue de la mise en œuvre des conflits cognitifs, et de l'efficience pouvant être obtenue par cette mobilisation.

Ce travail spécifique sur la définition de la limite permet, en mobilisant les hypothèses H1 et H2, de définir une progression des situations didactiques (fin de chapitre 4) qui caractérise l'établissement de ce milieu propre à l'hypothèse H3.

Sur le plan expérimental, mise à l'épreuve des hypothèses H1, H2 et H3 (Chapitre 5, 7 et 8). Les hypothèses H1, H2, et H3 sont alors d'abord vérifiées dans leur capacité à structurer et concevoir l'analyse a priori des situations didactiques composant l'ingénierie. Ces hypothèses sont-elles de nature à guider cette élaboration ? Plus spécifiquement, le modèle de rationalité permet-il de caractériser les étapes d'accès à la notion de limite ? Les transitions de rationalités peuvent-elles être prévues ? Peut-on garantir, a priori, l'adidacticité ?

Les hypothèses H1, H2 et H3 sont ensuite vérifiées au niveau de l'analyse a posteriori. Observe-t-on une réalisation conforme à l'analyse a priori ? Plus spécifiquement, le modèle de rationalités pour caractériser les étapes d'accès adidactique à la définition de limite permet-il d'analyser ces étapes a posteriori ? L'adidacticité est-elle bien préservée ? Observe-t-on le rôle prévu des transitions de rationalité dans l'évolution des connaissances ?

8. Plan succinct de la thèse. A côté de l'introduction et problématique, et de la conclusion et perspectives, la thèse est structurée en deux parties : une partie théorique et une partie expérimentale.

La première partie est centrée sur l'étude de la double problématique de formalisation et d'études didactiques, avec comme fil conducteur la définition formelle de la notion de limite. Cette étude est organisée sur deux niveaux :

Le premier niveau d'étude est spécifique à la notion de limite, sa formalisation, les exigences cognitives associées ainsi que les ingénieries didactiques qui ont abordé la nécessité de sa définition (chapitres 1 et la première partie du chapitre 2).

Dans le deuxième niveau d'étude, un début de travail sur la rationalité, émanant d'un besoin de la TSD est d'abord mené avec comme objectif celui de cerner sa place et sa formalisation dans certains domaines de recherche et en particulier en didactique des mathématiques (deuxième partie du chapitre 2). Un effort de modélisation de la rationalité issue d'une réflexion sur la conception d'une ingénierie des savoirs complexes dans la TSD, est par la suite entrepris (chapitre 3). Cette première partie est alors clôturée par une proposition de modélisation des situations expérimentales qui visent les savoirs complexes. Cette modélisation prend fondamentalement en compte le modèle des rationalités précédemment élaboré, et intègre le débat scientifique en classe aux composantes des milieux.

La deuxième partie concerne une ingénierie de la définition de la limite s'appuyant sur une progression de trois situations. Une situation sur les nombres, fondée sur l'égalité des réels, est proposée comme situation d'entrée (Chapitre 5). Le besoin de formalisme se traduit par la pos-

sibilité d'interpréter les quantificateurs, une enquête est menée sur cette interprétation, en particulier sur celle de la double quantification (chapitre 6). Sur la base de ces résultats, une situation sur la double quantification est mise à l'épreuve (chapitre 7). En prenant en compte les résultats des expérimentations des situations précédentes, une situation de la limite conçue sur cinq phases est alors expérimentée (chapitre 8). La première phase a pour objectif de rendre licite le dessin pour ensuite l'utiliser comme moyen de réfutation. Il s'agit aussi de permettre d'exprimer les conceptions naïves de limite à travers le dessin. Avant d'être étudiées durant la troisième phase, ces conceptions vont d'abord servir comme appui pour la deuxième phase où l'on s'intéresse à la formalisation de la notion de voisinage de l'infini. Cette deuxième phase a pour objet celui d'organiser les connaissances nécessaires en termes de besoin de formalisation. La déstabilisation des conceptions naïves de la limite, qui devrait déboucher sur le besoin d'une nouvelle approche de la limite, est prévue lors de la troisième phase. La quatrième phase conduit alors au formalisme de la définition standard de limite grâce à un travail sur l'égalité des réels appliqué aux fonctions. Cette nouvelle définition est ensuite mise en œuvre lors de démonstrations pendant la phase cinq.

PREMIERE PARTIE

LA NOTION DE LIMITE : PROBLEMATIQUE DE FORMALISATION ET ETUDES DIDACTIQUES

Chapitre 1 - Définition de la limite : Formalisation et exigence cognitive

Dans ce chapitre, nous étudions les travaux qui mettent l'accent sur les enjeux épistémologiques de la définition de limite, ainsi que les aspects cognitifs qu'engendreraient (ou en partie) de tels enjeux. Cette étude découle naturellement d'un projet d'élaboration d'une ingénierie ayant pour but de rendre intelligible (au sens de la nécessité) et utilisable, la définition la limite en epsilon d'une fonction. Nous n'avons pas dans ce chapitre l'intention de rappeler ni l'immense littérature au sujet de la limite, ni d'ajouter des nouveautés, mais seulement d'en interroger les résultats au vu de notre projet et de commencer à identifier certains aspects spécifiques comme décisifs dans la perspective d'un accès de l'élève à la caractérisation de la notion de limite par une définition formelle.

I Edification de la définition formelle : enjeux épistémologiques

Comme le projet de cette thèse correspond à l'accès à la définition formelle de la limite, nous commençons par examiner les trois aspects : la question de la limite au niveau épistémologique et en particulier historique, la question des spécificités du formalisme de la limite et la question plus générale de la définition en mathématiques. Pour ce qui est de l'histoire de la limite, nous nous contenterons d'identifier quelques points clefs de manière à éclairer certaines questions épistémologiques, didactiques et cognitives ultérieures qui peuvent sembler être liées à la longue histoire de cette notion. Pour ce qui est du formalisme de la définition standard de la limite nous aborderons trois points qui nous semblent cruciaux. Le premier point concerne la quantification et en particulier la multi-quantification puisque celle-ci est impliquée dans la définition de limite en epsilon. Le deuxième point concerne la notion de variable dont on verra qu'elle peut cacher une dépendance quand cette variable dépend d'une autre. Le troisième point concerne les nombres réels, avec la double question de l'existence d'une limite dont la complétude des réels assure la possibilité de l'existence dans **R**, et celle de l'unicité de cette limite qui, elle, est assurée par l'égalité des nombres réels. Enfin nous aborderons certains travaux pour identifier la place, la fonction et surtout l'élaboration de la définition en mathématiques.

I.1 Brève histoire de la limite

Nous retraçons brièvement quelques repères historiques qui marquent l'élaboration d'un outil conceptuel puissant et à la source d'un pan entier des mathématiques : l'analyse. Nous mettrons en évidence à la fois le fait que la notion de limite est au carrefour d'une multitude d'autres notions mathématiques qui eux-mêmes ont eu leur propre évolution historique, mais également les dépassements qui ont été nécessaires pour aboutir à sa formalisation actuelle. Le formalisme actuel de la limite de l'analyse standard en epsilon/alpha stabilisé depuis maintenant, est, en effet, le fruit d'une très longue histoire faite de période de stagnations comme le dirait Bachelard (1938) et de période de crises et de changements de paradigmes comme le dirait Kuhn (1962). Pour cette étude, nous nous appuyons essentiellement sur les travaux de Job (2011) car sa problématique de formalisation de la limite est proche de nos propres travaux, et que l'étude historique qu'il réalise est selon ses propres termes « une lecture dirigée » de l'histoire de la notion

de limite, dans cette perspective. Il propose une histoire de l'analyse découpée en trois périodes, qu'il qualifie d'institutions : les géomètres grecs, puis le calcul différentiel et intégral ou Calculus, et enfin, l'analyse « formalisée ». Selon lui, ce qui distingue les deux dernières institutions, Calculus et analyse formalisée, réside d'abord dans l'apparition d'une définition de la limite qui va permettre de fonder l'analyse sur d'autres bases. Il s'agit d'un changement véritable de paradigme puisqu'on passe de propriétés qui reposaient essentiellement sur la cohérence globale entre les propriétés de l'analyse mais surtout sur la cohérence avec d'autres domaines (souvent les problèmes provenaient de la géométrie ou bien de la physique) à des propriétés qui se déduisent à l'intérieur même du cadre de l'analyse. La définition formalisée de la limite, est forgée pour fonder une théorie, celle de l'analyse, finalité qui confère selon Job un caractère lakatosien à cette définition de limite.

La période Grecque antique

Les mathématiciens grecs de la période antique développent des mathématiques où le concept de nombre est fortement rattaché à la géométrie, en particulier aux mesures de longueurs ou d'aires. Les problèmes qu'ils développent sont précisément des problèmes de mesure des grandeurs, de quadrature, c'est-à-dire de comparaison de longueurs ou d'aires de surfaces entre elles. Cet appui géométrique systématique va permettre de développer des méthodes rigoureuses, efficaces et sophistiquées pour résoudre les problèmes envisagés, dont principalement l'exhaustion, fondée sur l'axiome d'Archimède qui contourne le problème des nombres incommensurables. En effet, les limitations des conceptions liées aux concepts de nombre et d'infini constituent des obstacles pour les mathématiques grecques pour résoudre certains problèmes ; ces problèmes n'ont véritablement été résolus que beaucoup plus tard avec de profonds changements de conceptualisation du nombre : qu'on pense à la fameuse quadrature du cercle, par exemple. Si l'on évoque la période grecque ici, c'est précisément que certains des problèmes qu'ils ont laissés non résolus ont trouvé des réponses ultérieurement avec la notion de limite. Il a fallu pour cela, abandonner provisoirement les canons de la rigueur démonstrative grecque en attendant qu'une véritable théorie des réels voit finalement le jour et qu'un formalisme de la limite permette à nouveau de développer une nouvelle rigueur démonstrative. Cette période intermédiaire pour l'analyse est communément appelée Calculus.

La période Calculus (le calcul différentiel ou intégral, du XVI au début du XVIII ème siècle)

Les mathématiciens abandonnent progressivement les techniques grecques rigoureuses mais contraignantes et développent de nouvelles techniques, dites infinitésimales pour aborder d'anciens comme de nouveau problèmes : quadrature, détermination de tangente, de cinématique…L'une des ruptures qui a lieu avec les mathématiques grecques se situe dans les nouvelles fondations théoriques mobilisées. Il ne s'agit plus de s'appuyer sur la géométrie en tant que théorie mais beaucoup plus sur l'arithmétique et l'algèbre. Une autre rupture tient dans la finalité même des mathématiques et les moyens pour l'atteindre, en termes de résultats et de validation de ces résultats :

> Si les problèmes considérés par les Grecs continuent à animer les mathématiciens, à partir de la Renaissance, l'emphase n'est plus mise sur la vérification des résultats par la m.d.r.a.[3] mais sur la production de nouveaux résultats et le développement d'outils performants pour les produire. (Job

[3] M.d.r.a. : méthode de double raisonnement par l'absurde (Cf. (Job 2011 p.119)

2011 p. 141)

Le point d'orgue de cette période du Calculus est atteint avec Newton et Leibniz qui développent, de manière indépendante, le lien entre quadrature et détermination de tangente, lien qu'on nomme aujourd'hui théorème fondamental de l'analyse. A l'époque ce lien tient davantage à une procédure de calcul qu'à l'établissement d'une théorie. La notion de limite voit alors le jour dans les méthodes de détermination de tangente, de convergence de séries…mais sa formalisation n'est pas encore à l'ordre du jour. L'efficacité des procédures de calcul de limite ne favorise pas un questionnement axiomatique du concept, en particulier la question de sa définition formelle. Une conjonction d'éléments explique une nouvelle rupture, celle de l'entrée dans l'analyse formalisée. Les contradictions qui apparaissent et peuvent de moins en moins être ignorées (paradoxes logiques sur la nature des infinitésimaux, apparition de propriétés contre-intuitives…) et la nouvelle obligation de transmettre, par l'enseignement, le Calculus, et donc de produire un discours cohérent, conduisent à expliquer le passage à cette nouvelle période.

Période de l'analyse « formalisée »

Avec l'émergence de la notion de fonction, les mathématiciens vont progressivement s'affranchir des problématiques initiales du Calculus, à savoir la géométrie et la physique, et commencer à envisager le Calculus comme une discipline autonome. Mais cela nécessite une refondation théorique de la discipline. Plusieurs pistes sont alors suivies pour refonder le Calculus sur des bases plus solides, entre autres les notions infinitésimales[4] par Carnot par exemple, le développement en série de puissance avec Lagrange par exemple. Mais ce sont les travaux de Cauchy qui vont finalement être retenus par la communauté mathématique pour constituer le fondement de l'analyse standard. Job attribue la paternité de la définition de limite à Cauchy, mais cette paternité reste sujette à controverse (Cf. Tall & Katz 2014, par exemple). Il est vrai qu'à comparer les définitions de l'époque, on attribuerait davantage la définition formelle de la limite à Weierstrass. Voici la définition de Cauchy à son cours de l'école polytechnique :

> « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface d'un cercle est la limite vers laquelle converge les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus [...] » (Cauchy 1821)

Ceci peut être comparé à la définition de Weirstrass qui correspond à notre définition actuelle :

« $\lim_{x \to a} f(x) = L$ provided that, given $\varepsilon > 0$, there existe a number $\delta > 0$ such that $|f(x) - L| < \varepsilon$ if $0 < |x - a| < \varepsilon$ » (Edwards, 1982)

Selon Job, ce qui marque la rupture avec le Calculus dans l'appréhension de la limite par Cauchy n'est justement pas tant dans la définition qu'il en donne, que dans l'emploi qu'il en fait pour « constituer la base de l'architecture déductive de son cours d'analyse » en tant qu'outil de preuve. L'efficacité de cette nouvelle définition pour prouver va véritablement permettre à la théorie de l'analyse de prendre son essor et son autonomie. En effet, même si la physique et

[4] Cette voie aboutira finalement beaucoup plus tard avec l'analyse non standard et l'invention des hyperréels par Robinson.

à la géométrie demeurent des champs d'application privilégiés de l'analyse, elles ne constituent plus ni les motivations de l'analyse, ni des points d'appuis pour corroborer les techniques.

Ce bref aperçu historique de la notion de limite permet de mettre en évidence quelques-uns des éléments significatifs de la notion et des raisons des ruptures qui aboutissent finalement à la définition telle qu'on la connaît :

- La notion de nombre joue un rôle de premier plan dans la conception de la limite et dans la nécessité des ruptures associées à cette notion (le fait, par exemple, que la notion nombre s'autonomise de son support physique comme mesure de grandeurs).
- La notion de contradiction logique sur de nouveaux types de fonctions engendre le besoin d'une nouvelle formalisation
- La question liée à la conception de la notion de définition
- La question de l'utilisation de la définition de la limite comme outil de preuve

Ces différents points feront l'objet d'une attention particulière dans notre étude et ont vocation à jouer un rôle décisif dans notre projet de conception d'une ingénierie de la définition de limite.

I.2 Formalisme de la notion actuelle de limite

a) La définition formelle de limite et ses composants

Nous nous intéressons dans ce travail à la définition formelle de la limite d'une fonction en analyse standard. Nous n'aborderons pas, dans nos travaux, la définition introduite par les infinitésimaux en analyse non standard.

Notons néanmoins, à la suite, de (Bloch 2000), et de (Job 2011) qui parle à cet égard de « relativisme institutionnel » (plusieurs conceptions de la limite vivent dans la même institution), que ce « relativisme » rend a priori caduque toute tentative de donner à la définition en epsilon un caractère nécessaire. En particulier, nous ne pouvons pas compter sur ce caractère nécessaire pour construire une ingénierie de la définition de la notion limite en alpha/epsilon : Cette définition n'est qu'un choix parmi d'autres.

La définition de limite que nous visons est donc la définition dont Cauchy est un fondateur, celle en epsilon, alpha, qui, avec le formalisme de notre époque, s'exprime ainsi :

On dit que la fonction f définie sur un voisinage d'un réel m a pour limite un réel k si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$ de R, il existe un réel $\alpha > 0$ de R tel que pour tout réel x de l'intervalle] $m - \alpha$; $m + \alpha$ [on a f(x) qui est dans l'intervalle] $k - \varepsilon$; $k + \varepsilon$ [.

Notons d'abord le caractère contravariant (Lutz, Makhlouf & Meyer 1996) de cette définition qui appelle à déterminer pour un voisinage de f(x), le voisinage de x correspondant. Un caractère covariant au contraire appelle à déterminer pour un voisinage de x, le voisinage de f(x) correspondant.

En examinant ensuite cette définition, on s'aperçoit du rôle déterminant de certains éléments de formalisme : la quantification universelle et existentielle (il y a aussi trois quantifications universelles implicites sur f, m et k), la notion de variable, celle d'intervalle, de voisinage d'un réel, de nombre réel, celle de fonction et celle d'implication. On peut, sur cette simple analyse des

éléments constitutifs de la définition, s'apercevoir que celle-ci concentre un nombre important de notions nécessaires pour lui donner sens.

Nous abordons les aspects de quantification, de variable, de nombres réels dans les paragraphes suivants.

b) La question de la quantification

Nous reprenons la définition donnée par Chellougui (2003) de quantification :

> Nous considérons une fonction propositionnelle F(x), celle-ci est constituée par deux variables : une variable d'objet (x) et une variable de prédicat (F) (F marque la place d'un prédicat quelconque et x celle d'un nom d'objet qui satisfera ou non le prédicat sur la variable x). Une manière d'opérer la transformation de F(x) en une proposition vraie ou fausse est la quantification. La quantification est mise au point pour la première fois techniquement et formellement par Frege (1879). Elle offre deux possibilités :
>
> ~ indiquer qu'il est possible de substituer à la variable d'objet tous les éléments de l'univers associés à la fonction. La quantification universelle correspond à un produit (conjonction qui aurait pour membres les propositions attribuant la propriété énoncée dans le prédicat successivement à tous les objets de l'univers considéré.
>
> ~ indiquer qu'il est possible de substituer à la variable d'objet un au moins des éléments du domaine considéré. Le quantificateur existentiel résume une somme (disjonction).
>
> Dans le cas où cet univers, noté Q, est fini et déterminé, nous aurons :
>
> pour $Q= \{x_1, x_2, .., x_n\}$
>
> $(\forall x)\ Fx \Leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge .... \wedge Fx_n$.
>
> $(\exists x)\ Fx \Leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee .... \vee Fx_n$.
>
> (Chellougui 2003 p. 12)

Par conséquent, puisque non (A et B) = (non A) ou (non B), et que non (A ou B) = (non A) et (non B), $(\neg(Fx_1 \wedge Fx_2) \Leftrightarrow (\neg Fx_1 \vee \neg Fx_2)$ et $\neg(Fx_1 \vee Fx_2) \Leftrightarrow(\neg Fx_1 \wedge \neg Fx_2)$, la négation d'une proposition universellement quantifiée est une proposition existentiellement quantifiée $(\neg ((\forall x)\ Fx)\Leftrightarrow (\exists x) \neg Fx)$ et la négation d'une proposition existentiellement quantifiée est une proposition universellement quantifiée $(\neg ((\exists x)\ Fx)\Leftrightarrow (\forall x) \neg Fx)$.

Ces quantifications peuvent également être associées en des propositions doublement quantifiées, par exemple :

(1) $\exists\ M\ \forall\ x\ f(x) < M$ où f est une fonction donnée, est la définition d'une fonction majorée.

(2) $\forall\ M\ \exists\ x\ f(x) < M$ Cette proposition dit que f(x) peut prendre des valeurs aussi petites que l'on veut, c'est-à-dire que la fonction n'est pas minorée.

Cette permutation illustre que l'ordre des quantificateurs joue un rôle fondamental dans le sens exprimé. Ainsi Chellougui insiste sur la nécessité d'ajouter au traitement syntaxique un traitement sémantique des questions liées à la permutation des quantificateurs. C'est ce que nous avons fait dans l'exemple précédent en interprétant ces propositions.

Par la suite, non qualifierons de proposition EA[5] (There Exists…for All...) une proposition doublement quantifiée comme la proposition (1) et de proposition AE (For All...there Exists…) une proposition doublement quantifiée comme la proposition (2). Nous verrons qu'une confusion existe, chez les élèves, sur l'interprétation de ces deux types d'énoncés, confusion qui conduit à interpréter l'une pour l'autre. Il est à noter également que la négation d'une proposition quantifiée de type AE est une proposition de EA[6], et réciproquement.

La définition de la limite mobilise précisément ce type de quantification multiple.

c) Les variables

En mathématiques l'usage courant actuel est d'utiliser les lettres majuscules et minuscules pour représenter les variables. On parle de variable *muette* (ou *libre*) quand le nom de la variable n'importe pas dans l'expression considérée, par exemple la variable x dans $\{x=1/3\}$ est muette car on pourrait la remplacer par une autre variable sans que cela ne change l'objet désigné (ici 1/3). On parle d'une variable *parlante* (ou *liée*) quand cette substitution ne peut pas être réalisée sans changer la nature de l'objet désigné, par exemple la variable x dans $\int_0^x t^2 dt$ (ici $x^3/3$). Ainsi seules les variables parlantes peuvent être remplacées par des valeurs dans une expression. On le voit très bien sur les deux exemples précédents. On appellera une *proposition close*, une proposition qui ne contient pas de variable libre, par exemple « il existe un réel x tel que $x^2=4$ ». On appellera *proposition ouverte* une proposition qui contient au moins une variable libre, par exemple « $x^2=4$ » où x est un réel. Il est clair que l'on peut attribuer une valeur de vérité à la proposition close, tandis que la valeur de vérité d'une proposition ouverte dépend de la valeur de la variable libre.

Ce qui, ici, nous intéresse plus particulièrement, c'est le rapport entre quantification et nature de variables, particulièrement dans le cas des quantifications multiples.

Reprenons les exemples précédents :

(1) $\exists\ M \forall\ x\ f(x) < M$ où f est une fonction définie sur R et M et x des réels

(2) $\forall\ M \exists\ x\ f(x) < M$ où f est une fonction définie sur R et M et x des réels

Dans le cas (1) M est une variable liée et x une variable libre. La variable M dépend de la fonction f choisie, on pourrait écrire cette dépendance sous forme fonctionnelle $M(f)$ ou M_f.

Dans le cas (2) M est une variable libre et x une variable liée. La variable x dépend de la fonction f choisie mais aussi du nombre M, on pourrait écrire cette dépendance sous forme fonctionnelle $x(f,M)$ ou $x_{f,M}$.

Remarquons que cette dépendance découle immédiatement de la quantification associée et de l'ordre de cette quantification. Le quantificateur existentiel introduit une dépendance au con-

[5] Nous reprenons cette notation anglophone des doubles quantifications (AE et EA) utilisée par Dubinsky (2000), notation qui correspond au symbolisme également utilisé en France avec les symboles ∀ et ∃ qui signifient respectivement All et Exists sous forme des lettres renversées A et E.

[6] Ceci est vrai pour dans le cadre d'énoncés du type « pour tout x il existe y tel que F(x ;y) » ou bien « il existe x tel que pour tout y on a F(x ;y) » où F(x ;y) est une fonction propositionnelle.

texte puisqu'il contraint la variable à une condition, condition qui peut dépendre d'autres variables, tandis que le quantificateur universel n'introduit pas une telle dépendance. Selon la place dans l'expression du quantificateur existentiel, la dépendance peut être différente comme le montre l'exemple précédent.

Cette dépendance, conséquence d'une interprétation de la quantification, est à l'origine de nombreuses erreurs historiques en mathématiques. Par exemple, Durand-Guerrier et Arsac (2003) donnent l'exemple de Cauchy, pourtant « pionnier dans la rigueur en analyse », qui prouve un théorème sur le passage de la convergence d'une série de fonctions à la convergence de la série d'intégrales correspondantes. Ce théorème est faux et il est démontré par une non prise en compte de la dépendance d'une variable à une autre variable (V. Durand-Guerrier et Arsac, 2003). On peut aussi penser à une erreur célèbre du même Cauchy concernant la continuité de la limite d'une série de fonctions quand ces fonctions sont continues, continuité qui réclame la convergence uniforme, ce qui n'avait initialement pas été perçu par Cauchy. Et l'on sait que précisément, ce qui distingue la convergence simple de la convergence uniforme est justement, sur le plan syntaxique, l'ordre des quantificateurs...

La question des variables est quasi indissociable de celle des types de nombres qu'elles sont censées représenter. La construction des nombres réels a été fondamentale dans l'élaboration historique de la définition de limite. Nous allons donc étudier cet aspect des nombres réels sur le plan épistémologique.

d) Les nombres réels

Nous rappelons ici l'importance de la notion de nombre pour la question de la formalisation de la notion de limite. En particulier nous montrons que la notion de nombre réel et du type d'égalité qui lui est associé, joue un rôle fondamental dans la question des preuves en analyse.

La notion de nombre, que ceux-ci soient entiers naturels ou relatifs, décimaux, rationnels ou réels, est reliée directement à leurs représentations et aux opérations que permettent ces représentations. On pourra voir par exemple dans Brousseau (1998b) que les scribes égyptiens utilisaient entre autres une numération par les quantièmes très adaptée à leurs usages mais interdisant, de fait, certaines opérations. La notion de limite naturellement a évoluée conjointement à celle de nombre. Nous retrouvons dans le tableau de Lê Thai (2007) certains éléments de cette évolution conjointe.

Moment	Nombre en tant que rapport	Relation entre nombre et limite	Evolution de la notion de limite
Euclide	*Notion protomathématique* des nombres réels Statut numérique : ordre total, sans opérations, sans complétude		
	- Construction des rapports par la relation d'égalité - Existence de rapports commensurables et incommensurables. - Irrationnel : pas objet d'étude	Méthode d'exhaustion comme outil pour montrer l'égalité entre deux rapports et pour faire certains calculs approchés	Méthode d'exhaustion : grandeur devenant aussi petite que l'on veut (*approximation monotone*)
Stevin 1585	*Notion paramathématique* des nombres réels Statut numérique : ordre total, opérations géométriques, continu géométrique		
	Rapport = Nombre	Tout rapport est approchable par des décimaux	Approximation décimale
Newton 1642-1727	Nombre = Rapport abstrait.	Nombre ou « limite » = Rapport abstrait	Méthode des fluxions : rapport ultime de deux quantités infiniment décroissantes. (*approximation monotone*)
D'Alembert 1717-1783	- Rapport commensurable = Nombre - Incommensurable $\neq$ nombre	Irrationnel = Limite de rationnels	Notion de limite d'une grandeur : approcher comme l'on veut mais sans surpasser. (*approximation monotone*)
Cauchy 1821	- Rapport = Nombre. - Nombre avec les signes (+/-) = Quantité. $\Rightarrow$ Ensemble des nombres positifs et négatifs	On sait exactement ce que veut dire : « *a* est la limite de (x_n) ».	Notion de limite d'une suite numérique du point de vue de l'*approximation non monotone*

Tableau 1 : Co-évolution du statut numérique des réels et de la notion de limite (Lê Thai 2007 p. 47)

Du point de vue de la notion de limite, il s'agit, à défaut d'ensemble des nombres réels théorisé, de trouver des moyens de s'assurer de la pertinence du discours. La limite repose alors soit sur l'idée d'approximation, soit sur les grandeurs matérielles dont elle est sensée rendre compte. C'est finalement la construction des réels qui va donner la possibilité de se détacher de ces supports et permettre à l'analyse réelle d'entrer dans une phase beaucoup plus théorique avec la définition formelle de limite en epsilon. Cette construction des réels est réalisée en 1872 par Dedekind avec les coupures d'ensemble des rationnels, et par Cantor avec les classes d'équivalences des suites de Cauchy[7] de rationnels.

Les ensembles des nombres décimaux et les nombres rationnels sont tous les deux denses dans l'ensemble des nombres réels. Autrement dit il existe toujours entre deux réels distincts un nombre décimal ou un nombre rationnel. De manière équivalente, tout intervalle non vide de réels contient un nombre rationnel ou un décimal. Mais **R** a en outre la propriété d'être complet, ce que n'ont pas les ensembles **D** et **Q**. La complétude de **R** correspond au fait que toute suite dite de Cauchy est convergente dans **R**. Cette propriété de complétude de l'ensemble des nombres réels peut se caractériser par quatre propriétés équivalentes :

- La propriété de la borne supérieure[8].

- Toute suite de Cauchy est convergente.

[7] Une suite u_n est dite de Cauchy si elle vérifie $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in N\ \forall p, q \geq N\ |u_p - u_q| < \varepsilon$
[8] Toute partie non vide majorée de R admet une borne supérieure.

- Toute suite croissante et majorée est convergente.

- Il existe un nombre réel unique appartenant à tous les segments de chaque famille de segments emboîtés.

Pour ce qui est des limites de suites et des ensembles de nombres, on peut se trouver dans les situations suivantes :

a) La suite de réels n'est pas de Cauchy, et donc elle ne converge pas.

b) La suite de réels est de Cauchy et donc elle converge dans **R**.

Dans ce dernier cas nous pouvons avoir plusieurs sous cas possibles, regardons sur des exemples :

$u_n = \sqrt{2} + 1 / n$. Cette suite d'irrationnels converge vers $\sqrt{2}$ qui est un irrationnel.

$v_{n+1}=1 + 1 / (1+ v_n)$ avec $v_0 =1$ est un suite de rationnels qui convergent vers $\sqrt{2}$. Cette dernière suite est une suite de **Q** qui ne converge pas dans **Q**, mais converge dans **R**.

Nous voyons donc que la complétude nous assure que si une suite a les qualités nécessaires (elle est de Cauchy) pour converger, elle convergera dans **R** tandis que ce ne sera pas forcément le cas pour **Q** et **D**. C'est-à-dire que la complétude de **R** assure l'existence des limites dans **R** (sous certaines conditions). Cette propriété des réels va donc être utile dans les théorèmes d'existence en analyse, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires, ou bien celui des suites bornées et monotones, point fixe, etc.

Par ailleurs, une fois que l'on a établi la convergence des suites de Cauchy dans R, cette hypothèse de complétude n'intervient plus vraiment pour démontrer un grand nombre de théorèmes de l'analyse, notamment parce que l'existence d'une limite est une hypothèse de ces théorèmes assez systématiquement présente. C'est le cas par exemple du théorème suivant :

Si une suite (u_n) de R converge vers L et une suite (v_n) de R converge vers L', alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers L + L'.

Nous remarquons que la complétude est une propriété non nécessaire pour ce théorème, théorème qui reste vrai dans Q ou D, car il contient l'hypothèse d'existence des limites. Et cela est le cas pour de nombreux théorèmes usuels, en particulier ceux de l'algèbre des limites. Une fois cette existence assurée, il est un outil qui va nous servir pour vérifier si les limites de deux suites sont égales ou pas. C'est ainsi que l'on démontre, par exemple, l'unicité de la limite d'une suite. Cet outil, le raisonnement à epsilon près, est un élément du SPA[9] (Bloch, 2000) appelé encore *principe fondamental de l'analyse* (Legrand[10]) ou encore *propriété de l'égalité en analyse réelle* (Ghedamsi, 2008) :

Si a et b deux réels vérifient « si $\forall \varepsilon > 0$ avec ε réel, $d (a ; b) < \varepsilon$ » alors $a = b$. (où $d (a ; b)$ est la distance usuelle entre a et b)

Ou encore : « *deux quantités fixes et arbitrairement proches sont égales* »

[9] Système de Preuve de l'Analyse développé par Bloch.
[10] C'est le terme avec lequel Legrand nous a désigné cette propriété de manière informelle.

Cette manière de montrer que deux réels sont égaux diffère profondément de l'égalité usuelle en algèbre par exemple où l'on utilisera davantage des procédures finies et reposant sur l'exactitude : par exemple pour montrer que A = B on montrera que A = C = B.

Ce qui est ici fondamental, c'est que cette procédure, propre à l'analyse, est l'illustration de ce qui est une démarche générale en science : montrer avec le plus de certitude possible que ce qui est inconnu (A) est égal ou non à quelque chose de connu (B). En particulier cette propriété autorise le recours à des incertitudes qui bien combinées et en nombre infini conduisent à des certitudes. C'est par exemple le cas avec l'intégrale où en manipulant une infinité d'approximations, on obtient un résultat certain avec une précision infinie.

On peut mettre en œuvre cette propriété, par exemple, de la manière suivante :

Soit (a_n) une suite de rationnels qui a pour limite a et (b_n) une suite de rationnels qui a pour limite b, où a et b sont irrationnels. En utilisant l'inégalité triangulaire, la distance entre a et b se ramène à l'étude de la distance entre a_n et b_n. Dans le cas particulier où $(a_n - b_n)$ converge vers 0 alors $a=b$.

Cette égalité de deux nombres fixes (a et b) préfigure la définition de limite dans le sens où elle repose sur un raisonnement à epsilon près où epsilon est universellement quantifié. La définition de limite est effectivement une forme voisine de cette égalité pour le cas d'un nombre fixe et d'un nombre qui ne l'est pas.

I.3 Eléments de conception de définition en mathématiques

Nous rappelons ici que la définition est constitutive de l'édifice axiomatique mathématiques : les objets construits peu à peu par les mathématiciens s'ils passent par des moments de flou, lors des recherches qui les font émerger, sont introduits dans l'institution des mathématiques une fois formalisés et définis. Remarquons cependant que cela n'a pas toujours été le cas en mathématiques, en particulier pour la notion de limite. Rogalski (2012) rappelle à ce sujet que :

> A plusieurs reprises dans l'histoire des mathématiques on constate que l'absence d'une définition suffisamment formelle, générale d'une notion "commune" comprise de façon intuitive par tout le monde, entraîne des *imprécisions* dans les preuves, des *désaccords* sur leur validité, des *réfutations* ou des *controverses*. (M. Rogalski 2012 p. 505)

Dans ce paragraphe nous allons justement interroger la constitution des définitions à travers essentiellement deux auteurs : Lakatos (1984) et Ouvrier-Buffet (2013).

a) La dialectique de preuve et réfutation selon Lakatos

Selon Lakatos les définitions se construisent, en mathématiques, lors de dialectiques de preuves et de réfutations qui se traduisent par l'action conjointe et de définir un objet et de démontrer le théorème pour lequel cet objet est fabriqué. Cette dialectique procède d'un raffinement d'une conjecture initiale qui manifeste un résultat mathématique pressenti afin de lui trouver une formulation à la fois valide et économique. Cette conjecture, en effet, à la fois contient une idée forte qui deviendra le cœur du théorème mais cette idée ainsi exprimée est initialement formellement fausse. L'objet qu'implique cette idée est caractérisé par ce que Lakatos appelle une définition naïve, définition permet seulement d'énoncer la conjecture (« naïve »). Ce premier

couple ; définition et conjecture naïves ; va ensuite donner lieu à une écriture plus formalisée répondant à la recherche de validité sous la forme d'une zéro- définition et de la conjecture correspondante que nous pourrions appeler « zéro-conjecture ». Cette (zéro) conjecture n'est pas encore de nature à résister aux contre-exemples. C'est le processus de tentatives successives de preuve et de réfutations de ce résultat qui est le moteur de la mutation de la zéro-définition. Lorsqu'un contre-exemple global (mettant en cause le résultat escompté) apparaît, il y a lieu soit de modifier la définition en opérant une restriction sur l'objet considéré, soit de modifier le résultat en éliminant la catégorie de contre-exemples en question (par exemple en rajoutant des hypothèses). Pendant la démonstration, si un lemme utilisé admet un contre-exemple, et que ce contre-exemple est bien local (il invalide le lemme mais pas le résultat), on va modifier le lemme ou bien la démonstration. Au terme de ce processus, lorsqu'une démonstration valide de la conjecture est obtenue, la définition retenue est qualifiée de proof-generated définition. C'est-à-dire que cette définition a été conçue pour permettre d'énoncer et démontrer un résultat mathématique.

b) La définition selon Ouvrier-Buffet

Cécile Ouvrier-Buffet étudie la définition en mathématique, et plus particulièrement l'activité de définition (Ouvrier-Buffet 2003, 2013) au niveau épistémologique et didactique. Nous retenons pour notre propre étude au niveau épistémologique deux aspects : sa typologie des définitions qui repose sur l'utilisation du modèle de conception cK¢, et sa modélisation des « moments de travail présents dans l'activité de définition ».

Nous commençons par décrire le modèle cK¢ en utilisant sa description par Ouvrier-Buffet :

> Nous avons donc retenu le modèle de conception de Balacheff (repris dans Balacheff & Margolinas, 2005) qui s'appuie sur la notion de concept de Vergnaud (1991). Deux niveaux d'invariants interviennent : les opérateurs (R) qui permettent d'agir sur la situation et les structures de contrôle (Σ) qui justifient et valident l'utilisation des opérateurs. Une dialectique forte existe entre opérateurs et contrôles, nous y reviendrons plus loin. Une conception est alors décrite par un quadruplet (P, R, L, Σ) où :
>
> - P est un ensemble de problèmes sur lesquels la conception est opératoire ; P décrit le domaine de validité de la conception.
>
> - R est un ensemble d'opérateurs. Ceux-ci permettent la transformation des problèmes. Ils sont attestés par des productions et des comportements du sujet.
>
> - L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R. À l'image du modèle proposé par Vergnaud, les éléments de L sont langagiers ou non.
>
> - Σ est une structure de contrôle qui assure la non contradiction de la conception. Les contrôles sont des outils de décision sur la légitimité de l'usage d'un opérateur et sur l'état du problème (résolu ou non). (Ouvrier-Buffet 2013, p. 21)

Ce modèle va permettre à Ouvrier-Buffet de déterminer trois conceptions de la définition, chacune relevant d'une conception spécifique de la définition :

- Conception aristotélicienne : Il s'agit d'une conception de la définition comme outil logique et langagier pour classer, effectuer des typologies.
- Conception poppérienne : Il s'agit d'une conception de la définition comme permettant de départager les théories entre elles, comme servant à la réfutation.

- Conception lakatosienne : Il s'agit d'une conception de la définition comme permettant de préciser le domaine de validité d'une conjecture, la validité d'une preuve et de construire des concepts.

Ce modèle permet en outre de caractériser ces conceptions de la définition en identifiant les quadruplets qui le composent. Nous reprenons ici le tableau qui récapitule pour la conception aristotélicienne, les différents quadruplets possibles (Ouvrier-Buffet 2013) :

Problèmes (P)	**Opérateurs (R)**	**Contrôles (∑)**	**Systèmes de représentation (L)**
Classification (l'exemple de la géométrie est donné), et plus généralement : tout problème où une délimitation (au sein d'un même *genre* par exemple) est possible.	$\mathbf{R}_1^A$: procéder par *genre et différences spécifiques* (rechercher les invariants au sein d'une classe). $\mathbf{R}_2^A$: supprimer toute redondance. $\mathbf{R}_3^A$: supprimer toute régression à l'infini. $\mathbf{R}_4^A$: prouver l'équivalence entre définitions. $\mathbf{R}_5^A$: formuler une définition esthétique (simple quant au langage)	- **Pôle « Logique »** : proscrire les cercles vicieux, les termes antérieurs doivent être définis. Une définition est une condition nécessaire et suffisante. L'unicité du concept défini doit être vérifiée. - **Pôle « Langage et logique »** : proscrire les redondances et régressions à l'infini (d'où l'existence de termes primitifs) ; pas de métaphores ni homonymes. - **Pôle « Essentialisme »** : interroger l'existence des concepts définis.	- Langage et règles du discours - Logique - NB : l'importance de la représentation des concepts (et donc des systèmes de représentation propres à chaque concept) n'est pas présente chez Aristote mais découle de la conception aristotélicienne.

Tableau 2 : Caractérisation de la conception aristotélicienne de la définition à partir des quadruplets (P, R, L, Σ) (Ouvrier Buffet 2013 p. 26)

Ainsi, par exemple, la conception aristotélicienne de la définition conduit à éliminer la définition de limite « une limite c'est quand ça tend vers » avec le contrôle du pôle logique « les termes antérieurs doivent être définis ». En effet que signifie « tend vers » ?

Nous verrons ultérieurement que la notion de contrôle associée à cette modélisation est de nature à guider la fabrication de situations didactiques dans le cadre de la TSD. En effet, si une conception de la définition est présente chez un élève et qu'un contrôle associé à cette conception est mis en défaut par le milieu proposé, alors cette situation conduira l'élève à un conflit cognitif (Tall et Vinner 1981) de nature à faire évoluer le milieu de la situation. En particulier, nous verrons que cela peut le conduire à ressentir le besoin de (re)définir ou bien à modifier la conjecture dans laquelle cette définition est en jeu.

Ouvrier Buffet (2013) identifie « les quatre moments de travail présents dans l'activité de définition » à partir d'interviews de mathématiciens sur leurs pratiques et en particulier celles qui ont trait à la définition. Ces quatre moments ne sont pas hiérarchiques, ni ne se déroulent linéairement dans le temps, elle les associe aux différents types de définitions de Lakatos auxquels elle rajoute le type « définition théorique » ainsi qu'aux différentes conceptions de la définition :

> L'objectif de la définition de ces moments est de mettre en relation les conceptions et leur opérationnalité, les types de problèmes (de manière globale) liés à l'activité mathématique de

recherche, et ainsi de donner un panorama de l'activité de définition dans la recherche mathématique. La dénomination que nous avons retenue pour ces moments est en relation avec les différents types de définition : définitions-en-acte, zéro-définitions, proof-generated définitions, et définitions théoriques (ce dernier terme s'inscrit dans la construction axiomatique d'une théorie, locale ou plus globale). (Ouvrier-Buffet 2013 p. 69) Voici ces moments :

- *Le moment « en acte »* : là où sont mobilisés l'intuition, les idées, les résultats. Il s'agit d'un moment d'exploration. Des analogies sont formulées. C'est le moment des exemples, des non-exemples, des contre-exemples. C'est le moment où apparaissent des définitions-en-acte dont voici la définition :

Une définition-en-acte est définie de la façon suivante : il s'agit d'un énoncé utilisé comme un outil (et non comme objet) permettant aux étudiants d'être opérationnels dans l'avancée d'un problème, sans avoir recours à une définition explicite. Ce niveau de définition vient avant celui des zéro-définitions et pourra même peser contre une zéro-définition. De la même façon que les définitions dépendent des propositions, les définitions-en-acte sont en lien avec des propositions-en-acte. (Ouvrier-Buffet 2013 p. 24)

- *Le moment intermédiaire* entre « en-acte » et « zéro » : c'est le moment des catégories, des classements, des tentatives d'analogies et de liens avec d'autres concepts, théories.
- *Le moment « zéro »* : C'est le lieu des zéro-définitions. On construit des exemples, des contre-exemples. On accède à une idée de la preuve, on délimite le domaine d'applicabilité d'une conjecture, d'une idée, d'une preuve.
- *Le moment « formalisé »* : c'est un moment tourné vers la dimension « communication » de concepts et de preuves dans lesquelles interviennent les proof-generated definitions.
- *Le moment « axiomatique »* : c'est le moment de construire la théorie et en particulier son aspect axiomatique. Le principe de choix est celui de la minimisation des axiomes, propriétés pour une maximisation des résultats. Les définitions associées sont dites définitions théoriques.

Voici un schéma qui résume ces différents moments et les relations qu'ils peuvent entretenir :

Figure 1 : Schéma des moments de construction de définition (Ouvrier-Buffet 2013 p. 71)

Trois catégories de problèmes conduisant à une activité de définition sont identifiées a priori (définir un concept familier dans un autre cadre, (re)définir un concept familier, définir un nouveau concept). Et ces catégories sont caractérisées à partir de la modélisation des problèmes sous la forme de couple (I,Q) où I est une instance d'un problème, c'est-à-dire le choix de variables associé à un problème général, et Q la question. Voici, par exemple, un type de problème :

> PbRedéf, 4 :
>
> - Instance : concept image des étudiants et éventuellement des représentations du concept problématisées dans un problème ;
>
> - Question : demande explicite de définition(s). (Ouvrier-Buffet 2013 p. 74)

Les différents problèmes présents dans la littérature concernant la fabrication de définition sont ainsi catégorisés. Nous remarquons que cette typologie est fabriquée indépendamment de celle des conceptions sur la limite.

Après cette étude d'éléments épistémologiques relatifs à la construction de la notion de limite, nous pouvons maintenant aborder les difficultés associées chez les élèves/étudiants concernant ces éléments.

II Difficultés de conceptualisation de la définition de limite

La littérature à propos des difficultés cognitives associées à la notion de limite est foisonnante. Lê Thaï (2012) explique comment l'institution ne prend pas en charge, dans le secondaire, la majeure partie de ces difficultés en se concentrant sur l'algèbre des limites :

> Des études menées au lycée en France (Trouche 1996), en Espagne (Bosch et al. 2002), au Viêtnam (Lê Thai 2004), montrent que la principale raison d'être de la notion de limite enseignée au Lycée est de répondre à la question du calcul algébrique des limites des fonctions en un point ou à l'infini, en partant de la supposition que ces limites existent ou sont infinies. Nous parlerons *d'algèbre des limites.* (Lê Thai 2012 p. 33)

Cela permet effectivement aux élèves de réaliser les taches proposées[11] dans ce cadre, peut être au prix du sens même de l'activité. Ainsi, un élève, lors d'une étude au Viet Nam, dira :

> « Voilà, on peut résoudre ce problème sans rien comprendre à limite ». (Lê Thai 2012 p. 33)

Nous proposons de commencer par un bref aperçu des difficultés liées à la notion de limite avant de nous concentrer sur certaines d'entre elles : la notion de nombre réel, l'interprétation de la double quantification, et la notion de définition. Nous pensons, dans le cadre de notre étude, qu'un milieu suffisamment riche mais pas de manière exhaustive est susceptible de permettre à la fois un accès à la catégorisation formelle de la limite, mais aussi de lever la majeure partie des difficultés non élucidées a priori. Cette hypothèse d'économie didactique repose sur le pari didactique fondamental de la TSD : les difficultés rencontrées sont des occasions d'apprentissage si le milieu le permet pour qu'elles puissent être appréhendées par les élèves et pour qu'ils puissent agir sur ces difficultés. Cela signifie que ce que nous appelons économie ne l'est qu'a priori, puisque les difficultés non élucidées avant seront rencontrées après. Ce qui motive ce choix est la raison suivante : un concept aussi consistant comme la limite est évidement un défi pour l'enseignement et l'apprentissage, mais c'est surtout l'occasion de travailler tous les aspects connexes qui jouent un rôle important et sont associés à la notion. Et cela à plusieurs niveaux : celui des notions mathématiques, mais aussi à un niveau plus méta comme par exemple celui de la démarche scientifique et de la rationalité. Ces notions consistantes peuvent ainsi constituer des opportunités remarquables pour l'apprentissage dans la mesure où elles sont connectées à beaucoup d'autres notions et cristallisent à elles seules les efforts de toute une communauté pour trouver des solutions à des problèmes parfois simples d'accès mais résistants. Commençons par ce bref aperçu des difficultés identifiées dans la littérature.

II.1 Les difficultés liées à la notion de limite

Dans cette partie nous abordons les difficultés relatives à la notion de limite de diverses façons : les difficultés, les conceptions et les obstacles (Brousseau 1998a). *Les difficultés* d'apprentissage d'une notion sont identifiées par les erreurs récurrentes des élèves, *les conceptions* sont identifiées à partir du travail des élèves, ces conceptions provoqueront des difficultés, et *les obstacles épistémologiques* sont, en général, associés à des périodes de stagnation de la science

[11] Il faut noter cependant que cela n'est pas sans poser d'autres difficultés, dans la transposition en classe par exemple. (cf par exemple (Vandebrouck, 2016)

dans l'histoire (Bachelard 1938). Dans tous les cas, ces obstacles provoquent aussi des difficultés.

Pour commencer, il existe des difficultés liées au langage. Ainsi (Tall et Schwarzenberger 1978) nous préviennent qu'il n'y aucun salut dans la traduction informelle de la définition standard de limite d'une suite s_n qui a pour limite s suivante : « Nous pouvons rendre s_n aussi proche que nous voulons de s en prenant n assez grand ». Ils se demandent ce que peut signifier « aussi proche que nous voulons », cela signifie-t-il 1/10 ? 1/100 ? Cette traduction porte aussi l'ambiguïté concernant la convergence d'une suite constante car proche peut-il signifier égal ?

Robert (1982) met en évidence des modèles[12] (exprimés) de la convergence d'une suite chez les étudiants en analysant leurs réponses à un questionnaire. Elle définit ainsi essentiellement 3 types de modèles, avec des variantes : les modèles primitifs (modèle « stationnaire » : la limite est atteinte à partir d'un certain rang, le modèle « barrière » : la limite est indépassable, le modèle « monotone » : par exemple celui correspondant à une suite croissante majorée), le modèle « dynamique » caractérisé essentiellement par l'idée « de se rapprocher de » et enfin le modèle « statique » qui correspond aux formulations proches de la définition usuelle de convergence. Dans cette étude, Robert (1982) montre la grande stabilité chez les étudiants de certains modèles, par exemple celui du modèle « dynamique » au détriment du modèle statique : ce modèle « dynamique » ne disparait qu'en maîtrise (M1) où les modèle « statique » et « mixte » (juxtaposition de modèle statique, dynamique et pré-statique, ce dernier correspond au modèle statique sans prise en compte du quantificateur universel pour epsilon) deviennent majoritaires.

A partir d'une étude historique, Cornu 1(983) identifie des obstacles épistémologiques (Bachelard 1938) dont il mettra en évidence les conséquences dans les conceptions de la limite chez les élèves grâce à des questionnaires et activités en classe. Voici la liste de ces obstacles :

- *La transposition numérique* correspond à la difficulté de s'abstraire du contexte géométrique et cinématique pour développer une conception contemporaine de la limite (modèle statique).
- *L'aspect « métaphysique de la limite »* correspond à une conception de l'infini comme une notion non mathématique mais plus philosophique ou métaphysique.
- *La notion « d'infiniment petit » ou « d'infiniment grand »* correspond à la difficulté d'envisager des quantités infiniment petites mais non nulles.
- *Limite …atteinte ou pas* correspond à la conception de la limite comme ne pouvant être atteinte.
- *D'autres obstacles* (la convergence est forcément monotone, une somme infinie ne peut pas être finie).

Sierpinska (1985) va poursuivre et préciser ce travail d'identification des obstacles épistémologiques associés à la notion de limite. L'auteure regroupe sous l'appellation « Horror Infiniti »

[12] Le terme « modèle exprimé » est défini comme une certaine composante de la conception de la convergence des suites numériques ; « modèles » parce qu'il s'agit des représentations de la convergence qui se développent dans l'esprit des élèves ; « exprimés » parce qu'il s'agit de l'expression écrite de ces représentations. (Sierpinska 1985)

le groupe d'obstacles liés à la difficulté de concevoir l'infini comme un concept mathématique. L'auteur identifie le groupe d'obstacles liés au concept de fonctions, le groupe d'obstacles associés à la conception géométrique de la notion de limite, le groupe d'obstacles « logique », en particulier « l'effacement des quantificateurs ou de leur ordre », et enfin l'obstacle du symbole utilisé pour écrire la limite d'une fonction.

Une étude menée par Williams (1991) établit la fréquence des modèles de conception de la limite à partir d'un questionnaire donné à trois cent quarante et un étudiants en analyse [13].

Voici le questionnaire qui est proposé :

A. Please mark the following six statements about limits as being true or false:

1. T F A limit describes how a function moves as x moves toward a certain point.
2. T F A limit is a number or point past which a function cannot go.
3. T F A limit is a number that the y-values of a function can be made arbitrarily close to by restricting x-values.
4. T F A limit is a number or point the function gets close to but never reaches.
5. T F A limit is an approximation that can be made as accurate as you wish.
6. T F A limit is determined by plugging in numbers closer and closer to a given number until the limit is reached.

B. Which of the above statements best describes a limit as you understand it? (Circle one)

1 2 3 4 5 6 None

C. Please describe in a few sentences what you understand a limit to be. That is, describe what it means to say that the limit of a function f as $x \to s$ is some number L.

Figure 2 : questionnaire de Williams (1991 p. 221)

Les six phrases (1 à 6) correspondent à une typologie de ces conceptions :

(a) Dynamique-théorique (la limite est vue essentiellement comme un mouvement vers une valeur)

(b) Agissant comme une borne

(c) Formelle (correspondant à la définition formelle de limite)

(d) Inatteignable (la limite ne s'atteint pas)

(e) Agissant comme une approximation (la limite est vue comme une approximation)

(f) Dynamique-pratique (La limite est obtenue en déterminant des valeurs et en regardant vers quoi ces valeurs se rapprochent)

Voici les résultats obtenus :

[13] Calculus students college

Question Number[a]	Statement type	Original sample (N = 341)			Students indicating statement 3 as true (n = 226)		
		True	False	Best	True	False	Best
1	Dynamic-Theoretical	80	19	30	82	18	29
2	Boundary	33	67	3	28	72	2
3	Formal	66	31	19	100	0	29
4	Unreachable	70	30	36	65	35	31
5	Approximation	49	50	4	53	46	3
6	Dynamic-Practical	43	57	5	45	55	5

Note. In some rows, responses for true and false do not sum to 100% because of nonresponses. Responses for best statement do not sum to 100% because of nonresponses.

Figure 3 : Pourcentage de réponses[14] aux questions de (Williams, 1991)

Williams (1991), dans ses résultats, distingue ceux du groupe entier (341 étudiants) et ceux du groupe des étudiants ayant donné la phrase 3 comme vraie. Il remarque alors que l'on retrouve dans les deux groupes les mêmes proportions d'étudiants reconnaissant les phrases 1 et 4 comme vraies. Il souligne aussi que ceux qui ont répondu vraie à la phrase 3 se répartissent équitablement entre modèle Dynamique-théorique, modèle formel et modèle dynamique pratique. Enfin, il explique que la plus part des étudiants manifestent plusieurs modèles simultanément, ce qui rend très difficile de catégoriser les élèves. Dans une deuxième partie de l'étude destinée à déstabiliser certaines conceptions, deuxième partie que nous ne relaterons pas ici[15], Williams montre la grande stabilité de certaines conceptions, en particulier celle de la conception dynamique et retenons dans la conclusion que :

> Nevertheless, the data suggest that the attitudes toward practicality and mathematical truth displayed by the subjects did interfere with conceptual change. Specifically, students' views of mathematical truth, the value they place on practicality and simplicity in models of limit, the everyday demands of Calculus class, their previous experience graphing functions, and their faith in the a priori existence of graphs combine to make it difficult for them to appreciate the need for a more formal definition of limit. These attitudes toward pragmatism and mathematical truth are similar to those that are widely believed to be held by students of all ages, and develop over years of schooling. (Williams 1991 p. 235)

Ainsi, selon Williams (1991) cette difficulté d'accéder à une conception idoine de la limite concerne davantage une difficulté métamathématique liée à la notion de vérité en mathématiques et à une inclinaison vers un certain pragmatisme versus un besoin de formalisation qu'à une difficulté spécifique liée à la notion de limite.

Ce même constat est réalisé par Przenoslio (2004) sur la question de la définition, ici celle de la limite :

> Students appeared to lack a sense of the role of definitions in mathematics in general, and were convinced that their various associations determined the meaning of the concept. (Przenioslo 2004 p. 124)

Le même constat est encore réalisé par Alcock et Simpson (2009) :

[14] Best est la réponse qui a été choisie à la question B

[15] La méthodologie de cette deuxième partie nous semble discutable.

> Undergraduate students are often unaware of the status of definitions in mathematical theory. They may be unable to state important definitions, even after a substantial period of study, and many appear to reason about mathematical concepts using concept images instead of definitions (Tall & Vinner, 1981). This can be particularly problematic in Analysis, in which spontaneous conceptions, based on everyday use of terms or informal experience with concepts such as limit, can be at odds with the formal definitions (Williams, 1991; Cornu, 1991). (Alcock et Simpson 2009 p. 33)

Le caractère contravariant de la définition standard de limite est une autre source de difficultés pour les élèves. Quand Swinyard (2011) expérimente une situation qui a pour objectif de faire réinventer la définition de limite à deux élèves, ceux-ci butent longtemps, dans leurs tentatives successives, sur leur approche dynamique. En effet, d'une part ils ont une vision potentielle de l'infini (du processus d'approximation), ce qui les empêche de formaliser selon une quantification universelle correspondant à une vision actuelle de l'infini. D'autre part ils modélisent naturellement la dépendance des deux variables x et $f(x)$ selon celle du mouvement perçu : les variations de x génèrent celles de y, ce qui empêche longtemps de formuler une définition de la limite selon un caractère contravariant. Remarquons ici que cet obstacle est levé lorsque les élèves prennent conscience que la formulation covariante (si x se rapproche de…alors $f(x)$ se rapproche de…) donne la possibilité à f de se rapprocher de plusieurs limites. En effet, dans cette vision de la limite, par exemple, 1/x a pour limite 0 en plus l'infini car 1/x se rapproche de 0, mais 1/x se rapproche aussi de -1 (et toutes les valeurs inférieures à 0). C'est donc l'unicité de la limite qui dans ce cas permet de rendre nécessaire le passage à une autre formulation, unicité qui joue également un rôle important dans d'autres ingénieries didactiques à propos de la limite, nous le verrons ultérieurement.

Roh (2010) mène une étude pour déterminer si l'utilisation de la définition par les bandes-epsilon (epsilon strips), voisinage de la limite à epsilon près et leur matérialisation sur les graphiques par les étudiants, est de nature à établir un rapport adéquat entre le epsilon et le N de la définition de limite d'une suite. L'expérimentation montre certaines difficultés hiérarchisées : 1) celle de prendre epsilon non nul 2) celle de saisir que les bandes epsilons correspondent à des erreurs arbitraires, autrement dit prendre en compte le quantificateur attaché à epsilon comme vraiment universel et pas comme un quantificateur existentiel lorsqu'il s'agit de prouver une limite. 3) celle de saisir que le quantificateur universel attaché à epsilon permet de prendre en compte le besoin de prendre epsilon de plus en plus petit. L'expérimentation met à jour également une typologie des compréhensions de la structure logique en particulier le rapport entre epsilon et N. Cinq catégories sont présentes : 0) ceux qui ne comprennent pas le rapport entre epsilon et N 1) ceux qui trouvent l'indice N quand epsilon est nul 2) ceux qui trouvent l'indice N pour un epsilon 3) ceux qui trouvent l'indice N pour plusieurs epsilons 4) ceux qui trouvent l'indice N pour plusieurs epsilons et font tendre celui-ci vers 0. Ces deux catégorisations sont croisées dans le tableau suivant :

Essential components	Category 1	Category 2	Category 3	Category 4
Find N corresponding to ε before completely diminishing ε to 0	×	○	○	○
The expression "any ε" implies the arbitrariness of error bounds	×	×	○	○
The arbitrariness of ε implies that ε tends to 0 ($\varepsilon \to 0$)	×	×	×	○

Figure 4 : Les composantes (colonne) croisée avec les catégories de la compréhension de la structure logique (ligne). Les X signifient non présent et les O signifient présents. (Roh 2010 p. 277)

Le tableau ainsi plaide pour une forme de stratification des niveaux de compréhension de l'appropriation de la définition formelle de la limite d'une suite à l'aide des bandes-epsilon où nous pouvons voir que l'interprétation de la quantification est centrale. Le niveau de compréhension est ainsi déterminé par l'acquisition des composantes mises à jour.

Une autre source de difficulté pour la conceptualisation de la définition de la limite provient de la (mé)connaissances des nombres et en particuliers des différents types de nombres (Bloch, Chiocca, Job et Schneider 2006) mais aussi des propriétés des ensembles de nombres (Vivier et Durand-Guerrier 2016). Un problème emblématique du rapport entre nombre et limite est la fameuse égalité 0,9999…=1 tant commentée et analysée dans la littérature (par exemple, Ghedamsi, Haddad et Lecorre 2107).

Comme nous l'avons vu, les difficultés conceptuelles spécifiques de la notion de limite sont nombreuses, aussi il ressort de notre étude de la littérature à ce sujet que certaines difficultés récurrentes méritent que l'on étudie celles-ci pour elles-mêmes dans un cadre plus général que celui de la seule notion de limite : la notion de nombre, la question de la quantification (multiple), et la notion de définition.

II.2 Les difficultés liées à la notion de nombre

Nous allons aborder brièvement trois types de difficultés dans ce paragraphe : la forme d'inculture numérique des élèves liée à l'absence de préconisation sur le sujet dans les programmes, ensuite la fameuse égalité 0,999…. = 1 et enfin des questions plus délicates concernant la densité et la complétude de **R**.

a) Méconnaissance numérique des élèves

Bloch et al. (2006) étudient la question de la compatibilité de l'apprentissage de l'analyse au début de l'enseignement universitaire et des connaissances numériques des élèves. L'analyse de manuels de seconde montre que les nombres fréquentés sont en quantité très limitée, tout au plus une trentaine, afin d'éviter de cumuler les difficultés des notions nouvelles dans lesquelles interviennent ces nombres. De plus, le programme scolaire de l'époque (2001) contient, pour le lycée, seulement quelques lignes indiquant le travail attendu sur le sujet. Les conditions écologiques d'un enseignement satisfaisant sur la question ne sont pas réunies (temps disponible, moyens didactiques...). A l'université, les variables et ensembles de nombres prennent la place des nombres et la structure des nombres réels ne donnent pas l'occasion de compenser ces lacunes.

Ces difficultés sur la connaissance des nombres se sont renforcés ensuite dans la mesure où le programme de 2009 a éliminé quasiment toute référence existante à la construction des nombres réels (approximation, comparaison, théorème des suites adjacentes…), et de notion de nombre irrationnel. D'après Vergnac et Durand Guerrier (2014):

> Dans l'introduction des premiers outils de l'analyse, le programme s'appuie sur les notions intuitives de voisinage, de limite, de continu…toutes notions qui sont issues de la topologie de **R** et qui sont approchées ici par la géométrie de la droite. L'ensemble est identifié à l'ensemble des abscisses des points de la droite munie d'un repère : les propriétés des nombres réels se déduisent « naturellement » de cette identification. (Durand-Guerrier et Vergnac 2014 p. 10)

La question qui se pose alors aux auteures, c'est de savoir si les propriétés des réels peuvent ainsi apparaître dans ce rapport intuitif aux nombres réels. Un questionnaire est alors proposé à sept classes de seconde (252 élèves) dans le but essentiel de faire émerger la conception des élèves de la notion de nombre. Il s'avère qu'il existe une certaine maitrise des nombres décimaux (comparer, intercaler) mais pas des idécimaux : trois quarts des élèves pensent que 5/3 est décimal. De la même façon, plus de deux tiers des élèves affirment que les racines carrées ne sont pas des nombres. A partir de ce questionnaire, les auteures font l'hypothèse « que les seuls types de nombres qui existent pour un élève de seconde sont les nombres entiers et les nombres décimaux ». Pour observer l'évolution de ces conceptions, les auteures soumettent le même questionnaire en terminale S (56 élèves) et en première année de licence au second semestre (152 étudiants). Parmi les conclusions du questionnaire, on retiendra que « il n'y a pas de différence notable entre les conceptions à propos des nombres réels en fin de lycée et celles en début de semestre 2 de Licence 1 », on retiendra aussi que 30 % des étudiants de Licence 1 considèrent que $\sqrt{13.21}$ est décimal. Enfin, « pour les élèves de terminale, un nombre rationnel est une fraction » et comme pour les étudiants de L1, le fait que tout « tout nombre décimal est un rationnel » n'est manifestement pas disponible. Et même ceux qui écrivent correctement la suite d'inclusion des ensembles de nombres (entiers naturels, entiers relatifs, rationnels et réels) le manque manifeste de sens de cette écriture ne leur permet pas de l'utiliser correctement.

En outre certaines études montrent que les conceptions ou bien le manque de connaissances concernant les nombres touchent aussi les enseignants à propos, par exemple, de l'irrationalité et de la construction des nombres réels (Sirotic et Zazkis 2007, Durand-Guerrier et Vergnac 2014).

Ces résultats sur les connaissances numériques des élèves/étudiants, même à l'université, montrent que le milieu nécessaire pour installer les premiers outils de l'analyse, en particulier la limite d'une fonction, doit être travaillé, car il est manifestement insuffisant en l'état actuel.

b) 0,999... = 1 ?

« 0,999… = 1 ? » est une question qui a été étudiée très tôt par ceux qui se sont intéressés à la l'enseignement de la limite, car à elle seule elle concentre une partie des difficultés de la notion et constitue un problème emblématique au sujet du rapport entre la notion de limite et la représentation des nombres. Ainsi les publications à ce sujet sont nombreuses et leurs contributions ont donnés lieu à des études approfondies sur la notion d'infini en acte et d'infini actuel (Tall

& Schwarzenberger 1978). Cela illustre nos propos précédents à propos des notions consistantes. Dans le cadre de notre étude, nous laisserons de côté, les travaux qui ont étudié cette question selon le point de vue de l'analyse non standard comme nous l'avons déjà précisé.

Pour préciser la nature du problème, nous utilisons une enquête réalisée au Viet-Nam par Lê Thai (2012) auprès d'élèves (89 élèves) de terminale (Classe 12) et de futurs enseignants de mathématique (78 étudiants) en deuxième année à l'école normale supérieur d'Ho Chi Minh Ville, car elle résume à elle seule les nombreuses études à ce sujet dont les résultats sont similaires. Voici la question qui retiendra notre attention :

Mettre une croix devant les affirmations justes (il y a peut-être plusieurs affirmations justes)
Le nombre décimal illimité périodique 0,999...(ayant la période de 9) est :

-[2b1] *la suite numérique* (u_n) *où* $u_1 = 0,9$; $u_2 = 0,99$; .... ; $u_n = 0,\underbrace{99\ldots9}_{n}$; ... ☐

-[2b2] *la limite de la suite* (u_n) *ci-dessus.* ☐
-[2b3] *un nombre réel qui est strictement inférieur à 1.* ☐
-[2b4] *un nombre réel qui est supérieur à 1.* ☐
-[2b5] *égal au nombre 1.* ☐
-[2b6] *le plus proche de 1.* ☐

Figure 5 : Extrait du questionnaire de Lê Thai (2012 p. 42)

Voici les résultats concernant cette question. Nous nous concentrons sur les lignes classe 12 et ENS[16]:

Choix Classe	2b1 « suite »	2b2 « limite »	2b3 «< 1 »	2b4 «>1»	2b5 « = 1 »	2b6 « le plus proche »	Aucun	Total
10	[*non proposée*]		112 64 %	0	9 5 %	164 94 %	3 2 %	174
12	45 51 %	13 15 %	56 63 %	0	0	74 83 %	2 2 %	89
EMS	Classe 12		168 64%	0	9 3%	238 90%	5 2%	263
ENS	24 31 %	8 10 %	64 82 %	0	2 3 %	62 79 %	1 2 %	78

Figure 6 : Résultats à la question précédente Lê Thai (2012 p. 43)

Ainsi nous pouvons remarquer la stabilité des réponses de la terminale aux étudiants. Ils sont ainsi nombreux à penser que 0,9999… est inférieur strictement à 1 et très peu à penser que ce nombre est égal à 1, ce qui est un invariant des études sur le sujet. Dans le cadre de cette construction des réels par écriture décimale illimité, l'auteur met en évidence aussi que :

> L'écriture décimale illimitée n'a ni le statut de suite numérique convergente de nombres décimaux ni celui de « limite » de cette suite même quand la notion de limite a été introduite. Par contre, 45 élèves (51 %) de terminale et 24 futurs enseignants (31 %) acceptent de considérer cette écriture comme représentant la suite numérique (u_n) où $u_1 = 0,9$; $u_2 = 0,99$; …. ; $u_n = 0,99$ ...9 (avec n fois le chiffre 9)

[16] ENS = Ecole Normale Supérieure Classe 10 = seconde Classe 12 = terminale EMS = Enseignement Mathématique secondaire = classe 10 et 12

> Précisons que 39 des 45 élèves de classe 12 et les 24 futurs enseignants affirment en même temps que 0,999… :
>
> - est le plus proche de 1
>
> - n'est pas égale à 1
>
> - n'est pas la limite de cette suite.
>
> L'affirmation « 0,999… est la suite numérique (u_n) … » n'a donc pas, pour ces 39 élèves (44 % des élèves de classe 12), la signification analytique de suite convergente vers 1. (Lê Thai 2012 p. 43)

Ce qui signifie que l'écriture décimale illimitée n'a soit pas le statut de suite numérique, soit quand elle l'a, cette suite n'est pas conçue comme convergente. Ces résultats pour des étudiants futurs enseignants sont symptomatiques d'une difficulté, si ce n'est d'un obstacle épistémologique.

Tall et Schwarzenberger (1978) mentionnent cette question « 0,99999….=1 ? ». Selon eux une explication de la difficulté de reconnaître cette égalité provient de la croyance en la bijectivité entre écriture décimale d'un nombre (éventuellement illimitée) et le nombre lui-même. Ils vont détailler ensuite en quoi les démonstrations scolaires usuelles de l'égalité sont sujettes à caution. En particulier ces démonstrations reposent souvent sur l'extension des opérations élémentaires définies pour les décimaux (c'est-à-dire ayant une partie décimale finie) aux nombres ayant une écriture décimale illimitée. Cette extension est a priori à questionner : quelle est sa légitimité ? Dans Durand-Guerrier et Ngansop (2013) lors d'une expérimentation au sujet de la preuve de cette égalité, des étudiants parviennent à mettre en doute eux même cette extension des opérations. Nous en reparlerons.

Beaucoup d'autres explications sont venues compléter la résistance à cette égalité. Tall (1986) avance l'idée d'une conception d'une « generic limit » qui correspond à l'idée de prolonger à la limite la même propriété que possèdent tous les termes d'une suite, ici être inférieur strictement à 1. La distinction processus/objet permet aussi de comprendre la distinction entre 0,999…qui est appréhendé comme un processus tandis que 1 est appréhendé comme un objet. De manière très voisine, les notions d'infini potentiel et d'infini actuel permettent d'expliquer que cette égalité n'est pas acceptée facilement. L'infini potentiel est une façon d'envisager l'infini comme jamais atteint. Cet infini potentiel est naturellement celui avec lequel on conceptualise la notion d'infini. Tandis qu'en mathématiques, l'infini est actuel, c'est-à-dire atteint d'une certaine manière : la limite d'une suite convergente en est un exemple paradigmatique. Or 0,99999… provoque naturellement une conceptualisation par l'infini potentiel qui interdit d'atteindre 1, tandis que 1 qui est la limite d'une suite, par exemple de la suite $u_{n+1}=u_n + 9/10^n$ avec $u_0=0$, est donc le fruit d'une conception liée à l'infini actuel.

Sierpinska (1987) relativise cette question de l'égalité à celle de la question des théories mathématiques :

> Supposons encore que quelqu'un soutienne que 0,999... < 1 en disant que l'infini n'existe pas dans le monde réel et que si les mathématiques ont un sens, elles ne devraient pas parler de l'infini. Alors, le nombre 0,999... est une somme finie 0,9 + 0,09 + ... + 0,000 ... 09, bien que le nombre des termes puisse ne pas être déterminé. Mais, aussi grand qu'il soit, le nombre 0,999... n'est pas égal à 1 ; il est plus petit. Bien sûr, on peut utiliser 1 comme son approximation et nous pouvons même convenir d'écrire le signe d'égalité entre les deux, mais il doit être bien entendu que ce n'est

qu'une convention et non pas une vérité. (Sierpinska 1987 p. 2)

Autrement dit la réponse 0,9999…=1 dépend de la théorie dans laquelle on se place, c'est-à-dire à la définition de limite que l'on adopte ou bien celle de nombre. L'analyse non standard n'est pas alors citée, mais l'on sait que la vérité de cette égalité dépend de ce choix d'analyse. Nous notons que cette remarque sur la relativité théorique de cette égalité ajoute à la relation directe que cette égalité entretient avec la question de la limite, celle des choix inhérents à l'acte de théorisation :

> « Quel genre de connaissance sont les mathématiques ? », « Quelle est la signification de ces termes primitifs (ex. les variables x, y, ...) et des catégories universelles de la pensée (nombre, espace, infini...) ? » Des réponses différentes à ces questions produisent des philosophies différentes et on ne peut pas dire qu'une philosophie est vraie ou fausse. (Sierpinska 1987 p. 2)

Pour la suite nous adopterons évidement les conventions standards en mathématiques, mais remarquons que, à propos de cette même égalité, Durand Guerrier et Ngansop (2013) s'inscrivent dans le même questionnement théorique, en termes de distinction de la vérité et de la validité :

> Tarski developed it for quantified logic, by developing a semantics definition of truth that is materially adequate and formally correct (Tarski, 1933), through two crucial notions: the notion of satisfaction of an open formula by an element in an interpretation, and the notion of model of a formula. This last notion leads to the concept of universally valid formula as formula for which every relevant interpretation is a model. (V. Durand-Guerrier et Ngansop 2013 p. 196)

Autrement dit la vérité correspond à la satisfaction d'une formule ouverte par un élément d'un domaine d'interprétation de la formule, tandis que la validité, elle correspond au fait que pour cette formule, toute interprétation de ses lettres dans tout univers non vide est un modèle de cette formule, c'est-à-dire est vraie. Les conséquences de cette distinction rejoignent celles de Sierpinska (1987) :

> It seems for us rather clear that understanding this distinction between *truth in an interpretation* and *logical validity* is a clue competence for proof and proving in mathematics: indeed, the correctness of a proof relies in an essential manner on the validity of the inferences that are involved in the proof. /…/ Another important aspect in Proof and Proving in mathematics education is to make students aware that to provide a mathematical proof, it is necessary to work in a theory, at least a *local theory* (axioms), with theoretical objects that need to be defined. (V. Durand-Guerrier et Ngansop 2013 p. 197)

Durand-Guerrier et Ngansop (2013) étayent l'affirmation comme quoi le travail sur cette égalité à la lumière de la distinction entre vérité et validité et le jeu entre prouver et définir est de nature à permettre une discussion sur cette distinction et présente des atouts pour des apprentissages mathématiques et métamathématiques (les nombres réels et la distinction vérité-validité).

Les auteures rappellent que cette question de l'égalité repose la définition de la notion d'égalité des nombres réels (Cf. chapitre 1 - I.2). L'expérimentation qui a lieu sous forme de discussion sur l'égalité va faire apparaître le besoin de preuve et une discussion sur la validité des preuves proposées. Les auteurs concluent que :

> These results confirm our hypothesis that we have here a good candidate for discussing these topics, but it is clear that going deeper on these questions with students necessitate to design more cautiously a didactical situation, in order to allow students " (…) to experience not only how to validate statements according to specific reference knowledge and inference rule within a given theory, but also how the "truth" of statements depends on definitions and postulate of a reference

theory. ” (V. Durand-Guerrier et Ngansop 2013 p. 204)

Nous utiliserons précisément ce contexte pour proposer une situation didactique ayant ce double objectif : une initiation à la notion de nombre réel et simultanément un travail sur la nécessité de la définition des objets d’une théorie.

c) Densité et complétude de l’ensemble des nombres réels

Vivier (2015), à propos des nombres réels résume la situation de la recherche didactique en ce qui concerne les propriétés de R et de leurs liens avec la notion de limite :

> Si la notion de limite est bien approfondie en recherche, la question des liens entre la complétude de **R** et la notion de limite mériterait à nos yeux des recherches spécifiques. Plus généralement on peut se demander quel est le rôle des connaissances sur les nombres réels pour l’apprentissage de l’analyse. Cette question n’a pas encore été traitée en didactique des mathématiques. (Vivier 2015 p. 93)

Nous rappelons ici que la densité n’est pas une propriété spécifique de R puisque les nombres décimaux et rationnels la possèdent également, que la densité est une conséquence immédiate de la structure algébrique de R. R en effet est un corps et il existe toujours un nombre réel entre deux réels distincts : la moyenne des deux.

Vivier et Durand-Guerrier (2016) étudient la conceptualisation de la densité et la complétude de **R** à l’aide d’un questionnaire auprès des étudiants de première année d’universitaire scientifique. Ils concluent que :

> Nous avons centré nos premières analyses sur la prise en compte par les étudiants de la densité de **D** dans les réponses à quatre questions soumis à 35 étudiants de première année d’université scientifique. Les premiers résultats montrent que pour près d’un tiers des étudiants, cette propriété de **D** n’est pas perçue, soit que les étudiants identifient l’ensemble **D** à l’un de ses sous-ensembles D*n*, soit qu’ils ne considèrent pas de propriété intermédiaire entre le discret et le continu. (Vivier et Durand-Guerrier 2016 p. 151)

La densité constitue donc elle-même une difficulté pour un nombre significatif d’étudiants.

Nous avons vu que la notion d’irrationalité est également une difficulté pour les élèves, et n’est plus spécifiée par le programme français actuel. Or si la notion d’irrationalité ne montre mathématiquement que l’insuffisance des nombres rationnels, c'est-à-dire les trous rationnels de la droite numérique, elle peut néanmoins constituer une première marche vers la notion de complétude. Cependant Burn (2005) montre, à partir d’une étude historique, qu’il est possible, si l’on évite la question de l’existence de la limite, d’approcher la notion de limite sans la notion de complétude, et que cette notion, ainsi que celle de la construction des réels est postérieure (au moins historiquement) à la notion même de limite :

> The first is to notice that despite widespread dependence on Archimedean Order, the completeness of the real numbers does not figure at any point. There should be no surprise about this. Cauchy, and others, were formulating rigorous arguments about limits before the notion of completeness had been identified. But the family of results about convergence related to completeness (monotonic bounded sequences, Cauchy sequences, bounded sequences having a convergent subsequence, lim inf, lim sup and so on) *follow* an understanding of limit rather than *precede* it. (Burn 2005 p. 292)

Sa construction de l’approche de la notion de limite repose seulement sur la notion d’égalité des réels, c’est-à-dire sur le fait que deux réels soient égaux si ils sont arbitrairement proches.

Au contraire certaines approches de la notion de limite nécessitent une certaine construction des réels (Mamona-Downs 2010). Bergé (2008) donne un rôle particulier à la complétude dans le passage du Calculus qui repose sur des propriétés essentiellement algébriques à l'analyse :

> Certainly, one can consider the notion of completeness as a product of theory-building processes in mathematics. I would say that the straight line and its continuity function as pre-constructed notions in Calculus courses; they a represented as self-evident and they support several practices. The naïve idea of real numbers as "all the numbers" functions in a similar way. A reconstruction of these notions is needed to start a further, deeper study in Analysis, in which an explicit formulation of completeness plays a central role in proving certain theorem. (Bergé 2008 p. 220)

Cependant, lorsqu'elle questionne des étudiants avancés de cours IV sur l'analyse, elle constate que ceux-là n'associent pas la complétude aux problèmes qu'elle est sensée résoudre, car ceux-là sont résolus par des théorèmes avancés :

> In spite of the limits of the questionnaire, the answers show that only a few students of Course IV see completeness as a tool to define new elements. A possible explanation to this can be related to the fact that students can use advanced theorems that no longer explicitly refer to first principles, so that they are not obliged to directly face completeness. Most of the students do not know which problems completeness solve. (Bergé 2010 p.226)

En conclusion de ce paragraphe sur les nombres, nous constatons que les connaissances sont très lacunaires, évidemment à un niveau avancé en ce qui concerne la construction des réels (la complétude par exemple), mais également à un niveau élémentaire, la densité des décimaux par exemple, y compris sur la familiarité avec la notion de nombre. Tout projet de construction de la limite, dans ces circonstances, ne pourra faire l'économie d'un travail spécifique sur le sujet afin d'installer un milieu suffisant. En effet, nous faisons l'hypothèse que des connaissances minimales sur les nombres réels sont nécessaires pour accéder à la notion de limite et sa formalisation en epsilon. En particulier, la problématique approximation-égalité, l'approximation d'un nombre réel par d'autres nombres, et l'égalité de deux nombres réels

a) Les travaux de Tall et Vinner (1981) et Vinner (1992)

Afin d'essayer de comprendre le processus cognitif qui sous-tend la construction des concepts mathématiques, Tall et Vinner (1981) affirment que :

> " […] we must formulate a distinction between the mathematical concepts as formally defined and the cognitive processes by wich they are concieved." (Tall et Vinner, 1981, p. 151)

Selon Tall et Vinner (1981) la structure cognitive associée à un objet mathématique donné comporte le concept image et le concept définition. Le concept image inclut toutes sortes d'associations, de conceptions, d'intuitions, d'éléments structuraux et de processus reliés au concept en jeu. Le concept image n'est pas verbal. Le concept définition comporte les formes langagières, y compris formelles qui permettent de spécifier le concept. Celles-ci peuvent être apprises par cœur ou bien reconstruites par l'élève et dans ce dernier cas, elles seront utilisées pour exprimer ou verbaliser l'image qu'elles activent.

Vinner (1991) montre que :

> /…/ there is a conflict between the formal definition and the concept typical examples wich might cause an incorrect concept image. The findings show that, in spite of the emphasis which was

> given to the definition of the concepts, many students did not use them when working on task in which formal definitions should have been used. (Vinner 1992 p.79)

En particulier, il mobilise cette modélisation concept image/concept définition dans le cadre de l'étude de la conception des étudiants au sujet de la définition de la limite d'une suite. Une expérimentation montre que le concept définition est reconstruit à partir du concept image par 14 des 15 étudiants à qui on a demandé la définition formelle de limite et qui répondent en utilisant manifestement des conceptions issues de leur concept image : la conception de convergence monotone, la suite qui n'atteint pas sa limite, et cette de la limite comme dernier terme de la suite.

b) Travaux de Edwards et Ward (2004)

D'autres études attestent que l'utilisation des définitions par les étudiants est problématique. Ainsi, Edwards et Ward (2004), à la suite de Vinner (1991), font part de leurs « surprises » suite à une étude à ce sujet. Cette étude est initialement motivée par une discussion des auteurs au sujet de la thèse de l'un sur l'utilisation déficiente en analyse des définitions de limite et de continuité. Une hypothèse est alors proposée : ces définitions ne sont pas mobilisées car les connotations familières des mots limite et continuité se substituent à elles. Une étude est alors menée pour vérifier cette hypothèse dans le cadre de l'algèbre avec des définitions qui ne relèvent pas de la même familiarité. La « surprise » des auteurs provient alors du fait que les mêmes conclusions s'imposent à eux dans cet autre contexte : beaucoup d'étudiants se réfèrent uniquement à leur concept-image, au détriment de la définition, y compris quand ils reconnaissent que ce concept-image est insuffisant et déficient. Les auteurs concluent que :

> We have used terms from the literature on definitions to categorize definitions as extracted (everyday language) or stipulated (mathematical). Our research has shown that undergraduate mathematics majors may not fully understand this distinction, and that this failure to understand affects their understanding of the concepts themselves. The tendency of some of the real analysis students in Edwards's original study to rely on their concept images instead of the related concept definitions, when the two were in conflict, could be partially explained by the fact that some of the definitions used in that study were for concepts that were very familiar to the students from their previous mathematics courses (continuity and infinite decimal, for example). This was not the case in the abstract algebra study, yet some of the algebra students displayed a similar preference for concept image over concept definition. (Edwards et Ward 2004 p. 422)

Autrement dit il existe une forme d'invariant concernant le rôle de la définition accordé par les étudiants. Ceux-ci ne les mobilisent que très peu même lorsqu'ils n'ont pas d'autres alternatives crédibles à leurs yeux. Ils leur préfèrent une image mentale souvent erronée. Ce qui est remarquable, c'est que cela se produit indépendamment de la familiarité avec les objets ainsi définis et indépendamment du niveau de compréhension de ces définitions. Autrement-dit c'est bien la notion même de définition qui doit être questionnée pour ces étudiants.

, contient les éléments centraux de la formalisation de la limite. Ces deux aspects pourraient alors servir d'éléments clefs de construction d'une situation didactique sur les nombres, situation qui constituerait une partie d'une ingénierie de la limite.

II.3 Les difficultés liées à l'interprétation de la double quantification

Nous nous intéressons ici à l'interprétation d'énoncés doublement quantifiés pour mettre en évidence les difficultés que cette interprétation occasionne car celle-ci joue un rôle fondamental dans l'accès au concept de limite par sa définition.

L'interprétation des énoncés doublement quantifiés a déjà été étudiée. L'étude menée aux Etats-Unis par Dubinsky & Yiparaki (2000) en milieu universitaire conduit les auteurs à formuler une hypothèse d'interprétation inversée pour les énoncés de type (EA). Cette conclusion se fonde sur les résultats d'un questionnaire composé d'affirmations doublement quantifiées pour l'essentiel dans un registre non mathématique. Piatek-Jimenez (2010) a poursuivi ces travaux dans un contexte purement mathématique et aboutit aux mêmes conclusions. En Tunisie, Chellougui dans sa thèse sur la quantification (Chellougui 2004), suite à des expérimentations, confirme cette hypothèse. Cette étude initialement centrée sur le raisonnement en vient à considérer les difficultés liées aux définitions impliquant des quantificateurs. D'autres auteurs évoquent cette difficulté de l'interprétation des énoncés doublement quantifiés. Ainsi Barrier (2009) étudiant les modèles logiques qui permettent d'étudier la validation en mathématiques, va analyser, avec les outils de la logique dialogique (Lorenzen) et ceux de la sémantique GTS[17] (Hintikka), la prise en charge par les étudiants de la quantification. Lui aussi rencontrera les mêmes phénomènes avec certaines nuances.

Au-delà de la confirmation d'un obstacle épistémologique attestée au niveau international et « transgénérationnel », nous tâchons dans cette partie de mettre en évidence les pistes que ces différents travaux nous proposent et nous inspirent pour la fabrication d'une situation didactique de la double quantification. Il s'agit également de déterminer un modèle pour l'analyse des résultats de l'expérimentation de cette situation didactique.

a) Étude de Dubinsky & Yiparaki

Dubinsky & Yiparaki (2000) ont étudié la lecture des énoncés de type AE et EA en utilisant un questionnaire, auprès d'étudiants, composé de onze affirmations (dont les neuf premières affirmations sont de type non mathématique et les deux dernières de type mathématique. Cf annexes) que des étudiants doivent déclarer vraies ou fausses en le justifiant. Puis ils ont réalisé des interviews pour tester les hypothèses émises grâce aux résultats du questionnaire. Le questionnaire est donné à soixante-trois étudiants de différents niveaux (correspondant à la fin du lycée et premières années d'université) avec la consigne :

> Students were told that there are no correct or incorrect answers; all they have to do is decide the truth or the falsity of each statement. (Dubinsky et Yiparaki 2000 p. 5)

Ainsi les étudiants sont informés qu'il n'y a pas de « bonne » réponse.

A la suite de ce questionnaire, 14 étudiants seront interviewés, chacun pendant 45 minutes. Pendant ces interviews, les étudiants expliquent les raisons de leurs réponses. Ils ont le droit de changer de point de vue et de modifier leur réponse initiale avec la consigne suivante :

[17] GTS: Game Theoritical Semantic

> We made it clear that explaining their reasoning would necessarily involve personal opinions about the topic at hand, and so we would ask them about their opinions, but that we would not debate or focus any opinion. (Dubinsky et Yiparaki 2000 p. 11)

Les étudiants sont donc amenés à exprimer des opinions pour expliquer leurs raisonnements mais ces opinions ne seront pas objets de discussion.

Le but de cette interview est de proposer des formulations alternatives afin d'évaluer l'impact de différentes manières de présenter les mêmes énoncés sur les interprétations en termes de type d'énoncé (AE ou EA). Pour les affirmations (9, 10 et 11), un « jeu » est proposé à l'étudiant. Il s'agit d'un jeu proposant-opposant sur les quantifications présentes dans ces affirmations et qui a pour but de faire prendre conscience du « jeu des quantificateurs ».

Il s'avère que les résultats les plus évidents de ces deux enquêtes sont que les étudiants favorisent une interprétation AE des affirmations sur une interprétation EA, autrement dit que les énoncés AE sont interprétés correctement tandis que les énoncés EA sont interprétés comme des énoncés AE selon une inversion. Pendant les interviews, les auteurs ont sondé les étudiants qui avaient interprété une affirmation de type EA comme une affirmation de type AE, pour savoir s'ils pouvaient aussi la considérer comme une affirmation de type EA : Une seule étudiante a pu modifier son interprétation selon cette demande. Pour ce qui est du jeu sur les quantificateurs, les auteurs observent des effets variés. A l'issu de ce jeu, certains étudiants semblent pouvoir donner un sens à l'interprétation des énoncés doublement quantifiés, tandis que pour d'autres, le jeu est source de confusions. Au final, les auteurs montrent que les étudiants interprètent les énoncés sans être conscients d'utiliser des conventions d'interprétation, qu'ils n'utilisent souvent pas les conventions mathématiques d'interprétation, et qu'ils ne sont pas capables, quand on leur demande, d'imaginer un « monde » dans lequel leur propre interprétation de l'énoncé serait contraire à leur interprétation initiale. Ils montrent également que le contexte en jeu (familier ou non) joue un rôle important sur l'interprétation et en particulier le contexte mathématique est source de difficultés d'interprétations.

A l'issue de cette description, plusieurs points liés aux difficultés d'interprétation d'un tel travail sont à souligner. Nous citons en particulier : les difficultés d'analyse liées au « réel » étudié, la difficulté de la modélisation, la difficulté liée à la subjectivité et au contrat didactique associé et le jeu des quantificateurs et ses succès variés. Nous nous attardons sur cette discussion car à la fois les résultats de cette étude ainsi que les réserves que nous émettons à son sujet vont nous servir par la suite comme point d'appui pour notre propre étude et comme critères de conception pour une situation didactique sur la double quantification.

La problématique des auteurs est de repérer des invariants d'interprétation des énoncés de type AE et EA dans le langage courant afin de mieux comprendre les difficultés de cette même interprétation en mathématique. En effet, il est difficile dans le contexte mathématique de distinguer les difficultés qui sont propres aux mathématiques et celles qui sont propres à la prise en compte des quantificateurs puisque celles-ci sont intrinsèquement liées. Cependant ce faisant les auteurs se heurtent, à notre avis, à d'autres difficultés non moins importantes.

Afin d'analyser cette première partie de l'étude (le questionnaire) de Dubinsky et Yiparaki, nous reconstituons la méthodologie qui semble employée et qui, à partir de la relation entre trois éléments (question, réponse sur la validité, justifications) produit une interprétation sous

forme de trois nouveaux éléments (type théorique de double quantification de la question, type de double quantification interprété par l'étudiant, validité de la justification associée). Cette interprétation des auteurs suit deux étapes.

Pour les auteurs, la première étape consiste à attribuer à chaque assertion du questionnaire un type AE ou EA. Pour ce qui concerne le contexte mathématique le choix est celui des conventions mathématiques. Pour ce qui est du contexte non mathématique c'est un choix qui semble lié à une forme de proximité syntaxique avec le langage mathématique, en particulier l'ordre de la quantification. C'est donc la syntaxe mathématique qui va servir ici de référence. Les auteurs admettent cependant que pour certains énoncés, il existe effectivement une forme d'ambiguïté.

Pour cette première étape, nous pensons que le langage courant permet de distinguer ce que les mathématiques nomment AE et EA. Sinon, par exemple, comment différencierions-nous, par le langage, une clef normale (dans un bâtiment où il existerait une clef pour chaque porte) d'un passe-partout, c'est-à-dire une clef qui ouvre toutes les portes de ce bâtiment ? Mais le langage semble beaucoup plus complexe que les conventions mathématiques à ce sujet. Par exemple, l'énoncé 1 :« Il y a une mère pour tous les enfants » peut sembler ambiguë. En effet, quand on considère un tel énoncé, deux interprétations sont a priori possibles : « Il y a une seule femme qui est mère de tous les enfants » et « Tout enfant a une mère ». Prise au sens général le premier énoncé semble absurde, tandis que le deuxième est vrai (jusqu'à aujourd'hui). D'autres facteurs peuvent alors avoir de l'importance, des habitudes liées à la communication, par exemple. Si l'on pense qu'on rencontre toujours des affirmations vraies ou fausses mais qu'exceptionnellement des énoncés absurdes, cela aura des effets sur l'interprétation et ici d'exclure la première interprétation. Mais regardons une autre formulation de cet énoncé qui ne semble pas du tout fonder la différenciation AE/EA sur l'ordre des quantificateurs comme en mathématique.

Si on considère, 2 :« Pour chaque enfant il existe une mère » : et 3 :« Il existe une mère pour chaque enfant ». L'énoncé 2 peut être codé indiscutablement AE que ce soit en utilisant les conventions mathématiques (ordre de la quantification) ou bien la compréhension courante du langage. Mais l'énoncé 3 est beaucoup moins clair à ce sujet : la convention mathématique de l'ordre impliquerait un énoncé de type EA (puisque la convention mathématique a permis de classer l'énoncé 2 comme AE et que l'ordre en est inversé) alors que le langage courant laisserait plutôt penser à un énoncé équivalent à l'énoncé 2 (avec beaucoup moins d'ambiguïté que pour l'énoncé 1), c'est-à-dire une AE aussi. Ce que révèle cet exemple est probablement que la distinction mathématique EA/AE fondée sur l'ordre de la quantification ne rend pas compte de la complexité du langage courant.

Ensuite, vient la deuxième étape qui consiste à attribuer un type d'interprétation (AE ou EA) à chaque réponse donnée par un étudiant. Cette attribution se fait sur la mise en relation de trois éléments : l'assertion considérée, la vérité et la justification donnée. Les exemples donnés nous font penser que la règle alors employée pour déterminer le type interprété est la suivante :

On se demande si la justification donnée démontre la vérité donnée par l'étudiant (Vrai ou faux) pour l'énoncé interprétée comme EA ou comme AE. Si la justification démontre une seule des deux, le type attribué sera cette interprétation avec une justification considérée comme valide, si la justification ne démontre aucune des deux alors il sera attribué un type non défini (unclear)

et une justification invalide et enfin si la justification démontre les deux il sera attribué un type non défini et une justification valide.

Pour cette deuxième étape, nous remarquons d'abord que la règle d'attribution est délicate à mettre en œuvre pour les mêmes raisons que celles données pour la première étape : les conventions de démonstration d'une thèse dans le langage courant ne sont pas les même que celles des mathématiques, surtout quand elles sont motivées par l'explication d'une « opinion ». Là encore, on utilise une forme d'interprétation mathématique de faits qui ne le sont pas a priori. Mais peut-on faire autrement ?

Nous nous interrogeons aussi sur les conséquences du choix de contexte et voulons mettre en évidence une distinction entre la nature des résultats obtenus sur le contexte de la vie courante et ceux obtenus dans le contexte mathématique. Nous pensons que ces différents résultats ne sont pas aussi facilement comparables qu'ils le paraissent, en particulier ceux qui concernent la validité. En effet, dans le contexte non mathématique, lorsqu'on attribue un type EA/AE, la règle d'attribution utilisée (paragraphe précédent) implique que la justification donnée est valide (puisque c'est cette validité qui permet de déterminer le type). Ceci n'est pas le cas pour le contexte mathématique. Le choix des auteurs consiste effectivement à compter comme valide uniquement les énoncés qui démontrent l'interprétation correcte de l'énoncé mathématique et non l'interprétation qu'en fait l'étudiant comme pour l'autre contexte. Ce choix est compréhensible puisque la validité dans un contexte mathématique est naturellement définie par rapport à la norme mathématique. Ainsi, par exemple, pour l'assertion 11[18], il n'est compté que 9 % de justifications valides. Pourtant il est aussi indiqué 22 % d'interprétation inversée. Ces 22 % ont vraisemblablement une justification valide par rapport à cette interprétation inversée puisqu'elle a permis d'en établir le type. Ils ne sont pourtant pas comptés comme valides dans ce contexte alors qu'ils le seraient dans le contexte non mathématique. Cette différence doit être prise en compte pour comparer, pour les deux domaines, les résultats qui concernent la validité.

Nous ajoutons que rencontrer des telles difficultés lors de cette modélisation était prévisible pour deux raisons fondamentales. La première concerne le nombre important de plans distincts impliqués dans cette expérimentation : le monde tel qu'il est, le monde tel qu'il est pensé par l'étudiant, la vision du monde que convoque un énoncé pour l'étudiant, les usages de la langue, les conventions et le formalisme mathématiques. Pouvoir extraire une information analysable de cette superposition de plans est a priori très compliqué car ces différents plans sont intimement mêlés. La deuxième raison est liée à la nature même des deux contextes en jeu. Les mathématiciens ont mis longtemps pour mettre au point un formalisme qui évite au maximum à ses usagers les malentendus du langage courant. Ainsi observer le langage courant à la lumière du formalisme mathématique va faire réapparaître les problèmes qui ont justement justifié d'adopter des conventions plus adaptées aux objectifs de la pratique des mathématiques. Par exemple, dans la vie courante, si l'on dit de quelqu'un qu'il arrive toujours à l'heure, il ne viendra à l'idée de personne d'infirmer une telle affirmation en invoquant un seul retard. Pour infirmer une telle proposition et pour être crédible, il faudra mettre en évidence au minimum plusieurs retards. Cette façon de faire est tout à fait adaptée au but souhaité et dans le cas évoqué considérer la ponctualité d'un individu.

[18] Assertion 11: "There exists a positive number b such that for every positive number a $b < a$"

Ce phénomène peut aussi être relié à la question de la négation dans Durand-Guerrier et Arsac (2003):

> En outre, à cette difficulté d'ordre syntaxique, s'ajoutent des difficultés d'ordre sémantique.
>
> Russel (1910) écrivait ; « il est facile de croire que *"$\forall x \neg Fx$"* est la négation de "$\forall xFx$" ». Nous avons effectivement constaté auprès d'enseignants de collège et de lycée et de professeurs stagiaires, tant du premier degré que du second degré, l'apparition fréquente de l'énoncé *« Aucune boule n'est rouge »* comme négation de l'énoncé *« Toutes les boules sont rouges »* ; et de manière moins fréquente, mais néanmoins significative, la production de l'énoncé *« Certains triangles ne sont pas isocèles »* comme négation de l'énoncé *« Certains triangles sont isocèles ». (* Durand-Guerrier et Arsac 2003 p. 311)

Si le langage mathématique ne fonctionne pas avec ces conventions-là (celles qui déterminent par exemple le caractère de vérité d'une affirmation sur le retard), c'est qu'il poursuit une vérité ayant une autre fonctionnalité. Pourra-t-on alors s'étonner que des étudiants, pour rendre fausse une assertion concernant la vie quotidienne, imaginent un monde qui « exagère la négation » (comme le font remarquer les auteurs) et où toutes les instances de la variable sont fausses ? Le mot « exagérer » ne traduit-il ici pas une confusion sur la nature du réel étudié ? Si la modélisation du langage de la vie de tous les jours par le langage mathématique permet de mettre en évidence ces différences, est-elle adaptée pour leur donner un sens ?

Les auteurs ont choisi le contexte de la vie de tous les jours pour 9 affirmations sur les 11 en espérant que ce choix leur permettrait de mettre à jour plus facilement les mécanismes d'interprétation des énoncés doublement quantifiés. La vérité des assertions est donc subjective : elle dépend de celui à qui on pose la question et de sa vision du monde. Ceci n'est a priori pas un problème puisque ce n'est pas cette vérité qui est évaluée mais l'adéquation entre cette vérité, la justification associée et un type théorique d'énoncé AE/EA. Ainsi cette subjectivité n'a pas de conséquence dans ce modèle pour l'analyse des réponses. Mais elle a des conséquences didactiques en termes de contrat. Les auteurs qui ne l'expriment pas dans ces termes en font bien cependant remarquer les effets : les étudiants se concentrent beaucoup plus sur la défense de leur opinion et sur le sujet évoqué que sur la structure de l'énoncé concernée. En effet, dans l'interview, comme dans le questionnaire, les interviewers sont obligés de préciser « qu'il n'y a pas de bonne réponse » et que les étudiants seront conduits à donner « leur opinion ». Les interviewers sont contraints à cela car la qualité des réponses en dépend : puisqu'on interroge les étudiants sur des sujets tout à fait inhabituels, cette rupture de contrat doit pouvoir être comprise. Cependant, on induit ainsi un type de contrat didactique qui va favoriser l'attitude observée par les auteurs : l'étalement de la subjectivité se substitue à la forme de recherche d'objectivité que suppose l'établissement d'un certain type de vérité fondé sur un rôle spécifique de la syntaxe. Cela pourrait aussi expliquer la difficulté observée de faire imaginer d'autres « mondes » dans lesquels la vérité de l'assertion serait contraire à celle donnée initialement puisque les étudiants sont, à l'origine, appelés à donner leur opinion et non à imaginer un monde dans lequel leur opinion serait contraire à celui qu'ils ont en réalité. La rupture de contrat que l'on avait voulu éviter se produit finalement bien mais autrement.

Nous pensons que le jeu des quantificateurs proposé par Dubinski et Yiparaki est un jeu qui fonde l'usage et le sens de la quantification en mathématiques. Cependant, d'après les auteurs, le jeu quand il est introduit connaît diverses réussites. Comme nous souhaitons fabriquer une

situation didactique pour la double quantification et qu'un tel jeu représente à nos yeux une piste sérieuse, nous nous proposons d'essayer de comprendre les raisons de ces variations, en termes d'efficacité didactique, pour ce jeu tel qu'il est proposé ici.

Tout d'abord, il nous semble que lorsque l'on utilise ce jeu pour modéliser l'emploi des quantificateurs dans un contexte non mathématique, cela suppose une forme de distorsion. En effet, pour pouvoir jouer le jeu dans ce cas il faut se placer dans un contexte théorique, alors que l'énoncé implique un contexte réel. Ainsi, par exemple, l'interviewer est obligé d'expliquer à l'étudiant, pour statuer par le jeu sur l'énoncé : « There is a fertilizer for all plants », qu'il doit imaginer connaître toutes les plantes et tous les fertilisants. Cette distorsion est bien moins présente dans le contexte mathématique puisque l'étudiant est censé connaître tous les nombres positifs. Ceci constitue une première difficulté qui peut expliquer la difficulté non seulement de jouer mais aussi de transposer le jeu pour une autre assertion. Car chaque fois il faut faire l'effort de se placer artificiellement dans un monde dont on connaîtrait absolument tous les objets impliqués par l'assertion. Nous verrons plus loin que cette obligation d'imaginer connaître toutes les instances de la variable provient du modèle implicite utilisé ici, la logique dialogique de Lorenzen, où les joueurs sont supposés omniscients.

Il nous semble qu'une autre difficulté réside dans la dévolution de la règle du jeu. En effet, comme les auteurs le remarquent, comprendre la règle du jeu permet aux étudiants de pouvoir jouer la partie mentalement instantanément, ils indiquent également que cette règle doit être donnée par le professeur et que cela constitue la difficulté principale. Dans les extraits donnés par les auteurs, le professeur donne la règle sans justifier son rapport avec les quantificateurs, sans justifier non plus le changement de règle proposé quand on passe d'un énoncé AE à un énoncé EA. Ce changement peut paraître arbitraire et devenir source de « confusion ». Nous croyons comprendre que les auteurs souhaitent seulement faire prendre conscience que deux jeux sont possibles sans forcément viser une compréhension de l'association règle/type d'énoncé. Cependant nous pensons aussi que c'est là une difficulté fondamentale : faire en sorte que le jeu ait un lien pour l'étudiant avec la syntaxe des énoncés, en particulier l'ordre des quantificateurs. Car pour pouvoir utiliser le jeu sur un autre énoncé en autonomie il faut être capable de savoir quelle règle du jeu est à mobiliser en fonction de l'ordre des quantificateurs.

Enfin, si nous pensons que le jeu a un aspect ludique qui peut susciter l'intérêt, il doit pouvoir rendre compte d'un objectif mathématique lisible. Dans le jeu tel qu'il est joué ici, la question n'est plus une question de vérité mais de qui va gagner le jeu :

> Ahm, if your b is less than my a, you win, or we continue like this, you survive, you win just like before (Dubinsky et Yiparaki 2000 p. 43)

Nous pensons encore une fois que les auteurs donnent initialement une ambition limitée au jeu : montrer que suivant comment on le joue, ce n'est pas le même qui gagne. Ceci permet en fait déjà d'observer des changements de comportement face aux énoncés doublement quantifiés qui semblent être davantage lues avec l'idée d'une double interprétation possible. Mais cette déconnexion entre le jeu de la vérité et le jeu des quantificateurs complique la transposition du jeu à d'autres énoncés puisque d'un côté le but du jeu proposé est de gagner en respectant la règle et de l'autre il s'agit d'évaluer la vérité d'un énoncé.

Ces trois raisons peuvent expliquer la variabilité des résultats observés.

La multi-quantification intervient massivement dans la formalisation de la notion de limite. Les études de Dubinski et Yiparaki (2000) nous alertent sur les difficultés spécifiques de l'interprétation de cette multi-quantification. Aussi, une situation didactique ayant pour objectif d'améliorer l'interprétation de la double quantification apparait comme incontournable dans une ingénierie de la limite qui vise la compréhension du formalisme de la limite. Or le jeu proposé par Dubinski et Yiparaki (2000) peut paraître une piste significative pour une telle situation. Aussi notre étude de ce jeu nous a permis d'identifier les difficultés intrinsèques qu'il est susceptible de succiter. Aussi, lorsque nous envisagerons une adaptation de ce jeu pour fabriquer une situation didactique pour la double quantification, nous devrons alors veiller à ces aspects, en particulier :

- Utiliser un contexte dans lequel toutes les instances des variables sont réellement connues (pour éviter les distorsions)
- Trouver un moyen de dévoluer la règle du jeu en accord avec la syntaxe, c'est-à-dire constituer un milieu suffisant pour que la situation proposée puisse manifester une dimension adidactique.
- Faire en sorte que le jeu permette d'établir un lien entre syntaxe et vérité.

Dans la partie expérimentale, nous reviendrons sur ces critères pour les discuter et les prendre en compte pour l'élaboration d'une situation didactique sur la quantification, nous reviendrons également sur les résultats d'interprétation asymétrique des énoncés doublement quantifiés afin de les éprouver selon une méthodologie qui échappe aux réserves que nous avons émises ici.

b) Étude de Piatek-Jimenez

Dans un article du Mathematic Education Research Journal, Piatek-Jimenez (2010) poursuit le travail de Dubinsky & Yiparaki en s'intéressant en particulier au versant mathématique de la compréhension des énoncés quantifiés quand Dubinsky & Yiparaki (2000) s'étaient tournés davantage vers le contexte de la vie de tous les jours. L'étude est plus modeste mais confirme les résultats déjà avancés avec certaines nuances dues à la méthodologie. Six étudiants de licence dont trois se destinent à enseigner les mathématiques et cinq ont choisi les mathématiques comme matière principale, sont interrogés à propos de la validité de cinq assertions contenant plusieurs quantificateurs. On leur demande alors de réfléchir à voix haute.

Les assertions (en annexe) sont choisies pour comporter des énoncés de type AE, des énoncés de type EA (2 et 4) et même un énoncé de type AEA (5). Les énoncés 2 et 3 sont des énoncés « faux jumeaux » et ont été placées l'une après l'autre dans cet ordre afin que les étudiants puissent revenir sur l'interprétation éventuellement erronée de l'énoncé de type EA (l'énoncé 2) en voyant son « faux jumeau » AE (l'énoncé 3). De fait, les étudiants sont autorisés dans l'interview à revenir sur des interprétations précédentes. L'historique des différentes interprétations de la même assertion est alors noté. Il ressort des réponses une stabilité (dans ce sens) aux interprétations des énoncés de type AE : peu de modifications sont effectuées. Dans dix cas sur douze une bonne interprétation est effectuée pour ces affirmations de type AE dès le premier avis et dans les deux derniers cas, un deuxième avis modifie correctement l'interprétation. Il n'en va pas de même pour les énoncés de type EA qui connaissent de nombreux changements

de type (jusqu'à cinq) et qui sont seulement sept corrects au premier avis sur les douze. Finalement cinq avis finaux correspondent à une bonne interprétation. Pour l'énoncé de type AEA aucune interprétation correcte n'est faite.

L'auteure met en évidence la frustration, pendant les interviews, que déclenchent les énoncés de type EA. Les étudiants ne les trouvent pas bien écrits, pas commodes et inhabituels.

L'auteure en analysant les tests divise les étudiants en trois groupes :

- Les étudiants qui ont décidé que l'ordre n'importe pas : Ils sont trois sur les six. Quand ils s'aperçoivent des changements d'ordre, ils ne les prennent pas pour significatifs sur le sens et expliquent qu'il s'agit d'une autre tournure du même énoncé.

- Les étudiants qui ont déterminé que l'ordre importe mais n'ont pas réussi à produire des arguments corrects pour les énoncés EA : Ils sont deux sur six. Ces deux étudiants commencent par interpréter l'item 2 comme une AE puis en passant à la 3 ils réalisent que l'ordre importe. Ils essayent de transformer leur argumentation pour respecter ce changement d'ordre mais ne parviennent pas à une argumentation correspondant à un type EA. L'item 4 (EA) a un traitement similaire : prise en compte de l'ordre mais aucune argumentation correcte.

- Les étudiants qui ont déterminé que l'ordre importe et ont réussi à produire des arguments corrects pour les énoncés EA : Une seule étudiante parvient à argumenter correctement les énoncés EA. Mais cela n'est pas linéaire, elle commence par donner une interprétation AE aux deux item 2 et 3, puis en arrivant à l'item 4 elle prend conscience de l'importance de l'ordre et revient à l'item 2 pour le prouver correctement.

L'auteure remarque l'utilisation fréquente d'interprétation de type AA. Elle distingue deux raisons différentes pour l'expliquer. Deux étudiants affirment préférer chercher des contre-exemples (ce que nous appelons contre-exemple ponctuel) plutôt que d'essayer immédiatement de démontrer les assertions. Ce faisant ils interprètent les assertions comme des AA. Ultérieurement ils se rendent compte de leur méprise et modifient leur argumentation en conséquence.

Trois autres étudiants utilisent ce type d'interprétation car ils ne savent pas comment démontrer qu'un énoncé EA est faux. Ces étudiants alors tentent de fournir des contre-exemples et changent ainsi d'interprétation sans le savoir en passant à un énoncé de type AA.

En conclusion, l'auteure indique qu'il est nécessaire de poursuivre les recherches afin de déterminer quels facteurs influent sur l'interprétation des énoncés quantifiés, en proposant des énoncés mathématiques doublement quantifiés plus simples par exemple. Ainsi il serait possible de tirer parti de cette meilleure compréhension pour proposer des enseignements adaptés. Car l'auteure note que la quantification multiple est très présente dans les cursus particulièrement en analyse et sa compréhension est nécessaire pour comprendre ses concepts.

Cette étude confirme, pour le contexte mathématique, la difficulté liée à l'interprétation des énoncés de type EA et avance une typologie des comportements face à ces énoncés doublement quantifiés. Nonobstant le faible nombre d'étudiants (six), l'étude fait cependant apparaître que la moitié d'entre eux ne tient explicitement pas pour significatif l'ordre des arguments (quantificateurs) dans les énoncés proposés. On peut remarquer cependant qu'aucune explication n'est avancée, si ce n'est la prépondérance dans la vie courante du type d'énoncé AE sur le type EA

déjà évoquée par Dubinsky & Yiparaki (2000), pour comprendre pourquoi la non prise en compte de l'ordre influe seulement sur l'interprétation des énoncés de type EA.

Notons enfin la persistance dans cette étude de la modélisation de Dubinsky & Yiparaki (2000). En effet, les interprétations des étudiants sont déterminées à partir des arguments donnés et de la validité déclarée. Ainsi, un exemple ponctuel (une instanciation des deux variables pour prouver que l'affirmation est vraie) détermine, selon cette modélisation, une interprétation EE, un « exemple ponctuel de fausseté » (une instanciation des deux variables pour prouver que l'affirmation est fausse) une interprétation AA et caetera.... Nous remarquons que cette modélisation suppose implicitement que ce n'est pas la justification donnée qui est erronée mais l'interprétation de l'affirmation discutée. Cette modélisation paraît compréhensible puisque nous n'avons accès à l'interprétation que par la justification, cependant notons qu'il y a là un choix qui est discutable dans la mesure où il se pourrait très bien qu'il y ait une interprétation correcte mais des arguments incorrects. Cette question de la modélisation des réponses des élèves méritera ultérieurement que nous l'étudions.

c) Les travaux de Chellougui

La thèse de Chellougui (2004) « L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite » a pour objet « d'étudier la place et le rôle des questions de quantification au cœur même de l'activité mathématique des étudiants, en relation avec le niveau de complexité de la structure logique des énoncés en jeu. ». Si la démarche tend bien à répondre à cette problématique, elle mène aussi à rencontrer régulièrement le rôle de la notion de la définition dans cette problématique. Il s'agit d'une orientation qui n'était pas prévue initialement et qui apparaît au moment de la première expérimentation puis va structurer une partie des choix de construction et d'analyse ultérieurs. Aussi choisirons-nous de parcourir ces travaux avec une optique particulière, en lien avec notre propre projet : celle des liens étudiés entre définition et quantification. Évidement cette interprétation spécifique ne rend pas compte de l'intégralité du travail réalisé mais est davantage éclairante pour nos travaux.

Chellougui (2004) fonde son travail de recherche sur trois hypothèses :

> *Hypothèse1* : L'explicitation des éléments de logique, au début de l'année, ne suffit pas à traiter les difficultés des apprenants.
>
> *Hypothèse2* : La complexité du concept de quantification n'est pas en général explicitement prise en charge par les enseignants.
>
> *Hypothèse3* : Les étudiants scientifiques de première année universitaire maîtrisent la plupart des raisonnements classiques faisant appel seulement aux caractères propositionnels.
>
> Les deux premières hypothèses ont été attestées dans notre DEA. <u>Elles fondent notre travail dans sa dimension didactique en nous conduisant à étudier la place et le rôle des questions de quantification au cœur même de l'activité mathématique des étudiants, en relation avec le niveau de complexité de la structure logique des énoncés en jeu.</u>
>
> La troisième hypothèse s'appuie sur les travaux de Durand-Guerrier (1996) qui mettent en évidence le fait que les étudiants répondent majoritairement de manière correcte lorsque les raisonnements en jeu mobilisent essentiellement les deux règles d'inférence du calcul propositionnel, à savoir le Modus Ponens et le Modus Tollens. (Chellougui 2004 p. 1) C'est nous qui soulignons.

C'est à partir de ces hypothèses qu'elle se donne comme objectif de contribuer à mettre à jour le rôle de la quantification dans l'élaboration d'un raisonnement par un étudiant de début de cycle universitaire, en analysant en particulier l'importance du langage sur la mobilisation de la quantification et le lien entre explicitation de la quantification et production d'arguments mathématiques. Une autre question plus théorique sera étudiée : la possibilité de comprendre les difficultés rencontrées par les étudiants pour accéder à certains concepts par une analyse fine de la structure logique de ces concepts.

Pour répondre à la question lien langage-quantification et lien logique-mathématique, pour ce qui est des pratiques étudiantes, un questionnaire consistant en trois exercices est donné, il s'agit de démontrer des énoncés quantifiés.

Les réponses obtenues sont analysées suivant deux axes principaux : d'une part, l'articulation entre logique et mathématiques, et, d'autre part, la nature du langage. Le premier axe est étudié selon trois niveaux (apparition des quantificateurs universels et existentiels, présence d'un argument mathématique, articulation entre logique et mathématiques) et le second axe aussi selon trois niveaux (langage formalisé, langage mixte, langage vernaculaire).

Parmi les variables didactiques de l'analyse a priori de l'exercice, la variable (V9) correspond à la manière dont intervient la quantification dans le raisonnement. Ce qui apparaît comme inattendu pour l'auteure c'est que :

> La variable (V9) nous apparaît la plus fondatrice, ce qui n'était pas aussi clair pour nous au moment de proposer le questionnaire. Cette variable permet de repérer si la quantification intervient dans le cadre de l'utilisation d'un théorème de cours ou si elle s'applique dans une technique générale, ou enfin si elle apparaît pour construire un objet. (Chellougui 2004 p. 122)

Au sujet de cette variable, elle ajoute que :

> Les premiers résultats ont mis en évidence le rôle fondamental d'une variable didactique : c'est la nécessité de construire un objet qui fait émerger les difficultés de manipulation des quantificateurs. (Chellougui 2004 p. 118)

Un exercice est donné à l'écrit à quatre-vingt-seize étudiant de première année d'université en section mathématique, et la répartition de leurs réponses selon ces axes/catégories est réalisée. Voici les conclusions tirées :

> Les analyses ont montré une diversité dans les formulations produites par les étudiants : celles-ci comportent de nombreux implicites pour justifier les conclusions et manifestent des difficultés importantes de construction d'objet lors de l'utilisation d'un énoncé existentiel pour conduire le raisonnement et pour produire un argument mathématique. D'autre part, les résultats des analyses ont mis en évidence des difficultés liées à la présence des deux types de quantificateurs dans un même énoncé, en particulier des difficultés d'articulation entre logique et mathématique. (Chellougui 2004 p.154)

Naturellement la suite de la thèse s'oriente vers l'analyse de ces difficultés spécifiques liées à la double quantification. La notion de borne supérieure est choisie comme concept au sujet duquel une construction impliquant les deux quantificateurs est possible. Un entretien est réalisé avec six binômes (première année mathématiques-informatique à Bizerte-Tunisie) au sujet de cette notion. L'entretien se passe en deux temps. On donne deux exercices à un binôme qui les résout collaborativement, ces échanges sont alors enregistrés. Puis le binôme est appelé à expliquer

les étapes de résolution dans un entretien semi-directif. Lors de ce deuxième temps il est décidé de centrer l'entretien sur les définitions produites.

L'entretien commence systématiquement par la question :« Quelle est la définition de la borne supérieure d'une partie non vide majorée de **R** ?». Les six binômes répondent identiquement : « La borne supérieure, c'est le plus petit des majorants. ». L'entretien est poursuivi avec la question de la définition d'un majorant et la plupart des réponses sont formulées de la manière suivante :

« Quel que soit x appartenant à A, il existe un réel M tel que x est inférieur ou égal à M. On dit que M est un majorant de A. » que les étudiants notent sur leur feuille :

« $\forall$ x $\in$ A, $\exists$ M $\in$ IR tel que x $\leq$ M ». Ce que l'auteure appellera « l'étrange définition ».

> Autrement dit, d'une part les étudiants répondent en donnant un énoncé clos qui correspond à une propriété de structure, d'autre part, l'énoncé proposé est un AE alors que l'énoncé attendu pour une partie majorée est un énoncé EA. Il nous faut dire que la première apparition de cette définition nous a surprise et le fait qu'elle se retrouve chez la plupart des étudiants également. De ce fait, nous avons donné à cette question une importance qui n'était pas prévue. (Chellougui 2004 p.118)

Comme l'accent est mis sur les définitions dans ces entretiens, le questionneur met en évidence les incohérences des définitions utilisées. Les étudiants réagissent alors de diverses façons qui laissent penser, à l'auteure, un rapport défectueux à la notion même de définition. Certains étudiants ajoutent de nouvelles conditions à la définition alors que la structure (AE au lieu de EA) même de la définition est en cause, certains ne voient pas l'incohérence, d'autres encore acceptent plusieurs définitions incompatibles comme désignant le même objet. Il est alors évoqué un phénomène de dissociation entre la définition et les objets qu'elle devrait définir. Ces entretiens permettent de conclure au sujet du rapport de ces étudiants à la définition :

> Il apparaît clairement que pour certains étudiants, on peut donner une définition sans que celle-ci caractérise certains éléments du domaine de référence. Ils n'ont pas de vocabulaire pour exprimer la relation entre l'objet considéré et la formule testée.
>
> Les définitions ne semblent pas être repérées comme fournissant un certain nombre de propriétés devant être satisfaites ; ceci est à mettre en relation avec l'absence des phrases ouvertes dans le milieu.
>
> Notons également que derrière l'unanimité apparente dans la "définition d'un majorant", le rapport aux définitions est très variable d'un étudiant à l'autre. (Chellougui 2004 p. 234)

D'autres aspects de ces entretiens sont étudiés : le rôle du langage et de l'utilisation de divers ostensifs sur la résolution de problèmes utilisant des quantifications. Enfin, l'entretien se termine par un questionnement des étudiants à propos de leurs connaissances antérieures, en particulier sur l'enseignement de la borne supérieure. Cela fait apparaître que certains étudiants n'ont pas les moyens de distinguer un énoncé AE d'un énoncé EA, d'autres déclarent ne pas connaître la signification exacte des quantificateurs et certains expliquent que la notion de borne supérieure pose problème en particulier dans l'application de la définition à des cas concrets. Cela confirme les observations faites lors des expérimentations. Ainsi une conclusion de la thèse qui concerne directement notre problématique va dans le même sens que les résultats de Dubinsky & al. :

> Il s'agit principalement de la non prise en compte de l'ordre dans l'alternance des quantificateurs ;

> de la tendance à mobiliser prioritairement les énoncés sous la forme AE (For all…there exists…) par rapport aux énoncés EA (there exits…for all…) et de la pratique courante selon laquelle l'affirmation de l'existence introduit l'objet. (Chellougui 2004 p. 254)

Finalement il est conclu, à propos de ces entretiens que :

> Les résultats obtenus confirment que la complexité de la structure logique d'un énoncé mathématique fait apparaître des phénomènes didactiques qui sont liés non seulement à des problèmes dans l'articulation des quantificateurs avec l'argument mathématique, mais aussi à des problèmes langagiers et des difficultés à manipuler les définitions et les propriétés. Ceci permet des ouvertures de recherche sur la contribution de l'analyse logique des questions relatives aux définitions des objets et des structures mathématiques dans une perspective didactique. (Chellougui 2004 p. 250)

Les travaux de Chellougui se centrent sur l'analyse des structures logiques des énoncés mathématiques et l'utilisation des outils de cette analyse pour la modélisation des scripts des expérimentations et ce conformément à la problématique initiale. Cependant, ce qui a retenu notre attention, dans le cadre de notre propre problématique, c'est la manière dont la notion de définition s'est invitée tout au long des travaux expérimentaux, alors que cela n'était guère prévu dans la partie théorique puisque celle-ci prévoyait davantage une centration sur le raisonnement. Ceci n'est finalement pas si étonnant car si les quantificateurs permettent le raisonnement, ce raisonnement s'appuie sur des classes d'objets, classes qui s'expriment dans une définition selon une quantification.

Cela pose une question fondamentale que nous pouvons lire en filigrane dans la conclusion de la thèse de Chelougui (2004) : si un objet est défini par un certain formalisme incluant éventuellement des quantificateurs, est-ce bien la syntaxe qui donne existence à cet objet ? Autrement dit la dialectique étudiée initialement quantification-raisonnement ne s'est-elle pas déplacée vers l'étude d'une autre dialectique syntaxe-sémantique ? En tout cas la toute fin de la conclusion de la thèse le laisse penser :

> Une suite de ce travail pourrait être d'essayer de repérer à quelles conditions les modalités d'élaboration et de conceptualisation d'une notion mathématique donnée pourraient être sensibles aux questions de quantification, ceci dans une double perspective. D'une part, pour pouvoir faire des propositions d'enseignement de ces notions prenant en compte explicitement la nécessité de cette articulation entre quantification et conceptualisation et d'autre part, pour utiliser ces notions mathématiques comme terrain d'élucidation et d'appropriation des concepts logiques. (Chellougui 2004 p. 254)

Nous aborderons cette question ultérieurement, dans la construction de notre situation pour la double quantification, à la lumière des éclairages de ces travaux : une fonction fondamentale de la quantification est de donner des moyens pour définir les objets, ainsi conceptualiser un objet, définir un objet, pourrait constituer une porte d'entrée vers la quantification.

d) Les travaux de Barrier

Barrier (2009) conduit ses recherches sur la validation en mathématiques et des théories logiques à même de modéliser cette validation en particulier sur les problèmes de quantification. Ce travail va nous permettre de commencer à préciser les contraintes et les moyens disponibles pour l'interprétation d'énoncés doublement quantifiés. Compte tenu de l'envergure de sa thèse

et de l'objectif restreint que nous assignons à cette partie de notre propre travail, nous ne reprendrons pas ici toute la démarche de Barrier mais allons souligner quelques axes principaux qui sont susceptibles de guider notre propre étude.

- La notion de jeux d'intérieur et jeux d'extérieur issue de Hintikka

Hintikka a cherché à fonder une théorie de logique modélisant les pratiques mathématiques : la « sémantique GTS »[19]. Il ne s'agira pas de discuter ici des aspects théoriques formels mais de reprendre certains des concepts de cette théorie repris par Barrier dans une perspective didactique. Selon cette théorie, deux types de jeux complémentaires existent dans l'activité mathématique : les jeux d'intérieur et les jeux d'extérieur. Les jeux d'intérieurs correspondent aux raisonnements liés à la preuve d'une assertion. Ces raisonnements sont formels et utilisent des variables et des arguments généraux. Les jeux d'extérieur correspondent à des raisonnements qui sont effectués à partir d'instances des objets étudiés, à partir de cas particuliers pour faire des essais. Hintikka décrit ces deux jeux :

> « Malgré ces liens, il est philosophiquement très important de les distinguer nettement l'un de l'autre. Les jeux sémantiques sont des jeux d'extérieur (*outdoor games*). On les joue sur les objets du langage que l'on parle et ils consistent principalement pour les deux joueurs à choisir entre différents objets. A l'opposé, les jeux de preuve sont des jeux d'intérieur (*indoor games*). On les joue avec un crayon et du papier, avec une craie et un tableau, ou de nos jours avec un ordinateur. » (Hintikka, 2007, p. 67) cité par (Barrier 2009 p. 19)

Barrier décrit alors le rôle dialectique de ces deux jeux dans les pratiques professionnelles des mathématiques et son intérêt didactique :

> « La construction d'une stratégie dans un jeu d'intérieur nécessite souvent l'intervention conjointe de jeux d'extérieur. » (Barrier 2009 p. 23).

- Le choix de la prise en compte de la dimension dialogique dans l'analyse didactique

Barrier choisit de mettre l'analyse de dialogues au cœur de son étude.

La première raison pour cela est qu'il défend l'importance des jeux de langage dans l'apprentissage :

> Considérée dans un contexte didactique, la thèse de Wittgenstein conduit à faire l'hypothèse selon laquelle l'apprentissage de la signification des mots et la construction d'une certaine familiarité intersubjective avec les objets qu'ils dénotent s'effectue par la pratique des jeux de langage qui émergent de l'activité créée par le professeur. Cette position montre un certain parallèle entre la notion de *forme de vie* de Wittgenstein et celle de *situation* de Brousseau. Les deux auteurs se rejoignent en effet sur la dénonciation de l'apprentissage d'un langage comme un accès à des significations (internes comme dans la thèse psychologiste ou externes chez Frege ou Bolzano par exemple) qui transcenderaient les activités. (Barrier 2009 p.49)

La deuxième raison est, selon lui, que les assertions émises dans une situation ne peuvent s'expliquer, s'analyser qu'en fonction du contexte et de l'arrière-plan fait des interventions précédentes. La signification du langage prend alors sens dans une étude des rapports des différentes assertions vues comme éléments des stratégies respectives de deux joueurs qui s'affrontent au sujet de la vérité d'une thèse. Ce dialogue fait intervenir conjointement des jeux d'intérieur et

[19] GTS : Game Theory Semantics

des jeux d'extérieur, jeux qui vont traduire les mouvements de la pensée dans l'interaction langagière des joueurs. A ce sujet-là, il note l'intérêt des paradoxes sémantiques dans la construction des concepts, c'est-à-dire les situations dans lesquelles les différents locuteurs utilisent le même mot pour dénoter des objets différents. En effet, en utilisant un débat entre élève en géométrie, il conclut :

> L'apprentissage du vocabulaire de la géométrie devra induire une modification de la « manière de voir le monde » chez les élèves qui passe par un changement référentiel des termes impliqués dans les jeux de langage. Ces modifications sont de véritables réarrangements institutionnels (sur le plan langagier) et ontologiques qui émergent face aux contraintes exercées par les interactions et par la situation. Il y a, comme le souligne Heinzmann, une *simultanéité* entre le travail sur les objets (leur *construction*) et le travail sur le vocabulaire dénotant ces objets et ses règles d'utilisation (leur *description*). (Barrier 2009 p. 52)

Nous pensons que ces paradoxes sémantiques peuvent être l'origine effective de conflits socio-cognitifs générateurs potentiels de sens pour les élèves s'il sont orchestrés de manière adéquate.

La quantification, pour Barrier, apparaît alors comme un objet privilégié d'étude puisque :

> Une théorie de la quantification est une théorie qui permet de prendre en compte le rapport des objets d'un domaine d'interprétation aux énoncés concernant ces objets. (Barrier 2009 p. 18)

La quantification constitue donc une forme de matérialisation de la dialectique entre jeux d'extérieur et d'intérieur, jeux qui concourent solidairement à l'activité de validation en mathématiques.

- Logique dialogique de Lorenzen et sémantique GTS de Hintikka

La logique dialogique de Lorenzen est une théorie permettant d'établir la notion de vérité en mathématique basée sur le dialogue entre un proposant et un opposant au sujet de la vérité d'une assertion.

> « Nous dirons qu'une forme propositionnelle est logiquement vraie de manière effective si et seulement s'il est possible de gagner dans un dialogue toute proposition de cette forme (contre tout opposant). » (Lorenzen 1967 p. 23, cité dans Barrier 2009 p. 103)

Ce dialogue suit des règles précises (A est un prédicat, A_1 et A_2 des propositions) :

> - Si un joueur soutient $A_1 \wedge A_2$, l'autre joueur peut attaquer la conjonction en faisant un choix entre A_1 et A_2. La défense pour le premier joueur consiste alors à défendre l'assertion choisie par le joueur qui attaque.
>
> - Si un joueur soutient $A_1 \vee A_2$, l'autre joueur peut attaquer la disjonction. Le défenseur choisit alors l'assertion qu'il souhaite défendre (entre A_1 et A_2).
>
> - Si un joueur soutient $\forall x\ A(x)$, l'autre joueur peut attaquer l'énoncé universel. Le défenseur défend alors l'assertion $A(t)$ où la lettre t est choisie par l'attaquant.
>
> - Si un joueur soutient $\exists x\ A(x)$, l'autre joueur peut attaquer l'énoncé existentiel. La défense consiste alors à choisir une lettre t et à faire l'assertion $A(t)$.
>
> - Si un joueur soutient $A_1 \Rightarrow A_2$, l'autre joueur peut attaquer le conditionnel en engageant un sous jeu autour de la défense de l'assertion A_1. Si le joueur qui soutenait $A_1 \Rightarrow A_2$ ne parvient pas à gagner ce sous jeu, il peut continuer à se défendre par l'assertion A_2.
>
> - Si un joueur soutient non A_1 , l'autre joueur peut attaquer par l'assertion A_2. » (Barrier 2009 p. 103)

Le jeu se termine lorsqu'un des joueurs ne peut plus avancer d'arguments. Ce joueur a alors perdu le dialogue.

Ce modèle constitue un des fondements de la Théorie des Situations de Brousseau qui modélise les situations didactiques comme précisément un jeu entre deux joueurs opposés. Les points de vue didactique et épistémologique viennent ici se rejoindre. Barrier (2009) décrit le modèle de vérité de Lorenzen et en établit les limites pour l'analyse didactique des dialogues d'élèves concernant l'activité de preuve, en particulier le fait qu'il s'agit d'une théorie syntaxique de la logique et fondée uniquement sur la forme des énoncés et que la seule syntaxe ne peut décrire l'activité des élèves, en particulier les jeux d'extérieurs. C'est ainsi qu'il propose la sémantique GTS de Hintikka, qui repose sur les mêmes fondements de la théorie des jeux, comme réponse aux limites qu'il met à jour. En particulier d'après Barrier, selon Hintikka,

> L'intuition correspond au processus logique de particularisation du concept abstrait vers l'élément singulier, ce qui correspond en logique du premier ordre aux processus d'instanciation. Par ce biais, celui qui pratique les mathématiques se donne de nouveaux individus, de nouveaux objets afin de conduire les démonstrations. (Barrier 2009 p. 189)

Ce processus correspond à la dialectique jeux d'intérieur / jeux d'extérieur qui, prenant acte de la place significative des objets particuliers dans la pensée et la pratique mathématique, justifie la dénomination de « sémantique », c'est-à-dire à une prise en compte de la signification des énoncés, là où l'approche de Lorenzen s'occupe du niveau essentiellement syntaxique.

Concrètement et pour la seule quantification, voici comment Hintikka précise la notion de vérité :

> L'idée de la sémantique GTS est d'associer à chaque énoncé un jeu qui oppose deux joueurs. Si l'énoncé est existentiel, de la forme $\exists x\ P(x)$, alors le joueur qui défend l'énoncé choisit un objet a dans la structure d'interprétation. Le jeu se poursuit alors par la défense de $P(a)$ par ce même joueur. Si l'énoncé est universel, de la forme $\forall x\ P(x)$, alors c'est le joueur qui attaque l'énoncé qui choisit un objet a dans la structure d'interprétation. Le joueur qui défend l'énoncé poursuit alors le jeu en défendant $P(a)$. Pour simplifier les choses, il peut être utile de supposer que $P(a)$ est un énoncé atomique (qu'il ne contient plus de constantes logiques telles que « et », « ou », « il existe », etc.). Dans ce cas, pour qu'un joueur gagne une partie d'un jeu construit sur l'énoncé $\exists x\ P(x)$, il doit trouver un objet a tel que $P(a)$ soit vrai. Pour qu'un joueur gagne une partie d'un jeu construit sur $\forall x\ P(x)$, il faut que le joueur adverse choisisse un objet a tel que $P(a)$ soit vrai.
>
> (Barrier 2009 p. 90-91)

Pour ce qui est de l'intérêt didactique de cette théorie, la correction de Vernant viendra encore améliorer ce modèle, car si pour Hintikka, la sémantique GTS est un reflet des pratiques mathématiques de l'utilisation de la logique, elle n'en reste pas moins une tentative théorique de fonder la notion de vérité en mathématique. En conséquence elle ne prend pas en compte la réalité didactique d'une classe. En particulier, pour Hintikka (comme pour Lorenzen), les joueurs dont le dialogue fonde la vérité d'une assertion sont omniscients, c'est-à-dire qu'ils sont supposés connaître la valeur de vérité de tout énoncé atomique (c'est-à-dire élémentaire), énoncés dont la vérité, dans la réalité d'une classe, n'est pas toujours sujet de consensus. Vernant pour cette raison ajoute alors une correction mais abandonne en même temps le projet de fondation d'une théorie logique :

> « Les propositions *atomiques* assertées par chaque interlocuteur sont vérifiées par une procédure transactionnelle acceptée conjointement par les deux interlocuteurs (chaque proposition est alors

admise pour vraie, fausse ou de valeur inconnue). » (Vernant 2004 p.14, cité dans Barrier 2009 p.118)

Cette procédure de discussion de la vérité des propositions atomiques est effectivement beaucoup plus représentative d'une pratique réelle de la recherche de vérité que ce soit par les mathématiciens mais surtout, pour ce qui nous concerne, par les élèves.

Lors des expérimentations menées par Barrier et centrées sur l'étude du rapport des étudiants à la quantification apparaîtront, entre autres et à nouveau, l'instabilité de l'interprétation des énoncés doublement quantifiés et l'inversion d'interprétation des énoncés de type EA.

Pour conclure, ce qui différencie notre problématique de celle de Barrier, c'est qu'il étudie les outils dans une optique d'analyse didactique des productions langagières des élèves/étudiants (aspect de son travail que nous n'avons pas repris justement dans le cadre de notre problématique) tandis que nous cherchons les outils épistémologiques à confier aux élèves pour une meilleure interprétation des doubles quantifications. Cette différence entendue, ce travail donne des pistes significatives pour la construction d'une situation didactique pour la quantification. Nous en retenons la complémentarité entre une approche syntaxique et une approche sémantique de la quantification pour accéder au sens des énoncés. D'autres auteurs défendent cette position (Durand-Guerrier par exemple). Nous retenons la nécessité de donner la possibilité de mettre en œuvre conjointement des jeux d'intérieur et des jeux d'extérieurs, c'est-à-dire de fabriquer une situation qui permette de questionner les objets particuliers pour en inférer des généralités, généralités qui sont à leur tour questionnées à partir de leurs instances. Enfin, puisque notre problématique consiste ici à fabriquer une situation pour la double quantification, nous nous appuierons sur une approche dialogique qui se fonde sur les « jeux » décrits par Hintikka et Lorenzen au sujet de la quantification. C'est ce type de jeu, utilisé par Dubinsky (2000), qui nous servira de fil directeur.

e) Conclusion :

Les travaux exposés ici nous indiquent des pistes sérieuses pour fabriquer une situation de la double quantification sous la forme de cahier de charges. En particulier, la situation en question pourrait prendre appui sur les différents points suivants :

- S'inspirer du jeu de Dubinsky, qui lui-même s'inspire des théories de Lorenzen et de Hintikka.
- Comporter une dialectique syntaxique-sémantique.
- Comporter une dialectique jeu d'intérieur - jeux d'extérieur.
- Utiliser la définition comme porte d'entrée dans le maniement de la quantification.

Nous pouvons constater que si tous les auteurs cités s'accordent sur l'hypothèse « d'interprétation inversée » des énoncés de type EA, aucun n'avance une hypothèse vérifiée qui explique véritablement les raisons de ce phénomène.

En ce qui concerne la France, nous pensons que pour l'essentiel aucun enseignement réel de cette interprétation spécifique n'est véritablement réalisé en classe, ce qui peut être à l'origine de ces interprétations inversées ; mais néanmoins, l'habitude prise de manipuler de tels énoncés,

car les occasions se présentent naturellement dans le cours de mathématiques, permet progressivement, par imprégnation, d'acquérir une interprétation parfois pertinente. Il se peut alors que la prévalence d'énoncés de type (AE) explique la dissymétrie observée. Cette hypothèse peut être étudiée en faisant l'inventaire des énoncés quantifiés durant le cursus du secondaire (lycée en particulier), par exemple sur des manuels scolaires. On pourra alors comparer les occurrences de ces types (AE) et (EA), mais aussi plus simplement les occurrences simples des quantificateurs universels et existentiels, car là aussi pourrait s'expliquer la dissymétrie. Ce travail d'analyse est réalisé au chapitre 6.

II.4 La perception de la nécessité de définir

Notre projet consiste à faire apparaître la double nécessité de la définition standard de la limite : nécessité de définir la limite, nécessité du formalisme associé. Nous avons déjà identifié certaines des difficultés associées au formalisme de la limite, nous allons maintenant étudier celui lié à la notion de définition et en particulier le manque manifeste chez les étudiants du besoin de définir les objets en jeu ou bien de se référer à une définition. Nous verrons que s'il est clair que le formalisme et les connaissances nécessaires à la conceptualisation de la définition de limite sont des préalables (vus aux paragraphes précédents), la notion même de définition constitue à elle seule une forme d'obstacle. Pourquoi passer d'une conception dynamique (le fameux « tend vers ») de la limite dont Robert (1982b) dit qu'elle prévaut tardivement à une conception statique (la définition formelle) si l'on ne perçoit pas la nécessité de se référer à une définition pour appréhender un objet mathématique ?

a) Les travaux de Job (2011)

Job (2011) montre par le biais d'une étude historique de l'évolution du concept de limite, le caractère Lakatosien de la définition standard de la limite : il s'agit d'une proof generated-definition. Il propose ensuite de construire une situation relevant de ce caractère Lakatosien, caractère fondamental selon lui pour rendre compte de cette nature essentielle de la notion. Voilà le schéma de la situation sur la limite que Job propose de construire dans cette perspective :

> /.../ un schéma de mise à l'épreuve pourrait être le suivant. Il consisterait à mettre en place un milieu satisfaisant les caractéristiques suivantes.
>
> * Il devrait amener les élèves à produire des définitions de limites afin de tenter de prouver des conjectures où cette notion intervient.
>
> * Ces définitions produites par les élèves devraient résulter de la partie du rapport personnel qu'ils entretiennent à la notion de limite que notre modèle pointe comme faisant obstacle à l'acceptation du rapport entretenu par les mathématiciens à cette même notion.
>
> * Il devrait contenir des éléments qui permettent de casser les définitions proposées par les élèves exprimant des rapports non conformes au rapport institutionnel attendu, autrement que par un argument d'autorité, d'une manière qui soit reçue comme « rationnelle » par les élèves.
>
> * Il devrait, en outre, être suffisamment riche pour que les élèves puissent jouer ce jeu de manière itérative en y puisant l'inspiration pour de nouvelles tentatives de définitions. (Job 2011 p. 85)

Lors de l'expérimentation de sa situation, il s'avère que les étudiants ne veulent finalement pas remettre en question la première définition de limite qui devait rendre fausse une propriété évidente. L'analyse qui sera faite par Job conduit à pointer la conception de la notion de définition comme la cause de cet empêchement : les élèves ne perçoivent pas que la définition qu'ils ont

proposée est contradictoire avec la propriété qu'ils veulent démontrer et ne reconnaissent pas les propositions de contre-exemples du professeur comme relevant de cette définition.

Pour Job (2011), la raison de ce rapport inconséquent à la définition provient de l'école qui entretient, par ses pratiques privilégiant l'ostension, l'idée que les objets mathématiques peuvent se passer de définition et qu'une seule image mentale suffit. Selon Job (2011), cela conduit à ce que

> /…/ les élèves pensent, à tort, que la définition usuelle donnée n'est qu'une projection sur papier d'un objet mental supérieur dont les propriétés seraient partagées par tous, l'écriture un peu compliquée (« parce qu'on est en math ») d'évidences partagées. Dans cet état d'esprit, l'importance de la définition de limite est contractuelle. On doit en tenir compte parce qu'une des spécificités d'un cours de mathématiques est de « définir mathématiquement », « à l'aide de symboles ». *A contrario*, dans l'intimité de l'élève la définition de limite joue un rôle secondaire. L'objet mental limite et les objets associés ne s'y réduisent pas, elle ne fait que *décrire* des « réalités » préexistantes. (Job 2011 p. 500)

Mais pour Job, une autre raison plus structurelle existe et peut s'interpréter comme une difficulté, pour les élèves, de passer d'une praxéologie de type 1 (relative à la limite) à une praxéologie de type 2, types de praxéologies attestée pour la limite lors de l'étude historique de Job (2011) :

> Dans les praxéologies de type 1, les objets mentaux sont très présents. Ils guident la résolution des problèmes rencontrés et on ne se soucie pas de les définir. /…/Les contre-exemples donnés sont considérés comme des monstres pathologiques sortant du champ de pertinence de ces objets mentaux et sont écartés. Les validations apportées sont essentiellement de type pragmatique/…/
>
> Mais, arrive un moment où le besoin de mettre les choses à plat se fait sentir suite aux limites et paradoxes dont souffrent les objets mentaux (crise des fondements), ou encore pour se conformer aux canons en vigueur à une époque donnée (mise en forme euclidienne). Le type de tâche auquel on se livre alors est radicalement différent. On tente, notamment, de faire exister ces objets mentaux par le biais de définitions permettant de réorganiser la praxéologie de type 1 en une architecture déductive, construisant ainsi une praxéologie de type 2. /…/ Dans ce type de praxéologie, la tâche générique de base est donc la cohérence logique. On ne peut affirmer quelque chose que sur base des définitions que l'on s'est donné. Pour invalider un résultat, il suffit de proposer un contre-exemple à une assertion. (Job 2011 p. 501)

Ainsi, pour les deux raisons évoquées, la définition de « tend vers » est substitué par une image mentale qui évite les contradictions et les conflits cognitifs en compensant les insuffisances de la définition. Dans ces conditions de rapport à la notion de définition, l'élève ne ressent aucun besoin de définir puisque la fonctionnalité de la définition, servir de référence, n'est même pas perçue par les élèves.

c) Les travaux de Tall et Vinner (1981) et Vinner (1992)

Afin d'essayer de comprendre le processus cognitif qui sous-tend la construction des concepts mathématiques, Tall et Vinner (1981) affirment que :

> " […] we must formulate a distinction between the mathematical concepts as formally defined and the cognitive processes by wich they are concieved." (Tall et Vinner, 1981, p. 151)

Selon Tall et Vinner (1981) la structure cognitive associée à un objet mathématique donné comporte le concept image et le concept définition. Le concept image inclut toutes sortes d'associations, de conceptions, d'intuitions, d'éléments structuraux et de processus reliés au concept

en jeu. Le concept image n'est pas verbal. Le concept définition comporte les formes langagières, y compris formelles qui permettent de spécifier le concept. Celles-ci peuvent être apprises par cœur ou bien reconstruites par l'élève et dans ce dernier cas, elles seront utilisées pour exprimer ou verbaliser l'image qu'elles activent.

Vinner (1991) montre que :

> /…/ there is a conflict between the formal definition and the concept typical examples wich might cause an incorrect concept image. The findings show that, in spite of the emphasis which was given to the definition of the concepts, many students did not use them when working on task in which formal definitions should have been used. (Vinner 1992 p.79)

En particulier, il mobilise cette modélisation concept image/concept définition dans le cadre de l'étude de la conception des étudiants au sujet de la définition de la limite d'une suite. Une expérimentation montre que le concept définition est reconstruit à partir du concept image par 14 des 15 étudiants à qui on a demandé la définition formelle de limite et qui répondent en utilisant manifestement des conceptions issues de leur concept image : la conception de convergence monotone, la suite qui n'atteint pas sa limite, et cette de la limite comme dernier terme de la suite.

d) Travaux de Edwards et Ward (2004)

D'autres études attestent que l'utilisation des définitions par les étudiants est problématique. Ainsi, Edwards et Ward (2004), à la suite de Vinner (1991), font part de leurs « surprises » suite à une étude à ce sujet. Cette étude est initialement motivée par une discussion des auteurs au sujet de la thèse de l'un sur l'utilisation déficiente en analyse des définitions de limite et de continuité. Une hypothèse est alors proposée : ces définitions ne sont pas mobilisées car les connotations familières des mots limite et continuité se substituent à elles. Une étude est alors menée pour vérifier cette hypothèse dans le cadre de l'algèbre avec des définitions qui ne relèvent pas de la même familiarité. La « surprise » des auteurs provient alors du fait que les mêmes conclusions s'imposent à eux dans cet autre contexte : beaucoup d'étudiants se réfèrent uniquement à leur concept-image, au détriment de la définition, y compris quand ils reconnaissent que ce concept-image est insuffisant et déficient. Les auteurs concluent que :

> We have used terms from the literature on definitions to categorize definitions as extracted (everyday language) or stipulated (mathematical). Our research has shown that undergraduate mathematics majors may not fully understand this distinction, and that this failure to understand affects their understanding of the concepts themselves. The tendency of some of the real analysis students in Edwards's original study to rely on their concept images instead of the related concept definitions, when the two were in conflict, could be partially explained by the fact that some of the definitions used in that study were for concepts that were very familiar to the students from their previous mathematics courses (continuity and infinite decimal, for example). This was not the case in the abstract algebra study, yet some of the algebra students displayed a similar preference for concept image over concept definition. (Edwards et Ward 2004 p. 422)

Autrement dit il existe une forme d'invariant concernant le rôle de la définition accordé par les étudiants. Ceux-ci ne les mobilisent que très peu même lorsqu'ils n'ont pas d'autres alternatives crédibles à leurs yeux. Ils leur préfèrent une image mentale souvent erronée. Ce qui est remarquable, c'est que cela se produit indépendamment de la familiarité avec les objets ainsi définis et indépendamment du niveau de compréhension de ces définitions. Autrement-dit c'est bien la notion même de définition qui doit être questionnée pour ces étudiants.

e) Les travaux de Ouvrier-Buffet

Dans sa thèse, Ouvrier-Buffet (2003) expérimente trois situations de construction de définition. Nous en retenons un résultat utile dans le cadre du besoin de définition : la demande explicite (ou non) de définition joue un rôle dans la production des étudiants :

> La « demande explicite de définition » semble favoriser le travail de mise en relation entre différentes définitions et mobilise des opérateurs et contrôles de différents types (langagiers, logiques et lakatosiens (génération d'exemples et de contre-exemples en particulier)) qui agissent dans les caractérisations du concept en jeu. (Ouvrier-Buffet 2003 p. 264)

Et Ouvrier-Buffet (2003) ajoute que :

> Nous dirons pour terminer que, dans un enseignement qui développerait la démarche scientifique, la demande explicite (ou non) ne devrait pas être une variable didactique. (Ouvrier-Buffet 2003 p. 265)

Ainsi, pour Ouvrier-Buffet, la question de la démarche scientifique joue un rôle significatif dans la perception du besoin de définition et dans sa construction. Nous traduirons ultérieurement cette exigence de développer la démarche scientifique plutôt en termes de développement de la rationalité.

III Conclusion

La longue histoire de la notion de limite qui a mené jusqu'à sa formalisation montre à quel point les résistances rencontrées pour cette formalisation sont forte. Ces résistances sont associées, en partie, aux développements eux même tortueux de multiples notions (Nombre, quantification, définition,…) intrinsèquement liées à la définition formelle de la notion de limite.

Pour ce qui est des nombres, il semble que lorsqu'on vise la définition formelle, certaines connaissances sur les nombres paraissent indispensables. Nous avons vu que l'on a pu longtemps se passer dans l'histoire des mathématiques, d'un corpus théorique achevé concernant les nombres, ceci a notamment freiné la nécessité d'établir la définition contemporaine de la limite. Lorsqu'il a fallu formaliser cette notion, cela s'est fait quasi conjointement avec la construction des nombres réels comme théorie aboutie. Or nous avons vu que les connaissances des élèves au sujet des nombres sont limitées. Nous pensons que certaines propriétés sur les nombres sont nécessaires pour aborder la définition en epsilon. En particulier l'égalité des nombres réels reliée caractérise le raisonnement à epsilon près, raisonnement caractéristique de l'analyse reposant sur la propriété de corps des réels. Ce choix constitue à nos yeux un élément théorique fondamental permettant de donner sens à la définition formelle de la limite même s'il n'en assure pas l'existence. Nous avons fait l'hypothèse qu'une situation didactique de la limite devait inclure un questionnement de cette égalité.

La double quantification est également très impliquée dans la formalisation de la notion de limite. Les conventions d'interprétations associées peuvent être identifiées à un dialogue entre proposant et opposant, dialogue codifié par la logique dialogique de Lorenzen. Cependant les études montrent que l'interprétation de la double quantification constitue une difficulté spécifique, et qu'une interprétation asymétrique des énoncées AE et EA est fréquente (Dubinsky & Yiparaki 2000 ; Chellougui 2003 ; Piatek-Jimenez 2010). Un jeu proposé par Dubinsky & Yiparaki (2000) pour développer l'interprétation de la double quantification semble prometteur

mais nécessite des adaptations significatives pour améliorer son efficacité. Nous faisons l'hypothèse qu'un accès à la formalisation de la notion de limite passe par un accès à ces conventions d'interprétation.

Pour ce qui est de la notion de définition, il est plus qu'évident qu'il est nécessaire d'assurer son rôle dans l'édification des mathématiques, rôle que la littérature sur le sujet pointe comme absente chez les élèves/étudiants. En effet la limite se présente à la fois sous sa forme dynamique, forme nécessaire pour lui donner corps, et à la fois sous sa forme statique, avec la définition en epsilon, nécessaire pour tout raisonnement théorique. La résistance du modèle dynamique ne provient-elle pas de la non perception du caractère beaucoup trop informel de ce modèle ? Cette non perception n'est-elle pas liée à une conception pauvre de l'édification mathématique et en particulier du rôle de la définition pour celle-ci ? Des difficultés ont été en tout cas identifiées au sujet de la notion de limite renvoient à une absence du besoin de définir ou de définition, par exemple quand les concepts images guident les conceptions des élèves/étudiant (Vinner 1991, Job 2011). Nous faisons l'hypothèse que l'accès à la définition formelle de la limite passe par un réinvestissement théorique double : celui de la limite et celui de la définition.

Devant tant de difficultés, une question se pose : tente-t-on de résoudre les difficultés des élèves concernant les multiples notions associées à celle de limite avant l'expérimentation d'une situation sur la limite ou bien pendant celle-ci ? Nous faisons le choix de dissocier le traitement des difficultés de celui de la limite pour plusieurs raisons. La première raison concerne l'évitement de l'accumulation simultanée de difficultés importantes et d'origines diverses. Une telle accumulation est, en effet, un obstacle à la fois une véritable dévolution à l'élève et en même temps à une institutionnalisation efficace. La deuxième raison concerne notre problématique d'accès aux savoirs complexes. Les notions identifiées comme clef dans cette problématique de l'accès à la formalisation de la notion de limite ne sont pas spécifiques de la limite mais concernent une forme de culture d'accès à la formalisation de tout savoir. Que ce soit la quantification ou la notion de définition, ainsi que celle de nombre, toutes ces notions peuvent être des objectifs intermédiaires mobilisables pour d'autres notions. Aussi, choisissons-nous de séparer les difficultés et de traiter celles-ci préalablement à la situation de la limite.

Dans l'identification des difficultés nous nous sommes appesantis sur trois types de difficultés qui nous paraissent centrales dans l'accès à la notion de limite mais ces difficultés sont de natures différentes. Les nombres sont en effet des objets construits par les mathématiques tandis que les quantificateurs et les définitions relèvent de la manière dont on écrit et fabrique les mathématiques. Il nous faudra approfondir cette stratification pour comprendre comment elle agit dans la situation. En particulier il nous faudra élucider les actions et rétroactions d'une strate sur l'autre, le rôle de l'élève dans ces mécanismes et celui de la situation. Cette analyse pourra également nous éclairer sur les choix initiaux concernant l'ingénierie.

Nous avons étayé une sélection de difficultés selon un critère de condition nécessaire à notre projet, il n'est pas assuré que ces conditions soient suffisantes. D'autres conditions pourraient venir compléter celles-ci, afin de permettre une dévolution d'un problème qui optimise la compréhension de la définition formelle.

La littérature foisonnante à propos de la limite nous interroge sur les possibilités réelles de mettre en place une situation de la limite. Est-ce une quête réaliste ou une quête de Graal ? Dans ces conditions ne faut-il pas prendre l'enseignement de la limite comme une motivation de faire travailler les nombreuses notions fondamentales qui lui sont connexes ? Notre problématique et nos choix nous conduisent à avoir, de ce point de vue, une double approche : la notion de limite est un objectif final, objectif qui justifie que les notions associées soient de véritables objectifs eux même, des objectifs intermédiaires.

Dans le chapitre qui suit, nous étudions d'abord différentes ingénieries et déterminons justement d'autres conditions pour un tel projet. Il s'agit, entre autres, des moyens didactiques permettant de construire une ingénierie efficace qui s'attaque aux difficultés visées, mais aussi aux moyens disponibles à l'élève pour les concevoir et les affronter. Ces moyens nécessitent d'aller au-delà des simples connaissances, nous parlerons alors de rationalité.

Chapitre 2 – Des ingénieries de la limite : Définition et nécessité de définition ?

Dans ce chapitre nous commençons par étudier les ingénieries réalisées au sujet de la définition formelle de limite. L'analyse de ces ingénieries à travers la question de la prise en compte des obstacles épistémologiques et surtout de la notion de conflit cognitif fait apparaitre la question de la rationalité de l'élève. Aussi étudions-nous le concept de rationalité présent dans la littérature scientifique puis plus spécifiquement en didactique des mathématiques.

I Le rôle de la définition formelle dans les ingénieries existantes

Cette partie concerne l'étude des ingénieries sur la définition formelle de limite. Dans un premier temps nous détaillons quelques ingénieries. Nous analysons en particulier la prise en compte par ces ingénieries des difficultés potentielles des élèves que nous avons précédemment présentées. A la lumière de cette analyse, nous discutons la portée de ces ingénieries sous l'angle de la mobilisation et du déclenchement des conflits cognitifs. Ce choix du conflit cognitif découle de notre cadre théorique de la TSD où les rétroactions du milieu objectif provoquent des adaptations des connaissances liées à des conflits cognitifs. Ceci nous amène à questionner la notion de rationalité nécessaire à rendre effectif les conflits cognitifs potentiels, et en particulier leur rôle dans la TSD.

I.1 Des ingénieries didactiques paradigmatiques

De nombreuses ingénieries concernant la notion de limite et sa définition formelle existent et font état de la diversité des approches de cette question de recherche. Dans Bressoud, Ghedamsi et al. (2016), une bibliographie assez exhaustive de ces ingénieries montre l'étendue du travail dans ce champ de recherche.

Dans le cadre de notre recherche, nous détaillons l'étude de quatre ingénieries : Robert, Bloch, Job et Swinyard. Nous pensons que notre sélection est suffisamment représentative des différences significatives qui peuvent exister entre les recherches de type "ingénieries papier-crayon" (non instrumentées).

a) Ingénierie de Robert (1982a)

L'objectif de cette ingénierie[20] pour des étudiants de Deug 1 (L1) est de permettre

> La mise en place (rapide) d'une représentation statique en plus de la représentation dynamique initiale. Nous avons remarqué que la représentation statique peut être envisagée comme associée à une traduction en image de la définition en (ε,N).» (Robert 1982a p. 437).

Il s'agit en particulier, dans cette définition, de mettre en évidence le caractère variable de N (dépendant de ε). Cette ingénierie se compose de deux séquences, la première vise à installer la définition en (ε, N) et la seconde à faire fonctionner cette définition sur une multitude d'exercices d'entraînement.

[20] Cette ingénierie est reprise par Bridoux (2016) dans le cadre de INDRUM 2016.

La première séquence, d'une durée de deux heures, est composée de deux activités successives. La première activité comporte une liste de dix suites numériques données sous forme algébrique. Elle est menée en groupes et le travail des élèves consiste à représenter graphiquement ces suites puis à classer ces représentations en donnant les critères de classement. Ces suites se différencient en termes de monotonie et de comportement à l'infini et l'on attend que ces deux critères soient exprimés :

> On ne fait aucun commentaire sur le classement : on se met d'accord sur le fait que converger peut se traduire en première approximation par « se rapprocher de » » (Robert 1982a p. 442).

Ensuite on leur demande de trouver un entier naturel n à partir duquel $|u_n - L| < 1/100$ et de relier les résultats de ce travail avec le classement des graphiques préalablement établi.

La deuxième activité consiste à étudier en groupe la validité de deux conjectures :

> (i) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
>
> (ii) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. (Robert 1982a p. 400)

La première conjecture sert à « chasser le monotone du dynamique ». Même si ceci n'est pas explicitement souligné, on peut imaginer que cette conjecture suscite un conflit socio-cognitif fondé sur la mise à défaut, via la donnée de contre-exemples, du modèle monotone de limite (au sens de Robert). La deuxième conjecture sert à conduire à « la prise de conscience de l'insuffisance de la représentation dynamique pour ce qui est de démontrer ».

Ensuite vient l'institutionnalisation :

> C'est alors qu'intervient le maitre (pendant la séance). On introduit la définition de la convergence en passant de l'expression de la représentation dynamique déjà retenue à la formulation numérique puis à la formalisation dans laquelle on insiste sur le jeu des traductions puis à la formulation géométrique pour laquelle on revient sur le jeu des traductions » (Robert 1982a p. 442)

Les différentes expérimentations ont des résultats variables en raison des aléas dus à la gestion de l'ingénierie, notamment quand il s'agit de motiver des étudiants à ce genre d'activités, alors qu'ils sont jusque-là habitués à travailler dans un cadre plutôt classique. Comme souligné par l'auteur, il est difficile de se prononcer sur l'impact d'une telle ingénierie sur l'apprentissage de la limite. Il reste que, ni le modèle monotone de limite ni la représentation dynamique n'ont pu être complètement évacués dans le travail des étudiants.

b) Ingénierie de Bloch (2000)

L'étude épistémologique et didactique de la notion de limite faite par Bloch (2000) a débouché sur la construction et l'expérimentation d'une situation didactique de la notion de limite d'une suite, dans le cadre de la TSD. Cette situation est particulièrement fondée sur les premières utilisations des outils de preuve spécifiques à l'analyse en classe de première S.

Il s'agit d'une situation didactique qui mobilise les propriétés particulières d'une figure géométrique fractale dont l'intérêt, pour cette problématique de la limite, est d'avoir une aire finie et un périmètre infini : le flocon de Von Koch. Cette figure géométrique est obtenue en appliquant un processus de construction itératif à un triangle équilatéral. A chaque étape de la construction,

tout segment est remplacé par un ensemble de quatre nouveaux segments ayant chacun pour longueur le tiers du segment initial de la manière suivante :

Figure 8 : Elément de construction du flocon de Von Koch

Voici les quatre premières étapes de construction du flocon de Von Koch :

Figure 9 : Quatre premières étapes de la construction du flocon de Von Koch

On demande aux élèves de déterminer le périmètre et l'aire des premières figures, puis ceux de la figure obtenue à l'étape n (P_n et A_n). Cela est obtenu simplement avec des suites géométriques et des sommes de suites géométriques, des formules sont mises à jour. La question centrale étant « Que deviennent le périmètre et l'aire quand on a itéré le procédé "jusqu'à l'infini" ? ». Les élèves utilisent leur calculatrice pour faire des essais numériques à partir des expressions littérales obtenues initialement. Ensuite des conjectures sont émises, puis :

> A l'issue de cette phase il apparaît bien que les élèves ne peuvent pas aller plus loin sans apport aidant à la validation : les critères de validation ne peuvent se dégager seuls d'une phase de recherche empirique. C'est donc à ce moment que le professeur doit prendre en charge l'introduction de savoirs, sous la forme du critère qui doit être mis en jeu : si je donne un nombre, aussi grand que je veux, est-ce que Pn peut dépasser ce nombre ? (Bloch 2000 p. 279)

La suite de la situation va conduire les élèves à valider/invalider leurs conjectures à partir des calculs sur des grands nombres qu'ils peuvent effectuer après un apport théorique sur le logarithme décimal. Ces calculs servant d'expériences décisives ; les élèves déterminent la valeur de n qui permet au périmètre de dépasser 10^{3637} (proposé par les élèves eux même) ; le professeur peut institutionnaliser la définition formelle de limite infinie. Un scénario analogue sera utilisé pour l'aire qui donnera lieu à la définition de limite finie. Cette expérimentation est analysée par Bloch et Gibel (2011) où l'on conclut :

> La situation du flocon permet d'aborder la notion de limite sans que cette notion ne soit introduite auparavant par ostension. En ce sens elle est bien porteuse d'une dimension adidactique significative (malgré ses moments didactiques inévitables), de sorte qu'elle puisse ensuite prendre une place dans le système organisateur du répertoire de représentation[21] des élèves. (Bloch et Gibel 2011 p. 33)

c) *Ingénierie de Job (2011)*

L'ingénierie de Job (2011) mobilise la notion d'approximation et de suite. Il généralise la notion d'approximation de racine de deux par des suites qui n'ont pas forcément pour limite racine de deux en disant simplement que parmi tous les termes d'une suite il y a un terme qui est plus

[21] Comprendre ici « les connaissances »

proche de racine de deux que les autres. C'est ce terme qui sera alors appelé meilleure approximation de racine de deux de la suite. La situation installe la problématique en commençant par des suites finies (seulement deux termes) où l'on se demande comment (Quel type de procédure mettre en œuvre ?) trouver parmi les deux termes de la suite, lequel est la meilleure approximation de racine de deux. Puis l'étude du même genre de question sur des suites infinies données sous forme algébrique conduit les élèves à exprimer que certaines suites (par exemple une suite décroissante ayant une limite supérieure à racine de deux) n'ont pas de meilleure approximation parce qu'elles « tendent » vers un nombre supérieur à racine de deux. A ce moment-là, on demande aux élèves ce qu'ils entendent par « tendre » et ils proposent ce que le professeur avait prévu et appellera une définition :

> **Définition 1.** On dit que G tend vers g~ si G se rapproche de plus en plus de g~. Nous utiliserons la notation G → g~ pour signifier que G tend vers g~. (Job 2011 p. 330)

On arrive alors au cœur de la situation, l'endroit qui doit déstabiliser cette définition première, avec l'étude d'une conjecture appelée « propriété de dépassement ».

> **Propriété de dépassement.** Si G est décroissante et G → *g*~ alors quel que soit *x* tel que *g*~ < *x*, *G* contient une approximation *g* telle que *g* < *x*. (Job 2011 p. 338)

Cette propriété signifie que si la suite G est décroissante et tend vers un nombre *g*~ alors pour tout nombre g strictement supérieur à *g*~ la suite possède un terme compris strictement entre g~ et x. Remarquons que cette propriété est très proche de celle qui est étudiée dans le flocon (pour le périmètre) et qui constitue le cœur de la situation du flocon, à la différence près que la limite ici est finie. Cela est assez naturel puisque la définition de limite en epsilon implique précisément cette notion de dépassement à travers le fait que la distance des termes de la suite, à la limite, « finit » par être inférieure à tout epsilon strictement positif. Le scénario prévu alors est de faire prendre conscience que la définition 1 ne permet pas de démontrer cette propriété de dépassement. En effet, puisque « tendre vers » signifie « se rapprocher de plus en plus de », la suite G décroissante « se rapproche aussi de plus en plus » de tout nombre strictement inférieur à la limite de G mais ne satisfait pas la propriété de dépassement. Non seulement, cette définition 1 ne permet pas de la démontrer, mais de plus elle aurait tendance à conduire à la déclarer fausse. Cette prise de conscience devrait mener à reformuler cette première définition par une autre définition plus adaptée pour démontrer la propriété de dépassement. Cependant, cette prise de conscience n'a pas lieu et les efforts du professeur pour qu'elle survienne restent vains. L'analyse qui sera faite par Job (2011) conduit à pointer la conception de la notion de définition comme la cause de cet empêchement : les élèves ne perçoivent pas que la définition qu'ils ont proposée est contradictoire avec la propriété qu'ils veulent démontrer et ne reconnaissent pas les propositions du professeur (des nombres inférieurs à la limite de la suite) comme relevant de cette définition en opposant de multiples raisons.

d) Ingénierie de Oehrtman, Swinyard, Martin, Hart-Weber et Hah Roh, (2011)

Dans sa thèse, Swinyard (2008) conçoit une ingénierie ayant pour objectif de faire « réinventer » la définition formelle de limite à des étudiants de début d'université. Cette ingénierie, décrite dans Swinyard (2011), a été ré-expérimentée, et analysée dans Oehrtman *et al.* (2011). C'est ce dernier article qui nous servira de référence pour décrire cette ingénierie.

La situation présentée est menée avec deux étudiantes, Megan et Melinda, sur 6 séances de 90 à 120 minutes. Il est initialement demandé aux étudiantes de produire des exemples prototypiques de suites qui convergent vers 5 et de suites qui ne convergent pas vers 5. Dans chaque séance, le travail des étudiantes consiste à affiner de plus en plus leur définition préalable de la convergence d'une suite en la soumettant aux exemples et non-exemples initiaux. Elles sont accompagnées dans ce travail par deux animateurs qui aident à rendre explicites les conflits entre les définitions données et les références que sont les exemples et non-exemples adoptés. L'affinement des définitions, soit une succession de vingt-six définitions, est modélisé par un processus cyclique dont le schéma fonctionnel suivant rend compte :

Figure 10 : Schéma du processus de raffinement de définition (Oehrtman et al. 2011 p. 327)

On peut voir selon ce schéma qu'après que des exemples et non exemples aient été établis, les définitions successives sont mises à l'épreuve. Cela produit des conflits cognitifs. Une discussion s'ensuit pour déterminer des solutions au conflit. Ces solutions sont alors mobilisées dans une nouvelle définition qui est proposée puis mise à nouveau à l'épreuve…

Voilà la première définition donnée :

Definition 1 : A sequence converges to 5 as $n \to \infty$ provided $n+1$ is closer to 5 than n for any n value.

Cette définition est devenue après discussion :

Definition 2 : A sequence converges to 5 as $n \to \infty$ provided that the number approaches or is 5 and no other number.

La prise de conscience que ces deux premières définitions ne rendent finalement pas compte des suites ayant un " mauvais comportement initial" ("bad early behaviour") provoque un conflit qui va déboucher sur une idée qui cherche à éliminer ce défaut de ces définitions : la condition de convergence doit avoir lieu "after some point n".

Definition 3 : As $n \to \infty$, at some n, a_{n+1} becomes closer to (or is) 5.

Craig, l'un des deux "facilitateurs", demande une précision lorsque Belinda et Megan commencent à parler d'infinitésimal.

> In particular, when they started using language involving infinitesimals, Craig asked what they meant by "infinitely close."
>
> Craig: Now both of you have mentioned this "infinitely close thing." Can you say a little bit more about what you mean by infinitely close? Or maybe is there a way that you could encompass that into your definition at all?
>
> Megan: Negligibly small.
>
> Belinda: Yeah, where an error exists, but it's…
>
> Megan: Um… We were doing that stuff before where our approximation had an error. Remember when we had to find it within .0001, or whatever?
>
> Belinda: Yeah.
>
> Megan: I guess we can say "within a designated margin of error" or "designated error bound" because it would vary by what our error bound was for that particular problem or situation. Thus, while trying to interpret the meaning of phrases like "infinitely close" and "negligibly small," they recalled ideas about bounding errors from their work in class. (Oehrtman et al. 2011 p. 329)

A la suite de discussions et de propositions de définitions, une modification de la conception dynamique apparaît pour une conception plus statique mais néanmoins encore "archaïque" :

Definition 12 : A sequence converges to 5 as $n \to \infty$ if exists n such that for all a_n $|5-a_n| \leq .01$

Ce cheminement se poursuit lors de tout le processus de modifications avec parfois des interventions significatives des "facilitateurs" quand la situation semble bloquée. Une forme de neutralité est cependant assez strictement observée, y compris dans ces cas. Il s'agit le plus souvent de demande de précisions ou d'apports que les étudiantes adoptent manifestement en compréhension compte tenu de l'état avancé de la discussion. Voici trois définitions qui marquent les étapes ultérieures de ce processus.

Definition 14 : A sequence converges to 5 as $n \to \infty$ only if there exists a point n after which the error does not exceed $|5-a_n| \leq .001$ and $|5-a_{n+1}| < |5-a_n|$.

Definition 21 : A sequence converges to 5 as $n \to \infty$ only if there exists a value N after which $|5 - a_n|$ does not exceed every error after N.

Definition 23 : A sequence converges to U when $\forall \varepsilon > 0$ there exists some N, $\forall\ n \geq N$, $|U - a_n| < \varepsilon$.

La dernière définition est la définition standard de la convergence. Les auteurs affirment que leurs résultats permettent d'établir trois points fondamentaux : le premier concerne le fait que les idées générées par la résolution du problème de définition sont utiles aux étudiants et persistent au-delà du seul problème de construction proposé. Le deuxième est que les notions d'approximation et d'erreur en analyse constituent des entités conceptuelles cruciales pour l'efficacité du raisonnement des étudiants. Le troisième concerne les facilitateurs qui jouent un rôle déterminant, en ramenant régulièrement le problème au processus cyclique, en centrant les étudiants sur les problèmes à résoudre, et enfin en suggérant des solutions potentielles à chaque fois que le problème devient insoluble sans apport de leur part.

Nous souhaitons profiter de l'occasion que nous donne cette situation pour commencer à évoquer un problème qui la dépasse largement mais qui y trouve une illustration saisissante, problème que nous aborderons à nouveau ultérieurement. Dans le scénario proposé, les définitions sont progressivement affinées à partir de leur mise à l'épreuve sur une collection d'exemples et de non-exemples de la limite. Tout repose donc sur cette collection qui est censée représenter le réel que l'on veut formaliser à travers une définition qui doit lui être cohérente. Une question se pose alors : quel est ce réel ? Le réel est-ce finalement la définition qui le fonde ou bien est-ce la collection qui le fonde ? On a moins l'habitude de se poser cette question en mathématiques que dans les sciences expérimentales où elle est banalisée. Tout se passe ici comme en physique où l'accès au réel n'est jamais définitif, toujours sujet à modélisation.

Cette question accompagne en fait toutes les problématiques de construction de définitions et prend son origine dans un paradoxe : comment construire la définition d'un objet qui en principe ne peut pas avoir d'existence préalable à sa définition ? La réponse de Lakatos, à cet égard, est claire : l'objet n'existe pas a priori, il émerge progressivement comme produit d'une dialectique de preuve et réfutation. Or dans notre cas la réfutation ne vient pas d'une conjecture à prouver qui pourrait s'avérer inexact mais de l'(in)adéquation de la définition elle-même à représenter le réel qu'elle va contribuer à fonder... Cette question en amène d'autres. Si la définition formelle de la limite émerge finalement de ce processus, cela signifie-t-il que la définition était contenue, implicitement au moins mais entièrement, dans la collection utilisée ? Si l'on ne fait pas exister la limite à travers des exemples prototypiques avant qu'elle ne soit formalisée par une définition, comment la faire exister néanmoins ? Ces questions sont des questions essentielles pour qui veut faire construire une définition d'un objet mathématique, dans notre cas celle de la limite.

I.2 Réinterroger les ingénieries à travers obstacle et conflit

Le concept d'obstacle épistémologique renvoie, dans ses développements, à l'idée que la science rompt nécessairement avec la pensée naturelle, avec le bon sens, avec l'opinion : il y a toujours une résistance à vaincre pour accéder aux concepts scientifiques. Bachelard (1938) observe et étudie l'évolution historique des théories scientifiques. Il remarque que des théories, qui nous apparaissent maintenant comme excessivement naïves, font loi à leur époque et il cherche à expliquer cette sorte d'aveuglement : comment se peut-il que l'évidence actuelle face à certains phénomènes de la nature n'était pas perceptible auparavant ? Comment se peut-il qu'on associait des causes à certains phénomènes, causes qui nous paraissent aujourd'hui totalement exogènes ? Sa réponse prend la forme du concept d'obstacle épistémologique et nous apprend que ce mécanisme de cécité n'est pas le fait d'une sorte de préhistoire de la pensée rationnelle mais, bel et bien, un fait intemporel lié à l'acte même de connaître :

> « Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacle qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles /…/ La connaissance du réel est une lumière qui projette toujours quelque part des ombres » (Bachelard 1938 p. 13)

Ce qui est proprement révolutionnaire dans l'idée d'obstacle épistémologique tient à ce que ce n'est pas l'ignorance qui empêche d'accéder à l'essence des phénomènes mais, bien au contraire, la connaissance qu'on en a. Ainsi :

> En fait on connaît *contre* une connaissance antérieure. (Bachelard 1938 p. 13)

Les didacticiens qui étudient justement la transmission du savoir voient par là une raison des difficultés qu'ils observent concrètement.

> [L'élève] ne comprend plus parce que ce qui doit être changé, ce sont justement les moyens de ce qu'il appelait "comprendre" jusque-là. (Brousseau 1998a p. 154)

Ce concept semble donc de première importance pour identifier des résistances au savoir. Mais, en ce qui concerne les mathématiques, Bachelard nie leur existence :

> En effet l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité (Bachelard 1938 p.26)

Cette affirmation révèle une contradiction : d'un côté le fondateur du concept déclare explicitement l'absence des obstacles épistémologiques en mathématiques, et de l'autre le didacticien observe dans son propre laboratoire (la classe, l'histoire des mathématiques, ...) tous les indices de ce qui pourrait être qualifié comme tel.

> Ces travaux conformes aux conceptions de Bachelard et de Piaget montrent aussi que l'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behaviouristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès mais qui maintenant se révèle fausse ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. (Brousseau 1976 p. 104)

Brousseau différencie plusieurs types d'obstacles (les obstacles ontogénétiques, didactiques et d'origine épistémologiques). Ainsi toute difficulté rencontrée ne peut pas être associée automatiquement à un obstacle épistémologique. Un travail de transposition du concept de l'épistémologie des sciences vers la didactique est engagé. Nous n'en relaterons ici que quelques épisodes significatifs et éclairants.

En s'appuyant sur son caractère historique, Sierpinska (1985) met l'accent sur l'aspect intrinsèque à la connaissance de l'obstacle épistémologique.

> Pour notre part, nous retiendrons deux aspects de la notion d'obstacle épistémologique selon Bachelard (1938) :
>
> - L'apparition des obstacles a un caractère inévitable. […]
>
> - La répétition de leur apparition dans la phylogenèse et l'ontogenèse des concepts. […]
>
> Dans la conception qui va être utilisée ici de la notion d'obstacle, c'est à ces deux aspects que nous ferons référence en disant que, pour un concept mathématique déterminé il est possible de mettre en évidence des causes de lenteurs et de troubles dans l'acquisition du concept qui :
>
> 1) sont spécifiques de ce concept à lui seul,
>
> 2) sont telles que leur prise de conscience est indispensable pour le développement de ce concept.
>
> C'est l'ensemble de ces causes que nous appellerons obstacle épistémologique relatif au concept mathématique en question. (Sierpinska 1985 p. 7-8)

Suivant cette définition, et à partir de la corrélation entre les productions d'élèves dans le cadre d'une expérimentation sur la définition de la tangente et les difficultés historiques rencontrées à propos de la notion de limite, Sierpinska (1985) élabore une liste d'obstacles à la notion de limite (horror Infiniti, obstacles liés à la notion de fonction, obstacles « géométriques », obstacles « logiques », obstacle du symbole).

Artigue (1990) propose ensuite de focaliser davantage sur la présence de tels obstacles chez les élèves plutôt que sur leur caractère historique ; si celui-ci peut guider dans la recherche des obstacles chez les élèves, cet aspect ne devrait pas prévaloir sur leurs présences chez les élèves :

> Mais, de ces travaux on retire l'impression que, ce qui fonde en quelque sorte les obstacles épistémologiques, c'est leur apparition et leur résistance dans l'histoire des concepts considérés, ainsi que l'observation de concepts analogues chez les élèves, plus que l'attestation de la résistance de ces conceptions chez les élèves actuels.
>
> Or, cette condition semble essentielle : du fait de la disparité des contraintes qui gouvernent les deux systèmes, l'analyse historique peut aider le didacticien dans la recherche des nœuds de résistance de l'apprentissage, elle ne peut en aucun cas, apporter à elle seule la preuve de l'existence de tel ou tel obstacle chez les élèves actuels. (Artigue 1990 p. 254)

Elle propose alors « une démarche parallèle à Bachelard » (Artigue 1990) qui consiste à identifier, au-delà des notions mathématiques, des processus producteurs d'obstacles en mathématiques. Elle propose ainsi une liste non exhaustive de candidats : la généralisation abusive, la régularisation formelle abusive, la fixation sur une contextualisation abusive, l'amalgame sur un support donné. Cette nouvelle démarche est sensée assurer une transposition du concept d'obstacle épistémologique à la didactique des mathématiques et répondre aux deux questions que pose cette transposition : faut-il nécessairement lier l'obstacle en didactique à l'histoire et faut-il vraiment que l'obstacle épistémologique soit source d'erreur et ne constitue pas seulement un empêchement à répondre correctement à certains problèmes (catégorie incluant l'empêchement de répondre) ?

Le débat n'est toujours pas clos. Aussi nous voulons retenir pour la suite de cet article, dans le cadre d'une adaptation didactique du concept, deux aspects qui nous paraissent essentiels bien qu'ils ne résument pas à eux seuls le concept :

- l'obstacle épistémologique est une connaissance fausse qui se présente comme « le bon sens »,

- l'obstacle épistémologique est résistant, en particulier à la seule explication du professeur.

Ce que Sierpinska résume ainsi :

> Pour admettre son erreur, l'élève aura à franchir un obstacle épistémologique et ceci n'est pas chose facile. Un obstacle est lié à une conviction profonde, à un sentiment d'une vérité évidente, au sentiment que ce qu'on sait sur une question fondamentale est le seul savoir possible. C'est comme si on vivait dans un monde clos. Pour franchir l'obstacle, il faut sortir de ce monde et voir d'autres mondes possibles ainsi que les relations entre eux. (Sierpinska 1987 p. 73)

Nous parlerons désormais ici d'obstacle épistémologique d'une notion quand il répondra à ces deux critères, afin d'éviter toute polémique fondatrice mais surtout pour préserver la conséquence fondamentale du concept : l'obstacle épistémologique fait partie intégrante de la connaissance, il ne doit pas être évité.

> Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. (Brousseau 1998a p. 8)

Si la notion d'obstacle épistémologique semble incontournable dans la structuration des connaissances en un savoir, une difficulté pour la mobiliser en didactique des mathématiques s'est présentée, du fait de le caractériser dans une double étude didactique et historique où les erreurs des élèves actuelles au sujet d'une notion correspondraient historiquement à des périodes de stagnation voire d'erreurs des mathématiciens. Cette correspondance, bien que centrale pour l'intérêt didactique de ce concept épistémologique, est effectivement difficile à établir dans la mesure où les conditions de la genèse d'une notion diffèrent notablement des conditions d'apprentissage actuelles des mathématiques. On ne peut cependant que constater l'évidence des parallèles, par exemple sur la résistance de la conception dynamique de la limite chez les élèves, mais également dans l'histoire même de la notion de limite jusqu'à Cauchy (voir par exemple Job 2011).

Nous remarquons que dans les quatre ingénieries didactiques présentées, aucune ne fait appel explicitement à la notion d'obstacle épistémologique pour sa construction. Déjà en 1985, à propos des ingénieries de (Berthelot 1983) et Robinet (Robinet 1983), Sierpinska souligne le peu de rôle que jouent les obstacles dans la construction des ingénieries concernant la limite :

> Il faut remarquer cependant que ni ces modèles [Robert], ni ces obstacles [ceux de Cornu] n'interviennent d'une façon pertinente ni surtout décisive dans l'élaboration des problèmes que l'on propose aux élèves de résoudre. Ceci n'a d'ailleurs rien d'étonnant. La raison en est la même que celle que pour laquelle cela n'a pas beaucoup de sens de s'interroger si ces séquences permettent de franchir les obstacles épistémologiques de notre liste [Ceux de Sierpinska]. Elles ne visent qu'à faire approprier aux élèves une certaine définition, plus ou moins formalisée de la notion de limite et on pourrait tout au plus parler ici du franchissement ou non des obstacles « logiques ». (Sierpinska 1985 p.65)

Nous ne nous appesantissons pas davantage sur la notion d'obstacle épistémologique mais gardons à l'esprit que la connaissance ne peut pas se structurer seulement de manière linéaire, continue. Elle va se structurer en savoir par une succession de continuités et de ruptures avec les connaissances préalables. Autrement dit l'accès au savoir ne procède ni seulement par accumulation, ni seulement par rejet, mais surtout par confrontation et dépassement. Et dans ce mécanisme, puisque les explications du professeur sont a priori insuffisantes, l'élève doit lui-même construire les raisons de cette prise de conscience d'une nécessaire rupture. C'est la notion de conflit cognitif, en didactique, qui cristallise cette nécessité dès lors que le savoir visé se constitue autour d'un obstacle épistémologique. Le conflit cognitif est le conflit d'un sujet qui se rend compte que ses connaissances sont contradictoires au niveau interne (avec d'autres de ses connaissances) ou externe (avec des connaissances des autres). Ce conflit est nécessaire pour provoquer le besoin de dépassement que va permettre le savoir qui en est la solution.

L'élaboration d'une ingénierie peut donc faire appel au conflit cognitif pour déstabiliser une conception inadaptée. Par exemple, dans l'ingénierie de Robert, la première conjecture[22] sert à déstabiliser le modèle de convergence monotone, en créant un conflit cognitif, plus exactement un conflit sociocognitif entre ceux qui, ayant cette conception, pensent que la conjecture est vraie et ceux qui ont un contre-exemple et la pensent fausse. Le conflit sociocognitif, c'est-à-dire entre au moins deux personnes est vécu par le sujet d'abord comme un conflit externe. Puis, quand ce sujet réalise qu'il ne peut pas écarter l'avis contradictoire adverse alors il prend

22 (i) :Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

conscience d'une contradiction qui cette fois est interne et devient ainsi un conflit cognitif. Remarquons que la conjecture cruciale de l'ingénierie de Robert (ii), celle qui justifie qu'on définisse la notion de limite, n'est pas sensée générer un tel conflit puisqu'il est prévu qu'elle génère ce besoin de définir par impossibilité de démontrer une conjecture qu'on pense vraie. Pour que ce mécanisme fonctionne, il est nécessaire que le besoin de démontrer une conjecture tenue pour vraie soit prégnant et que son impossibilité en soit bien associée au manque de définition de la limite. Ces deux conditions nous paraissent difficiles à réunir dans la situation de Robert (1982a) dans la mesure où l'intervention du professeur est par nature limitée. En effet si le professeur indique la nécessité de démontrer, puis celle de définir, dans ce cas pourquoi étudier une conjecture plutôt que de donner immédiatement la définition ? Ce que permet le conflit cognitif, c'est justement de permettre cette prise de conscience sans manipulation externe susceptible de dénaturer celle-ci. Pour ce qui concerne l'ingénierie de Robert l'enjeu prévu était un peu moins ambitieux : « Pour le ii) ils pensent tous que c'est vrai mais n'arrivent pas à le démontrer » et la conclusion après expérimentation : « Les réactions au ii) ont été tout à fait celles qu'on attendait » mais il est ajouté :

> Par contre, et c'est là une grosse difficulté de la séquence, les interventions magistrales devant clore la première séquence n'ont pas été menées efficacement dans beaucoup de cas – ou bien elles n'ont pas eu lieu séance tenante, et l'expérience a montré que deux jours après, l'effet attendu est perdu ; ou bien qu'elles n'ont pas été reçues comme une institutionnalisation, et souvent même, les deux facteurs sont intervenus simultanément. (Robert 1982a p. 445)

Cette difficulté de l'institutionnalisation, selon nous, est préparée par l'ingénierie elle-même qui débouche, a priori, non sur le besoin identifié d'une définition mais seulement sur l'impossibilité de démontrer quand elle est perçue. Pour que cette identification puisse avoir lieu, il faut que les étudiants lient clairement la question de la démonstration à celle de la définition, et comme nous allons le voir avec Job, cela ne va pas de soi. Nous retrouvons là les difficultés liées à la définition que nous avons déjà présentées.

L'usage explicite de conflit cognitif, ni d'obstacle épistémologique n'ont pas pu être identifiés dans la thèse de Bloch. Ceci est cohérent avec la position de Bloch à ce sujet lors de la dix-huitième école d'été de didactique à Brest 2015 dans sa conférence sur l'analyse :

> Signalons par contre que la croyance selon laquelle les obstacles épistémologiques devraient être systématiquement 'revisités' ne nous semble pas avoir de fondement sérieux, ni être attestée par les recherches antérieures. Le bénéfice de cette réactivation – à ne pas confondre avec un apport historique, qui peut être effectivement motivant – n'a pas été prouvé dans le cas de l'enseignement des notions de l'Analyse. (Bloch 2016)

Si une telle preuve manque effectivement ainsi que manque, nous l'avons vu également, une caractérisation stable du concept d'obstacle épistémologique en didactique des mathématiques, néanmoins nous pensons qu'il peut servir d'appui contre le fantasme répandu qu'il suffit de trouver la bonne explication pour assurer une bonne transmission du savoir. Le concept d'obstacle épistémologique nous alerte : les bonnes explications ont peu de poids face au « bon sens ». Pour ce qui est de l'enseignement de l'analyse, on peut penser que la nécessité d'organiser des conflits cognitifs provient effectivement de l'identification de conceptions inadaptées et récurrentes, conceptions qu'aucun enseignement ne peut éviter.

Lors de l'expérimentation de cette ingénierie du Flocon, un conflit sociocognitif a néanmoins lieu : les élèves s'accordent sur le fait que le périmètre devrait dépasser n'importe quelle valeur,

mais certains d'entre eux transposent cela à l'aire, arguant du fait que l'aire et le périmètre sont liés ou implicitement qu'une suite strictement croissante à pour limite l'infini, tandis que d'autres pensent l'aire bornée. L'analyse de cet épisode sera réalisée au chapitre 3.

L'ingénierie de Job est fondée sur la perception d'une contradiction : la « propriété de dépassement »[23] est tenue pour vraie par les élèves mais mise en défaut, a priori, par « la définition de tendre vers ». En effet la définition provisoire de « tendre vers » est de « se rapprocher de », et la suite ne se rapproche pas seulement de sa limite L mais aussi de tous les nombres inférieurs à L pour lesquels la propriété de dépassement est fausse. Cette contradiction est prévue devrait conduire à remettre la définition en cause. Mais la contradiction ne produit pas de conflit car les élèves refusent de se conformer à la définition qu'ils ont élaborée. Job dira (groupe sup Paris Diderot 2013) que même l'insistance du professeur ne suffit pas à les faire changer d'avis. Il voit là les difficultés relatives à la définition et de son rôle en mathématiques. En effet, comme pour Robert, nous identifions, ici pour l'objet limite, une difficulté liée à la conception même de la construction des mathématiques et en particulier des rôles de la définition et de la démonstration dans cette édification théorique.

Pour ce qui est de Swinyard et de son ingénierie, la position par rapport au conflit cognitif est encore différente. Selon le schéma de recyclage des définitions provisoires, le conflit-cognitif joue un rôle fondamental dans le processus de révision des définitions mais s'il est prévu que des conflits cognitifs apparaissent entre les définitions exprimées et les exemples et contre-exemples servant de référence, ces conflits ne sont pas prévus à l'avance par une analyse a priori rigoureuse. La méthodologie employée permet précisément de se passer de cette prévision par deux moyens. D'une part l'animateur de la séance est capable de percevoir les conflits potentiels sur le champ et les adresser aux étudiants, en leur demandant, s'ils ne le font pas de leur propre chef, de vérifier la cohérence entre définition et objets de référence. D'autre part, pour les situations plus délicates, l'espacement d'une semaine entre deux séances, donne le temps de scénariser la séance suivante pour trouver les situations qui vont permettre à ces conflits d'apparaitre en fonction de l'avancement des travaux des étudiants. Cette manière de réguler le travail par des conflits cognitifs générés au fil des séances dispense, en effet, d'une construction rigoureuse a priori de l'ingénierie, permet de s'adapter au travail des élèves. Cette méthode signifie aussi un travail d'analyse conséquent tout au long de l'expérimentation.

En conclusion, nous voyons que l'usage du conflit cognitif dans ces ingénieries didactiques est divers. Il est mobilisé de manière complètement prévue (Robert, Job) ou intégré comme outil fondamental mais géré au fil de la situation (Swinyard). De même le déclenchement des conflits cognitifs est diversement initié. Soit il est le fruit de la situation (Robert, Job), soit il est généré par l'animateur si besoin (Swinyard).

Nous avons vu aussi que la définition et la démonstration jouent un rôle fondamental dans l'apparition du conflit cognitif. Un rapport insuffisant à ces éléments de construction des mathématiques peut avoir pour conséquence d'empêcher le conflit de se produire. Cette dernière remarque renvoie à la rationalité de l'élève, où l'on entend à la fois la capacité personnelle à

23 Si une suite décroissante tend vers un nombre L, pour tout nombre b strictement supérieur à L, il existe un rang N à partir de laquelle la suite est inférieure à b.

s'interroger en dehors de toute incitation didactique, et à la fois les éléments de savoir pour mener ce questionnement. La rationalité est précisément l'objet du prochain paragraphe.

I.3 Un questionnement du rôle de la rationalité dans la TSD

Quelles sont les conditions didactiques et épistémologiques susceptibles, dans le cadre d'une situation adidactique, de rendre nécessaire un objet de savoir théorique comme la limite d'une fonction ? En particulier, quelles sont les conditions pour qu'un élève/étudiant puisse réaliser une grande partie du chemin qui le conduira à identifier cette nécessité ?

Pour répondre à cette question dans le cadre de la TSD, nous avons étudié le rôle du conflit cognitif pour déstabiliser et modifier les conceptions. Nous avons pu identifier des difficultés de mise en œuvre de celui-ci. En effet pour qu'un conflit cognitif apparaisse et soit générateur des transformations de connaissances requises, il est important qu'il soit perçu par l'élève sans lui être désigné, et que cet élève amorce à son tour une tentative de résolution. Par conséquent, nous attendons à ce que l'élève dispose à la fois d'une certaine capacité à repérer les contradictions, à les tenir pour indésirables, mais aussi à s'engager à les éliminer.

Ces conditions de l'activité autonome de l'élève pour la création de connaissances au travers de situations dites adidactiques, et pour aboutir finalement à l'institutionnalisation du savoir, sont précisément au cœur de la TSD :

> Cette situation ou ce problème choisi par l'enseignant est une partie essentielle de la situation plus vaste suivante : le maître cherche à faire dévolution, à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible. /…/l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller, dès que possible, la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective. (Brousseau 1998 p. 60)

En faisant de la situation didactique le cœur de sa théorie, Brousseau apporte un début de réponse à cette question des conditions épistémologiques avec une hypothèse première : l'élève est un « actant rationnel et économique ».

> La situation est la seule chose sur laquelle le professeur peut agir pour susciter chez ses élèves les activités dont il espère qu'elles produiront les résultats voulus. La théorie des situations examine les effets des situations sur un actant rationnel et « économique »... (Brousseau 2002 p. 11)

Il y a deux façons de comprendre cette double hypothèse. La première, celle qui saute aux yeux, est que le comportement de l'élève est dicté par la raison et n'est pas sous l'emprise du caprice et du hasard. Cette hypothèse initiale correspond à celle du physicien quand il suppose l'univers compréhensible, hypothèse sans laquelle il serait vain de faire de la physique. La rationalité de l'actant serait alors une garantie nécessaire d'un univers didactique compréhensible, prédictible, plus exactement susceptible d'être soumis à la prédiction. Finalement cette hypothèse ne dit pas ce que l'élève est, mais surtout ce qu'il n'est pas (capricieux). C'est une explication crédible et classique en science mais alors pourquoi ajouter « économique » ? La deuxième façon de comprendre cette double hypothèse semble pouvoir répondre à cette question. Il faut se rappeler alors que la TSD s'appuie initialement sur le modèle de la théorie des jeux :

> Il a fallu d'abord envisager le jeu comme un modèle général des activités humaines afin d'obtenir une définition de ce qu'est une manifestation de connaissance ou une manifestation

> d'apprentissage. Dans un deuxième temps, il faut envisager le jeu comme modèle de l'activité mathématique, d'individus : celle des mathématiciens et celle, a priori différente, des enfants ou des professeurs. En confidence je peux vous dire que l'idée de modéliser des activités humaines à l'idée de diverses théories mathématiques et notamment la théorie des jeux, était largement répandue dans les années 50-60/…/ (Brousseau 2002 p. 2)

Or la théorie des jeux est un des fondements de la science économique (voilà d'où pourrait venir « l'actant économique »), et dans ce cadre les comportements sont très souvent modélisés par un type de rationalité dite instrumentale[24], rationalité qui est définie en termes d'acteur qui optimise les gains et minimise les pertes. De fait quand Brousseau décrit son modèle, il précise :

> Ce choix du joueur sera « motivé » dans le modèle par une fonction de préférence définie sur tous les états, et éventuellement engendrée par un gain ou un enjeu. (Brousseau 2002 p. 5)

La rationalité dont Brousseau fait une hypothèse première est donc davantage liée à sa modélisation en termes de théorie des jeux. Cette hypothèse-là en dit beaucoup plus sur l'élève : il suit une rationalité guidée par une stratégie d'optimisation.

D'un autre côté Brousseau présente les situations didactiques comme ayant une finalité non seulement mathématique mais qui concerne aussi le développement cognitif de l'élève :

> Les mathématiques sont le domaine où l'enfant peut le plus précocement s'initier à la rationalité, et forger sa raison dans des rapports autonomes et sociaux. (Brousseau 2000 p. 1)

Et aussi :

> Or ces situations ne sont pas seulement un pas important dans les processus mathématiques, elles sont porteur d'un projet éducatif essentiel : celui de construire chez l'élève un être rationnel et social autonome et responsable, capable de comprendre comment s'établit et se partage une vérité dans une société, par des débats à la fois démocratiques et constructifs. (Brousseau 2000 p. 14)

Ce double éclairage du même auteur nous interroge : quelle est finalement cette rationalité qui semble être à la fois la condition du didactique et sa conséquence ?

Une question se pose : si « l'actant rationnel » de Brousseau est une hypothèse fonctionnelle pour les savoirs du primaire, qu'en est-il des savoirs complexes de fin de secondaire et du supérieur ? Les adaptations de la TSD pour ces savoirs complexes (Bloch 1999), négocient principalement l'adidacticité au profit de la notion de dimension adidactique et confient un rôle accru au professeur dans la situation. Le besoin de ces adaptations ne pourrait-il pas être interprété comme la nécessité de reconsidérer cette hypothèse de « l'actant rationnel » pour ces niveaux[25] ? Comme Brousseau (2002), nous partageons la nécessité d'une certaine rationalité de l'élève faisant des mathématiques pour fonder la possibilité des situations adidactiques, aussi nous choisissons d'étudier précisément cette hypothèse afin de fonder notre modèle théorique pour les savoirs complexes tels que la limite.

[24] Nous précisons dans le paragraphe II.1 l'origine et la signification de « rationalité instrumentale »
[25] En fait, de telles adaptations sont initiées dès le primaire (Margolinas 1995 ; Comiti Grenier & Margolinas 1995).

Nous abordons donc dans le paragraphe suivant la notion de rationalité à travers les travaux existants. Il s'agit pour nous de progressivement appréhender ce concept afin de lui donner consistance et de comprendre son rôle dans l'enseignement et l'apprentissage.

II Nécessité de la définition formelle : Un retour sur le concept de rationalité

Nous constatons finalement que la notion de rationalité est mentionnée dans la TSD comme ayant un rôle fondamental, pourtant elle n'y est pas explicitement définie. Nous allons étudier la place et la formalisation de celle-ci dans certains domaines de recherche et en particulier en didactique des mathématiques, puis nous engagerons dans un travail de modélisation de la rationalité.

II.1 La notion de rationalité dans quelques disciplines scientifiques

Afin de débuter cette étude avec une première idée de ce que peut être le concept de rationalité, nous commençons par regarder comment les différentes disciplines scientifiques qui font usage de ce concept le transposent dans le cadre de leurs propres problématiques. Il ne s'agira en aucun cas d'être exhaustif, nous ne prétendrons pas non plus proposer des références représentatives, tant est vaste la littérature à ce sujet[26]. Nous voulons introduire l'idée de rationalité dans un cadre plus général, pour commencer à examiner la caractérisation et l'emploi de ce concept, avant de nous intéresser plus exclusivement à la didactique des mathématiques.

Selon la définition du Larousse en ligne, la rationalité est « le caractère de ce qui est rationnel » et il propose comme définition trois façons d'envisager « rationnel » : Propre à la raison / Qui est conforme à la raison, repose sur une bonne méthode / Qui paraît logique, raisonnable, conforme au bon sens, qui raisonne avec justesse. Parmi les mots clefs (raison, logique, méthode, bon sens, justesse) la raison est le dénominateur commun. La définition de raison est alors la suivante : « Faculté propre à l'homme, par laquelle il peut connaître, juger et se conduire selon *des principes*. La raison considérée par opposition à l'instinct. ». De nombreux domaines scientifiques font appel à cette notion de rationalité comme élément de modélisation, et leur transposition de ce concept repose précisément sur la définition des principes utilisés, principes spécifiques à chaque discipline, à chaque branche de ces disciplines, voir à chaque école de pensée de ces branches de ces disciplines.

Selon le sociologue Boudon (2009) la rationalité est une déclinaison philosophique de la raison. La question de la raison apparaît très tôt avec « l'observation que les hommes sont capables d'argumentation et de calcul (en latin ratio) » et est étudiée par les philosophes. Les stoïciens opposent le sage, qui obéit surtout à sa raison, au non-sage qui résiste mal à ses passions. A partir du XVIIème siècle, les sciences sociales abandonnent de plus en plus la notion de raison à la philosophie au profit de celle de rationalité, car se constituent progressivement quatre mou-

[26] Par exemple depuis 1986 a lieu un colloque international tous les deux ans « TARK » (Theoretical Aspect of Rationality and Knowledge) qui comprend chaque fois des dizaines de contributions de disciplines scientifiques variées.

vements de pensée qui vont faire de ce concept une question centrale et fondatrice. Ces mouvements prendront ultérieurement les noms de théorie de la décision, théorie des jeux, science économique, et psychologie cognitive. Ils vont chercher à donner des explications aux comportements de l'individu dans leurs contextes d'études propres. Ces comportements sont-ils rationnels, non rationnels (a-rationnels) ? Quelle est cette rationalité (ces rationalités) qui guide ces comportements dans les différents types de situations associées à ces recherches ? Un type de modèle émerge durablement : la conception instrumentale de la rationalité qui repose sur le fait que l'individu fait le choix de ses moyens en fonction d'un objectif qu'il s'est donné. Son comportement, sa rationalité, est donc déterminé par une adéquation des moyens à une finalité. Les origines de cette théorie remontent à Thomas Hobbes (XVIIIème siècle) et a été constamment l'objet de transformations depuis. La Théorie du Choix Rationnel[27] (TCR) est la version moderne de cette conception instrumentaliste et repose sur six postulats (qui ne sont pas toujours adoptés tous ensemble suivant les variantes) :

P1 : postulat de l'individualisme. Tout comportement social résulte de comportements individuels qu'il s'agit de comprendre.

P2 : postulat de la compréhension. Comprendre le comportement d'un individu c'est comprendre le sens que ce comportement a pour lui.

P3 : postulat de la rationalité. La cause du comportement d'un individu réside dans les raisons qu'il a de l'adopter.

P4 : postulat du conséquentialisme. Le sens de l'action d'un individu réside dans ses conséquences.

P5 : postulat de l'égoïsme. Un individu s'intéresse en priorité aux conséquences qui le concernent.

P6 : postulat du CCA. L'individu décide toujours pour maximiser la différence entre les coûts occasionnés par son comportement et les avantages qu'ils lui procurent.

Cette théorie TCR est la source de nombreux succès d'analyse de phénomènes sociologiques, économiques et autres. Elle dispose d'un indéniable attrait par le fait qu'elle se fonde sur l'utilitarisme et ne nécessite aucune explication supplémentaire que celui de cette recherche de l'utilité et de gain.

Voici un exemple de rationalité instrumentale récente :

En économie, Simon (prix Nobel d'économie 1978 pour ses travaux sur une variante de la TCR : la théorie de la rationalité limitée) propose une définition de la rationalité spécifique aux sciences économiques :

> As is well known, the rational man of economics is a maximizer, who will settle for nothing less than the best. /.../ Assumptions of rationality are essential components of virtually all sociological, psychological, political and anthropological theories with which I am familiar. What economics has to export, then, is not rationality, but a very particular and special form of it – the rationality

27 Pour en savoir davantage sur la TCR on pourra consulter les auteurs Raymond Boudon, John L. Campbell, et James Rule, David D. Laitin, entre autres.

> of the utility maximizer, and a pretty smart at that. (Simon 1978 p. 405)

Mais selon Boudon, ce modèle de la TCR n'explique pas plusieurs classes importantes de phénomènes, notamment les phénomènes où interviennent des croyances[28] ; la rationalité est alors cognitive et non instrumentale (justement celle qui va nous intéresser), ou bien les phénomènes où interviennent des motivations non égoïstes (sentiments moraux, ou opinions par exemple). En raison de cette limitation (et d'autres liées à l'impossibilité de prendre en compte d'autres finalités que le gain), un autre modèle de rationalités pour les sciences humaines a été proposé : la théorie de la rationalité ordinaire (TRO). Voici la version générale de la TRO :

Soit X un objectif, une valeur, une représentation, une préférence, une croyance, une opinion. On dira que X s'explique par la rationalité ordinaire (RO) si X est aux yeux de l'individu qui adhère à X la conséquence d'un système de raisons S dont tous les éléments lui sont acceptables et s'il n'existe pas pour lui à portée de vue un système de raisons S'préférable qui l'amènerait à souscrire X' plutôt qu'à X. Dans ce cas, on dira que S est la cause de l'adhésion de l'individu à X.

Cette théorie (TRO) permet de prendre en compte des raisons beaucoup plus larges que le seul utilitarisme de la TCR et évite d'assimiler l'individu à ses seules composantes égoïstes.

Les croyances scientifiques donnent ainsi des applications directes de la TRO :

> On accepte l'hypothèse de Torricelli selon laquelle le mercure monte dans le baromètre sous l'effet du poids de l'atmosphère. L'hypothèse aristotélicienne selon laquelle il s'élèverait parce que la nature a horreur du vide est plus faible parce qu'elle ne peut pas expliquer la variation de la hauteur du mercure avec l'altitude et qu'elle introduit une notion antropomorphique./…/ le phénomène collectif de consensus qui a fini par s'établir en faveur de l'hypothèse de Torricelli a bien pour cause des raisons./…/Enfin la rationalité mise en œuvre dans cet exemple n'est pas la rationalité instrumentale mais la rationalité cognitive. (Boudon 2009 p. 51)

Il fait remarquer ensuite que rien n'implique qu'il soit possible de départager deux systèmes de raisons S et S' dont seulement une partie des éléments de l'un serait préférable à l'autre sans qu'ils le soient tous. C'est donc seulement dans des cas particuliers qu'on peut trancher entre S et S' sans ambiguïté. Il ajoute donc que :

> La définition de la RO décrit en d'autres termes une situation idéale. Elle constitue le point de repère à partir duquel l'individu apprécie la solidité de ses croyances comme plus ou moins fortes selon le degré auquel elles se rapportent ou s'éloignent de cette situation idéale.
>
> Concrètement, il est en effet courant qu'on ne soit pas en état d'affirmer s'il faut préférer S à S'. Mais toute croyance à laquelle le sujet adhère s'accompagne dans son esprit du sentiment diffus qu'il ne perçoit pas les raisons qui l'amèneraient à croire autre chose. Et le doute incline à rechercher un système de raisons qui permettrait de le lever. (Boudon 2009 p. 52)

Nous notons la conséquence d'une hypothèse forte de la RO : le « bon sens » est partagé. Cette hypothèse est nécessaire pour préférer avec des raisons et pour douter quand il est nécessaire de douter. Nous remarquons alors que pour définir la rationalité, il faut introduire un minimum de... rationalité ! Notons enfin que Boudon, en introduisant cette hypothèse du bon sens s'inscrit dans une vision continuiste : il n'y a pas de discontinuité entre les connaissances ordinaires et

[28] Il faut comprendre le terme croyance dans son sens sociologique : une croyance est un élément d'un système de valeur. Par exemple, l'axiomatique euclidienne pour les mathématiques serait qualifiée de croyance avec ce sens-là.

les connaissances scientifiques. Selon Boudon, les actuelles sciences cognitives prônent une forme de rupture à la suite d'une mauvaise interprétation des résultats d'une série de tests expérimentaux liés à la célèbre « tâche de sélection de Wason[29] » et il ajoute que :

> G. Bachelard est l'un des rares à soutenir que la pensée scientifique se caractériserait par une rupture épistémologique avec la pensée ordinaire. (Boudon 2009 p. 60)

Nous verrons que la question de cette continuité/rupture joue un rôle récurrent dans la question de la rationalité.

Voici un exemple où Andler distingue deux principaux sens de la rationalité utilisés en psychologie : l'un correspondant à la rationalité instrumentale (TCR ou autre), et l'autre correspondant à la cohérence et au principe de non contradiction, c'est à dire cette fois plutôt du côté de la logique. En outre il évoque le fait qu'il y en a de nombreux autres :

> Il y a au moins deux sens importants de cette notion dans le contexte des études sur le raisonnement, pour chacun desquels il existe une théorie normative correspondante (cf Evans 1992, mais cf. également Elster 1982, qui distingue 16 sens différents du terme "rationalité" !). Un premier sens du terme "rationnel" est celui de la rationalité instrumentale des moyens en vue d'obtenir une certaine fin : on dit en ce sens qu'un agent est rationnel s'il "maximise son utilité espérée" dans ses choix et dans ses actions, c'est-à-dire agit toujours de manière à faire ce qui est, à ses yeux, le plus utile, en fonction de ce qui lui semble le plus probable. /…./. En un second sens, la rationalité est la propriété qu'on attribue à un ensemble de croyances d'être cohérentes ou non contradictoires et d'être closes sous une relation de déduction. C'est le sens proprement logique de la rationalité, d'après lequel un système cognitif est rationnel si l'on peut lui attribuer la capacité de faire des inférences et des raisonnements logiques déductifs. (Andler 2004)

En sociologie, selon Morin (sociologue) qui utilise une définition plutôt du côté de la TRO (à cause de la prise en compte d'éléments liés aux croyances), la rationalité correspond à l'articulation de l'argumentation, la critique et la théorie par les moyens logiques et empiriques pour rendre compte de réalités.

> La rationalité pourrait être une combinaison qui comprendrait l'argumentation (l'art d'enchaîner les arguments en fonction d'une cohérence logique et d'une référence empirique) ; la critique, c'est-à-dire la possibilité de dissoudre ou du moins de contredire une argumentation par des moyens logiques et empiriques ; et la théorie, c'est-à-dire un système d'idées liées les unes aux autres par déduction et induction et s'efforçant de correspondre aux phénomènes ou aux réalités dont il veut rendre compte. (Morin, 1996)

Enfin voici une autre variante de la rationalité instrumentale présentée dans le cadre de la psychologie, où l'auteur Todd Davies (spécialiste de psychologie, intelligence artificielle, sciences cognitives) dans ses notes de cours de l'université de Stanford (USA) au sujet de la théorie de la prise de décision (decision behavior : theory and evidence) propose un modèle de rationalités composé de trois types de rationalités : subjective, intersubjective et objective.

> We can analyze rationality in a context C defined by the following four attributes:
>
> 1. Action. A set (one or more) of moves executed in C.

[29] Tâche qui exploite des éléments de logique élémentaires (modus ponens et modus tollens) pour être résolue. Certaines versions consistent en quatre cartes à jouer dont chaque face porte un nombre ou bien une voyelle mais dont une seule face est visible. La tâche consiste à déterminer lesquelles des quatre cartes il faut absolument retourner pour vérifier la véracité d'une affirmation du style « S'il y a une voyelle d'un côté, alors il y a un nombre de l'autre ». Les expériences menées sur ces taches montrent un échec massif qui a donné lieu à une abondante littérature en psychologie cognitive sur le sujet.

2. Constraints. A set of Characteristics that apply in (i.e. that characterize) C, relating inputs to outputs.

3 Evidence. Any data available as inputs to the constraints that apply in C.

4. Objectives. The desired outcomes of actions executed in C.

/…./

An agent, or actor, is an individual that executes actions in a given context. The attributes of the context may be defined with respects to a single agent, a set of agents, or to the context itself, giving rise to the following levels of rationality:

1. Subjective rationality. The actions of an agent A are subjectively rational in context C to the extent that the evidence available to and the constraints as understood by A are consistent with the achievement of A's objectives.

2. Intersubjective rationality. The actions of an agent A are intersubjectively rational in a context C to the extent that the evidence available to and the constraints as understood by the collection B of agents in C are consistent with the achievement of A's objectives.

3. Objective rationality. The actions of an agent A are objectively rational in a context C to the extent that all the evidence and constraints applying in C is consistent with the achievement of A's objectives. (Davies 2007)

Nous pouvons voir que ce modèle, bien que correspondant à la vison instrumentale (relation moyen-finalité), ne relève pas de la TCR dans la mesure où il ajoute au seul aspect subjectif intervenant dans la TCR une dimension collective (intersubjectivité) et une dimension culturelle (objectivité). Nous remarquons en outre que ce modèle a recours à plusieurs niveaux de rationalité. Cela implique a priori de définir les interactions entre ces niveaux.

Pour conclure nous pouvons constater que si certaines typologies permettent de dégager de grandes familles de modèles de rationalités, il existe une grande variété de modèles, dont nous n'avons montré ici qu'un petit aperçu. Dans tous les cas ces modèles de rationalités sont utilisés comme fondements théoriques pour les différentes modélisations de phénomènes individuels et sociaux. Nous retenons de ce premier contact quelques points que nous aurons à élucider davantage dans notre travail de modélisation de la rationalité pour la didactique des mathématiques :

- Rôle de l'hypothèse de continuité/discontinuité épistémologique : la connaissance scientifique et la connaissance commune sont-elles « étrangères » l'une à l'autre ou au contraire l'une est-elle le prolongement de l'autre ?
- Rôle du collectif sur la rationalité individuelle : dans quelle mesure les prises de positions collectives interviennent-elles dans la rationalité de l'individu ?
- Rôle de la finalité versus rôle des croyances (du cognitif) dans la modélisation de la rationalité : retrouve-t-on ces différentes hypothèses dans les différentes modélisations réalisées en didactique ?
- Rôle du raisonnement - voire de l'argumentation - qui sont très présents dans les exemples de définitions précédentes. Quelle est la place du raisonnement et de l'argumentation dans la rationalité ?

II.2 Etudes didactiques existantes sur la rationalité

Dans cette partie nous étudierons six principales sources des travaux didactiques sur la question : le modèle de rationalités de Legrand (1990) et celui de Lerouge (1992,2000), celui de Habermas (1999) repris par Boero (2006), le modèle de double praxéologie-rationalité, le discours introductif du colloque GDM[30] 2005 de Duval et enfin les travaux du thème 8 de EMF[31] 2006. Nous tenterons de comprendre comment, en didactique, on a cherché à circonscrire le concept de rationalité, et quelles sont les convergences et divergences des principales approches. Nous compléterons cette étude d'un bref aperçu de la question de la dimension expérimentale des mathématiques et de l'utilisation des exemples-contre-exemples, dimension qui émerge manifestement des études antérieures.

a) « Practical rationality » de Herbst et al. (2003)

Dans la recherche anglo-saxonne en « mathematic education » le mot rationalité est surtout utilisé dans l'expression « Practical rationality » de Herbst et al. (2003). Cette rationalité pratique envisage un certain nombre de comportements et de choix didactiques du professeur et des élèves comme la conséquence du respect de certaines normes. Ainsi par exemple, le professeur qui veut faire effectuer un travail sur la preuve est soumis à une norme (implicite) qui l'oblige à donner aux élèves la conclusion et les hypothèses du théorème à prouver plutôt que de les lancer dans un travail de conjecture par exemple. Cette « norme » apparaît dans l'observation d'enseignants en cours puis est testée par une étude spécifique. On demande à des enseignants si une situation donnée de travail sur la preuve leur paraît adaptée. Cette situation contient une violation (« breach ») de la norme testée, ici « il faut donner hypothèses et conclusions ». On peut ensuite repérer dans les réponses si la situation est acceptée ou pas, avec ou sans changement de consigne, par les enseignants, et ces réponses attestent ou non de l'existence de la norme testée. Dans le cas de la norme sur le travail de preuve, la norme est avérée. Mais certaines normes peuvent aussi concerner les élèves. Par exemple, une norme identifiée, encore pour la preuve, stipule que « les étudiants sont sensés justifier une affirmation dans une preuve avec une raison avant de passer à l'affirmation suivante ». Ainsi l'usage du concept de « rationalité pratique » est assez proche de celui du contrat didactique, y compris sa manifestation et son identification dans les ruptures pour l'un, et les violations (« breaches ») pour l'autre. La différence supposée (mais qui ne nous paraît pas décisive) entre les deux est que le contrat didactique relève de normes beaucoup plus larges que la rationalité pratique, laquelle régit des normes beaucoup plus dépendantes des conditions de l'enseignement et l'apprentissage d'un savoir particulier :

> In that sense, this norm is different in scope than the more general norms of the didactical contract, which are present across different instructional exchanges (e.g., the expectation that when the teacher asks students a question, she already knows the answer). In trying to understand the practical rationality that underlies that norm and the possibilities to depart from it we are therefore asking not a question about instruction in general (e.g., Do teachers see it as possible, desirable, or appropriate to have students work on tasks where they determine the givens or the goal?) but rather a question about what counts as doing a proof in high school geometry: Do teachers see it as possible, desirable, or appropriate to hold students accountable for doing a proof and to do so

[30] GDM 2005 est un colloque organisé par le Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec.
[31] EMF 2006 est le colloque francophone Espace Mathématique Francophone.

> in the context of tasks where students are in charge of providing the givens or the conclusion of the proof problem? (Herbst et Chazan 2003 p. 424)

La « practical rationality » est très présente dans la littérature didactique américaine et le terme « rationality » y est rarement présent seul (i.e. non accompagné de « practical »). Cette rationalité semble beaucoup plus déterminée par des nécessités liée à la pratique (le « practical ») que à l'épistémologie : pourquoi en mathématiques les choses se font d'une manière et pas d'une autre ? Or c'est plutôt cet aspect épistémologique de la rationalité qui nous intéresse ; nous n'explorerons pas davantage cette « practical rationality », mais nous retiendrons pour la suite cependant qu'elle désigne la rationalité comme le respect d'une norme pour l'action et la décision.

b) Modèle de rationalités de Legrand (1990)

Legrand (1990b) définit deux types de rationalités : la rationalité du quotidien et la rationalité scientifique. Cette typologie met en évidence les ruptures entre les deux types de rationalités pour expliquer certaines des difficultés de l'élève qui n'adopte pas spontanément le type de rationalité que le professeur tient pour naturel. Voyons comment il précise *la rationalité scientifique :*

> Globalement cette rationalité scientifique se caractérise par le fait que l'on retrouve dans toutes les sciences le souci d'obtenir une description, une représentation théorique la plus objective possible des domaines de réalité abordés, afin d'effectuer des prévisions fiables sur les interactions possibles entre les objets construits.
>
> La validation de ces productions théoriques s'effectue le plus souvent à un double niveau :
>
> -validation interne : les critères de vérité étant alors des constructions spécifiques de la communauté reposant sur des choix conformes à son épistémologie,
>
> -validation externe : basée sur l'efficacité des outils théoriques dans leur mise en œuvre dans des situations extérieures à la théorie : la théorie est-elle à la base de réalisations techniques brillantes ? A-t-elle prévu la répétition de certains faits ? Permet-elle effectivement de provoquer ou d'empêcher l'apparition d'autres faits ? (Legrand 1990b p. 374)

Ainsi la rationalité scientifique, selon Legrand (1990), est « une représentation théorique » d'un domaine de réalité dont la validité répond de deux types de validations internes et externes. Cette rationalité est ensuite spécifiée pour ce qui est des mathématiques où l'obligation de construire les objets par des définitions, l'utilisation du tiers exclu et du contre-exemple confèrent aux mathématiques une forme de paradigme de ce type de rationalité. En particulier l'auteur dénonce « cette coutume scolaire » qui :

> … oppose les mathématiques aux autres sciences en faisant croire que l'abstraction est l'ennemie du concret et que toute préoccupation théorique est synonyme de désintérêt pour la pratique.
>
> Cet écrasement systématique neutralise la composante épistémologique des mathématiques la plus accessible à celui qui n'est pas encore entré dans une rationalité mathématique ; c'est à mon sens la non perception de cette composante qui rend absurde pour beaucoup d'élèves la rigueur que l'on introduit dans le processus de définition, d'axiomatisation et de démonstration en mathématiques. (Legrand 1990b p. 376)

Cette modélisation de la « rationalité scientifique » cherche à rendre compte du fait que si les mathématiques sont abstraites par essence, elles procèdent d'une même préoccupation que les autres disciplines scientifiques.

Legrand (1990) décrit *la rationalité du quotidien* comme suit :

> La rationalisation de la vie quotidienne, en accord avec la culture courante, induit des raisonnements qui, s'ils s'apparentent souvent aux raisonnements scientifiques au niveau de la forme, en diffèrent néanmoins très profondément pour de multiples raisons dont les plus fondamentales sont à mon sens les suivantes :
>
> - Les objets du raisonnement (il s'agit d'événements ou de personnes que l'on voit ou que l'on pressent clairement) n'ont pas besoin d'être formellement définis puisqu'ils préexistent au raisonnement engagé ; /…/ ; dans le quotidien, le caractère d'universalité d'une procédure n'est pas le critère premier de pertinence et d'efficacité.
>
> - La règle "un contre-exemple suffit pour invalider une proposition" fondatrice de la forme que revêtent les énoncés mathématiques et du sens qu'on peut leur attribuer est par contre très inadaptée ici, /…/
>
> - Dans les échanges interpersonnels usuels, la rhétorique du discours se situe davantage au niveau de la recherche du vraisemblable que du vrai, /…/
>
> - Enfin, dans la vie sociale, bien souvent il importe plus de savoir "qui a fait quoi" que "ce qui a été fait" exactement, de ce fait la causalité est souvent confondue (sans ambiguïté dans cette rationalité) avec l'implication logique et l'implication avec sa réciproque; enfin /…/ on confond assez facilement, parce qu'il faut à tout prix conclure, le vrai, l'utile et tout ce qui a l'air de "simplifier" d'une part, le faux, l'inutile, le complexe et tout ce qui n'a pas l'air d'aller directement au but, d'autre part. (Legrand 1990b p. 377)

Les ruptures exposées soulignent le fossé entre ces deux types de rationalités (quotidienne et scientifique). Cette modélisation s'inscrit donc nettement dans une vision de discontinuité épistémologique. En outre nous remarquons que la rationalité scientifique est associée à une « description » de domaines de réalités et des critères de vérité associés, c'est-à-dire une prise en compte des « croyances[32] » tandis que la rationalité du quotidien est associée à des « raisonnements » évalués en termes de finalités (utilité).

Nous pouvons au terme de cette présentation identifier les variables mises en évidence par Legrand dans ces deux types de rationalités : la nature des objets (définis ou directement accessibles), le type de vérité (le vrai ou le vraisemblable), le type de discours (à vocation universelle ou pas), la logique (implication ou causalité), le rôle de l'utilité par rapport à la vérité (caractéristique de la vérité ou pas).

Une question se pose à propos de ce modèle de rationalités. Ce découpage de la rationalité met-il suffisamment en évidence, pour ce qui est de la rationalité scientifique, la différence entre deux démarches complémentaires qui reposent sur des principes fondamentalement distincts et pourtant tous les deux scientifiques : le recours à l'expérience comme élément de validation et la validation sous forme de démonstration ?

c) Modèle de rationalités de Lerouge (1992, 2000)

En didactique des mathématiques également, Lerouge (1992, 2000) propose une modélisation de la rationalité centrée sur un objet ou un domaine précis (« la numération en CP » par exemple). Il commence par distinguer trois types d'objets : les objets matériels qui ont une existence propre, les objets mentaux qui ont une existence psychique et les objets conceptuels qui existent dans un certain contexte culturel. Cette manière de considérer les objets induit alors deux types de rationalités.

[32] Croyances au sens sociologique, c'est à dire système de valeurs.

La rationalité personnelle est constituée de conceptions et de processus d'inférences (processus de construction de conceptions et processus de validation de ces constructions) personnels construits et communiqués dans divers registres symboliques greffés à la langue naturelle et prenant sens dans des situations familières. La rationalité personnelle constitue le système global de structuration des connaissances de l'individu. La conceptualisation dans cette rationalité consiste à construire des objets mentaux à partir des trois types d'objets.

La rationalité culturelle est constituée de concepts et de procédures d'inférences (procédures de construction des concepts et de validation) propres à la discipline portés par des registres sémiotiques et prenant sens dans des situations de référence. La rationalité culturelle constitue le système global de structuration du savoir dans cette discipline.

Ces deux définitions parallèles se fondent sur des dualités processus/procédure, conception/concept, connaissance/savoir, registre symbolique/registre sémiotique, situation familière/situation de référence, qu'il précise ainsi :

Processus/procédure : A rapprocher de la dualité implicite/explicite. Processus désigne une activité mentale par nature impossible à appréhender. Procédure désigne une série de règles, de prescriptions explicitables.

Conception/concept : Un concept est un objet conceptuel défini par le triptyque signifiant-signifié-référence de Vergnaud (sur lequel nous reviendrons plus loin) qui est typé par Lerouge au niveau culturel, donc le produit d'une époque, d'une société. Une conception est un objet mental défini par le même triptyque mais cette fois typé au niveau personnel, c'est-à-dire le produit de l'histoire et des valeurs d'un sujet.

Connaissance/savoir : Les connaissances correspondent à l'acquisition d'un sujet, le savoir à une construction culturelle. La connaissance peut être vue comme un ensemble de conceptions interreliées. Une conception peut intervenir dans plusieurs connaissances.

Registre symbolique/registre sémiotique : En référence au travaux de Duval sur la notion de registre, Lerouge distingue le registre symbolique correspondant à un objet mental représenté par un ensemble de symboles connotés subjectivement qui servent au traitement, à la communication et l'élaboration des connaissances liées à cet objet, et le registre sémiotique correspondant à un objet culturel et constitué d'un ensemble de signes propres à une discipline, qui permet le traitement, la communication et l'élaboration du savoir lié à cet objet.

Situation familière/situation de référence : Une situation familière est un objet mental produit par l'expérience d'un sujet et sur laquelle se fonde la signification d'une conception. Une situation de référence est une situation culturelle sur laquelle se fonde la signification d'un savoir.

La notion de *cadre de rationalité*, est la transposition d'un type de rationalité (personnel ou culturel) sur un domaine particulier. Lerouge distingue quatre dimensions associées à un cadre de rationalité : le type de l'objet, le type de démarche de conceptualisation, le type de démarche de validation, le statut des signifiants graphiques dans les démarches de conceptualisation et de validation. Ainsi la conceptualisation scientifique peut s'analyser en termes de dialectique de jeu de cadre de rationalité (personnel et culturel). Cette analyse se fonde alors sur deux versants : l'un spécifique à l'objet d'étude, et le second plus générique. Ce deuxième versant structurel repose sur quelques principes : le principe d'organisation de la rationalité selon le couple

conception/processus d'inférence (construction et validation des objets mentaux) pour la rationalité personnelle et le couple concept/procédure d'inférence (construction et validation des objets conceptuels) pour la rationalité culturelle, le principe de rupture entre les processus de conceptualisation scientifiques (culturels) et les processus de conceptualisation spontanés (personnels), le principe de conceptualisation par homomorphismes entre trois instances de signification : signifiant, signifié et référence.

Le principe de conceptualisation par homomorphisme provient de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud qui considère un concept comme un triplet formé d'une référence (l'ensemble des situations qui donnent sens à ce concept), d'un signifié (l'ensemble des invariants sur lequel repose ce concept) et le signifiant (l'ensemble des formes langagières ou non langagières qui permettent de représenter symboliquement ce concept, ses propriétés, ses procédures de traitement…). La notion d'homomorphisme désigne le phénomène de transport des propriétés spécifiques du signifiant ou de situation de référence au signifié. Or, si certaines de ces propriétés sont aussi caractéristiques du signifié, l'homomorphisme jouant ainsi un rôle fondamental dans la conceptualisation, d'autres sont seulement spécifiques au signifiant ou à la situation de référence. Dans ce dernier cas il y a alors, pour Lerouge, « contagion de signifiant » ou « contagion de référence » puisque le signifié se voit attribué (par homomorphisme) des propriétés qu'il n'a pas. L'analyse par le cadre de rationalité implique d'étudier spécifiquement ces phénomènes de contagion.

Le principe de rupture de conceptualisation est issu des travaux de Vygotski (1934) qui distingue la conceptualisation spontanée et la conceptualisation scientifique. Schématiquement la première fabrique les objets mentaux en isolant des invariants dans une classe d'objets matériels, les objets matériels sont donc la source de cette conceptualisation ; et la seconde fabrique des objets conceptuels, l'objet n'y est donc pas la source mais le produit. Pour Vygotski, l'initialisation et l'accompagnement dans un processus de conceptualisation repose sur une dialectique entre des signifiants donnés a priori et des situations de référence qui permettent de construire les signifiés associés. La médiation par autrui et le langage ont naturellement un rôle fondamental dans ce processus. Les signifiants servent avant tout à désigner l'objet (matériel) dans le processus de conceptualisation spontanée tandis que pour le processus de conceptualisation scientifique ils servent à son initialisation et à sa médiation. L'analyse par le modèle du cadre de rationalité implique d'étudier cette rupture de conceptualisation portée par cette distinction des rôles de l'objet et du signifiant.

Il s'ensuit de ce modèle que toute étude sur un cadre de rationalité doit spécifier la discipline puis l'objet d'étude. Cet objet ensuite est décomposé en triplet signifiant-signifié-référence selon le concept de Vergnaud (1990), le signifiant est lui-même décomposé suivant les différents registres sémiotiques de Duval. Ces niveaux d'interprétation sont systématiquement scindés selon deux points de vue, personnels et culturels. Les homomorphismes de significations sont alors déterminés, et en particulier les phénomènes de « contagion ».

Lerouge (1992, 2000) étudie spécifiquement les phénomènes liés à l'utilisation de différents cadres de rationalité pour conceptualiser la droite. Il identifie chez les élèves des cloisonnements de l'objet droite dans des cadres mathématiques (géométrique ou analyse) qui leur semblent étanches. Il y a ainsi une droite géométrique et une droite en analyse qui s'ignorent aussi

bien du point de vue des conceptions que des procédures de validation. Il identifie aussi « l'enfermement conceptuel dans le familier des élèves » (déjà rencontré chez Legrand) qui produit des « contagions de signifiants » en géométrie ou « des contagions de références » en analyse. En particulier ces contagions conduisent les élèves à envisager des intersections de droites sécantes contenant plusieurs points, selon l'épaisseur du trait ou l'angle d'inclinaison des droites en géométrie, et selon la vitesse des voitures qui se dépassent et dont ces droites sont les représentations linéaires de la position.

A première vue les modèles de rationalités de Legrand (1990) et Lerouge (1992, 2000) semblent, au niveau macroscopique, correspondre (Lerouge détaille ensuite beaucoup plus son modèle) : rationalités du quotidien/scientifique pour Legrand (1990) et rationalités personnelle/culturelle pour Lerouge (1992, 2000). Cependant on constate que cette similarité de dénomination masque une différence significative en termes de modélisation. Dans le cas de Legrand (1990) ses deux rationalités sont deux modes stables d'appréhension de domaines de réalités (éventuellement différents), alors que dans le cas de Lerouge (1992, 2000), la rationalité culturelle est aussi une forme de référence stable (mais éventuellement modifiable à l'échelle historique) tandis que la rationalité personnelle est une rationalité qui est appelée à se modifier en permanence et peut s'approcher de la rationalité culturelle pour un objet spécifique (la droite par exemple). On a donc dans le premier cas (Legrand 1990) un modèle où l'individu fait appel à un type de rationalité ou à un autre tandis que dans l'autre cas (Lerouge 1992, 2000), l'individu a un seul type de rationalité plus ou moins proche du modèle de référence (culturel) pour un objet donné. Nous pouvons remarquer au passage le positionnement de ces deux modélisations par rapport au sujet de la continuité/rupture épistémologique précédemment évoqué avec Boudon (2009) : le modèle de Legrand (1990) exprime une franche rupture entre deux rationalités, tandis que la rupture du modèle de Lerouge (1992, 2000) est moins franche, elle existe au niveau de la conceptualisation mais le fait de concevoir un modèle de rationalité personnel permet de modéliser une évolution continue de la rationalité personnelle vers la rationalité culturelle.

Nous voyons aussi que si le modèle de Lerouge (1992, 2000) installe des caractéristiques à caractère général pour l'étude des rationalités, acteurs (sujet et société/culturel), objets d'étude (connaissances et savoir), représentation et conceptualisation de ces objets (au niveau cognitif, sémiotique, épistémologique), et phénomènes de conceptualisation (homomorphisme et rupture de conceptualisation) ce modèle est fabriqué pour une étude locale et spécifique d'un objet, d'un domaine donné (étude de la rationalité de la droite par exemple). Une étude de Malafosse et al. (2000) réalisée en inter-didactique (mathématiques-physique) sera menée pour appliquer ce modèle à la physique au sujet d'un objet commun (la droite mathématique et la droite-représentation graphique des données expérimentales issues des mesures de tension/intensité aux bornes d'un dipôle). Cette étude montrera la capacité du modèle à s'adapter à un tel questionnement. Le changement de cadre de rationalité prend alors deux dimensions : maths/physique et personnel/culturel.

Le modèle de Lerouge (1992, 2000) permet de comparer, pour un objet donné, la rationalité personnelle à une référence, la rationalité de référence culturelle. Cette comparaison, quand elle est menée sur un certain échantillon d'individus, peut permettre d'identifier des invariants de rationalités personnelles par rapport à cet objet. Une question se pose alors : comment traduire

dans ce modèle les formes invariantes (au type d'objets) de la rationalité culturelle et de la rationalité personnelle ?

d) Modèle de rationalités de Boero (2006)

Boero utilise le concept de rationalité construit par Habermas[33] :

> According to Habermas (1999), the adjective "rational" can be attributed to a person that performs an activity, when he/she is able not only to behave according to his/her intention in order to achieve the aim of the activity, but also to account for his/her choices according to validity criteria and communications constraints. (Boero 2006 p. 189)

Ainsi la rationalité selon Habermas (cités dans Boero 2006) est subdivisée en trois composantes interreliées et correspondantes aux contraintes énoncées : la rationalité téléologique, la rationalité épistémique et la rationalité communicative. Voyons ce que recouvrent ces trois rationalités :

La rationalité épistémique selon Habermas (idem) est liée au fait qu'on ne connaît un fait où un élément de savoir que si on est capable d'évaluer la vérité d'une affirmation à son sujet et d'en donner les raisons. Ainsi pour Habermas (ibidem) une opinion peut être rationnelle, même si elle s'avère fausse, du moment que cette opinion est sous tendue par un raisonnement soutenable. Nous remarquerons que réside à cet endroit une difficulté dans la définition car un raisonnement soutenable, n'est-ce pas finalement un raisonnement rationnel ? Dans l'extrait suivant de Habermas (cité par Boero), la rationalité d'une croyance est approchée aussi par l'irrationalité, c'est à dire de faire appel à des croyances tout en sachant qu'on ne peut pas les justifier :

> Someone is irrational if she puts forward her beliefs dogmatically, clinging to them although she sees that she cannot justify them. In order to qualify a belief as rational, it is sufficient that it can be held to be true on the basis of good reasons in the relevant context of justification – that is, that it can be accepted rationally. (Boero et al. 2014 p. 205)

Une croyance est donc rationnelle si elle est tenue pour vraie sur la base de raisons acceptables dans un contexte approprié. Reste à préciser « raisons acceptables » sans utiliser le mot « rationnel », ce qui n'est pas forcément simple. Cette difficulté nous semble découler du caractère général de la rationalité fabriquée par Habermas (cité par Boero 2014). Dans le cadre des mathématiques, les critères correspondants à cette rationalité épistémique, la signification de « raisonnement soutenable » par exemple, sont plus évidents car ils découlent de l'activité mathématique : ils peuvent être précisés plus facilement. Ainsi Boero (2014) propose d'utiliser le modèle de Toulmin pour étudier la rationalité épistémique. Ce modèle de Toulmin est conçu pour analyser les argumentations, en particulier identifier leur fonctionnement interne.

Nous remarquons que la définition de rationalité épistémique d'Habermas(cité par Boero 2014), ensuite particularisée pour son emploi en mathématique par Boero (2014), donne une place essentielle au raisonnement. Ainsi on retrouve, ici, la rationalité surtout associée au raisonnement et à la croyance (rationalité épistémique), mais aussi au comportement « rationnel » (pour la rationalité en général : « rational behaviour »).

---

[33] Philosophe Allemand auteur de *Wahrheit und Rechtfertigung* (Vérité et justification) (1999) et de *On the pragmatics of communication* (1998)

La rationalité téléologique est liée à l'action et à la réalisation d'un but donné. Il s'agit de savoir si le choix intentionnel des outils et moyens que l'on va utiliser est adapté ou non, mais il ne s'agit pas de d'évaluer la réalisation effective du but. Comme pour la rationalité épistémique la question est portée surtout sur les moyens mis en œuvre beaucoup plus qu'à la réalisation finale (la vérité pour la rationalité épistémique).

La rationalité communicative est liée aux pratiques de communication dans une communauté et à la possibilité de ses membres de communiquer entre eux. Trois éléments fondent la rationalité communicative : le sujet (qui veut communiquer), le contenu de la communication et l'interlocuteur. La rationalité communicative correspond à l'intention d'un sujet de communiquer à un interlocuteur le contenu de la communication grâce à des moyens adaptés et choisis intentionnellement pour cela.

Reprenons l'exemple utilisé par Boero (2006) (que nous réutiliserons nous-même ultérieurement) avec lequel il montre l'intérêt d'étudier la rationalité de la production mathématique d'une élève (Anna) selon ce modèle. Anna est une élève brillante de grade 7 (12-13 ans) qui n'a jamais étudié ni l'algèbre et les expressions littérales, ni la démonstration, mais Anna a une expérience de la justification des affirmations arithmétiques. On lui demande de trouver le PGCD de tous les produits de trois nombres consécutifs[34]. Voici la réponse écrite d'Anna :

> *1x2x3* makes *6*, so the GCD cannot be bigger than *6*. I must see if *6* is a divisor of the product of three consecutive numbers in every case. I try with *2x3x4=24,* it is divisible by *6. 3x4x5=60*, it is divisible by *6. 9x10x11=990*, it is still divisible by *6.*
> I try to understand why.
> *2, 3, 4. 3, 4, 5. 9, 10, 11.*
> *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.*
> If I take three consecutive numbers, one or two out of them are even, so they are divisible by *2*; one out of them must be divisible by *3*, because the multiples of *3* follow each other with two other numbers in the middle.
> So the product of three consecutive numbers must be divisible by 2 and by 3, namely by 6. Hence 6 is the CGD of all the products of three consecutive integer numbers. (Boero 2006 p. 186)

Dans son article, Boero (2006) utilise cette réponse d'Anna pour la formation d'enseignants. Sur les 36 enseignants à qui il demande leur avis (cette solution d'Anna est-elle acceptable ou pas d'un point de vue mathématique ?), la moitié répondent que cette solution n'est pas acceptable principalement du fait de l'utilisation d'exemples ou de l'aspect intuitif de la solution. Lorsque la même question est posée à des chercheurs en mathématiques les réponses sont alors très différentes. Les chercheurs perçoivent comme remarquable et claire cette solution principalement dans la manière dont elle est exposée et reconnaissent certaines de leurs propres pratiques de communication. Boero (2006) analyse cette solution avec le modèle de rationalités de Habermas (cité par Boero 2006) et montre que si la solution n'utilise pas d'argument théorique

[34] Find the Greatest Common Divisor (CGD) of all the products of three consecutive integer numbers. (Boero 2006 p185)

(Anna n'en disposait pas à ce niveau de scolarité), elle peut être qualifiée de rationnelle sur les trois plans :

> According to what we know about her community of practice, Anna behaves in a rather rational way: she is able to justify quite well her steps of reasoning (epistemic rationality), she is able to develop a "rational" line of reasoning (in the sense of teleological rationality) and account for it in an acceptable way for her teacher and her schoolmates, and even for some mathematicians (communicative rationality). (Boero 2006 p. 190)

Remarquons que Boero (2006) utilise initialement cette analyse par ce modèle de Habermas (cité par Boero 2006) principalement a posteriori dans des situations de classe faisant intervenir des phases de conjectures et d'argumentation, car il considère que la « culture des théorèmes », autrement dit les mathématiques, est le fruit d'un processus d'acculturation complexe et fondamentalement connecté aux trois dimensions de la rationalité de Habermas :

> Within this cultural perspective we can situate the "culture of theorems" as the complex system of conscious systematic knowledge, activities and communication rules that refer to the processes of conjecturing and proving as well as to their final products. Consequently, we can describe the approach to theorems and proving as a process of scientific "enculturation" consisting in the development of a special kind of rational behavior, characterized by the conscious mastery of the epistemic aspects of theorems (Mariotti et al., 1997; Balacheff, 1982) and by the intentional construction and control of the process that produces the proof, within a communication context with its shared rules. From these considerations we can draw a link between the approach to theorems as a process of "scientific enculturation" and the three components of Habermas' "rational behavior" (the epistemic, the teleological and the communicative rationalities). (Morselli et Boero 2009 p. 211)

Cette focalisation s'est depuis étendue à d'autres problématiques : analyse a posteriori mais aussi a priori des actions-discours des élèves, mais aussi du professeur dans des situations qui ne relèvent pas seulement de preuves et conjectures : voir Boero et al. (2014).

Ce modèle de rationalités, par rapport à ceux de Legrand (1990) et Lerouge (1992, 2000) qui correspondent à la seule rationalité épistémique de Habermas (cité par Boero 2006), envisage la question du rationnel de manière beaucoup plus vaste. Certes les phénomènes liés à la communication, et ceux liés aux motivations (téléologie) peuvent être déterminants, ils correspondent à des facettes de la rationalité mises en évidence précédemment (dialectiques raisonnement/argumentation et individuel/collectif) ; mais à multiplier les points de vue ne risque-t-on pas de perdre en clarté sur les enjeux fondamentaux d'une situation didactique en mathématiques ? Dans quel type de situation (non pathologique) ces rationalités-là peuvent-elles avoir un rôle décisif ? Que ces rationalités supplémentaires permettent-elles de comprendre que l'on ne pourrait pas comprendre sans ? Nous verrons par exemple que la réponse d'Anna, particulièrement bien adaptée pour illustrer le modèle de Boero (2006), est déjà sur le seul plan épistémologique tout à fait remarquable. Mais ce seul niveau d'analyse est-il vraiment suffisant de manière générale ?

e) Double praxéologie – double rationalité

Les auteurs Rouy (2007) et Job (2011), à la suite de Schneider (2007), ont utilisé l'idée d'une double praxéologie dans le domaine de l'analyse pour leurs travaux. Cette double praxéologie s'est transformée avec Rouy (2007) en double rationalité.

Dans ses travaux de thèse, Job (2011) étudie le concept de limite et le caractère lakatosien de ce concept. Il cherche à montrer que la définition de limite a acquis un caractère lakatosien avec les travaux de Cauchy et particulièrement son cours à l'école polytechnique : la définition donnée par Cauchy répond à la méthode de « preuve et réfutation » établie par Lakatos (1984) et sert ainsi de fondement à l'analyse formalisée actuelle. Cette méthode montre comment évoluent conjointement la définition impliquée dans un théorème et la formulation du théorème lui-même, sous la contrainte de l'écriture d'une preuve satisfaisante. Un concept fabriqué selon cette dialectique sera qualifié de « proof-generated ». Pour Job (2011), la définition actuelle de la limite en epsilon est « proof-generated » dans la mesure où elle a été « taillée », par Cauchy entre-autre, pour donner une forme plus rigoureuse à certaines démonstrations d'analyse. Il montre cependant que le concept de limite n'a pas toujours répondu à cette exigence théorique, et découpe son histoire en trois périodes, qu'il qualifie d'institutions au regard de l'analyse :

> En gros, la première institution (les géomètres grecs) est caractérisée par un ensemble de tâches qui sont traitées par des techniques dont la validation est contrainte par des prises de positions métaphysiques excluant la notion d'infini.
>
> La seconde institution (le Calculus), reprend les tâches de la première mais s'en démarque fortement en les traitant par des techniques basées sur la notion d'infinitésimal. Cette différence est permise par des positions métaphysiques différentes concernant l'infini mais également, en contraste avec la première institution, par un certain désintérêt pour les questions de validation. Les paradoxes soulevés par les infinitésimaux sont considérés comme un moindre mal en regard de ce qu'ils permettent d'accomplir.
>
> La dernière institution (l'analyse) continue là où la seconde s'était arrêtée et se focalise sur la mise au point d'un système de validation des techniques qui constituait la seconde institution. C'est le concept de limite qui sera finalement retenu à cet effet parmi un ensemble d'autres tentatives. (Job 2011 p. 105)

Ensuite, en reprenant une catégorisation de Maggy Schneider (2007), il associe aux deux dernières institutions, des praxéologies de type 1 pour le Calculus, de type 2 pour l'analyse, praxéologies que nous allons préciser. Selon la TAD, une praxéologie relativement à une institution est un ensemble formé de tâches qui se réalisent grâce à des techniques issues de technologies qui sont fondées au niveau théorique. Ainsi une praxéologie d'une institution est l'ensemble des pratiques (tâches réalisées selon des techniques) d'une institution ainsi que le discours qui les fonde (technologie et théorie). Maggy Schneider (2007) distingue deux types de praxéologies : type 1 et type 2. La praxéologie de type 1 est constituée d'objets préconstruits au sens de Chevallard (1991), objet qui :

> /…/ n'est pas construit mais présenté par une deixis qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme évidente, non douteuse, plus justement non susceptible de doute ; l'objet est installé, par la monstration qui le désigne dans son existence entêtée, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion. (Chevallard 1991, cité dans Job 2011 p. 168)

Dans cette praxéologie de type 1,

> La nature de préconstruit des objets manipulés se donne à voir dans la partie logos de ce type de praxéologie. Cette partie ne peut être une théorie au sens où le mathématicien (actuel) l'entend du fait même de la nature des objets manipulés qui ne sont pas définis car justement préconstruits. Les validations apportées aux techniques développées sont de natures pragmatiques et non déductives. Il s'agit par exemple de confronter les résultats obtenus à l'aide d'une technique avec

> les résultats obtenus à partir d'autres techniques considérées comme valides. Un autre type de validation consiste à confronter les résultats obtenus à l'expérimentation. (Job 2011 p. 168)

La praxéologie de type 2 correspond à la constitution d'une organisation déductive à visée théorique.

> Entrent en jeu alors les praxéologies de type 2 dont les tâches diffèrent considérablement de celles des praxéologies de type 1. Elles sont en effet propres à la constitution d'une organisation déductive. Il s'agit de reformuler certains concepts pour en faire des proof-generated concepts au sens de Lakatos (1985), l'exemple typique étant celui du concept de limite, formulé en termes de quantificateurs et d'inégalités et inspirant un modèle de preuve faisant abstraction de toute considération géométrique ou cinématique. (Schneider 2007 p. 33)

L'articulation entre les deux praxéologies tient au renversement qui s'effectue du passage de l'une à l'autre : les techniques qui font vivre les préconstruits dans les praxéologies de type 1 deviennent les définitions des objets dans la praxéologie de type 2. Les taches des praxéologies de type 1 deviennent alors les applications des praxéologies de type 2.

Ainsi Job (2011) associe à l'institution « Calculus » une praxéologie de type 1 puisqu'elle étudie des préconstruits (Aire, volume, tangentes…) à l'aide de nouvelles méthodes (infinitésimaux) sans se soucier de l'aspect des fondements théoriques et en cherchant la validation dans des confrontations externes : autres méthodes (première institution) et autres disciplines (physique) qui corroborent les résultats obtenus. Il associe à l'institution « analyse formalisée » une praxéologie de type 2 où la définition de limite est fabriquée pour devenir la fondation conceptuelle de la théorie en tant qu'outil fondamental de la preuve. Ainsi la limite, qui était dans l'autre institution une technique, devient un objet primitif pour l'analyse formalisée.

Rouy (2007) utilise la même distinction de ces deux praxéologies pour analyser les pratiques et discours de professeurs débutants, qu'elle nommera « élèves-professeurs » (ils sont encore en formation), au sujet de la dérivée. Elle caractérise deux rationalités de niveaux I et II à partir de ces deux praxéologies :

> Un premier type de praxéologie décrit le travail allant du système au modèle. Il peut correspondre à la notion d'îlot de rationalité, ou plutôt du cadre de rationalité « de type personnel étendu à la classe avec explicitation des processus de validation ». Pour réaliser certaines tâches portant sur des objets mentaux, des techniques sont développées ainsi que des argumentations dont la nature reste proche des objets (on utilisera par exemple une argumentation de type cinématique pour une tâche relative à un problème de vitesse variable), et dont la fonction sera de convaincre que l'objet mathématique en construction correspond bien à l'objet mental./…/ Dans le cas de l'analyse, une telle praxéologie pourra être appelée « praxéologie des grandeurs » (Job & Schneider, 2007). Nous l'utiliserons par la suite comme une rationalité de niveau I. (Rouy 2007 p. 128)

Et pour la rationalité de niveau II :

> Les praxéologies de type 2 ont quant à elles pour tâche la constitution d'une organisation déductive et autonome en termes d'outils de preuve /…/ Une praxéologie de type 2 sera pour nous l'analyse réelle formalisée, correspondant à un niveau de rationalité culturelle. Nous l'utiliserons par la suite comme rationalité de niveau II. (Rouy 2007 p. 130)

Le niveau II de rationalité correspond à la rationalité culturelle de Lerouge (1992,2000) (ou à la rationalité scientifique de Legrand 1990), rationalité de référence. Rouy (2007) décrit la rationalité de niveau I comme une rationalité personnelle (au sens de Lerouge 1992, 2000) spécifique : les objets y sont mentaux, les validations de type argumentation (et non démonstration, nous reviendrons sur cette distinction).

Nous nous interrogeons ici en termes de modélisation : Lerouge (1992, 2000) définit une rationalité de référence stable (culturelle, et stable à une certaine échelle historique) et une rationalité (personnelle) évolutive ayant vocation (pour ce qui concerne les sciences) à se rapprocher de cette référence. Cette modélisation nous semble analogue à la distinction savoir/connaissance du point de vue de la référence et de la dynamique de l'un à l'autre. Dans ce cas, comment relier ces deux rationalités à deux types de praxéologies qui sont nécessairement fixes par définition ? Si pour la référence (niveau deux) l'analogie est évidente (les deux, rationalités de niveau II et praxéologie de type 2, sont stables), pour le niveau premier, cela l'est beaucoup moins. Il s'agit pour nous de mettre ici en évidence une difficulté manifeste de la modélisation de la rationalité sur laquelle nous reviendrons : comment envisager la rationalité dans sa dimension à la fois dynamique (un individu est susceptible de changer de rationalité) et à la fois statique (la rationalité vue comme un ou plusieurs systèmes fixés d'appréhension d'un domaine de réalité) ? Il y a aussi sous-jacente à cette question, celle de la (dis)continuité d'une rationalité à l'autre et des étapes d'évolution associées pour un individu.

Mais revenons aux travaux de Rouy (2007). Son analyse, à la fois des manuels et discours des élèves-professeurs, l'amène à introduire deux autres niveaux de rationalités : le niveau 0, et le niveau 2bis[35]. Le niveau 0 correspond à l'utilisation d'évidences visuelles ou d'analogies d'écritures, tandis que le niveau 2bis correspond à une « praxéologie à trou » qui n'est ni de type 1, ni de type 2, mais importe des éléments de type 2 justifiés par des éléments de niveau 0. L'exemple d'un extrait de manuel correspondant à la définition de tangente est donné :

> La **tangente en un point d'une courbe** est la droite dont la position est la limite, si elle existe, de la position d'une sécante variable AB à cette courbe, lorsque le point variable B tend vers le point fixe A. (Rouy 2007 p. 218) mis en gras par l'auteur.

Rouy (2007) explique que cette définition est associée dans ce manuel à la détermination du coefficient directeur afin, selon elle, d'établir l'équivalence entre la « tangente analytique » et la « tangente géométrique » vue comme limite de sécantes, ceci établissant bien un rapport entre des éléments de niveau 0 (Visuel) et d'autre de niveau II (théoriques) :

> Comme nous l'avons montré précédemment, cette praxéologie juxtapose des extraits de théorie avec des illustrations nécessitant alors un discours mêlant les énoncés théoriques (niveau 2) avec l'évidence visuelle ou des analogies d'écritures, que nous avons associées à une rationalité de niveau 0. C'est pourquoi nous avons qualifié ce discours « intermédiaire » de discours 2bis. (Rouy 2007 p. 252)

Rouy (2007), à partir de ses expérimentations sur la notion de dérivée, identifie cette « rationalité à trou » entre autres comme un évitement des définitions des objets :

> Nous avons de plus souligné que la présence d'objets mentaux comme la tangente et la vitesse instantanée constitue un véritable obstacle à ce changement. En effet, les transpositions étudiées montrent plutôt un évitement de leur définition, amenant ainsi à les considérer comme implicitement « évidents ». (Rouy 2007 p. 257)

[35] La perméabilité des notations entre type de rationalité (I, II) et le type de praxéologie (1,2) nous semble liée à l'extrême proximité des deux dans les définitions données. Nous conservons les notations authentiques pour ce qui est des citations de l'auteure mais adoptons pour le reste du texte le code uniforme suivant : niveaux de rationalités 0, I, 2bis, II qui sont les notations les plus usitées (on voit également 1 et 2).

Job (2011) constate lui-même la difficulté que représente le rapport à la notion de définition pour les élèves (non plus les élèves-professeurs) pour passer d'une praxéologie de type 1 à une praxéologie de type 2 :

> En effet, les difficultés des élèves à entrer dans une perspective lakatosienne concernant le concept de limite peuvent également se comprendre comme une difficulté à effectuer la transition entre une praxéologie de type 1 et une praxéologie de type 2. Premièrement, les difficultés éprouvées par les élèves à conformer leur rapport à la définition à celui attendu correspond bien à la difficulté à entrer dans une praxéologie de type 2 puisque le rapport attendu est celui dicté par les praxéologies de type 2. Deuxièmement, le renforcement de ces difficultés induit par le rapport que l'école noue au savoir visé peut également s'interpréter selon la dichotomie praxéologique distinguant type 1 et type 2. L'école sous couvert d'enseigner une praxéologie de type 2 enseigne une praxéologie bâtarde ne relevant, ni du niveau de rationalité propre aux praxéologies de type 2, ni de celui propre aux praxéologies de type 1. Elle emprunte aux deux selon une logique dont la seule visée est de rendre compatible la résultante avec l'écologie qui lui est propre. On induit les élèves, à coups de tours de passe-passe sémantiques, à penser que les définitions données ne sont finalement que l'expression, compliquée, étrangère, symbolique, parce que mathématique, d'objets mentaux qui seraient partagés par tous. (Job 2011 p. 503)

Nous reviendrons sur le rôle que joue la notion de définition pour la rationalité au moment où nous définirons un nouveau modèle de rationalités. Nous remarquons que Job (2011) pointe également cette « praxéologie bâtarde » que Rouy (2007) désigne plus délicatement comme discours « 2bis » ou comme « praxéologie à trou ». Aussi nous nous interrogeons sur les désignations de ce type de praxéologie. En particulier, nous nous interrogeons sur l'avantage que semble porter la praxéologie de type 1 aux yeux de ces auteurs. Nous pouvons faire une hypothèse sur cette apparente préférence, hypothèse qui nous semble être à la source de la notion de rationalité : des décisions, raisonnements et comportements rationnels doivent prémunir des contradictions. Or les praxéologies de type 1 et 2 et les rationalités de niveaux I et II respectent d'une certaine manière cette contrainte, mais ce n'est pas le cas du discours 2bis. Autrement dit, sur le plan théorique on pourrait démontrer n'importe quel énoncé en utilisant un discours 2bis, ce qui est un sacrilège pour un mathématicien ; et c'est certainement à ce titre-là qu'on peut penser qu'il mérite, aux yeux des auteurs, de tels qualificatifs. Schneider (2007) décrit cette incompatibilité des deux types de praxéologies 1 et 2 (rationalités pour Rouy) :

> Ces deux types de praxéologie conduisent à des développements mathématiques presque étrangers les uns aux autres. Si une praxéologie de type 2 peut conduire à une théorie mathématique standardisée, plus ou moins globale, il n'en va pas de même des praxéologies de type 1 qui débouchent sur des argumentations non assimilables à des théories canoniques plus ou moins locales. En effet, s'il peut y avoir interpénétration entre les deux, c'est au niveau des tâches ou des techniques mais pas à celui des discours qui valident les secondes en regard des premières. (Schneider 2007 p. 34)

Il est évident qu'en terme de praxéologie portée par une institution, les deux discours sont nettement incompatibles tant au niveau technologique que théorique. Mais alors, si on adosse la notion de rationalité sur ces types de praxéologies, comment un même individu peut-il adopter, au sein d'une même institution, différents types de praxéologie/rationalités, et alors que leurs fondements théoriques sont incompatibles, sans que cela ne déclenche d'instabilité du système professeur-élève ? Cette modélisation de la rationalité n'est-elle pas par nature instable ? Ceci est encore une question que nous devrons aborder lors de notre modélisation des types de rationalités.

C'est en tout cas cette forme de paradoxe que souligne Rouy (2007) dans sa conclusion au sujet des élèves-professeurs et de leurs difficultés à situer leur discours en termes de rigueur et de niveau de rationalité :

> Il nous semblait pourtant que les pratiques observées allaient au-delà d'une possible « maladresse du débutant » et pouvaient aussi révéler la difficulté plus interindividuelle à travailler au niveau des raisons d'être du savoir mathématique en jeu, qu'il s'agisse des objets à définir ou des techniques dont on voudrait valider l'utilisation. La difficulté serait alors de rester mathématiquement rigoureux sans pouvoir utiliser la théorie alors qu'elle constitue en général l'aboutissement de la recherche de rigueur. (Rouy 2007 p. 462)

f) Démonstration et rationalité selon Duval

Du 3 au 4 mai 2005 s'est tenu à Montréal (Canada) un colloque sur le « Raisonnement mathématique et formation citoyenne » organisé par le Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec sous le nom de GDM 2005. La conférence d'ouverture « Compréhension des démonstrations, développement de la rationalité et formation de la conscience individuelle » est effectuée par Raymond Duval. Nous interrogerons ce texte en particulier sur la relation entre compréhension des démonstrations et rationalité(s) : laquelle entraîne l'autre ? Nous veillerons, en particulier, à pointer les éléments de réponses de Duval à ce sujet.

Selon Duval (2005), étudier l'enjeu éducatif que représente l'apprentissage de la démonstration nécessite d'envisager un double point de vue : l'un épistémologique au sujet de la démonstration, du raisonnement et de la rationalité, l'autre cognitif au sujet des processus impliqués dans ces démarches et dans l'évolution de la conviction que génèrent ces processus. Concernant les démonstrations, il commence par noter la difficulté essentielle pour les élèves (et pour le professeur par conséquent) :

> Les démonstrations ne fonctionnent pas pour eux comme des preuves, car elles ne semblent pas répondre à un besoin de justification et, lorsque ce besoin est ressenti, elles n'entraînent pas de conviction. (Duval 2005 p. 7)

Cela le conduit à poser quatre questions qui formeront le fil conducteur de son exposé :

> Pour étudier cette question de l'apport de la compréhension des démonstrations au développement de la rationalité et au « devenir une personne », selon l'expression de Rogers, nous devrons donc adopter à la fois les points de vue épistémologique et cognitif sans les confondre. Pour cela, nous allons examiner les quatre questions suivantes :
>
> 1. Qu'accepte-t-on comme preuve en mathématique ?
>
> 2. Qu'est-ce qui fait qu'une preuve est une preuve ?
>
> 3. Comment passer d'une source de conviction à une autre, ou comment faire prendre conscience du fonctionnement de « déductions » valides ?
>
> 4. Quel apport pour la formation au-delà des mathématiques ? (Duval 2005 p. 8)

Pour étudier la première question, à partir de deux exemples de situations géométriques de démonstration de niveau collège, plusieurs types de démonstration possibles sont proposés. D'un point de vue mathématique, seules les démonstrations géométriques (à partir des propriétés géométriques valides) sont valides, tandis que les démonstrations empiriques (conclure sur une égalité à partir de mesures) ou les démonstrations instrumentales (conclure de la concourance de trois droites à partir du seul tracé) ne sont pas valides sur le plan mathématique. Il en va tout autrement du point de vue des élèves qui ont tendance à fonder leur conviction à l'envers du

point de vue mathématique : les démonstrations empiriques et instrumentales les convainquent tandis que les démonstrations géométriques ne créent pas de conviction. Sont rappelés alors les différents types de preuves proposés par Balacheff : l'empirisme naïf, l'expérience cruciale, l'expérience générique et l'expérience mentale. La piste qui consiste alors à imaginer chacun de ces types de preuve comme les différents stades d'un apprentissage où la démonstration mathématique en serait le stade ultime et seule reconnue par la communauté mathématique invite à un questionnement sur la nature même de la preuve et sur la possibilité de passage d'un type de preuve à l'autre pour un élève : y-a-t-il rupture cognitive entre les fonctionnements respectifs de ces types de preuve ? Ceci est l'objet de la deuxième question : Qu'est-ce qui fait qu'une preuve est une preuve ?

Si une première réponse à cette question peut être « la conviction qu'elle génère », la réponse peut aussi se trouver dans « le lien étroit entre la preuve et la rationalité » : quelle est la cause de cette conviction qui justement fait si souvent défaut ? Duval répond alors ainsi :

> Quelque chose fonctionne comme preuve pour quelqu'un lorsque cela lui fait prendre conscience de la nécessité ou de l'impossibilité d'une affirmation avancée comme une conjecture (en mathématiques) ou une hypothèse (en dehors des mathématiques), comme une éventualité (dans une discussion pour une prise de décision). Il y a donc autant de types de preuves qu'il y a de types d'expériences conduisant à cette prise de conscience de la nécessité, et par conséquent de types de nécessité. (Duval 2005 p. 13)

Duval distingue trois types de nécessités : une nécessité « logique, métaphysique et géométrique » (pour reprendre l'expression de Leibniz à propos des mathématiques), une nécessité physique (encore Leibniz) et une nécessité socio-normative.

La première (nécessité « logique, métaphysique et géométrique ») est ainsi décrite :

> C'est celle dont on prend conscience dans la démonstration et c'est celle qui a longtemps servi de modèle pour le développement de la rationalité scientifique/…/ L'expérience qui conduit à l'expérience intellectuelle de la nécessité est la production d'un dérivation déductive valide de propositions, la validité de la déduction étant intrinsèque à son mode de production. La prise de conscience de cette nécessité est interne à des opérations discursives de pensée, quel que soit le système de représentation sémiotique utilisé. (Duval 2005 p. 15)

La seconde (nécessité physique) « ne dépend d'aucune manière des opérations discursives de la pensée » et « se découvre de manière externe et indirecte à partir de l'observation de régularités et d'impossibilités de fait ».

La dernière (nécessité socio-normative) est celle qui se construit dans l'interaction des membres d'une communauté. Elle est associée à des règles sociales d'interactions et aux décisions et solutions adoptées collectivement au terme d'un débat. L'une des règles dont l'application est une condition nécessaire de la crédibilité de la parole est la non-contradiction. Appliquer cette règle signifie alors ne pas tenir de propos contraires à ceux qu'on a antérieurement énoncés sur un même sujet. Ce principe de non-contradiction n'est pas d'abord de nature logique mais correspond plutôt à un critère éthique et pratique : il vise l'efficacité de l'échange.

> Plus globalement, toute approche mettant l'accent sur le lien étroit entre le dialogue, le débat et le développement de la raison (logos et non pas ratio) est ancrée sur l'expérience d'une nécessité socio-normative pour pouvoir résoudre un conflit. (Duval 2005 p. 16)

L'adoption d'une perspective de nécessité socio-normative va déboucher, par exemple, sur la définition de preuve de Balacheff (1987 cité par Duval 2005) :

> La définition générale de la preuve, proposée par N. Balacheff, s'inscrit dans cette approche : « nous appelons preuve une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs » (1987, p. 148). (Duval 2005 p. 17)

Deux questions sur les rapports entre la nécessité socio-normative et « logique, métaphysique et géométrique » sont alors posées : si une démonstration est d'abord une forme de preuve, ne va-t-on pas subordonner la première nécessité à la seconde ? Et réciproquement peut-on vraiment envisager une subordination inverse, les mathématiques imposant les normes/décisions éthiques et citoyennes ?

Dans tous les cas la question de savoir si on peut passer d'un type de preuve à un autre, d'une nécessité à une autre, se pose. Selon Duval la réponse est nette : non seulement les procédures de résolution sont très différentes sur le plan épistémologique mais elles supposent des procédures de contrôle tout aussi distinctes et donc relèvent de modes de convictions très différents.

Remarquons que nous retrouvons à nouveau cette question de la (dis)continuité épistémologique. C'est à l'aide d'un tableau de synthèse qu'il montre les possibilité/impossibilité de passage d'un type de procédure à un autre, d'un type de preuve à un autre dans le cadre d'activités géométriques en classe.

Registre	Représentations visuelles		Opérations discursives ou actes de parole	
Type de nécessité	EMPIRIQUE (**évidence** de la perception)	PROCÉDURALE (**nécessité** de type physique)[4]	THÉORIQUE (**nécessité** logique ou géométrique)	SOCIALE (**nécessité** normative)
STATUT ÉPISTÉMOLOGIQUE	**CONSTAT perceptif ou lecture directe** (lecture sur un instrument de mesure)	**RÉSULTAT** d'une procédure de **construction instrumentée** ou d'une **reconfiguration** des parties de la figure de départ	**DÉMONSTRATION** (utilisation de définitions et de théorèmes à partir d'hypothèses)	**NORME COMMUNE** ouvrant un espace de dialogue et de coopération non conflictuelle avec les autres
SOURCE COGNITIVE DE LA CERTITUDE	***SUPERPOSITION*** d'un coup d'œil, à l'aide d'un gabarit ou ***COMPARAISON*** des valeurs numériques obtenues par lecture directe	***INVARIANCE*** du résultat de l'enchaînement des opérations de construction, ou ***INVARIANCE*** des unités figurales des parties de la figure de départ dans la transformation figurale	***RAISONNEMENT VALIDE*** dont toutes les dérivations sont localement **nécessaires** et dont la continuité globale est sémiotiquement assurée	***CONSENSUS*** sur "……" se dégageant au terme de discussions ou de débats conduisant à son adoption plus ou moins explicite

Figure 6. Procédures de résolution, types de preuve et sources de conviction

Figure 11 : procédures, types de preuves et de conviction selon Duval (Duval 2005 p. 18)

Ce tableau met en évidence des modes de convictions incompatibles qui empêchent a priori les passages spontanés des élèves d'un type de nécessité à un autre.

Duval (2005) pose la question :

> Certes, pour favoriser ce passage, on cherche à mettre en place des situations d'échange et de discussion au cours desquelles les élèves ont à produire et à confronter des arguments à l'appui d'une conjecture, c'est-à-dire d'une « hypothèse » au sens expérimental du terme. Mais le passage d'une situation d'argumentation et de contre-argumentation dans un débat, à un raisonnement intrinsèquement valide représente un changement complet dans la manière spontanée de justifier et de raisonner. Les élèves peuvent-ils d'eux-mêmes prendre conscience du changement exigé ? (Duval 2005 p. 20)

Nous considérons cette dernière question comme centrale dans notre problématique du développement de la rationalité de l'élève. Au terme d'un enseignement mathématique, les élèves devraient pouvoir disposer d'une rationalité qui leur permette de changer, à volonté, de type d'argumentation et mobiliser celle qui est adaptée suivant le contexte. Il est clair que Duval (2005) se place, là, plutôt au collège, pendant la période d'apprentissage de la preuve, et sa réponse pour ce cadre est négative. D'autre part, au sujet du tableau de Duval (2005), nous remarquons des types de nécessités (empirique et procédurale) qui relèvent de types de rationalités (puisque selon Duval (2005) la rationalité se fonde sur l'expérience de la nécessité) qui ne sont pas différenciées dans les modèles de Legrand (1990) et Lerouge (1992, 2000) mais qui pourraient correspondre à la rationalité de niveau I de Rouy (2007).

Vient ensuite naturellement la troisième question : « D'une source de conviction à une autre : comment faire prendre conscience du fonctionnement de « déductions » valides ? »

Il s'agit de la question de l'enseignement de la démonstration, et de l'expérience de la nécessité.

Le premier point abordé concerne la circularité entre définition et raisonnement déductif :

> Le raisonnement déductif n'est pas d'abord nécessaire pour les démarches de démonstration, mais pour la compréhension des énoncés, à commencer par les définitions. Il y a, en mathématiques, une circularité cognitive entre définition et raisonnement déductif : l'élaboration des définitions se fait par rapport à l'utilisation déductive qui en sera faite (Duval 2005, pp. 37-38). Coupées de cette pratique du raisonnement déductif, les définitions mathématiques, et donc les termes de propriétés qui les abrègent, n'ont plus de sens. (Duval 2005 p. 21)

Nous retrouvons ici le rôle de la définition dans la question de la rationalité (Cf. modèle de rationalités de Legrand 1990), rôle qui est ici directement lié au raisonnement déductif. Si Lakatos (1984) détaille le jeu de construction entre théorème et définition (Lakatos 1984), ce qui est affirmé ici par Duval (2005) précède ce jeu : la forme finale de la définition est évidemment déterminée par ce jeu (Lakatos), mais avant cela c'est le sens même de la notion de définition qui en est le premier produit (Duval 2005).

Le second point concerne le sens d'une proposition mathématique, sens qui s'établit grâce à trois composantes selon Duval (2005) :

Le contenu, c'est-à-dire les mots et relations qui la composent.

Le statut, c'est-à-dire le statut des mots dans la proposition (Hypothèse ou conclusion par exemple) mais aussi le statut de la proposition elle-même (définition, théorème, axiome…)

La valeur épistémique, c'est-à-dire le potentiel de transformation de la valeur de vérité de la proposition pour un individu. En mathématiques la valeur logique de vérité est associée à la seule valeur épistémique du nécessaire.

Cette triple composante du sens sert en partie de fondement à une technique pour l'apprentissage de la démonstration en deux phases que décrit Duval (2005). La première phase est non discursive et sous forme de construction, par l'élève, de schéma de preuve (« graphe propositionnel ») qui est contraint par trois règles de construction, règles qui précisément traduisent les fonctions des différents sens d'une proposition mathématique (statuts et contenus). La seconde phase correspond à la traduction par l'élève en discours libre de ce schéma qui constituera la démonstration. Il est alors observé une appropriation assez rapide de la méthode et une évolution positive des textes vers une simplification associée à un changement de valeur épistémique : les textes manifestent une conviction que certains élèves appréhendent comme une véritable découverte.

La quatrième question : Quel apport pour la formation au-delà des mathématiques ?

Duval (2005) cherche à définir les conséquences de l'accès à la compréhension de la démonstration sur les individus en termes de développement de la conscience éthique et sociale. Et c'est précisément la question du rapport à la « règle » qu'il choisit comme entrée, à cause de « l'explicitation qui est communément faite de citoyenneté en termes de respect des règles et de responsabilité. ».

Un « conflit très profond » traverse le rapport aux règles car ces règles constituent des contraintes externes qui s'opposent au besoin de liberté de se donner ses propres règles de conduite. Piaget analyse l'évolution du rapport aux règles de l'enfant comme « une prise de conscience de la nécessité et une complexification de cette prise de conscience ». Ainsi il lie le développement de la pensée logique et de la conscience morale. C'est à la démarche expérimentale que Piaget donne un rôle important dans la socialisation et l'adhésion aux règles communes. Duval (2005) se demande si le choix de la démonstration mathématique ne serait pas plus judicieux dans la mesure où la méthode expérimentale relève de la nécessité technique ou physique et non de la nécessité logique ou normative. L'expérience intellectuelle de la démonstration se distingue clairement de l'expérience de la nécessité physique en ce qu'elle ne repose pas sur des règles externes à l'individu, qu'elle dépend des substitutions de propositions que l'individu doit accomplir lui-même, et que la conscience de la nécessité logique ou mathématique est vécue comme plus intense que tout autre type de nécessité. A l'opposé les preuves expérimentales reposent sur des nécessités externes et contingentes (observations). Duval (2005) développe ensuite l'idée d'une rationalité propre à la parole.

> Il y a une rationalité qui est intrinsèquement liée à la pratique de la parole dans les interactions sociales. C'est celle signifiée par le terme grec logos, signification qui s'est trouvée occultée par le choix du terme latin ratio pour le traduire. Ainsi, Platon pouvait opposer le logos à la violence pour l'organisation de la cité. Or, cette rationalité intrinsèque à la parole repose essentiellement sur des règles qui déterminent les conditions de possibilité d'un dialogue ou d'une discussion, et non pas celles d'une validation scientifique (épistémè). **La rationalité s'éveille chez un individu quand il devient sensible à ces règles dialogiques et non pas logiques.** (Duval 2005 p. 32) mis en gras par l'auteur.

Ces règles sont principalement celles de l'alternance du locuteur et de la non contradiction.

Ainsi Duval (2005) implique deux types de rationalités complémentaires dans la formation éthique et citoyenne de l'individu : la *rationalité dialogique*, pour laquelle l'individu est prêt à accepter les règles extérieures à lui-même à partir d'un accord qu'il peut construire avec les autres, et la *rationalité apodictique*, qui, elle, est indépendante du jeu dialogique des accords et désaccords.

> Reconnaître deux origines différentes de la rationalité, c'est reconnaître le développement de deux formes fondamentales de rationalité, l'une scientifique et l'autre socio-normative, qui ne dépendent pas l'une de l'autre. /.../ Ce sont donc là deux formes de rationalité qui sont irréductibles et qui peuvent soit se renforcer soit s'opposer. Leur irréductibilité apparaît à travers le type et la force de conviction dont elles sont la source. L'une produit une conviction autonome et universelle, l'autre une conviction hétéronome et relative à l'identité, à l'histoire, à l'organisation d'un groupe ou d'une société. Cela soulève évidemment la question de l'unité de cette instance qu'on appelle la Raison et qui ne peut pas être considérée comme une faculté dans le sens où la perception, la mémoire, l'imagination, l'intelligence ou la volonté sont des facultés. (Duval 2005 p.36)

Le jeu des mathématiques nous semble particulièrement bien correspondre à cette recherche permanente de l'équilibre entre ces deux formes de rationalités et modes de convictions. En effet, d'une part on considère les mathématiques comme produit d'une communauté où certaines conventions s'imposent du fait de cette construction collective, et d'autre part on considère les mathématiques comme recherche de l'apodicticité, qui par nature concerne l'universel, recherche qui ne relève pas, de ce point de vue, de conventions extérieures mais de l'exercice de la pensée autonome.

Nous retrouvons dans ce texte certains des aspects que nous avions déjà rencontrés précédemment, à savoir le rôle du collectif mais aussi la question de la discontinuité identifiée ici entre les modes de conviction correspondant aux différents types de nécessités (en particulier socio-normative et logique/métaphysique/géométrique). Deux types de rationalités nouveaux sont précisés : la rationalité empirique-procédurale (correspondant à l'expérience) et la rationalité dialogique (correspondant aux règles du dialogue). Nous retiendrons enfin le rôle donné à l'expérience de la nécessité, nécessité qui peut être de plusieurs types et qui, pour Duval (2005), fonde les rationalités.

g) Exemples de travaux abordant la rationalité

Le thème 8 du colloque EMF[36] 2006 à Sherbrooke (Canada) est « Développement de la rationalité mathématique au fil de la scolarité ». Le cadre général du travail de ce thème est large puisqu'il concerne à la fois la définition de la rationalité, le questionnement de la rationalité au niveau historique, culturel, scolaire, épistémologique, mais aussi en termes de méthodes d'apprentissage/enseignement et de rapport au langage. Onze contributions (qui représentent à l'écrit chacune une dizaine de pages) ont été présentées et une séance de bilan a été réalisée collectivement. Ce groupe de travail représente, a priori, un lieu significatif des travaux qui existent en didactiques sur le thème de la rationalité.

[36] EMF : Espace Mathématique Francophone

Nous analysons les actes du colloque du thème huit, selon deux niveaux d'analyse. Le premier niveau correspond à un niveau global : quels sont les différents modèles de rationalité(s) mobilisés pour ces contributions et sous quelle forme apparaissent-ils ? L'autre niveau est plus local et concerne les apports spécifiques réalisés au sujet de la rationalité.

Notre premier niveau d'analyse global sera qualitatif et quantitatif (cf annexe pour des résultats plus détaillés). On remarque que peu de contributions définissent les mots « rationalité » ou « rationnel » (seulement 4 sur 11). On remarque aussi que la majorité de ces contributions sans définition utilisent peu ces mots et quasiment exclusivement dans leur forme simple « rationalité » ou bien spécifique « rationalité mathématique ». L'utilisation par tous de la dénomination « rationalité mathématique » laisse penser que cette précision permet de distinguer cette rationalité spécifique d'une autre, autre qui n'est (presque) jamais précisée pour ceux qui ne définissent pas ces mots. Tout se passe comme si ces mots étaient « transparents », c'est-à-dire bénéficiaient d'une signification évidente, claire et partagée. On remarquera enfin que seules les références correspondantes aux modèles de Lerouge (1992, 2000) et Legrand (1990) apparaissent dans les bibliographies, chacun seulement une seule fois, et que les auteurs correspondants utilisent des dénominations cohérentes avec ces modèles. On observe aussi deux autres modèles moins connus.

Nous remarquons aussi que lorsque les mots « rationnel » et « rationalité » ne sont pas (ou peu) utilisés, d'autres mots semblent occuper la place. Le mot « raisonnement » est par exemple très employé dans ces cas. Cela ne nous étonnera pas puisque la définition standard de rationalité implique la raison donc le raisonnement. Mais parfois ce sont d'autres mots en lien avec le sujet abordé qui occupent cette place vacante (celle de la rationalité et du raisonnement).

Ainsi le mot « raisonnement » est autant utilisé que le mot « rationalité » dans les contributions. Les autres mots mobilisés sont : validation, démonstration, recherche, paradigme, logique, contrôle. Ces mots semblent correspondre à certains aspects de la rationalité. On peut sur la base de cette micro-analyse faire l'hypothèse que les contributions proposent surtout de préciser des facettes spécifiques de la rationalité plutôt que d'essayer de la définir. Cela est peut-être lié au titre du thème 8, « développement de la rationalité au fil de la scolarité », qui autorise, voire induit une vision partielle du concept de rationalité en tant qu'instance (pour reprendre le vocabulaire de Duval 2005) évolutive : on s'intéresse davantage aux aspects qui sont susceptibles d'évoluer plus qu'au concept en tant que globalité.

Étudions maintenant de manière plus locale les diverses contributions et leurs apports spécifiques regroupés autour de quatre pôles : la rationalité vue comme une capacité de contrôle sur le raisonnement, le rôle de la validation dans la rationalité, les continuités/ruptures épistémologiques associées à ce concept, et l'évolution historique de la rationalité.

Parmi les contributions qui définissent les mots « rationnel » ou « rationalité », l'une utilise le modèle de Lerouge (Houdement, 2006), une autre le modèle de Legrand (Hitt, 2006) et deux utilisent deux autres modèles Oliveira, Bednarz, et Lajoie (2006) et Saboya, Bednarz, et Hitt (2006).

Le modèle de Oliveira, Bednarz, et Lajoie (2006) est très spécifique puisqu'il est centré sur l'apprentissage de la proportionnalité. Les auteures définissent ce que signifie « construire une

conduite rationnelle sur la proportionnalité ». Elles mettent l'accent sur le « raisonnement qualitatif » qui permet de vérifier les calculs et aussi d'anticiper avant de s'engager dans les calculs, l'exercice d'un « regard critique », c'est-à-dire de savoir reconnaître si la situation est de proportionnalité ou pas, mais aussi :

> Développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité renvoie également au contrôle que l'élève exerce sur la résolution de différents types de problèmes. /.../ Développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité renvoie ainsi à une certaine flexibilité qui élargit les possibilités d'aborder le problème : variété de procédures de résolution, flexibilité dans le passage d'une procédure à l'autre, capacité à changer de cadre (numérique, graphique, géométrique) pour entrer dans le problème par différents angles. (Oliveira *et al.* 2006 p. 3)

Nous voyons que ce modèle de rationalité est centré surtout sur la proportionnalité mais nous pouvons extraire des caractères généraux plutôt sous forme de verbes d'action : vérifier, anticiper, contrôler, critiquer, raisonner au niveau qualitatif.

Cette dimension du contrôle nous la retrouvons dans le deuxième modèle (Saboya, Bednarz, et Hitt 2006) où aux verbes d'action, vérifier, contrôler, anticiper, d'autres sont ajoutés : juger de la rigueur, de la cohérence et de la validité (de la démarche).

> Devant une production mathématique, l'élève devrait être capable de vérifier son résultat, de juger de la cohérence, de la validité, de la rigueur de sa démarche et de s'engager de manière réfléchie dans une résolution, en faisant preuve de jugement. Ces actions traduisent un contrôle de l'élève sur l'activité mathématique et reflètent chez ce dernier l'acquisition, le développement d'une rationalité mathématique. (Saboya *et al.* 2006 p. 1)

Nous voyons dans la citation suivante des mêmes auteurs que la rationalité peut avoir de multiples facettes, ce qui rend difficile de la circonscrire au point d'être parfois contraint à une forme de circularité dans la description :

> La rationalité renvoie au rationnel, au raisonnement. Une rationalité propre aux mathématiques se manifeste en géométrie, à travers l'idée de preuve par exemple, en algèbre à travers un certain contrôle syntaxique et sémantique exercé sur le calcul algébrique, sur l'activité de généralisation, sur la modélisation, sur la résolution de problèmes. Le contrôle exercé sur l'activité mathématique peut donc être vu, en ce sens, comme l'acquisition **d'une certaine rationalité mathématique (la capacité de l'élève à être rationnel, à faire appel à la raison**). Il n'est pas limité à l'acquisition de la preuve. (Saboya, Bednarz, et Hitt 2006 p.1) C'est nous qui soulignons.

Kouki (2006), au sujet de la résolution d'équations ou d'inéquations, met en avant l'articulation de deux points le point de vue syntaxiqueh et le point de vue sémantique. Cette articulation est, selon Kouki (2006), susceptible de développer la rationalité de l'élève. Le point de vue sémantique consiste à considérer une équation comme un énoncé ouvert qui peut être satisfaite ou non par des éléments de l'univers du discours. Ce point de vue est essentiel dans les changements de registres car il reste invariant : par exemple déterminer une solution d'une équation du premier degré revient à tracer deux droites et chercher leur intersection. On cherche ainsi dans le cas de l'équation un élément qui satisfait l'égalité, dans le cas du registre un élément qui satisfait la relation « être sur les deux droites ». Du point de vue syntaxique, deux équations sont équivalentes si elles sont satisfaites par les mêmes éléments. Ainsi il met l'accent sur deux dimensions du contrôle qu'il associe à la rationalité : les points de vue syntaxique/sémantique et les changements de registres :

> / …/ l'explicitation de l'articulation entre les points de vue sémantique et syntaxique permet de mettre en lumière ce qui se joue dans les nécessaires allers et retours entre registres algébrique,

> numérique et graphique. Elle permet en particulier de favoriser ce va-et-vient entre techniques opératoires se développant indépendamment des objets, auxquels elles s'appliquent, et contrôle de la signification et de la validité des résultats obtenus pour les objets dont on traite, et par là même contribue au développement de la rationalité mathématique. (Kouki 2006 p. 7)

Cette dimension du contrôle de l'individu sur le produit de son raisonnement comme essence de la rationalité est une interprétation nouvelle par rapport aux modèles de Legrand (1990) et Lerouge (1992, 2000). Ceux-ci statuent sur le type de rationalité impliquée dans tel ou tel type de raisonnement plutôt que dans la capacité de l'individu à contrôler ce raisonnement lui-même.

La question de la validation sous la forme de la preuve, de la démonstration ou de l'argumentation, sont très fréquemment associées à la rationalité :

> Les situations de validation occupent une place importante dans le développement de cette « attitude de preuve » qui n'est pas innée, dans le développement de la rationalité mathématique des élèves au fil de la scolarité. Cette rationalité qui implique, entre autres, le passage de la pensée naturelle à l'usage d'une pensée logique régissant les raisonnements mathématiques, se constitue au sein d'une activité sociale et individuelle. (Barallobres et Giroud 2006 p.8)

Ainsi Houdement (2006) évoque le passage de la géométrie perceptive à la géométrie déductive et montre un exemple de classe où les réponses sont variées en fonction du type de rationalité adoptée. Ces types de géométries sont classées en trois paradigmes géométriques : la Géométrie I ou « géométrie naturelle » où les objets sont quasi matériels et l'intuition, l'expérience et le raisonnement s'exercent au moyens de perceptions et d'expériences sensibles, la Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle » qui est hypothético-déductive sur la base d'une axiomatique qui essaie de coller à la réalité sensible (géométrie euclidienne), et la Géométrie III ou « géométrie axiomatique formaliste » qui correspond à une théorie axiomatique qui ne cherche plus à répondre de la réalité sensible (géométrie non euclidienne par exemple). Ces différentes géométries associées à leurs modes de validation spécifiques sont assimilées à des types de rationalités. Ainsi lors de l'analyse des réponses d'élèves, il s'agit d'interpréter leurs réponses dans le bon paradigme, car :

> Laisser croire qu'il n'existe qu'une seule rationalité en mathématiques serait d'une part nier l'histoire, d'autre part abandonner sur le bord du chemin des élèves, mais aussi des générations de peintres, artisans, ingénieurs qui ont contribué à nourrir les mathématiques par la richesse des questions qu'ils se posaient et l'ingéniosité qu'ils mettaient à les résoudre. (Houdement, 2006 p. 7)

Barallobres et Giroud (2006) et Gibel (2006) insistent sur la dimension dialectique sociale/individuelle des phases de validations qui permettent la confrontation des rationalités.

D'autre part, Richard Cabassut (2006) propose un cadre théorique qui permet de distinguer dans les raisonnements de validation de l'enseignement des mathématiques les arguments de nécessité et les arguments de plausibilité. Dans le cas où la conclusion est une vérité nécessaire, le raisonnement de validation est appelé preuve ou démonstration et lorsqu'il est plus ou moins plausible, il sera appelé argumentation. Le terme de « démonstration » est souvent réservé aux preuves abstraites ou formelles, comme par exemple les preuves mathématiques. Si la validation nécessite une réalisation matérielle (preuve pragmatique), une vérification des conséquences (preuve expérimentale) ou se base sur la perception (preuve visuelle) ou sur le contenu et non la forme d'une proposition supposée vraie (preuve sémantique) souvent le terme de «

preuve » sera utilisé plutôt que celui de « démonstration ». L'auteur distingue aussi plusieurs types de vérités :

> Différentes théories philosophiques ou scientifiques proposent des conceptions variées de la vérité, de l'adéquation d'une proposition avec le fait qu'elle décrit, jusqu'à la non contradiction de la proposition avec le système formel ambiant. Par exemple, on pourrait considérer que, dans les institutions respectivement mathématiques, de sciences expérimentales ou de la « vie quotidienne », les inspirations respectivement logicistes, empiristes ou pragmatistes de la vérité dominent. (Cabassut 2006 p. 2)

Il distingue enfin les différentes fonctions de la validation :

Fonction	Description
vérification (preuve ou plausibilité)	valider la nécessité ou la plausibilité de la vérité d'une proposition
explication	fournir un aperçu de pourquoi la proposition est vraie
systématisation (incorporation)	organiser des connaissances en système déductif, incorporer des connaissances nouvelles, utiliser des connaissances anciennes
découverte	découverte, invention, préparation, production de nouveaux résultats
communication	transmission des connaissances

Figure 12 : fonctions de la validation (Cabassut 2006 p. 2)

A l'aide de ce cadre d'analyse, l'auteur étudie les programmes scolaires du collège. Cette étude montre le recours aux deux types d'arguments. La rationalité mathématique se trouve alors mêlée à d'autres rationalités dans un contexte ambigu. Par exemple des arguments de plausibilité sont utilisés pour la phase heuristique dans le cadre d'une rationalité mathématique. L'étude des programmes montre la difficulté à lever l'ambiguïté du contexte lorsque différentes fonctions sont assignées aux validations de l'enseignement des mathématiques.

L'auteur conclut que :

> On a donc coexistence de différentes rationalités dans l'enseignement des mathématiques au collège, faisant référence à des conceptions de la vérité différentes. Cette coexistence est complexe mais elle est surtout fonctionnelle. Pourquoi valider ? Les réponses justifient l'existence d'une rationalité didactique, transposée de ces différentes rationalités, et les intégrant par un contrat didactique le plus souvent implicite. (Cabassut 2006 p. 8)

Cet auteur met en évidence la difficulté de concilier plusieurs approches de la vérité à un moment (milieu de collège) où l'on passe d'une rationalité plutôt de la plausibilité à celle de la nécessité tout en assurant des phases de découverte-heuristique et des phases de validation parfois formelles, ce qui favorise et entretient la confusion. Ainsi il utilise la dénomination « rationalité didactique » pour décrire le type de rationalité mobilisée à l'école du fait de ces différentes contraintes. Nous pensons que cette description en termes de rationalités, à la fois de la transition de rationalité dans l'apprentissage mais aussi des différentes phases et moyens de l'activité mathématique, pose une question déterminante pour ce qui est de la modélisation de la rationalité. En effet avant que l'on enseigne la démonstration à l'élève, celui-ci dispose d'une certaine rationalité que nous appellerons, pour faire simple, « rationalité de la plausibilité ». Mais une fois que la validation par démonstration lui est enseignée, peut-on encore qualifier la recherche de la plausibilité comme l'exercice d'une rationalité en soi ou bien seulement comme d'une

phase de recherche mathématique ? Nous rencontrons là une autre manière de poser la question récurrente de la continuité/discontinuité.

A ce sujet, Durand-Guerrier (2006) montre que la logique mathématique n'a pas vocation à constituer une rupture avec la logique du sens commun et que l'histoire des mathématiques montre qu'au contraire la première s'est toujours appuyée sur la seconde à la recherche de fondements y compris très récemment lors des travaux de refondations de la logique par Frege, Russell, Wittgenstein, Tarski et Quine. L'auteur s'appuie sur une situation de validation de conjecture et du script d'élèves qui ne reconnaissent pas le contre-exemple comme invalidant une conjecture. L'auteur montre qu'en fait, suivant la manière dont on appréhende l'énoncé « ouvert » ou « clos et quantifié implicitement universellement », les réponses de ces élèves qui consistent à rechercher les conditions de validité de la conjecture, réponses proches du sens commun[37], non seulement ont un intérêt mathématique mais peuvent être justifiées y compris sur le plan logique : elles sont donc très rationnelles. Dans un autre exemple de situation, situation du labyrinthe, l'auteure montre que l'habitude qui consiste à considérer tout énoncé conditionnel comme universellement quantifié conduit à des conflits à la fois avec la logique de sens commun mais aussi avec la logique formelle. La conclusion de l'auteur est que la logique de sens commun et la logique formelle sont peut-être plus proches que ce que ne le laisse supposer les pratiques d'enseignement dominantes si l'on adopte le point de vue de la sémantique logique. Ainsi :

> Les deux exemples traités montrent que l'adoption de cette perspective permet de reconsidérer de manière positive la question de la rationalité des élèves réduisant de manière significative la distance entre raisonnement de sens commun et raisonnement mathématique. Ceci permet d'apporter des éléments de réponse à la question de savoir si la construction d'une rationalité mathématique est possible pour tous les élèves. On peut en effet faire l'hypothèse que l'on accompagnera mieux le développement de cette rationalité en considérant qu'elle s'applique tout autant au travail sur les objets et leurs propriétés qu'à la manipulation d'énoncés généraux intemporels, qui ne sont en fait que l'aboutissement de ce travail avec les objets et qui sont susceptibles d'être soumis à révision. (Durand-Guerrier 2006 p. 9)

Le titre de la contribution pose la question « rupture ou continuité ? ». Durand Guerrier (2006) semble juger la rupture un peu artificielle et fabriquée par les pratiques d'enseignement (il y a moyen de la réduire de « manière significative »).

Fernando Hitt (2006), lui, prend position sur l'existence, non seulement repérée chez les élèves mais aussi fondée historiquement, d'une rupture franche entre rationalité mathématique et rationalité du quotidien. Il illustre sa position sur un exemple historique, celui de la correspondance entre Leibniz et Bernouilli (entre-autre) qui montre que la rationalité mathématique ne s'impose pas spontanément y compris aux mathématiciens, et que ceux-ci font parfois usage de la rationalité quotidienne. Il conclut que :

> Nous avons voulu montrer que la construction d'une rationalité mathématique prend beaucoup de temps chez les mathématiciens, et que par conséquent nous devons laisser de côté la position naïve à l'effet qu'une rationalité mathématique puisse être développée de façon naturelle chez les élèves. /.../ De ce point de vue, il semble important de mettre en conflit deux types de rationalités qui peuvent, éventuellement, promouvoir la réflexion et la construction d'une rationalité

[37] Nous pourrions voir cela comme lié à la recherche de l'utilité dans le sens de la rationalité du quotidien de Legrand.

> mathématique. La méthodologie du débat scientifique dans la classe de mathématique (Legrand, 2001) semble être un des mécanismes pour provoquer ce type de réflexion. (Hitt 2006 p. 8)

Enfin Bebbouchi (2006) utilise aussi une analyse historique, celle de l'évolution du statut de la figure en géométrie, des mathématiques égyptiennes aux mathématiques contemporaines et montre que son statut évolue dans son rapport à la preuve. Si de nos jours la démonstration est beaucoup plus fondée sur une axiomatique que sur la figure, à d'autres époques la figure a joué un rôle important pour la preuve. Il conclut que :

> Du collège au lycée, l'enseignement de la Géométrie [devrait] passe[r] par :
>
> - L'observation de la figure.
>
> - Un véritable travail de recherche.
>
> - L'élaboration de conjectures.
>
> - Un examen critique permettant une validation définitivement convaincante par la démonstration, le tout en maintenant un dialogue permanent entre intuition et rigueur. Et c'est ce va-et-vient intuition – rigueur qui va conditionner le rapport rationalité – figure. (Bebbouchi 2006 p.4)

L'étude de ces différentes contributions nous ont conduit à constater une forte diversité des approches, autant dans les modèles mobilisés (implicitement ou non) que dans les facettes étudiées. Nous relevons cependant certains invariants que nous avions déjà identifié précédemment, tandis que d'autres apparaissent : le rôle du collectif, la rupture/continuité épistémologique, la question récurrente de la validation (démonstration versus argumentation ou encore nécessité versus plausibilité) et plus largement du raisonnement et la présence d'une rationalité empirique (non différenciée par les modèles de Legrand et Lerouge mais déjà pointée par Duval).

Nous allons donc conclure cette exploration des travaux didactiques avec un aperçu de la dimension expérimentale des mathématiques, et du rôle des exemples et contre-exemples. Cette dimension a été citée à plusieurs reprise, par exemple au travers de la rationalité empirique ou bien du rôle des contre-exemples...

h) La dimension expérimentale des mathématiques

Comme on l'a vu, Schneider (2007) identifie deux praxéologies en mathématiques, l'une de type 2 plutôt théorique et l'autre de type 1 ayant une dominante expérimentale. Ces mêmes praxéologies deviennent rationalités avec Rouy, identiquement définies. Duval parle lui aussi d'une rationalité empirique-procédurale. Enfin on voit cette question de la rationalité empirique dans certaines contributions de EMF 2006 (Cabassut, Bebbouchi,..). Nous pensons qu'il faut mener plus loin notre enquête concernant cette dimension expérimentale des mathématiques avec quelques généralités sur la dimension expérimentale, et une étude sur le rôle des exemples.

i. La dimension expérimentale des mathématiques

Dias (2008) met en avant quatre facettes de la dimension expérimentale des mathématiques :

- Le rôle de l'incertitude.
- La dimension sociale de la construction expérimentale d'un réel.
- L'interaction dialectique avec les objets.
- La dualité familier/nouveau.

Durand Guerrier (2007) reprend une caractérisation similaire de celle de Dias de la dimension expérimentale des mathématiques :

> Ce qui caractérise la dimension expérimentale en mathématiques, c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets. (Durand-Guerrier 2007 p. 17)

Puis précise la nature du milieu susceptible de favoriser cette dimension :

> Il est nécessaire que ce milieu favorise la mobilisation d'outils (par exemple : élaboration de conjectures ou de règles, élaborations d'objets nouveaux, changement de cadre, mise en relation de propriétés etc…) permettant de mettre en œuvre un traitement mathématique général dont les résultats pourront être confrontés aux résultats des actions sur les objets. Il faut enfin qu'il permette la médiation entre sujets et objets et favorise l'articulation entre les aspects sémantiques, syntaxiques et pragmatiques qui sont mobilisés pour l'élaboration de conjectures puis de preuves. (Durand-Guerrier 2007 p. 17)

De nombreux travaux s'intéressent justement aux dispositifs didactiques qui ont vocation à installer de telles conditions dans la classe. Gardes (2013), dans sa thèse sur l'étude des processus de recherche, décrit un certain nombre de ces dispositifs (Gardes 2013) : Problem-solving, problème ouvert, ateliers MATh.en.JEANS, groupe Maths à modeler, groupe Dream. D'autres dispositifs existent y compris dans les sciences expérimentales, par exemple avec le mouvement de « La main à la pâte ».

Nous ajouterons à cette liste « le débat scientifique en classe », c'est le dispositif que nous utiliserons dans nos expérimentations. Nous en détaillerons ultérieurement les raisons.

Quoiqu'il en soit, la majorité de ces dispositifs privilégie systématiquement une phase conséquente où le professeur observe une forme de retrait afin de laisser l'élève prendre en main son activité, prendre des décisions, élaborer des stratégies, les contrôler, les partager, les valider…

C'est par exemple le sens de l'hypothèse de travail de Giroud (2011) dans sa thèse, quand il décrit les conditions de la démarche expérimentale en classe en termes de contrat didactique pour une activité de type SiRC :

> La pratique de la démarche expérimentale en mathématiques nécessite de mettre en place un contrat didactique différent de l'usuel. Ce contrat devra laisser plus de responsabilité à l'élève dans l'avancement de la résolution du problème. (Giroud 2011 p. 118)

Ce type de scénario est plus généralement celui que modélise la Théorie des Situations Didactiques au travers de la notion de phase adidactique, car selon Brousseau, à certains moments l'activité de l'élève doit être comparable à celle d'un scientifique :

> Le travail intellectuel de l'élève doit être par moments comparable à cette activité scientifique. /…/ Une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il les échanges avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conforme à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc. (Brousseau 1998 p. 49)

ii. Rôle des exemples

Dans cette partie consacrée à la dimension expérimentale, s'intéresser aux exemples et contre-exemples est tout à fait naturel. Si l'on considère que donner une dimension expérimentale à la théorie c'est faire vivre des instances des objets de la théorie pour les interroger concrètement

dans leur dimension singulière tout en cherchant à identifier le caractère général de ce qu'ils donnent à montrer, alors exemples et contre-exemples sont, en effet, au cœur de cette problématique. En outre le travail sur les exemples, les contre-exemples et la question de la validation qui l'accompagne tient également une place centrale dans la pratique du débat scientifique, dispositif que nous utiliserons lors de nos expérimentations.

Comme a priori exemples et contre-exemples sont souvent d'un accès, pour les élèves, beaucoup plus immédiat que la théorie elle-même, ils sont plus concrets, leur emploi dans l'enseignement est très répandu. L'exemple peut d'abord être le représentant d'une classe, d'un ensemble, un objet qui vérifie une condition donnée ou bien peut être le représentant du déroulement d'une méthode, de l'application d'un processus. Plusieurs types d'exemples existent : les exemples cruciaux, les exemples paradigmatiques, les exemples génériques, les non-exemples, les contre-exemples, les hors-sujets.

Un exemple crucial ("pivotal example") peut être soit l'exemple qui permet de départager deux hypothèses concurrentes (sens originel) mais aussi l'exemple qui permet de s'assurer de la vérité d'une conjecture en la mettant à l'épreuve de manière décisive par un choix de valeur sans concession (Balacheff 1988).

> Zazkis and Chernoff (2006) introduced the notion of a pivotal example, defining it as an example that creates or resolves a cognitive conflict and makes learners change their mind with respect to a previously held strategy or belief. They further noted that a counterexample, while sufficient to refute a statement from a mathematical perspective, does not necessarily have the power needed to convince someone to abandon a previously made generalization. As such, a pivotal example is needed. (Zazkis, Liljedahl et Chernoff 2008 p. 138)

Les exemples paradigmatiques : ces exemples sont sensés illustrer de manière particulièrement évidente un phénomène.

Les exemples génériques sont les exemples qui correspondent à des concepts ou des procédures, ou encore correspondent au cœur d'une preuve (sens de Balacheff 1988).

Les contre-exemples sont les exemples qui falsifient la vérité d'une assertion universellement quantifiée.

Les non-exemples sont les exemples qui permettent d'encadrer le domaine de validité d'une hypothèse.

Les hors-sujets sont les cas qui ne sont ni exemples, ni contre-exemples d'une conjecture.

Nous distinguons deux types d'utilisation. La première est l'utilisation par le professeur à des fins d'ostension, pour rendre concrète la théorie ou pour servir de modèle, autrement montrer une généralité en ne montrant qu'une spécificité. La seconde est la mobilisation par les élèves d'exemples à leur propre initiative. C'est évidemment la seconde utilisation qui nous intéresse le plus ici, puisque nous nous placerons résolument dans une perspective constructiviste, dans le cadre de la théorie des situations. Cependant la première utilisation demeure très intéressante à étudier car elle peut constituer à certains moments un moyen de la dévolution, mais surtout les études à son propos, par contraste, expliquent et distinguent l'intérêt de la seconde utilisation.

Une des méthodes d'utilisation de l'exemple en classe, très répandue, désignée comme “worked example”, littéralement “l'exemple travaillé”, est conçu comme un moyen, pour le professeur, de montrer une (des) méthode exemplaire(s) à reproduire. Selon certains auteurs cette technique produit des effets positifs, effets absents quand cette méthode n'est pas utilisée :

> In particular Atkinson et al. argue that worked examples “provide an experts problem-solving model for the leaners to study and emulate” (p181-182). Student who try to solve problem without examples typically develop, practice, and reinforce “novice strategies”- that is, strategies for solving problems that both ignore the deep structure of the problems being solved and are generally ineffective. In contrast, those who use appropriately chosen worked examples as a guide for solving problems are more likely to focus on the deep structure of the problem that they are solving and use more sophisticated strategies for solving it. (Weber, Porter et Housman 2008 p. 246)

Mais la question de « l'exemplarité de l'exemple » se pose alors, car si le professeur a conscience du caractère dont il veut montrer la généralité, l'élève, a priori, lui, ignore laquelle des spécificités doit être regardée comme une généralité :

> How can you expose the genericity of an example to someone who sees only its specificity? Apart from stressing and ignoring, and repeating the general statement over and over, how can the necessary act of perception, of seeing the general in the particular be fostered?
>
> How can you discern the extent of the generality perceived by someone else when looking at a particular example together?
>
> Why do we offer students examples in class, and what are they supposed to make of them? If examples are always examples of something, how can students become aware of that which the examples are supposed to be exemplifying? (Mason et Pimm 1984 p. 287)

Ces questions correspondent à un paradoxe mis en évidence par Mason (2011):

> **Examples are the principal means by which things are learned but also a principal source of confusion.** /…/ Learning from examples seems paradoxical, because in order to experience something as an example of something else such as a concept or technique, it is necessary to have a sense of what is being exemplified; but in order to have a sense of what is being exemplified it is necessary to have some idea of what constitutes an example. (Mason 2011 p. 195) C’est nous qui soulignons.

Des auteurs montrent que le travail sur l'exemple dans l'étude de certains concepts a des vertus sur la capacité de démonstration associée à ces concepts. Ainsi, par exemple, Dahlberg et al. (1997) donnent une définition nouvelle à des étudiants et étudient leur réussite à une série de questions en fonction de leur capacité initiale à mobiliser des exemples. Il s'avère que ceux qui ont spontanément fait appel à des exemples ont beaucoup plus de facilités que les autres. Il en est déduit que l'activité de “example generation” - c'est à dire pour l'étudiant de fabriquer lui-même - des exemples est très profitable à sa compréhension des concepts.

Ainsi la notion “d'espace personnel d'exemples” traduit l'apprentissage en termes d'enrichissement de l'expérience au travers de la rencontre d'exemples, de non-exemples, de contre-exemples d'un certain concept :

> The collection of examples to which an individual has access at any moment, and the richness of interconnection between those examples, constitute his or her accessible example space (Bills et al., 2006). Example spaces are not just lists, but have internal structure in terms of how the elements in the space are interrelated. (Zaslavsky 2014 p. 21)

D'autres auteurs, Iannone, Inglis, Mejía-Ramos, Simpson et Weber (2011) remettent en cause cet effet du travail sur l'exemple. Ils réalisent une étude en reprenant les conditions exprimées dans Dahlberg et Houssman (1997) en donnant à des étudiants une tâche sur un nouveau concept après les avoir préparés de manière différente dans deux groupes distincts. Le premier groupe a une préparation sur le concept assez classique à partir de résolution de problèmes, tandis que le deuxième groupe est préparé avec un texte montrant des exemples et des non-exemples du concept. Les résultats montrent qu'il y a très peu de différence de réussite entre les deux groupes, en fait la différence est légèrement favorable au premier groupe. Un tel résultat est de nature à remettre en cause des a priori positifs sur le travail sur les exemples.

Il s'avère cependant que les conditions de cette étude ne sont pas celles des tenants de l'intérêt de l'exemple. En effet, dans cette étude, le travail préalable des étudiants sur le concept est conçu en dehors d'une problématique globale, les exemples proposés n'ont pas de finalité particulière, et demeurent en dehors d'une prise d'initiative. Les exemples sont donnés et non construits par les étudiants :

> Our analysis supports the view that example construction is particularly useful when students know about the utility of examples and have the choice to construct examples for a specific purpose. (Sandefur, Mason, Stylianides et Watson 2013 p. 338)

Il existe, en effet, plutôt un consensus sur le fait que l'initiative de construire un exemple, non-exemple, contre-exemple par l'étudiant est déterminante pour la conceptualisation :

> The nature and sequence of examples, non-examples and counterexamples has a critical influence of what opportunities learners are afforded, but even more critical are the practices into which learners are inducted for working with and on examples. (Watson et Mason 2002 p. 2)

Mais aussi, par exemple :

> We argue that, to understand the value of exemplification, we need to look at instances of voluntary example use. Studies by Watson and Chick (2011) and Alcock and Inglis (2008) suggest that example generation can be beneficial if the problem solver chooses freely to construct and use examples as one of several tools to achieve a mathematical purpose, such as to prove a statement. (Sandefur *et al.* 2013 p. 324)

Ainsi la proposition pédagogique de “example generation” correspond précisément à demander à l'étudiant de fabriquer des exemples, non-exemples, correspondant à certaines spécifications. Cette méthode pédagogique est largement développée dans Watson et Mason (2005).

Évoquons maintenant le rôle du contre-exemple dans la recherche de validité ou du domaine de validité. Durand-Guerrier (2006), comme nous l'avons déjà signalé, conteste le rôle excessif donné à la recherche de contre-exemple dans l'activité mathématique.

> En nous appuyant sur les travaux que nous conduisons depuis de nombreuses années sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique, nous faisons l'hypothèse qu'une centration excessive sur le rôle du contre-exemple dans l'activité de preuve en mathématiques, au détriment de la recherche du domaine de validité des conjectures émises, est, pour partie, à l'origine de ces difficultés. (Durand-Guerrier 2005 p. 1)

Dans cet article, Durand Guerrier (2005) constate que de nombreux dispositifs pédagogiques tentent de répondre à la question centrale du rapport entre vérité apodictique et activité mathématique en plaçant la validation au cœur de cet enjeu. Cependant les difficultés rencontrées essentiellement pour garantir la neutralité du professeur ont débouché sur des propositions (Le

problème ouvert, le débat scientifique en classe, le dispositif ERMEL) qui donnent, selon elle, un rôle excessif au contre-exemple. Elle illustre cette position, en particulier, par un exemple, une situation où le professeur va systématiquement chercher à faire éliminer les conjectures successives des élèves par des contre-exemples sans prendre en considération l'intérêt propre et les avancées significatives que constituent ces conjectures et leurs améliorations. Ainsi Durand-Guerrier (2005) met en évidence que l'activité mathématique se réduit à un accès seulement syntaxique des énoncés au détriment d'un travail plus sémantique. Elle préconise, en accord avec la théorie des modèles de Tarski, une approche de la validité par les domaines de vérité d'énoncés ouverts. Ainsi les assertions ne sont plus vraies ou fausses mais vraies sur tel ou tel domaine de validité, ce qui permet de conserver leur intérêt et les améliorations successives, ici en termes d'élargissement du domaine de vérité.

Duval, à propos des contre-exemples, abonde dans ce sens en ajoutant que cette centration sur le contre-exemple peut aussi constituer une impasse pour la validation.

> La recherche d'un contre-exemple est une attitude réflexe dans la pratique mathématique. Cependant l'importance de cette attitude ne doit pas faire oublier que cette démarche comme preuve reste limitée aux seuls cas de réfutation. Car un contre-exemple permet seulement d'écarter une conjecture fausse mais non pas de démontrer celle pour laquelle on ne trouve pas de contre-exemple. De ce point de vue, la recherche de contre -exemples laisse entière la question de la preuve en mathématique, c'est-à-dire de la manière dont les conjectures deviennent théorèmes. (Duval 2005 p. 26)

Nous considérons ces écueils comme réels, empêchement de prendre en compte l'amélioration des conjectures successives et impasse pour la validation. Nous montrerons cependant que dans certains cas, cette centration sur le contre-exemple, au contraire permet de mettre à jour les raisons de la validité d'un énoncé. En effet à force de chercher à éliminer les contre-exemples proposés, quand on est convaincu de la validité d'un énoncé, on peut aussi par finir par découvrir les raisons pour lesquelles aucun contre-exemple ne peut être recevable, c'est à dire fabriquer une forme de preuve par l'absurde. Nous montrerons également que la recherche de contre-exemple constitue un formidable moteur de l'activité de l'élève. Aussi faudra-t-il prendre en compte les avertissements sur le rôle limitant que le contre-exemple peut représenter vis à vis d'une activité mathématique au service de la recherche du sens des énoncés.

Nous allons maintenant nous tourner vers la notion de définition qui est souvent associée à la question de l'exemple :

> It is has long been acknowledged that people learn mathematics principally through engagement with examples, rather than through formal definitions and techniques. Indeed, it is only through examples that definitions have any meaning, since the technical words of mathematics describe classes of objects or relations with which the learner has to become familiar. (Watson et Mason 2002 p. 2)

Dans Zazkis et Leikin (2008), par exemple, on évoque le rôle de l'exemple dans le questionnement des différentes définitions de carré données par des (étudiants)professeurs. Il est remarqué que lorsque ces définitions ne sont pas exactes, les exemples produits par les auteurs de ces définitions ne sont pas de nature à permettre l'émergence d'un conflit pour l'auteur entre ce que la définition signifie et ce qu'ils reconnaissent (ou non) comme un carré. Il faut ajouter ici que le format choisi (des interviews) ne permet pas de rétroaction du milieu, en particulier la possibilité pour d'autres de produire des non-exemples de carrés répondant pourtant aux définitions

en cause. S'il est vrai que le conflit de l'auteur de la définition avec ses propres exemples n'est pas possible puisque celui-ci n'envisage pas spontanément les cas gênants de sa propre définition, il aurait été éventuellement possible de le créer à partir de ces rétroactions-là.

La situation de fabrication de définition de Oehrtman *et al.* (2011) que nous avons détaillée au I.1 est paradigmatique du rôle que l'on peut donner à l'utilisation d'exemples et de non-exemples. Cette ingénierie utilise l'autre sens du rapport définition/exemple que celui proposé dans la dernière citation (Watson et Mason 2002), à savoir que la définition se comprend seulement par l'exemple. Cet autre sens suppose la préexistence d'une « forme de définition » pour que les exemples produits par celle-ci soient représentatifs du concept à redéfinir. Les auteurs mettent en évidence le rôle essentiel des exemples de convergence et de non convergence comme :

> The students' recognition and resolution of problems in their reinvention efforts were aided considerably by the presence of the examples they constructed at the start of the experiment. These examples served as sources of cognitive conflict when their definition failed to fully capture the necessary and sufficient conditions under which sequences converge. For example, the students' initial definitions were predictably couched in language that was vague, intuitive, and dynamic. The students immediately identified weaknesses in these definitions as they applied them to their examples that increase monotonically to 4, alternate around 5 or behave erratically before eventually looking like a standard example of a convergent sequence. Having identified these weaknesses, they also looked to their examples to provide direction for their revisions. This pattern of evaluating and refining their definitions against the examples repeated over the 23 cycles during the first three days of the teaching experiment. (Oehrtman et al. 2011 p.335)

Nous voyons là une confirmation du débat initial et évoqué précédemment sur l'intérêt que peuvent avoir les exemples lorsqu'ils sont non seulement conçus par les étudiants mais ensuite interrogés par eux pour répondre de généralités dont ils ont eux-mêmes la charge. Cette situation illustre particulièrement bien le fait que retrouver le caractère général à partir du cas particulier ou bien tester la généralité sur le particulier prend une autre dimension quand l'étudiant en est l'auteur que lorsque cela lui est imposé.

i) Conclusion sur l'étude didactique de la rationalité

Le premier constat que l'on peut effectuer c'est que de nombreuses sciences humaines s'interrogent sur le concept de rationalité et en font une pierre angulaire, ceci donnant lieu à une littérature foisonnante. Au contraire, en didactique des mathématiques le concept est mentionné assez souvent dans les écrits sous sa forme naturalisée mais peu d'études d'envergure (à part celle de Lerouge 1992, 2000 et les travaux à propos du modèle de Boero-Habermas 2006) finalement se donnent l'objectif de l'étudier comme objet. C'est le cas par exemple, lorsqu'un thème de travail du colloque EMF 2006 porte sur la rationalité et que finalement la place dans les contributions au concept pour lui-même est limitée et sont surtout étudiés des aspects du concept, mais très peu en termes de démarche formalisée globale d'accès au domaine mathématique ou bien en termes de référence aux seuls modèles en lice (Legrand, Lerouge...). Que peut traduire cette différence de traitement, fréquence de l'emploi du terme « rationalité » dans la littérature et simultanément pas ou peu de nécessité d'avoir un concept délimité, fondé et défini ?

Le premier apport du modèle de rationalités de Legrand (1990) est de postuler que l'élève, qui répond autrement que ce qui est attendu en général dans le cours de mathématiques, adopte-lui

aussi quand même une pensée qui relève d'une rationalité (postulat P3 de Boudon 2009). Lerouge (1992, 2000) intègre totalement cette hypothèse dans son modèle au point de déterminer une rationalité personnelle. Cette rationalité personnelle est toujours relative à un objet mathématique et sert à mesurer l'écart avec la rationalité culturelle et cela permet de réaliser des études précises sur l'appréhension des objets ainsi étudiés. Il n'y a pas ou peu de recherche d'invariant de rationalité au type d'objet chez Lerouge (1992, 2000), la rationalité culturelle est-elle-même vue comme relative à un objet. Au contraire chez Legrand (1990) les types de rationalités sont génériques et donc transposables facilement aux divers domaines mathématiques mais a contrario ne permettent pas forcément des observations fines concernant un objet spécifique. Dans le cas du modèle de Legrand seuls deux types de rationalités sont présentes. Or nous trouvons chez Duval (2005) d'autres types de rationalités dont certaines sont affirmées irréductibles aux autres : la rationalité empirique, la rationalité instrumentale et la rationalité dialogique. Ces diverses rationalités-là sont reprises sous une forme ou une autre dans les différentes contributions de EMF (2006) où apparaissent l'importance du collectif dans le développement de la rationalité, et l'importance de la rationalité empirique, mais la rationalité instrumentale n'est pas reprise. Nous avons exploré ainsi la dimension expérimentale des mathématiques et particulièrement la place et le rôle des exemples/contre-exemple en didactique des mathématiques qui ont, dans cette dimension, une place privilégiée. En outre, ce que nous révèle l'étude de EMF (2006), c'est que le terme de rationalité est encore largement naturalisé. Un autre versant de cette étude concerne le problème de la discontinuité/continuité épistémologique : la pensée commune serait en rupture (ou non) avec la pensée scientifique. Il semble se dégager plutôt un consensus autour de la position de la rupture, dans le sens de Bachelard (Bachelard 1938) et sa notion d'obstacle épistémologique, rupture dont certains attestent l'existence par l'étude historique (Hitt 2006). Et même lorsque Durand-Guerrier (2006) propose d'atténuer la rupture autours de l'interprétation des propositions quantifiées, rupture selon elle non nécessaire, elle ne cherche pas à généraliser cette position au-delà, ni ne signifie que cette rupture sera totalement résorbée à cet endroit. Boudon, avec un point de vue de sociologue, désigne, lui, ce consensus de la rupture, comme une erreur des sciences cognitives.

Certains aspects se retrouvent invariablement dans les études au sujet de la rationalité : la validation, la dimension du collectif, la question de la rupture épistémologique, la question de la place de l'empirique. Nous nous retrouvons néanmoins devant un paysage assez diversifié, où même si l'on sent confusément une unité dans le questionnement, on y parle bien tous de comment les mathématiques sont appréhendées, on y regarde bien tous si, en faisant des mathématiques, la même langue est utilisée ou pas, il est néanmoins difficile de savoir, par exemple, à quoi renvoie vraiment le terme de « rationalité mathématique ». Ce terme renvoie-t-il aux mathématiques formalisées et théoriques, ou bien à une pratique des mathématiques qui inclut même la phase heuristique que certains auraient tendance à isoler dans un autre type de rationalité ? Comment parler d'une seule rationalité mathématique si cette rationalité contient des principes contradictoires ou en tout cas très peu compatibles sans de nombreuses préventions (Cabassut 2006) ?

II.3 Modèles de savoir et de constitution du savoir

Nous avons besoin maintenant, pour avancer sur la question de la rationalité, de préciser au niveau épistémologique, comment se constitue le savoir scientifique, comment en mathématiques il se catégorise. Nous ne ferons pas une étude exhaustive de ce sujet, tant il est vaste, car cette exhaustivité nous conduirait hors de notre problématique, mais présenterons un choix articulé des modèles et études épistémologiques et didactiques que nous avons retenus et qui nous serviront dans le chapitre 3 pour fonder un modèle de rationalités. Ce sera également l'occasion d'établir une terminologie de référence : nous donnerons certaines des définitions des concepts significatifs pour notre étude.

Nous commencerons par présenter des modèles principaux de constitution du savoir scientifique/mathématique issus de l'épistémologie des sciences (inductivisme, réfutationisme, la méthode de preuve et réfutation) en choisissant les auteurs habituellement utilisés pour cela en didactique des science (Hume, Popper, Lakatos). Nous proposerons ensuite une catégorisation du savoir mathématique issu des travaux de Sackur & al (2005), laquelle donne un rôle particulier aux notions de définition, validation et logique. Pour chacune de ces notions nous associerons une/des typologie(s) : une typologie de définition, des typologies de preuves et démonstration, des typologies de logiques. Nous choisirons pour ces typologies les travaux qui présentent ces notions à travers une sorte de catégorisation des différentes approches de ces notions dont nous testerons la compatibilité avec notre propre découpage selon les modèles de constitution du savoir.

1. Modèles épistémologiques de constitution du savoir scientifique

Nous pensons fonder notre modèle de rationalités en nous appuyant sur les modèles classiques épistémologiques d'évolution du savoir scientifique. Nous utiliserons en particulier le modèle de l'inductivisme dont Hume est un fondateur, le modèle du falsificationnisme (ou de réfutation) initié par Popper, et le modèle de preuve et réfutation de Lakatos. Chacun de ces modèles a été l'objet de controverses, de critiques, voire même de rejet par toute ou partie de la communauté scientifique, mais la validité pour la science de ces modèles n'est pas notre objet puisque nous voulons seulement utiliser ces modèles pour catégoriser les différents types de rationalités. Nous faisons ainsi l'hypothèse que ces modèles constituent des étapes épistémologiques par lesquelles ceux qui refont, d'une certaine manière, le voyage de l'évolution de la science à travers leurs apprentissages, peuvent passer.

Les deux premiers modèles sont empiriques au sens où ils tentent de donner un sens aux résultats que l'on peut obtenir à partir d'expériences. Ces deux modèles concernent l'activité mathématique car l'expérience peut être une méthode d'investigation dans l'activité mathématique qui débouche sur des résultats pour lesquels il faudra évidemment s'assurer de la validité sur le plan théorique.

L'inductivisme part du principe que les lois générales qui gouvernent la nature sont accessibles par l'observation directe, on observe donc des régularités et on en infère des lois.

> Notre idée de la nécessité et de la causalité naît entièrement de l'observation d'une uniformité dans

> les opérations de la nature où des objets semblables sont constamment conjoints les uns aux autres, et l'esprit déterminé par accoutumance à inférer l'un de l'apparition de l'autre. (Hume et Beyssade 2006 p. 151)

Ce raisonnement présuppose des lois qui se révèlent directement à l'observation naturelle sous la forme de cause à effet :

> Il semble évident que, si toute les scènes de la nature changeaient continuellement de telle manière qu'il n'y ait aucune ressemblance entre deux événements, et qu'au contraire tout objet soit entièrement nouveau, sans aucune analogie à tout ce qu'on avait vu auparavant, nous n'aurions jamais atteint, dans ce cas, la moindre idée de nécessité ou de connexion entre ces objets. Nous pourrions dire, que dans une telle hypothèse, qu'un objet ou un événement en a suivi un autre, mais non que l'un a été produit par l'autre. La relation de cause à effet serait nécessairement absolument inconnue aux hommes. (Hume et Beyssade 2006 p.151)

On appellera *induction* ce raisonnement que Chalmers résume ainsi :

> Si un grand nombre de A ont été observées dans des circonstances très variées, et si l'on observe que tous les A, sans exception, ont la propriété B, alors tous les A ont la propriété B. (Chalmers et Biezunski 1990 p. 27)

Le falsificationnisme (ou réfutationisme) est une théorie issue de Popper qui se fonde d'abord sur une résolution du « problème de démarcation », problème qui consiste à déterminer un critère pour différencier ce qui relève de la science et ce qui n'en relève pas. Selon Poppers une théorie ne peut être scientifiquement acceptable que si elle est « réfutable » :

> En d'autres termes je n'exigerai pas d'un système scientifique qu'il puisse être choisi une fois pour toutes, dans une acception positive mais j'exigerai que sa forme logique soit telle qu'il puisse être distingué, au moyen de tests empiriques, dans une acception négative : un système faisant partie de la science empirique doit pouvoir être réfuté par l'expérience. (Popper, Thyssen-Rutten et Devaux 1973 p. 37)

Cette inversion de regard, chercher la vérité sous la forme de ce qui pourrait être déclaré comme faux, d'un point de vue logique, provient du constat inverse de l'inductivisme : les seules conclusions certaines qu'on peut obtenir à partir des faits concernent la fausseté des assertions. En effet, les faits qui correspondent à des exemples d'une implication n'assurent jamais la validité universelle de cette implication, et seul un fait correspondant à un contre-exemple de cette implication peut conduire à une conclusion certaine : l'implication universelle est fausse.

Ainsi les théories scientifiques ne sont pas considérées comme des vérités éternelles mais comme des hypothèses provisoires qu'il faut impitoyablement tester pour en découvrir les limites, la fausseté :

> Le théoricien par conséquent fera tous ses efforts pour détecter toute théorie fausse, dans l'ensemble des théories non réfutées en concurrence ; il essaiera de la coincer. C'est-à-dire que pour toute théorie donnée, il essaiera d'imaginer des cas ou des situations où elle aura toute chance d'échouer, si elle est fausse. Il essaiera donc de construire des tests rigoureux, et des situations de test cruciales. Ce qui reviendra à construire une loi falsifiante /…/ qui suggérera une expérience cruciale : une expérience susceptible de réfuter, en fonction de son résultat, soit la théorie à tester, soit la théorie falsifiante. ((Popper et Rosat 2009 p.57)

Nous voyons là une vision du théoricien falsificationniste : il cherche à réfuter toutes les théories qu'on lui présente, et lorsqu'on évoque « l'expérience cruciale » ce n'est pas pour confirmer une théorie mais encore pour la réfuter (ce qui est d'ailleurs l'acception originale de Bacon).

Si nous comparons les deux méthodes, il est clair que l'une est compatible avec la logique classique en mathématiques (le falsificationnisme) tandis que l'autre ne l'est pas (l'inductivisme) : aucune conclusion de la première n'est contradictoire avec la logique mais ce n'est pas le cas de la seconde. Cependant le falsificationnisme ne contient aucun moyen pour déterminer la vérité[38] (contrairement aux mathématiques avec la démonstration). Nous exprimerons cette remarque en termes de « proximité » de ces épistémologies empiriques avec l'épistémologie mathématique : le falsificationnisme est plus « proche » que l'inductivisme de l'épistémologie mathématique du point de vue du respect de la logique.

Regardons maintenant un modèle épistémologique qui rend compte de l'évolution des objets en germe dans une nouvelle recherche mathématique, le modèle de « preuve et réfutations » de Lakatos (1984).

La méthode de preuve et réfutation de Lakatos (1984) constitue une dialectique, qui a lieu lors d'une phase de recherche en mathématiques, entre la construction de la définition d'un objet et celle de la preuve d'un résultat dans lequel cet objet est impliqué. Cette méthode a été décrite au chapitre 1.

2. Les ordres de connaissances de Sackur et Maurel

Nous avons besoin pour définir les différents types de rationalités d'une catégorisation des différents types de connaissances impliquées en mathématiques. C'est dans l'article « L'expérience de la nécessité épistémique » (Sackur, Assude, Maurel, Drouhard et Paquelier, 2005) que sont présentés justement trois « ordres de connaissances ». Les auteurs précisent, à propos du terme « connaissances », qu'ils l'utilisent comme un terme primitif et générique et ne le distinguent pas du terme « savoir » dans leur étude.

Les connaissances d'ordre I correspondent aux objets des mathématiques : définitions d'objets, théorèmes, axiomes…

Les connaissances d'ordre II peuvent se distinguer selon trois types, auxquels ils rajoutent le type de « la notion de définition » :

- Les connaissances qui concernent la sémiosis

  Ce sont les règles qui gouvernent le symbolisme mathématique dans ses différents registres.

- Les connaissances qui concernent la validité des énoncés

  Ce sont les notions de nécessité, de démonstration, de définition, d'axiomes, théorèmes et les règles qui régissent le fonctionnement de ces notions et leurs rapports.

- Les connaissances liées à la logique

  La logique mathématique permet de distinguer les énoncés bien construits et ceux qui sont valides ; elle statue sur ce qu'est un raisonnement et, parmi eux, ceux qui sont valides.

- La notion de définition

[38] La vérité dont il est question ici est celle correspondant à une quantification universelle. Puisqu'il s'agit d'une épistémologie empirique son accès à l'universel est limité aux seules capacités expérimentales.

> /…/ On rencontre des connaissances d'ordre II sur les définitions. La définition d'un objet mathématique donne le minimum d'information sur cet objet qui permet de l'identifier, de le distinguer des autres et de travailler avec lui. (Maurel et Sackur 2010 p. 98)

Les connaissances d'ordre III sont les réponses à la question : « c'est quoi faire des mathématiques ? » ou encore « Quand on fait ça, fait-on bien des mathématiques ? »

> Le fait que les connaissances soient socialement construites suppose une norme minimale d'accord sur ce qui fait qu'elles sont mathématiques ou non. « L'activité mathématique consiste à jouer avec des connaissances d'ordre I selon des règles d'ordre II » est un exemple typique de connaissance d'ordre III. (Sackur *et al.* 2005 p. 71)

Les auteurs précisent que :

> Les connaissances mathématiques d'ordre III participent, indirectement, de la définition des mathématiques. Elles sous-tendent des attitudes conformes, c'est-à-dire acceptables par la communauté des mathématiciens, et il n'y a pas accord complet sur ce point. (Sackur et al. 2005 p. 72)

Pour chacune des catégories que nous retenons (validité, logique et définitions) nous allons préciser une/des typologie(s) correspondante(s). En particulier, la typologie relative à la définition que nous adoptons est celle des moments de fabrication de définition de Ouvrier-Buffet (2003, 2013).

3. Typologies de preuves et démonstrations

Dans cette partie nous utiliserons essentiellement certains aspects des travaux de Balacheff (1988), Duval (1992) et Cabassut (2005) sur la validation.

a) Les typologies de preuve de Balacheff

Balacheff étudie les processus de preuve chez les élèves de collège et commence par préciser le vocabulaire, tout d'abord « preuve » :

> Lorsqu'une explication est reconnue et acceptée, il convient pour la désigner de disposer d'un terme qui permette de marquer son détachement du locuteur. En mathématiques, il est clair que le terme « démonstration », du fait de son acception très particulière, ne convient pas. Nous retiendrons celui de preuve. Le passage de l'explication à la preuve fait référence à un processus social par lequel un discours assurant la validité d'une proposition change de statut en étant acceptée par une communauté. (Balacheff 1988 p. 29)

Puis ensuite « démonstration » :

> Le type de preuve dominant en mathématiques a une forme particulière, il s'agit d'une suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit à partir de ceux qui la précèdent à l'aide d'un règles de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons, suivant ici l'usage, démonstrations ces preuves. (Balacheff 1988 p.30)

Il étudie plusieurs situations didactiques dans lesquelles les élèves sont conduits à justifier leurs résultats sous forme de preuve. Un modèle d'analyse sous forme de typologie de preuve est utilisé pour mettre à jour les dynamiques relatives à l'activité de preuve. Balacheff distingue deux catégories de preuves, les preuves pragmatiques et les preuves intellectuelles.

> Nous appellerons preuves pragmatiques ces preuves recourant à l'action effective ou à l'ostension, et par contraste nous appellerons preuves intellectuelles les preuves qui se détachent de l'action et reposent sur des formulations des propriétés en jeu et de leurs relations. (Balacheff 1988 p.45)

Le passage d'un type de preuve à l'autre (de pragmatique à intellectuelle) se réalise par une décontextualisation (passage à une classe d'objet), une dépersonnalisation (le sujet s'efface en tant qu'acteur), une détemporalisation (La chronologie est remplacée par des relations logiques) à travers l'interaction de trois pôles : « pôle des connaissances, pôle langagier ou de la formulation », « pôle de la validation ou des types de rationalités qui sous-tendent les preuves produites » et pôle « validation » (décomposé en preuves pragmatiques, preuves intellectuelles, démonstrations[39]). Nous reconnaissons évidemment là les caractéristiques d'une institutionnalisation dans la TSD.

Voilà les différents types de preuves identifiés :

- « L'empirisme naïf consiste à assurer la validité d'un énoncé après sa vérification sur quelques cas. »

L'expérience cruciale introduite par Francis Bacon est une expérience qui sert à trancher entre deux hypothèses en permettant d'en éliminer une. Balacheff utilise ce même vocabulaire, selon une version plus positive, pour désigner un test sur lequel « on ne se fait pas de cadeau » et qui va permettre de choisir entre une hypothèse et sa négation. Il y a, selon Balacheff, déjà une idée implicite de généralisation et ainsi l'expérience cruciale se distingue de l'empirisme naïf.

- « L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe. » Il reste néanmoins différent de la démonstration dans le sens où la formulation conserve le nom propre et l'utilisation d'un représentant.
- « L'expérience mentale invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. » Il y a encore une temporalité (aspect action) mais on n'utilise plus de représentant comme pour l'exemple générique.

Balacheff affirme qu'il existe « une rupture fondamentale » entre les deux premiers types de preuves et les deux seconds, car il ne s'agit plus pour les deux seconds de « montrer » qu'un énoncé est vrai parce que « ça marche » mais d'en établir le caractère de nécessité, ce qui suppose, selon lui, un changement radical de rationalité pour la preuve. L'exemple générique est considéré comme une preuve intermédiaire, plutôt du côté de la preuve pragmatique quand il exprime davantage l'effectivité des opérations et plutôt du côté de la preuve intellectuelle quand il consiste surtout à donner les moyens d'exprimer la preuve.

Les expérimentations font apparaître que :

> Les quatre niveaux de preuves, /…/ ne caractérisent pas ce que l'on pourrait appeler la rationalité des élèves, en particulier dans un même processus de résolution plusieurs niveaux de preuves ont pu être observés pour un même binôme d'élèves. (Balacheff 1988 p.564)

Elles font apparaître aussi que :

> L'hypothèse que nous avions retenue d'une hiérarchie entre les types de preuve est aussi confortée mais l'analyse des processus de validation observés permet d'aller plus loin en attestant d'une rupture entre, d'une part l'empirisme naïf et l'expérience cruciale, et d'autre part l'exemple générique et l'expérience mentale. Cette rupture peut être caractérisée comme celle d'un passage

[39] L'autoréférence est-elle évitable ou pas ? Que peut-on définir à partir de quoi ? Ceci est une question de modélisation que nous devrons poser.

> d'une vérité affirmée sur la base d'une constatation de faits, à celle d'une vérité fondée en raison. Il s'agit d'un véritable changement de problématique, c'est à dire de la façon même d'envisager et de formuler le problème de la validité d'une assertion. La source de ce changement peut résider dans le désir de lever une incertitude, mais un obstacle fréquent à sa réalisation effective vient de la nature des conceptions dont disposent les élèves des notions mathématiques en jeu, ou les moyens langagiers qu'ils sont susceptibles de construire (ou dont ils disposent). (Balacheff 1988 p.565)

Balacheff pointe la rupture profonde entre preuves pragmatiques et preuves intellectuelles qui repose sur la façon d'envisager la validité d'une assertion. Il ajoute que le désir de lever une incertitude est de nature à opérer un changement de point de vue sur la validité mais aussi que des obstacles peuvent alors s'opposer à ce changement, obstacles qui résident dans le niveau des connaissances des notions en jeu et la disponibilité de moyens langagiers suffisants.

b) Explication, argumentation et démonstration

Dans son fameux article « Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? » (Duval, 1992) différencie explication et raisonnement par la nature du changement de la valeur épistémique qu'ils sont supposés réaliser. Par valeur épistémique, Duval entend niveau de vérité (« évident, authentique, nécessaire, absurde, possible, plausible... ». Le raisonnement a pour vocation de modifier cette valeur épistémique tandis que ce n'est pas le cas pour l'explication, qui procède de la description. Argumentation (mode naturel de raisonnement, ou raisonnement pertinent qui vise la vraisemblance et la conviction) et démonstration (raisonnement logiquement valide qui vise la vérité) ne peuvent pas être différenciés par leur rôle sur la valeur épistémique, ni sur leurs formes discursives qui peuvent être très proches, mais sont fondamentalement différents en ce qui concerne le type de validité sur lequel repose les arguments de chacun. Pour l'argumentation, la validité des arguments est mesurée en fonction du contenu sémantique (les arguments sont-ils bien liés à la conclusion ?) et pour la démonstration en fonction du statut théorique des éléments constitutifs des arguments (hypothèse, théorème admis, conclusion). Une différence majeure entre les deux est la place que tient dans les arguments la valeur épistémique liée à la compréhension de leur contenu sémantique : pour l'argumentation cette place est essentielle tandis qu'elle ne joue aucun rôle pour la démonstration[40].

> Pour passer d'un mode de fonctionnement à l'autre, une décentration à l'égard du contenu d'une part, et une prise de conscience de l'existence d'une autre valeur épistémique d'autre part, sont donc nécessaires (Duval&Egret, à paraître). On peut donc parler aussi de "distance cognitive" entre le fonctionnement d'un raisonnement valide et celui d'une argumentation. Et cette distance devient encore plus spectaculaire lorsqu'on se pose la question de la possibilité objective de transformer une argumentation en une démonstration. (Duval, 1992 p. 47)

Cette rupture est précisée par Pedemonte (2003) qui compare les argumentations et les démonstrations associées, à partir de leur contenu (mots, expressions, cadres théoriques…) et de leur structure (inductive, abductive[41], déductive…). Rappelons ici ce que signifie abduction en utilisant une citation originale de Peirce par Dias :

---

[40] Un exemple paradigmatique est celui de la résolution de problème par une équation : pendant la résolution de l'équation la variable x ne représente plus rien si-ce n'est qu'une inconnue à identifier par les techniques habituelles de résolution d'équation. Le contenu sémantique est indifférent à ce moment là.

[41] Type de raisonnement défini par Pierce qui consiste à supposer une cause crédible à des faits considérés comme conséquence de cette cause. En logique on dirait : « Si A entraine B et si B est avéré alors A est probable »

> La présomption, ou plus précisément l'abduction, fournit à celui qui raisonne la théorie problématique que l'induction vérifie. Se trouvant confronté à un phénomène différent de celui qu'il aurait attendu dans des circonstances semblables, il examine les traits de ce phénomène et note quelques caractères remarquables ou des relations entre ceux-ci qu'il reconnaît aussitôt comme caractéristiques d'un concept dont son esprit est déjà pourvu, de sorte qu'est suggérée une théorie qui expliquerait (c'est-à-dire rendrait nécessaire) ce qu'il y a de surprenant dans le phénomène. (Peirce, C.P. 2,776 in Everaert-Desmaedt, p.83, cité dans Dias, 2008 p. 40)

Selon Pedemonte (2003), du point de vue des éléments de contenu on peut parler « d'unité cognitive » dans de nombreux cas dans le passage de l'argumentation à la démonstration. En ce qui concerne la structure, il y a aussi une unité structurelle « naturelle », on voit des élèves passer d'une argumentation abductive à une « démonstration » abductive. Cette continuité, au contraire de la première (sur le contenu), conduit à une difficulté pour fabriquer une démonstration par nature déductive.

> We cannot undervalue the importance of the structure in the comparison between argumentation and proof; it is not unusual that the student tries to transform abduction into deduction during a resolution process, sometimes successfully, sometimes without getting an acceptable solution. (Pedemonte 2003 p. 9)

c) Pragmatique, sémantique, syntaxique

Dans ses travaux de thèse Cabassut (2005) étudie la démonstration, le raisonnement et la validation. Il y détermine une typologie des types d'argument plutôt que des types de preuves car selon lui une même preuve peut contenir plusieurs types d'arguments. Un argument est caractérisé par le triplet (donnée, règle de validation, conclusion). Il distingue essentiellement les trois types d'arguments :

> - **formel** (ou syntaxique) : tout argument dont la structure est clairement explicitée (données, règle de validation, conclusion) et dont l'application de la règle de validation repose sur la forme des termes de la règle et des données, et ne nécessite pas une interprétation supplémentaire basée sur la signification ou le contenu de ces termes ou de ces données.
>
> - **pragmatique** : tout argument utilisant le succès d'une action comme règle de validation /…/ L'action peut être effectivement réalisée ou pensée. On comprend que le recours à une action ne correspond pas à une règle formelle.
>
> - **sémantique** : tout argument dont la règle de validation est constituée de règles qui ne sont pas formulées de manière formelle mais qui s'appuie sur la signification ou le contenu des objets qu'elles mettent en jeu. (Cabassut 2005 p.187) Mis en gras par l'auteur.

Cette typologie concerne autant les arguments de plausibilité (arguments qui établissent le caractère de vraisemblance) que ceux de nécessité. Ainsi démonstrations et argumentations peuvent alors se caractériser de deux manières.

> On y rappelle, à travers l'évocation des travaux de [Duval 1995] et [Houdebine 1998], que la démonstration, distincte de l'argumentation, est d'abord un texte qui se caractérise par le statut opératoire des propositions qui le composent, alors que pour une argumentation le contenu des propositions et leurs relations sémantiques priment. (Cabassut 2005 p. 159)

Mais aussi selon la valeur épistémique de la conclusion, d'après Cabassut :

> Lorsque dans une validation, la vérité de la conclusion est nécessaire/certaine, nous appellerons le raisonnement de validation une **preuve** ou une **démonstration** ; lorsqu'elle est plus ou moins plausible nous l'appellerons **argumentation**. (Cabassut 2005 p. 46) Mis en gras par l'auteur.

Cabassut attire l'attention sur le caractère « relatif de la nécessité ». Ainsi le niveau d'exigence pour établir la « nécessité » d'un résultat diffère d'une institution à l'autre, et donc la notion de démonstration aussi.

4. Typologies des logiques

La question des différents types de logiques est très vaste et nous ne connaissons pas à ce jour d'auteur en didactique en faisant une synthèse. Aussi nous utiliserons plusieurs auteurs pour constituer ce cadre théorique sur les différents types de logiques.

Dans sa thèse, Mesnil (2014) montre la nécessité pour étudier la transposition didactique de la logique d'intercaler entre le savoir savant et le savoir à enseigner une sorte de savoir intermédiaire qu'elle nomme *savoir de référence*. Ce savoir est constitué du savoir nécessaire à un mathématicien pour faire des mathématiques sans avoir à recourir à une théorie logique très formalisée qui ne serait pas forcément très adaptée à son utilisation pratique. Ce savoir de référence devrait être utile au professeur pour guider son enseignement et pouvoir répondre aux nouvelles directives sur l'enseignement de la logique. Mesnil définit ainsi quatre aspects fondamentaux en ce qui concerne ce savoir de référence : Les notions de propositions, de variables, de connecteurs (ET, OU, implication) et de quantificateurs. Pour ce qui est de notre étude nous nous concentrerons sur trois aspects, le principe de non contradiction, les implications et les quantificateurs.

a) Le principe de non contradiction

Le principe de non contradiction affirme qu'on ne peut pas avoir simultanément une chose et son contraire. Ceci se résume en logique par : (P et non P) est faux. Ce principe de non contradiction est souvent confondu avec le principe du tiers exclu qui affirme que s'il n'y a pas une chose alors il y a son contraire, ce qui s'écrit en logique (non P ou P) est vrai. En logique classique ces deux principes sont équivalents car si on accepte que « (P et non P) est faux » est équivalent à « non (P et non P) est vrai » alors cette dernière est aussi équivalente à « non P ou non (non P) est vrai » ce qui est équivalent à « non P ou P » à la condition qu'on accepte que non (non P) équivaut à P. Il y a donc bien équivalence entre le principe de non contradiction et celui du tiers exclu à la condition que l'on accepte que « non (non P) » équivaut à « P ». Ceci est le cas dans la logique usuelle en mathématiques mais pas dans toutes les logiques. Cette distinction peut être sensible car dans une logique non strictement mathématique, dans le quotidien par exemple, on aura davantage de réticences à qualifier quelque chose d'avoir un caractère P et simultanément ne pas avoir ce caractère P que de réticences à qualifier quelque chose de n'avoir ni le caractère P, ni le caractère non P. Quoiqu'il en soit la logique théorique usuelle utilise fortement le principe de non contradiction et c'est beaucoup moins le cas dans une logique non mathématique où la contradiction dépend aussi du niveau de l'enjeu et des conséquences correspondant à cette contradiction. Nous verrons que même en sciences expérimentales ce principe est parfois à géométrie variable car l'appliquer sans concession reviendrait à paralyser la science elle-même. En mathématiques par contre, il s'applique pleinement et il donne lieu à des outils puissants, la démonstration par l'absurde par exemple.

b) L'implication

Deloustal-Jorrand (2004) distingue la logique naturelle de la logique mathématique, et par suite l'implication naturelle de l'implication logique.

> Nous appelons logique naturelle toutes les règles et conceptions ayant trait au raisonnement, le plus souvent en dehors du cadre mathématique, utilisée dans les situations de la vie courante. Nous appelons implication, le concept d'implication de la logique naturelle. (Deloustal-Jorrand 2004 p. 13)

Deloustal-Jorrand montre que l'interprétation de cette implication naturelle dépend fortement du contexte et peut donner lieu à une interprétation comme la réciproque ou bien l'équivalence sans qu'il n'y ait véritablement de malentendu. Cette implication naturelle est souvent associée à un lien de cause à effet. Or une conséquence ne peut précéder une cause, cela conduit à introduire la temporalité dans l'interprétation de l'implication. Deloustal-Jorrand parle de conception « causale-temporelle ». Cette conception est de nature à perturber l'interprétation de l'implication mathématique où ni causalité, ni temporalité ne sont censés intervenir. Il sera difficile par exemple d'interpréter des assertions du type : « Si les souris ont une queue alors Paris est la capitale de la France » ou bien « S'il pleut aujourd'hui alors il a fait beau hier »[42].

Un questionnaire sur la logique a été proposé à des élèves de seconde, de terminale, de classes préparatoires puis analysé (Fabert et Grenier, 2011). Les résultats à propos de l'implication confirment les constats de Deloustal-Jorrand ci-dessus, en particulier la conception « causale-temporelle » et la dépendance de l'interprétation au contexte (mathématiques ou vie courante).

Radford identifie une interprétation de l'implication qu'il nomme co-occurrence qui ne correspond formellement pas à l'équivalence logique mais occasionne des réponses assez semblables :

> Le premier [traitement de l'implication] est globalisant : il consiste à voir dans les deux événements A et B de l'énoncé « si A alors B », deux événements inséparables : l'un ne saurait se produire sans l'autre. Vu ainsi, ce traitement semblerait relever de l'équivalence logique. Mais il n'en est rien : c'est une affirmation de co-occurence qui n'a aucune signification logique. (Radford, 1985, p. 194 cité dans Mesnil 2014 p. 136)

Durand-Guerrier, à partir de résultats d'une étude large portant sur des étudiants de première année universitaire et leur interprétation de l'implication, affirme que d'une part la confusion de l'implication et de l'équivalence n'est pas si évidente, et d'autre part que l'utilisation de l'inférence en mathématiques par les étudiants dépend beaucoup du contexte :

> We must be very cautious in assuming that most subjects confuse implication and equivalence. What we can see here is that, even in mathematics, the correct or incorrect use of inference rule is content dependent. (Durand-Guerrier 2003 p. 23)

Pour Durand-Guerrier, une difficulté significative de l'interprétation de l'implication provient des choix institutionnels concernant la convention de quantification universelle implicite majoritairement utilisée en mathématiques et dans l'enseignement. En effet la confusion entre implication implicitement universellement quantifiée et implication matérielle conduit à des erreurs

[42] Remarquons ici que l'interprétation par la causalité et surtout par la temporalité nous pousse à lire la conclusion « il a fait beau hier » comme la cause de l'hypothèse « il pleut aujourd'hui », ce qui est le contraire de l'interprétation habituelle où l'hypothèse tient lieu de cause.

d'interprétation. L'absence de domaine de quantification renforce cette confusion dans la mesure où l'implication ainsi implicitement universellement quantifiée est sensée, selon la convention majoritaire être vraie ou fausse, alors qu'en l'absence de spécification du domaine de quantification cette valeur de vérité n'est pas définie. Enfin selon Durand-Guerrier cette façon d'envisager l'implication, lui associer une valeur de vérité intrinsèque, conduit à une conception très syntaxique de la preuve, conception qui empêche de fonder cette preuve de manière plus empirique, et limite ainsi la portée sémantique de cette activité de preuve. Durand-Guerrier propose un type d'implication sous forme de proposition ouverte (non quantifiée sur un domaine) qui n'est ni vraie ni fausse mais vraie ou fausse pour tel ou tel élément et qu'on va tester afin d'identifier des exemples, des non-exemples, à la recherche d'un domaine de validité, d'invalidité, et d'une preuve.

> As for us, we assume that to improve the understanding of the mathematical necessity, a better approach is to deal with open implications and to look for examples and counter-examples in order to determine, if possible, on which domain the generalized implication is true or not, and if it is not possible, to assume, en connaissance de cause, that, on a relevant domain, it is false. This is a clearly semantic point of view on reasoning and proving. (Durand-Guerrier 2003 p. 29)

Mesnil ajoute un argument pour justifier l'explicitation de la quantification universelle. Dans certains cas, la vérité de la réciproque d'une proposition universellement quantifiée dépend de la position des quantificateurs universels dans la proposition initiale. Autrement dit si on ne connaît pas la position des quantificateurs universels parce qu'ils sont implicites, on ne peut pas alors se prononcer sur la vérité de la réciproque de cette proposition : elle peut être vraie ou fausse (Mesnil, 2014).

c) La quantification

Les résultats du questionnaire de Fabert et Grenier (2011) sur la quantification montrent que dans le cadre des mathématiques le quantificateur universel est assez souvent justifié avec un exemple par les élèves de seconde mais que ce phénomène n'est pas observé pour une assertion ayant pour objet la vie courante. Pour ce qui est du quantificateur existentiel, celui-ci est plutôt bien interprété mis à part l'interprétation du « il existe un » comme « il existe exactement un » chez certains élèves de seconde.

C'est la double quantification qui nous intéressera davantage dans nos travaux, mais nous ne prolongerons pas ici cette étude dans la mesure où un chapitre entier lui sera consacré. Nous indiquerons seulement ici que la double quantification est l'occasion de difficultés importantes d'interprétation (confusion des propositions du type « il existe... pour tout... » et des propositions du type « Pour tout... il existe... ») qui ont déjà donné lieu à des études (Dubinsky & Yiparaki 2000, Chellougui 2004…) auxquelles nous ajouterons notre propre étude.

III Conclusions

Dans le chapitre précédent nous avons commencé par proposer notre projet : déterminer les conditions didactiques et épistémologiques pour élaborer et expérimenter une ingénierie de la limite d'une fonction. Cela nous a conduits à interroger le concept de rationalité de manière générale. En effet, la TSD fait explicitement, avec Brousseau (2002), de la rationalité un élément structurant de la théorie en adoptant ce postulat P3 sous la forme de « l'actant rationnel ».

En particulier cette hypothèse fonde la possibilité de l'adidacticité des situations. Or cette possibilité de l'adidacticité est remise en cause par des travaux (Margolinas 1995 ; Comiti Grenier & Margolinas 1995, Bloch 2000 et 2005) au profit de la dimension adidactique d'une situation (Mercier 1997, Bloch 2000 et 2005). Ceci nous conduit à interroger cette hypothèse de « l'actant rationnel » dans le cadre de notre projet d'élaboration d'une situation adidactique pour la limite sous la forme d'un questionnement sur la rationalité.

Comment ce concept se définit-il ? Quelles sont les études déjà réalisées ? Ces questions nous ont amenés à explorer les caractéristiques du concept dans les études existantes à ce sujet, qu'elles puisent leur origine dans la didactique des mathématiques ou bien dans d'autres disciplines.

Nous avons vu que le concept de rationalité est une hypothèse fondatrice de nombre de disciplines scientifiques où il est codifié précisément car il sert de fondation aux modélisations réalisées, aux analyses a priori et a posteriori. A ce titre, il est objet de nombreux débats et écoles puisqu'il détermine en partie la nature du travail qui s'effectue au sein de ces domaines de recherche. Nous retenons d'une des définitions majeures de rationalité le postulat P3 du modèle de la TCR (rappelé par Boudon 2009) utilisée en sociologie et d'autres sciences : appelé postulat de la rationalité : la cause du comportement d'un individu réside dans les raisons qu'il a de l'adopter. En effet, ce postulat invite à considérer que tout comportement, tout raisonnement, est rationnel pour son auteur.

Pour ce qui est de la didactique, certains travaux se sont portés sur ce questionnement de la rationalité, en particulier les modèles de Legrand (1990), Lerouge (1992, 2000) et Boero (2006), mais force est de constater qu'ils sont peu adoptés, y compris quand le sujet de discussion est précisément la rationalité. En lieu et place de ces modèles préfabriqués, sont exposés des facettes dont les auteurs font une dimension essentielle de la rationalité. Cette focalisation serait-elle l'expression d'un besoin d'outils plus précis pour l'analyse ? Mais ceci alors prendrait le pas sur la dimension globale de la rationalité qui lui confère sa capacité à expliquer les raisonnements non en l'attribuant à une seule cause mais en envisageant ces raisonnements comme résultant d'un mode de pensée global. Cette focalisation serait-elle plutôt l'expression d'un besoin d'un modèle plus adapté au travail d'analyse, à la fois très précis sur les raisonnements mais aussi donnant une perspective d'ensemble sur ceux-là ?

Pour notre part, les modèles étudiés s'avèrent peu adaptés à notre projet dans la mesure où ils correspondent à une vision de la rationalité soit très globale et donc assez peu détaillée (Legrand 1990) ou alors très centrée sur un objet spécifique (Lerouge 1992, 2000). Même si le modèle de Lerouge (1992, 2000) s'occupe de la conceptualisation, il n'aborde pas la démarche rationnelle en termes génériques, c'est-à-dire comme étant invariante à l'objet. Or nous centrons notre projet à la fois sur la conceptualisation de la limite, ce qui lui donne un caractère de localité, mais souhaitons aussi l'inclure dans une problématique d'accès rationnel aux objets mathématiques, ce qui lui confère une dimension plus globale. Cela nous conduit à envisager de proposer nous même une modélisation de la rationalité adaptée à notre projet.

Pour cela, nous retenons certains éléments de l'étude que nous avons réalisée. Tout d'abord nous retenons la nécessité d'intégrer en un concept global, prenant en compte les différentes facettes évoquées : la logique, la validation, le contrôle, le collectif, le langage, la dimension de

la communication et la dimension expérimentale. Ensuite nous retenons la présence de deux pôles de rationalités, l'un centré sur l'individu (conséquence de P3 avec la rationalité du quotidien et la rationalité personnelle) et l'autre plus institutionnel (rationalité scientifique ou culturelle).

Nous voulons aborder deux questions liées et de nature fondationnelle vis-à-vis de la modélisation possible du concept de rationalité. La première apparait en filigrane de notre étude de la littérature et concerne la stabilité d'une rationalité et la seconde beaucoup plus clairement explicite et concerne les phénomènes de la rupture-continuité associés à la rationalité.

Pour commencer nous questionnons l'aspect de la stabilité d'une rationalité. Une rationalité doit avant tout répondre d'une forme de stabilité dans le sens qu'elle doit se suffire à elle-même. Quand on l'exerce, il n'est pas utile de mobiliser une autre forme de rationalité pour trouver des réponses aux questions qui se posent dans le cadre de cette rationalité. Dans ces conditions, on peut alors se demander si la dimension empirique, dimension essentielle de l'accès aux mathématiques selon Dias, constitue une rationalité ou bien seulement une phase de la recherche et du raisonnement. Nous devrons élucider cette question de la dualité rationalité/phase de raisonnement que ce chapitre a mis en évidence.

Ensuite la question de la rupture-continuité qui est apparue comme récurrente dans les différents apports étudiés à propos de plusieurs sujets : existe-t-il des ruptures dans la rationalité ? Pour ce qui est des modèles rencontrés (Legrand 1990, Lerouge 1992 et 2000 en particulier), la rupture est plus ou moins franche. Durand-Guerrier (2006) nous alerte sur le danger que l'on court à pointer des ruptures qui ne sont finalement que des artéfacts de modélisation et de pratiques didactiques. De même Boudon (2009) met en cause la croyance assez partagée sur la rupture entre rationalité scientifique et bon sens commun. Cependant Hitt (2006) défend la position d'une rupture franche entre rationalité mathématique et rationalité du quotidien en s'appuyant sur une analyse historique. Et Duval (2005) fait de même en pointant l'irréductibilité intrinsèque de la rupture épistémologique et cognitive entre argumentation (mode naturel de raisonnement) et démonstration. Il est donc important de rester prudent lors de la modélisation de la rationalité et éviter de créer des ruptures artificielles. Cependant le propre d'une modélisation n'est-il pas le fait de contraster certaines différences ? Le propre de la modélisation n'est-il pas de couper le réel en morceaux pour pouvoir appréhender des phénomènes qui peuvent apparaître, hors modélisation, finalement assez continus mais insaisissable sous cette forme ? Cette question rejoint évidement la question précédente à propos de la dualité rationalité/phase de raisonnement.

Nous avons clos ce chapitre par trois sources épistémologiques concernant le savoir scientifique et mathématique. Tout d'abord nous avons identifié quelques modèles généraux de constitution du savoir scientifique (Hume 2006, Popper 1973 et 2009, Lakatos 1984). Ces différents modèles s'appliquent aux différents ordres de connaissances de (Sackur, Assude, Maurel, Drouhard et Paquelier, 2005) et en particulier aux connaissances d'ordre 2 que sont la validité des énoncés, la logique, la notion de définition. Pour chacune de ces connaissances d'ordre 2, des travaux didactiques et épistémologiques ont été réalisés pour identifier les différents « niveaux d'accès » à ces connaissances. Par exemple pour la validité, Balacheff (1988), Duval (1992) et Cabassut (2005), pour la logique Mesnil (2014), Deloustal-Jorrand (2004), Durand-Guerrier

(2003), Fabert et Grenier (2011), Dubinsky & Yiparaki (2000), Chellougui (2004) et enfin pour la définition Ouvrier-Buffet (2003, 2013) et Lakatos (1984).

Il s'agira dans le chapitre suivant de croiser ces différentes sources épistémologiques et didactiques afin d'élaborer un modèle de rationalités.

Chapitre 3 – Un modèle des rationalités émanant d'un besoin de la TSD

Notre premier questionnement porte sur les possibilités d'une modélisation de la rationalité en types ou niveaux de rationalités afin d'être en mesure d'étudier leur évolution dans une situation adidactique. Notre enjeu est celui de se donner les moyens de mettre en œuvre et d'analyser une ingénierie qui prenne en charge la mobilisation autonome, de la part des élèves, des rationalités adaptées et des transitions de rationalités afin de les amener à donner à l'objet d'étude un sens sans équivoque en fonction des niveaux de rationalités. Dans la TSD, la structuration des milieux constitue le fondement théorique à tout projet visant l'expérimentation de situations adidactiques. Nous rappelons dans ce chapitre, les caractéristiques essentielles de cette structuration avant d'entamer le projet de mise en place du modèle des rationalités.

I Outils de la TSD

Nous proposons ici de détailler le cadre théorique, cadre de référence pour notre projet de constitution d'une ingénierie sur la limite, et cadre dans lequel s'insère très naturellement notre questionnement sur la rationalité, il s'agit de la théorie des situations didactiques. Nous commencerons par expliquer les idées fondamentales de cette théorie de Brousseau (1998b) puis étudierons plus précisément la question de la structuration en niveaux de milieux, et particulièrement le niveau adidactique, en utilisant les travaux de Bloch & Gibel (2011).

I.1 Synthèse des principales constructions de la TSD

Nous commençons par mettre en évidence les éléments principaux de cette théorie qui nous seront utiles.

En première approche, la théorie des situations didactiques étudie l'enseignement du savoir et l'apprentissage des connaissances lors de *situations didactiques :* le maître propose à l'élève une situation qui va l'obliger à se poser des questions et à progressivement adapter ses *connaissances* vers de nouvelles *connaissances* que le maître va pouvoir *institutionnaliser* en *savoir* in fine.

Avant de poursuivre, nous précisons les termes primitifs utilisés au sens de la théorie des situations.

Le savoir est issu des recherches d'une discipline et donc le produit d'un processus historique, social et culturel, individuel et collectif, d'une société et d'une époque. Le texte du savoir gomme en général, pour des raisons d'économie de la communication, tous les aspects de ce processus pour n'en retenir que le produit fini. Ainsi le savoir est dépouillé souvent même de sa raison d'être, et en particulier de toutes les questions qui sont à son origine et dont il constitue la réponse.

Les connaissances d'un élève sont formées de tous les éléments d'apprentissage d'origine didactique ou non. Celles-ci peuvent être des éléments de savoir que l'élève s'est appropriés.

L'institutionnalisation est le moyen par lequel le professeur va transformer certaines des connaissances de l'élève dans la situation didactique en savoir. En effet, certaines de ces connaissances ont vocation à devenir savoir mais elles n'en ont pas initialement les propriétés : elles sont locales, contextualisées, personnalisées, et l'élève ne peut, seul, pas leur reconnaître la valeur de généralité que leur confère l'institution (la société, l'école, la communauté savante). Le professeur a la charge de les identifier, de les décontextualiser, de les dépersonnaliser et de les généraliser, bref de leur donner un caractère institutionnel.

La notion de situation didactique est le concept fondamental de la TSD. Dans une relation didactique classique, le maître a naturellement tendance à accorder de l'importance aux bonnes réponses, à les susciter, et l'élève a naturellement tendance à chercher les indices des bonnes réponses dans le jeu et les questions du maître. Le savoir dans ce type d'interaction didactique répond beaucoup plus aux intentions des acteurs - l'un veut des bonnes réponses et l'autre veut les produire - qu'à ses propres nécessités internes : il est donc dénaturé par la nature même de ce jeu. Pour échapper à ce phénomène le maître fait *dévolution* du problème : il installe un autre type de dialogue où l'élève a pour interlocuteur principal la situation didactique elle-même. Ses propositions ne sont alors plus sanctionnées par le maître mais par leurs (in)adéquations-mêmes au problème qui apparaissent de manière évidente : on parle de *rétroaction du milieu*.

Le *milieu* est l'ensemble de ce qui est à disposition de l'élève pour résoudre le problème posé par la situation didactique. Il est constitué des éléments qui définissent le problème, les consignes, le matériel mais aussi de l'organisation de son travail (en groupe ou pas), de ses connaissances, tout ce qui peut influer sur ses réponses ; ce milieu se modifie constamment pendant l'activité de l'élève et s'enrichit de ses essais infructueux, de ses conjectures provisoires...

La phase *adidactique* de la situation est celle où l'élève cherche à résoudre un problème, à trouver une réponse qui lui convienne. L'intention (didactique) du maître de transformer les connaissances de l'élève est alors totalement secondaire. L'élève ne s'occupe et n'a à faire qu'au milieu avec lequel il interagit et qui l'oblige à réviser, modifier, progressivement ses connaissances. Cette phase adidactique peut être divisées, par des interventions du professeur, en moments adidactiques (Mercier 1997) quand les conditions de l'adidacticité ne semblent plus suffisantes.

Pour qu'une situation puisse ainsi fonctionner, elle doit répondre à une double contrainte épistémologique : les tentatives « naïves » provenant des conceptions des élèves trouvent dans la situation un terrain naturel d'application et doivent pouvoir être questionnées par les rétroactions du milieu, le savoir visé doit être contenu dans la situation comme la seule stratégie accessible optimale de résolution. La phase adidactique devrait déboucher sur l'institutionnalisation par le maître des connaissances qui correspondent à ce savoir.

On peut résumer cette première partie de la présentation de la théorie des situations par une nouvelle définition du savoir : le savoir est la part institutionnelle des connaissances produites par l'interaction d'un individu avec un milieu adéquat. Remarquons ainsi que cette définition correspond aussi bien à l'activité d'enseignement/apprentissage qu'à la production du savoir par la recherche.

L'activité de l'élève est modélisée dans la phase adidactique de la situation par différents niveaux qui mettent en évidence l'évolution de l'activité mathématique de l'élève :

Le niveau d'action : L'élève agit sur son milieu, observe les rétroactions et progressivement acquiert des connaissances dans l'action. Celles-ci ne sont pas encore ni formalisées, ni formulées mais sont identifiables dans les stratégies de plus en plus adaptées qu'il utilise. A ce niveau, l'élève contrôle et anticipe les rétroactions du milieu dit *milieu antagoniste* (nommé ultérieurement *milieu matériel*).

Le niveau de formulation : Vient un moment où ces connaissances qui sont apparues dans l'action sont formulées pour être partagées. Elles n'ont, à ce moment-là, que le statut d'heuristiques, de conjectures, de déclarations qui n'auront de statut plus certain que lorsqu'elles chercheront une validité dans la phase suivante. A ce niveau, l'élève partage des idées et de l'expérience

Le niveau de la validation : Les affirmations proposées sont étayées par des arguments, des preuves, des éléments de justification.

Ces trois niveaux peuvent naturellement s'enchaîner dans cet ordre mais souvent apparaissent imbriqués et/ou ne respectent pas cet ordre car l'activité de l'élève est sinueuse, non directe, à l'image de la recherche.

Ces différents niveaux ont été modélisés par Brousseau sous forme de schéma en « structure d'oignon ». Ce schéma a été à la fois simplifié et enrichi par Margolinas puis par Bloch (2005) sous la forme d'un tableau de structuration en niveaux de milieux. Ce tableau nous servira à établir et questionner la correspondance entre les niveaux de milieux adidactiques et les types de rationalités.

M3 : M-de construction		P3 : P-noosphérien	S3 : situation noosphérienne	sur
M2 : M-de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction	didac
M1 : M-didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	tique
M0 : M- d'apprentissage : institutionnalisation	**E0 : Elève**	**P0 : Professeur enseignant**	**S0 : situation didactique**	
M-1 : M-de référence : **formulation validation**	E-1 : E-apprenant	P-1 : P régulateur	S-1 : situation d'apprentissage	a-
M-2 : M-objectif : **action**	E-2 : E-agissant	P -2 P-observateur, dévolueur	S-2 : situation de référence	didac
M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : situation objective	tique

Figure 12 : Les niveaux de milieux (Bloch 2005 p.55)

Bien que nous présentons ici l'intégralité du tableau, nous nous intéresserons seulement aux niveaux de M-3 à M0, niveaux qui correspondent à l'activité de l'élève.

Les niveaux de la phase adidactique, caractérisée par le fait que le professeur se garde de toute intervention qui dirige l'élève vers la solution, se décline en termes de milieux, comme suit :

- le niveau M-3 correspond au problème donné par le professeur et appelé « milieu matériel »,

- le niveau M-2 correspond au niveau dans lequel l'élève agit, essaie, tente des stratégies, ce milieu est appelé « milieu objectif » ou « milieu pour l'action.

- le niveau M-1 où l'élève exprime ses stratégies et en donne des justifications, ce milieu est appelé « milieu de formulation et validation ».

Le milieu M0 est le « niveau d'apprentissage » où le professeur réalise une institutionnalisation.

I.2 Modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel

Bloch et Gibel ont ensuite utilisé cette structuration en niveaux de milieux pour élaborer un modèle d'analyse des raisonnements en croisant les niveaux de milieux avec des éléments d'analyse sémiotique de Pierce et les notions de répertoire (Gibel 2004) : ce modèle nous sera utile pour déterminer les modalités d'identification des différents types de rationalités.

Bloch et Gibel adoptent la définition d'Oléron du raisonnement :

> Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicités et conduits en fonction d'un but. (Bloch et Gibel 2011 p.13)

Les raisonnements dans ce modèle sont alors analysés selon trois axes : les niveaux de milieux (Brousseau, 1998b), les fonctions du raisonnement et répertoire et l'analyse des représentations sémiotiques de Pierce. La notion de répertoire est définie comme étant :

> L'ensemble des moyens sémiotiques que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves par suite de son enseignement, constitue le répertoire didactique de la classe tel que l'a défini Gibel (2004). (Bloch et Gibel 2011 p. 14)

Les différents éléments du répertoire se révèlent dans les différents niveaux de la situation sous des formes spécifiques. Ainsi dans le niveau d'action, ces éléments apparaissent sous forme d'heuristiques, d'exhibition de cas particuliers et de décision de calcul, tandis que dans le niveau de formulation, ce sont davantage des conjectures étayées qui font leur apparition ainsi que des calculs plus génériques et des décisions sur des objets mathématiques. Enfin dans le niveau de validation, la formalisation de preuve fait son entrée. Pour ce qui est de la sémiotique de Pierce, Boch et Gibel utilisent les trois catégories sémiotiques que Pierce distingue : *les icônes, les indices et les symboles arguments*. Les *icônes* sont les signes qui évoquent un objet : par exemple, la Tour-Eiffel comme symbolisant Paris. En mathématiques il y a, a priori, peu d'icônes sauf les « symboles iconifiés », c'est-à-dire des symboles qui évoquent immédiatement pour le mathématicien une théorie sans avoir besoin de la revisiter (le symbole « intégrale » évoque immédiatement la théorie de la mesure par exemple). Les *indices* sont les signes qui désignent un objet. Par exemple un panneau « Paris » désigne Paris, en mathématiques le dessin d'une figure peut être un indice. Les *symboles-arguments* sont les signes qui désignent l'objet au travers de règles et lois auxquelles se soumet l'objet. Par exemple le plan de Paris, et en mathématiques un calcul qui prouve une assertion.

Ces trois axes sont résumés dans le tableau de synthèse suivant (les mentions SEM et SYN correspondent à la nature de l'argument : sémantique et/ou syntaxique) avec les codages matriciels correspondants :

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonne-ments	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisa-tion des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques : ici symboles de l'Analyse
Niveau d'actualisa-tion du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

Figure 13 : Milieux/répertoire/symboles (Bloch et Gibel 2011 p. 17)

Notre questionnement à propos des types de rationalités porte sur leur évolution dans une situation adidactique. Aussi nous nous interrogeons : ces différents milieux, ne sont-ils pas les lieux naturels d'exercice de rationalités spécifiques ?

I.3 Première problématisation et étude de H1

Rappelons que notre sujet d'étude concerne les premiers pas dans l'analyse formalisée, en particulier la notion de limite. Comme nous l'avons déjà vu, la littérature décrit un certain nombre d'éléments épistémologiques associés à cette notion : la topologie des nombres réels, la notion de fonction, la rupture avec l'algèbre, la notion même de définition, le formalisme, la notion d'infini, etc. Mais elle décrit également les multiples difficultés didactiques : changements de registres, constitution d'un milieu suffisamment riche, rôle complexe de l'instrumentation, pauvreté ou incohérence des organisations mathématiques. Nous nous intéressons justement à la notion de limite car cette complexité nous interroge : quelles sont les conditions épistémologiques, didactiques, et autres pour qu'une classe de niveau terminale ou première année de licence puisse accéder, dans une situation adidactique, à la définition formalisée de la limite d'une fonction de manière à pouvoir s'en servir dans des démonstrations élémentaires ? Rappelons aussi que nous tablons sur l'idée fondamentale selon laquelle le contrôle de l'adidacticité est fortement liée à la pertinence du travail des élèves porté vers une mobilisation conséquente de

la rationalité ; de sorte que cette dernière accompagne, guide et produise l'émergence de l'objet définition de la limite. Quelle est donc cette rationalité ?

L'étude réalisée dans le chapitre précédent, nous permet de commencer à répondre à cette question en utilisant les différents modèles de rationalités évoqués. De façon évidente une telle rationalité sera pour Legrand une rationalité scientifique, pour Boero d'abord une rationalité épistémique, et pour Lerouge la convergence d'une rationalité personnelle et d'une rationalité culturelle de la limite. En ce qui concerne les autres apports, ils peuvent contribuer à éclairer certaines facettes (logique, contrôle, rôle du collectif, validation…) et apporter des réponses locales à cette question de la rationalité. Nous devons cependant constater que ni les modèles cités, ni ces apports variés ne permettent de constituer une vision claire et globale du rôle de la rationalité dans le processus d'émergence d'un objet mathématique.

Nous avons commencé à évoquer l'insuffisance des seules connaissances d'ordre I de Sackur et al. (2005), nous pensons que justement, reprenant cette catégorisation des connaissances, les connaissances d'ordre II (définition, validité, logique) jouent un rôle significatif vis à vis de la rationalité. La question initiale du sens et du besoin des notions mathématiques, peut se traduire maintenant, pour la notion de limite, par : de quoi peut provenir ce caractère d'indispensabilité de cette construction de la définition de limite sous la condition d'une rationalité idoine ? Provient-il de la notion de définition, qui selon Ouvrier-Buffet (2003) reste largement à développer dans l'enseignement ? Provient-il du besoin de démonstration/validation d'un résultat/théorème dont Lakatos (Balacheff et al. 1984) fait l'un des pôles de sa méthode de preuve et réfutation pour co-construire le théorème et la définition associée ? Provient-il de la logique qui a vocation à donner sens à cette formalisation complexe ?

Une autre manière de poser le problème pourrait aussi être : quelles sont les « raisons rationnelles » de souhaiter concevoir une définition de la limite ? Sous cette forme apparaît beaucoup mieux le rôle de la rationalité : elle atteste que certaines raisons ont une qualité particulière que d'autres n'ont pas, elles sont rationnelles. Hélas cela ne nous renseigne toujours pas sur ce qu'est cette rationalité.

Parti du questionnement de la construction de la limite et du besoin d'une rationalité adaptée, nous arrivons maintenant à celui de la construction d'une rationalité pour rendre compte du besoin de limite. Cette construction de la rationalité peut prendre deux aspects. D'une part il s'agit d'un questionnement purement théorique et visant à concevoir comment modéliser la rationalité. D'autre part, le questionnement de la construction de la rationalité a aussi un versant beaucoup plus cognitif et correspondant au développement de la rationalité de l'élève, autrement dit à la « rationalité en construction ». Ces deux aspects se rejoignent lorsqu'il s'agit de suivre l'évolution de la rationalité d'un individu, d'une classe, où le fait de disposer d'un modèle de rationalités donne les moyens de suivre cette évolution selon ce modèle. Disposant d'un tel modèle, nous pourrions alors nous demander : quel est le rôle des situations didactiques dans l'évolution de la rationalité de l'élève ? Comment intégrer cette dimension de la rationalité comme paramètre de conception des ingénieries didactiques ? Quelle évolution peut-on constater en termes de rationalité d'un élève, d'une classe ? Évidemment toutes ces questions générales se déclinent pour la notion de limite. L'étude de ces questions suppose au préalable la mise en place du modèle des rationalités, soit le retour sur l'hypothèse H1 de notre recherche :

Il est possible de modéliser la rationalité de manière à caractériser les étapes d'un accès adidactique aux notions mathématique avancées, en l'occurrence celle de la définition de la limite. Ce travail fera l'objet du paragraphe suivant.

II Un modèle des rationalités

II.1 Introduction

Dans ce chapitre nous proposons un modèle de rationalités. Ce modèle n'a pas vocation à représenter fidèlement les pratiques effectives de la communauté scientifique actuelle, d'ailleurs peut-on vraiment imaginer qu'il existe une pratique standard ? Il s'agit surtout de déterminer, a priori, les types de rationalités mobilisés par les élèves en situation adidactique, c'est-à-dire lorsque leur raisonnement a libre cours. Nous verrons alors que ces types-là de raisonnements correspondent à certains de ceux de la communauté scientifique actuelle ou passée.

Notre démarche consistera, une fois notre modèle défini, à établir la cohérence qu'il réalise sur les plans didactiques et épistémologiques avec des études antérieures. Nous regarderons ensuite les usages possibles de ce modèle et exemplifierons ceux-ci sur des cas réels.

II.2 Première approche d'une modélisation des types de rationalités

Nous partons du principe que lorsqu'un humain cherche à comprendre un domaine de réalité il mobilise sa rationalité : **la rationalité fonde « ce qui est censé » prévenir des contradictions**[43] **entre ce que produit le raisonnement de cet humain, ce qu'il anticipe et émet comme énoncé concernant ce domaine de réalité et ce domaine de réalité lui-même.**

Cette présentation de la rationalité implique trois notions : celle de domaine de réalité, celle de non-contradiction et celle de raisonnement. Nous allons préciser ces trois aspects.

a) La question de la réalité

Le point de départ de tout questionnement scientifique est celui du type de réalité soumis à ce questionnement. Il semble pourtant difficile, ontologiquement, de spécifier précisément ce que pourrait signifier « réalité » sans (au minimum) avoir l'impression de tourner en rond. C'est pour cette raison que les nombreuses propositions à ce sujet se distinguent surtout par leur type propre de circularité. Cependant, nous verrons alors que nous ne faisons pas du sur-place à considérer ainsi ces différents types de réalités.

Commençons par la distinction entre réalité matérielle et réalité intellectuelle. La première est composée des objets matériels (une chaise par exemple) et la seconde des objets de pensée (la catégorie conceptuelle « des chaises » par exemple). Cette distinction semble assez évidente mais en définissant les réalités **matérielles** et **intellectuelles** à partir des objets qui les peuplent, les objets **matériels** et les objets de **pensée**, a-t-on vraiment avancé ?

Malafosse (2000), en didactique de la physique, définit une forme de réalité : la notion « d'espace de réalité » :

> Notre position épistémologique a été de postuler **l'existence** d'un « **espace de réalité** » défini

[43]Nous voyons que la rationalité ainsi définie en s'appuyant sur la non contradiction correspondrait plutôt à la rationalité épistémique d'Habermas.

> comme l'ensemble des objets **réels** et des événements **existants** hors de la pensée personnelle ou collective, et sur lequel portent à la fois l'activité psychique des individus et l'activité de réflexion des communautés culturelles. Dans cette perspective, la conceptualisation apparaît comme une « projection » de l'espace de réalité dans un cadre personnel de rationalité via le filtre de divers cadres culturels. (Malafosse *et al.* 2000 p. 18) C'est nous qui soulignons.

Nous remarquons une autre circularité dans cette définition. Si le réel existe hors de soi, comment savoir qu'il existe vraiment ? Comment peut-il être digne d'intérêt puisqu'éternellement étranger ? Cet espace de réalité est-il, avant d'être un réel, une idée, un « postulat » ou bien devient-il un postulat puisqu'il s'impose à notre conscience de manière évidente ? Et comment peut-il s'imposer de cette manière sans s'imposer d'abord à nos sens ?

Lelong (2004 cité par Dias 2008) détermine deux types de réels : le réel perçu et le réel partagé :

> En nous référant à l'expérience du mathématicien, il est aisé de préciser ce réel partagé en le comparant au réel perçu. Le réel perçu était validé par la succession de deux processus élémentaires, une perception au départ, suivie elle-même d'un certain contrôle des sens qui vaut affirmation d'existence.
>
> Pour le réel partagé, le point de départ n'est plus sensoriel, il se présente comme un désir nous dirigeant vers une stratégie de réalisation. Cependant, comme le fait le réel perçu, il cherche d'abord à nous transporter ailleurs. Cet ailleurs nous pousse à une conceptualisation, c'est-à-dire à l'insertion d'un concept ou au moins d'une perspective nouvelle. Le plus souvent il se présentera comme une ambition, une « idée de faire quelque chose », comme on dit familièrement." (Lelong 2004 p. 95, cité dans Dias 2008)

Dias (2008) positionne sa propre démarche de questionnement de la dimension expérimentale des mathématiques dans cette optique et déclare :

> Nous suivrons Lelong pour dire que l'accès aux objets de savoirs des mathématiques s'exprime et se réalise dans un projet plus social qu'individuel. C'est la mise en mots (formulation, argumentation, validation), la communication de signes et de symboles qui caractérise le dispositif d'expérimentation dans son objectif de réalisation. (Dias 2008 p. 28 p. 28)

Pour Lelong (2004) comme pour Dias (2008), le réel décrit n'est pas un réel immanent comme celui de Malafosse (2000) mais un réel qui dépend d'un désir/projet et dont « la réalisation » s'actualise dans des signes et des symboles selon Dias (2008). Ceci est lié à la différence entre le réel matériel et le monde des objets mathématiques comme le rappelle Duval (1993), différence qui justifie qu'on « matérialise » les idées pour pouvoir s'en saisir :

> Néanmoins, les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit « réels » ou « physiques ». Il faut donc pouvoir en donner des représentants. Et, en outre la possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système sémiotique utilisé. (Duval 1993 p. 38)

Sackur et al. (2005) placent la réalité mathématique dans *la nécessité épistémique* qu'ils définissent ainsi :

> C'est la qualité qui fait « qu'il ne peut en être autrement et que cela ne dépend ni de tel ou tel, mais qu'il est en mon pouvoir intellectuel (théoriquement) de m'en assurer » (Sackur et al. 2005 p. 65)

A partir de cette nécessité épistémique, ils caractérisent ce qu'ils appellent *réalité mathématique* :

> Les règles du jeu qui régissent l'activité mathématique amènent les mathématiciens (ou les sujets

> aux prises avec les mathématiques) à se confronter à une réalité qui résiste. C'est la réalité mathématique. /…/ Cette idée de résistance est essentielle car l'expérience de la nécessité épistémique se fait dans la rencontre avec l'aspect résistant de la réalité mathématique. (Sackur et al. 2005 p. 66)

L'existence d'une réalité mathématique est éprouvée dans sa résistance, c'est-à-dire étant données certaines règles données arbitrairement. La réalité mathématique se détermine selon ces règles et résiste à une volonté qu'elle soit autrement. Définie ainsi, cette réalité mathématique n'est donc pas une réalité « en soi » comme pour la réalité physique, mais dépend des règles qu'on se donne.

> Dans le monde physique personne ne peut passer à travers un mur. De même, en mathématiques, les objets résistent : racine de deux est un nombre irrationnel, on ne peut pas faire qu'il en soit autrement. Si nous voulions qu'il en soit autre chose, nous ne ferions pas des mathématiques, au moins avec les mêmes types de règles. (Sackur et al. 2005 p. 66)

Entre deux positions extrêmes, celles des platoniciens pour qui les objets préexistent à la pensée et donc ont une existence immanente, et celle du groupe Bourbaki qui entend faire exister « réellement » les objets sur la base d'une axiomatisation, Bloch (2015) propose de suivre une voie médiane, celle de certains philosophes contemporains :

> La philosophie actuelle de la nature des objets mathématiques (selon Desanti et, à sa suite, Jean Petitot, 1991) conduit à une autre conception de la nature de ces objets : ceux-ci sont des entités (des idéalités dit JT Desanti : tout objet mathématique est un concept, et donc un objet en quelque sorte totalement abstrait) construites par l'articulation des théories mathématiques, à partir de l'expérience. (Bloch 2015 p. 73)

A la suite de quoi elle propose la vision complémentaire de Gonseth « qui veut penser le rapport des mathématiques (existantes et en construction) au monde de l'expérience, dans un double souci de *vérité* et de *réalité*. » :

> Pour ce faire, Gonseth définit ce rapport dans un processus qui fera passer de la réalité à un *schéma* de cette réalité, un schéma étant un support écrit, dessiné… qui tend vers l'abstraction mais doit conserver une partie des relations qu'entretiennent entre eux les objets réels. (Bloch 2015 p. 75)

Cela revient finalement à établir une sorte de dialectique entre « réalité » et théorie et de « fonder les objets comme des entités construites par l'articulation des théories mathématiques, à partir de l'expérience. » :

> /…/ la construction "en étapes imbriquées" des mathématiques depuis la conceptualisation et la modélisation du monde réel s'éclaire : il ne s'agit pas de rejeter le formalisme ni l'intuitionnisme, mais de regarder quand les mathématiques – et les mathématiciens ! – utilisent, de façon alternée, des preuves pragmatiques (physiques, pourrait-on dire), des démonstrations formelles, des justifications basées sur l'intuition. (Bloch 2015 p. 75)

Que ce soit une réalité matérielle ou bien une réalité intellectuelle, que ce soit une réalité perçue ou partagée, que ce soit la réalité représentée ou exprimée, ou bien la réalité mathématique (au sens de Sackur et al. 2005), ou alors une dialectique entre un « réel » et la théorie, chacune de ces réalités, et d'autres, est une manière de regarder ce que nous supposons provenir d'une seule réalité. Nous avançons que la (ou une) rationalité est précisément un moyen de rendre compte et de rechercher cette unité (localement ou plus globalement) pour un individu comme pour un groupe d'individus.

Dans notre étude, nous distinguons essentiellement trois types de réalités et leurs relations :

La réalité sensible provenant de l'accès par nos sens à la réalité matérielle.

La réalité théorique qui se construit à partir de définitions, d'axiomes et de règles du jeu mathématiques. En particulier, dans cette réalité les objets existent d'abord parce qu'ils sont définis.

La réalité représentée qui peut être une représentation de la réalité théorique ou sensible.

b) La question de la non-contradiction

La logique classique donne une définition simple de la non-contradiction ou principe de non-contradiction : « (A et non A) est faux ». Cela suppose qu'il faut pouvoir donner un sens à la vérité et la fausseté d'une assertion. Ceci est évidemment le cas dans la logique classique mais nous allons voir ici que la multiplicité des types de vérités possibles implique plusieurs types de non-contradiction. Nous distinguons trois types de vérités pour ce qui concerne notre étude : la vérité pragmatique, la vérité empirique ou plausibilité, et la vérité théorique ou apodictique.

La vérité pragmatique est celle qui statue sur des affirmations à l'aune de leur efficacité sur des cas concrets : ça marche ou ça ne marche pas. Cette vérité pragmatique est à l'image de ses moyens de validation, toujours locale et limitée aux moyens effectifs de vérification.

La vérité empirique ou plausibilité se fonde dans l'accumulation d'indices concordants : plus on a de cas qui s'accordent, plus on a d'arguments accréditant une thèse, plus cette thèse gagne en plausibilité. Cette plausibilité est quasiment prise pour valeur de vérité quand elle a résisté au temps et à des cas « extrêmes » (notion d'expérience cruciale). C'est cette méprise entre notions de plausibilité et de vérité apodictique, l'une laissant entendre que le caractère nécessaire est sérieusement probable mais pas établi et l'autre affirmant que ce caractère l'est, qui explique la violence perçue lors de certaines révolutions scientifiques où le masque de la vérité tombe avec fracas. Ainsi, par exemple, ce fut un rare choc culturel et scientifique lorsque la théorie de la relativité d'Einstein mis en cause une vérité que l'on pensait, à l'époque, ultime, celle de la mécanique newtonienne. C'est à la suite de ce genre d'évènement que de nombreux penseurs se sont mis en quête de refonder l'épistémologie (Bachelard, Popper, Khun…). Pour ce qui est de l'activité des élèves nous pouvons percevoir cette distinction entre plausibilité et vérité apodictique, par exemple lorsqu'une affirmation est proposée comme « conjecture » par les élèves eux-mêmes ou bien qu'elle est énoncée sans ce genre de précaution. Dans le premier cas il y a bien prise en compte de l'aspect « seulement » plausible de la vérité. Dans l'autre cas, cet aspect est probablement ignoré, au minimum tenu sous silence alors que sa prise en compte supposerait que cette qualité de la vérité soit exposée puisqu'elle est, d'une certaine manière, aussi importante que le contenu de la vérité lui-même. Mais il faut avoir conscience de cette distinction pour la mentionner, en employant le mot « conjecture », par exemple, mot ayant un sens seulement en dehors d'une injonction ou d'un rituel.

La vérité apodictique est le fruit de la nécessité épistémique. La vérité apodictique est déterminée comme « ce qui ne peut pas être autrement ». Contrairement donc à la vérité empirique qui se construit positivement par accumulation de faits, d'arguments positifs, la vérité apodictique se construit sur l'élimination d'une possibilité contraire à ce qu'elle énonce, autrement dit elle se fonde sur l'impossibilité d'un fait négatif ou discordant à son égard.

De manière générale, si la contradiction est le fait que se produisent A et non A simultanément, ces trois types de vérités relativisent l'idée même de A et de non A à travers leur prisme respectif de ce qui est vrai ou faux. Ainsi de ces trois façons de mesurer la non-contradiction, suivant ces types de vérités, émanent trois types de rationalités reposant sur des principes propres.

Nous appellerons :

- *Rationalité pragmatique* celle qui est définie par les principes qui tentent d'assurer la non-contradiction et qui se mesure en termes d'efficacité dans l'action et sur des cas concrets.

- *Rationalité empirique* celle qui est définie par les principes qui tentent d'assurer la non-contradiction et qui se mesure en termes de plausibilité. A et non A ne peuvent être plausibles tous les deux. Remarquons ici que la plausibilité de l'un interdit celle de l'autre mais pas sa négation (au sens de la vérité apodictique). Contrairement à la notion de vérité apodictique, si A est plausible, et donc tenu pour vrai (au moins provisoirement) dans cette rationalité, cela ne l'empêchera pas éventuellement d'être finalement reconnu comme faux.

- *Rationalité théorique* celle qui est définie par les principes qui tentent d'assurer la non-contradiction et qui est mesurée par le fait d'exclure absolument la possibilité d'avoir A et non A, où la vérité de A et celle de non A sont déterminées de manière certaine (par hypothèse ou par nécessité). En mathématiques, il s'agit du principe de non-contradiction de la logique standard qui s'énonce ainsi : (A et non A) est fausse.

c) La question des raisonnements

Par rapport à notre première présentation de la rationalité, nous nous intéressons, ici, à certains types de raisonnements exprimés, en particulier aux discours qui déterminent les moyens de passages d'hypothèses à des conclusions, et prioritairement à la question des moyens de validation.

Ces moyens de validation sont l'abduction, l'induction, la déduction, et de manière plus générale les types généraux de validation qui les utilisent : la vérification, de l'argumentation et de la démonstration.

Nous rappelons ici exactement ces moyens et ces trois types généraux de validation :

- *L'abduction* est le fait de déduire A du fait que l'on sait B et que l'on sait que « A implique B ».

- *L'induction* est le fait de déduire « A implique B » du fait que cette implication est vérifiée dans de nombreux cas. Autrement dit qu'il existe x_1 tel que A(x_1) et B(x_1) sont vrais, de même que pour $x_2 \ldots x_n$.

- *La déduction* est ce que l'on appelle modus ponens et correspond au fait de déduire B du fait que l'on sait que A est vrai et que « A implique B » est vrai. Nous appellerons déduction par contraposée (ou modus tollens) le fait de déduire que A est faux du fait que l'on sait que B est faux et que « A implique B » est vrai.

- *La vérification* établit les vérités pragmatiques en testant concrètement au cas par cas, c'est à dire en utilisant des arguments pragmatiques.

- *L'argumentation* est le raisonnement qui produit des conclusions plus ou moins plausibles, par exemple par abduction ou bien par induction.

- *La démonstration* produit des vérités apodictiques (nécessaires) grâce *à la déduction.*

A partir de cette première présentation de ce qu'est la rationalité et de ce que peuvent être les différents types de rationalités, nous allons tenter de spécifier davantage le modèle.

II.3 Spécifications des types de rationalités

Nous avons déjà commencé à distinguer plusieurs types de rationalités à partir des types de vérités. Dans cette partie nous ajoutons d'autres critères afin de spécifier davantage le modèle. D'une première présentation de la rationalité nous proposons maintenant de partir d'une définition de la rationalité.

a) Définition de rationalité

L'analyse des différents aspects impliqués dans notre première définition de la rationalité (réalité, non contradiction, raisonnement) nous ont amené à affiner la rationalité par une deuxième définition :

Nous dirons qu'une rationalité est un système de production et de contrôle de connaissances qui a pour vocation d'assurer la non-contradiction de ces connaissances entre elles ou avec un domaine de réalité.

Pour le mot connaissance, nous nous référons à l'acception utilisée dans la TSD et rappelée en début de chapitre. Pour ce qui est du système de production et de contrôle de connaissances, il s'agit des moyens utilisés pour inférer de nouvelles connaissances à travers le raisonnement[44] et contrôler leur validité, pertinence, efficacité. Pour préciser ce système, nous nous appuierons sur l'idée de règles du jeu de l'activité mathématique au sens de Sackur et al. (2005), c'est-à-dire sur des connaissances d'ordre II qui concernent la manière de faire des mathématiques avec des connaissances d'ordre I. Sackur et al. présentent trois types de connaissances du second ordre dans Sackur et al. (2005) : celles qui concernent la sémiosis (au sens de Duval), celles qui concernent la validité des énoncés, celles de la logique mathématique auxquelles ils ont ajouté, dans Maurel et Sackur (2010), la notion de définition. Rappelons que les connaissances d'ordre I de ce modèle sont les définitions, les axiomes, les théorèmes…

Ce modèle de Sackur et al. doit être toutefois adapté à notre problématique plus générale dans la mesure où ce modèle correspond fondamentalement à une typologie des connaissances intervenant dans une construction théorique des mathématiques. Or, notre projet met davantage l'accent sur l'activité mathématique (de l'élève en particulier) et sur son évolution. De plus, cette construction des mathématiques ne prend donc pas en compte les phases pragmatiques et empiriques, ces phases étant les phases où s'expriment les rationalités du même nom. Nous utiliserons donc, afin de généraliser la typologie des connaissances d'ordre II à ces autres phases, un vocabulaire moins spécifique pour désigner les types de moyens de production et de contrôle : types de validations, types de logiques et types d'existences des objets (pour la défi-

[44] Nous utilisons pour l'instant la définition donnée par Oléron et préciserons au II.5.d)i. la différence entre rationalité et raisonnement.

nition). Dans un premier temps nous laissons de côté la catégorie sémiosis, et registre de représentation, que nous intégrerons ensuite via le rapprochement avec le modèle de raisonnement de Bloch et Gibel.

Nous posons maintenant les hypothèses de modélisation essentielles à partir desquelles nous construirons et affinerons ensuite le modèle. Ces hypothèses bien que générales sont de nature à contraindre la spécification des types de rationalités.

b) Hypothèses sur la modélisation des types de rationalités

Voici donc les hypothèses à partir desquelles nous allons spécifier les différents types de rationalités. Bien que générales, ces hypothèses sont de nature à contraindre la spécification des types de rationalités. Pour chacune d'elles nous expliquons sa fonction, la nature du choix qui nous a conduit à la formuler, certaines des conséquences de ce choix et enfin les possibilités et les moyens de falsifier ou confirmer éventuellement la validité de ces hypothèses.

- Hypothèse 1 (Extériorité de la rationalité) : Un type de rationalité est un système externe à l'individu (Pour appréhender le monde il mobilise une rationalité)

Nous construisons le modèle de rationalités à « l'extérieur » de l'individu pour trois raisons.

La première raison correspond à une distanciation liée à l'acte de modélisation : on ne peut pas savoir comment pense réellement un individu. Au mieux, on peut seulement savoir si ses façons d'agir correspondent ou pas à un modèle auquel on peut les comparer. Pour éviter toute confusion il faudrait dire : ce comportement est conforme ou non à ce type de rationalité. Par soucis d'allègement des formulations nous dirons : l'élève mobilise tel ou tel type de rationalité ou bien cet argument relève de tel type de rationalité. Ces formulations gardent la trace de l'extériorité et restent plus légères que la formulation canonique.

La deuxième raison est que la rationalité que nous essayons de modéliser est susceptible d'un apprentissage ; on peut l'acquérir ; elle est donc, au moins initialement, externe.

La troisième raison est que nous concevons la rationalité comme un paradigme de pensée, autrement dit nous ne concevons pas notre modèle comme relatif à un individu (comme par exemple Lerouge) mais comme à une manière collective d'aborder la connaissance, une forme de paradigme (Ceci n'exclut pas une rationalité propre à l'individu).

- Hypothèse 2 (caractéristiques d'un type de rationalité)

Nous faisons l'hypothèse qu'à un type de rationalité (pragmatique, empirique, théorique ou autre) correspond un système de production et de contrôle de connaissances caractérisé par :

- Une caractéristique de validation (abduction, induction, déduction, argumentation, vérification...).
- Une caractéristique de logique (type d'implication, type de quantificateur, type de contradiction).
- Une caractéristique d'existence des objets (objet défini, objet préconstruit…).

C'est grâce à cette catégorisation selon ses caractéristiques propres que nous allons pouvoir spécifier plus précisément chaque type de rationalité. Comme il existe de nombreuses combinaisons de ces trois caractéristiques, nous serons amenés à sélectionner certaines d'entre elles,

beaucoup plus réalistes, et ce sont celles-ci qui nous serviront de modèle de types de rationalités. L'hypothèse 3 permet justement ce tri.

- Hypothèse 3 (stabilité des types de rationalités) : Un type de rationalité est intrinsèquement stable.

Cette hypothèse signifie qu'une rationalité ne doit pas, a priori, être susceptible de produire des connaissances contradictoires entre elles ou avec le domaine de réalité. Cette hypothèse correspond à une nécessité de modélisation : un modèle d'intelligibilité du monde ne peut pas, par essence, comporter l'inintelligibilité fondamentale : c'est-à-dire permettre d'accepter une chose et son contraire. Ici « contraire » doit être entendu au sens du type de rationalité en question, c'est-à-dire du type de vérité et de non contradiction associé (hypothèse 2). On dira qu'il y a contradiction au regard des principes de contradiction de tel type de rationalité et du type de logique associée car ce qui fait contradiction pour un type de rationalité ne le fait pas forcément pour un autre.

Conséquences de cette hypothèse 3 :

- Les caractéristiques (de validation, de logique, d'existence des objets) d'un type de rationalité doivent être cohérentes pour pouvoir assurer la stabilité du type de rationalité en question. On ne peut pas, par exemple, associer dans un modèle, au sein d'un même type de rationalité, un principe de non-contradiction sans compromis (comme celui des mathématiques) et un mode d'existence des objets non cohérent avec celui-là (par exemple, les objets qui sont « définis » par leur seule existence matérielle) sans remettre en cause l'hypothèse 3, c'est-à-dire la stabilité du type de rationalité en question. Cette hypothèse est donc très contraignante pour le modèle et il faudra la tester.

- Un moyen de tester cette hypothèse de stabilité des types de rationalités serait de repérer la présence effective, dans la contingence, de difficultés liées aux changements de type de rationalité, c'est à dire de résistance à l'instabilité. Une telle observation peut se réaliser sur des scripts de situations didactiques, ou bien dans les études didactiques, elles-mêmes, qui auraient déjà identifié de telles difficultés ou encore dans l'histoire même des mathématiques. Voit-on des épisodes historiques des mathématiques où manifestement il faudrait changer de niveau de rationalité pour résoudre les difficultés rencontrées mais où ces changements apparaissent finalement comme laborieux ? Voit-on le même genre de phénomène dans des épisodes didactiques de classes ? A-t-on dans la littérature de tels phénomènes déjà étudiés et répertoriés ?

- Cette hypothèse 3 a une conséquence sur la classification des conflits cognitifs. Nous pouvons prévoir deux types de conflits cognitifs, c'est-à-dire des désaccords sur les objets mathématiques, ceux qui ont lieu à l'intérieur d'une même rationalité, que nous qualifierons d'intra-rationalité et ceux qui ont lieu entre deux rationalités, que nous qualifierons d'inter-rationalité. L'hypothèse 3 aurait tendance à laisser penser que le dernier type de conflit cognitif, inter-rationalité, serait difficile à résoudre en raison de la stabilité des types respectifs de rationalités. Cette difficulté est à mettre en relation avec la description de Sierpinska d'un phénomène analogue à propos des obstacles épistémologiques :

> Pour admettre son erreur, l'élève aura à franchir un obstacle épistémologique et ceci n'est pas chose facile. Un obstacle est lié à une conviction profonde, à un sentiment d'une vérité évidente, au sentiment que ce qu'on sait sur une question fondamentale est le seul savoir possible. **C'est comme si on vivait dans un monde clos. Pour franchir l'obstacle, il faut sortir de ce monde et voir d'autres mondes possibles ainsi que les relations entre eux.** (Sierpinska 1987 p. 73) c'est nous qui soulignons.

Mais le conflit cognitif intra-rationalité ne sera pas forcément plus simple à résoudre non plus. Nous aurons à étudier ces différentes situations lors de la partie consacrée aux usages du modèle.

- Hypothèse 4 (paradigmes épistémologiques) : Certains modèles épistémologiques classiques sont de bons modèles pour les types de rationalités.

La recherche scientifique a développé et produit des savoirs sur ses objets spécifiques d'études mais a également en parallèle développé ses modes d'appréhension et d'investigation du monde. Ces modes d'investigation ont eux-mêmes été étudiés et ont donné lieu à des modèles épistémologiques : l'inductivisme de Hume par exemple ou bien le falsificationnisme de Popper ou d'autres encore. Nous pensons que certains de ces modèles constituent de bons candidats pour certains types de rationalités en tant que paradigme de forme d'interrogation et de tentative de compréhension du monde, autrement dit de types de rationalités.

Pour tester cette hypothèse nous pourrons, une fois le modèle précisé, vérifier si ces modèles épistémologiques classiques correspondent ou non à une réalité didactique observée en classe ou préalablement étudiée.

c) Trois types de rationalités

L'hypothèse 2 de modélisation précise trois catégories de caractéristiques des types de rationalités (Logique, mode d'existence, validation). Nous avons commencé à préciser trois types de rationalités (pragmatique, empirique et théorique). Nous entreprenons maintenant pour chacun de ces types de rationalités d'examiner les cohérences possibles (Hypothèse 3 sur la stabilité) pour chacune des catégories de caractéristiques. Pour cela nous pouvons synthétiser ces différents axes (type de rationalité et caractéristiques) dans un tableau à double entrée. Il s'agit ensuite de remplir les cases vides du tableau (en grisé) ci-dessous de manière à ce que chaque colonne respecte l'hypothèse 3 de modélisation (stabilité) et donc la cohérence des caractéristiques.

		Rationalités		
Caractéristique	**sous caractéristique**	**Pragmatique**	**Empirique**	**Théorique**
Validation				
Type de logique	Type implication			
	Type de quantificateur			
	Type de contradiction basé sur	**L'efficacité**	**La plausibilité**	**La nécessité**
Existence des objets				

Tableau 3 : Rationalités et caractéristiques

Il faudra également préciser comment ces caractéristiques constituent des systèmes de production et de contrôle des connaissances, c'est-à-dire quels sont les mécanismes impliqués effectivement dans cette production et ce contrôle. Nous détaillons maintenant cela pour chaque type de rationalité.

i. Rationalité pragmatique

Pour ce qui est du contrôle des connaissances, le type de vérité qui valide les connaissances dans cette rationalité pragmatique, l'efficacité effective, impose une validation sous forme de vérification concrète ou au recours à l'évidence perceptive : ça marche ou ça ne marche pas.

Pour ce qui est de la construction des connaissances, ces dernières sont établies à partir de manipulations effectives sur des cas concrets puisque ce sont les seules connaissances contrôlables dans cette rationalité. De plus, ces connaissances sont donc limitées à une validité sur de petites collections de cas et jamais exprimées sous forme de généralités à caractère universel. Le quantificateur universel n'a donc pas de sens dans cette rationalité. Le quantificateur existentiel est lui restreint à la désignation matérielle et effective : « il y a là ce qu'on veut, ce qu'on souhaite ». Le « il existe » n'a de sens que pour un ensemble vérifiable, c'est à dire sur lequel on peut exercer une vérification effective, concrète.

Ainsi les objets élémentaires pris en charge par cette rationalité pragmatique se présentent comme des cas concrets que l'on peut manipuler pour déterminer certaines de leurs propriétés spécifiques. Leur existence est donc assurée essentiellement par ostension du réel ou bien implicitement dans l'action, on parlera alors de « définition en acte ». Ces objets peuvent également être des préconstruits au sens de Chevallard, c'est à dire des objets naturalisés par l'usage, ou bien encore désinstitutionalisés. Ces objets n'ont plus à être questionnés en tant que tels puisqu'ils ont acquis un caractère quasi concret.

Enfin, la logique utilisée est avant tout la logique naturelle où implication et réciproque ne sont pas forcément différenciées car on cherche à comprendre en terme « d'action sur » (logique de la causalité), de causes, de conséquences, donc de temporalité (logique naturelle de Deloustal-Jorrand).

ii. Rationalité empirique

Pour la rationalité empirique, il s'agit de concevoir un système de production et de contrôle de connaissances qui réponde au type de vérité associé à cette rationalité, la plausibilité, et au type de non-contradiction qui en découle. Pour cela nous allons utiliser deux systèmes distincts correspondants à deux modèles épistémologiques classiques : celui de l'inductivisme (de Hume) et celui du falsificationnisme (de Popper). Il s'agit ici de nous inspirer de la philosophie de ces modèles pour construire ces deux systèmes et non de prétendre faire correspondre terme à terme notre modèle et le leur.

Le modèle inductiviste

Le contrôle des connaissances, autrement dit la **validation**, dans ce modèle, table sur la répétition dans des conditions variées des faits comme ils sont décrits par la théorie, c'est-à-dire *l'induction*. De manière générale, on appelle *argumentation* le type de raisonnement associé. On y cherche à multiplier les indices en faveur d'une thèse.

Dans ce modèle l'apparition d'un contre-exemple n'est pas forcément considéré comme rédhibitoire (invalidant) dans la mesure où l'on est porté par la volonté de vérifier/prouver plus que de falsifier. Cela va dépendre de la nature et de la portée du contre-exemple. Ainsi que le dit Kuhn dans une considération plus générale sur les sciences expérimentales et sur la difficulté de modéliser le réel sans tomber sur des « anomalies » :

> Il s'ensuit que si une anomalie doit faire naître une crise, il faut généralement qu'elle soit plus qu'une simple anomalie. Il y a toujours des difficultés dans la cohérence paradigme-nature. (Kuhn 1962 p.62)

Pour ce qui est de la **logique**, l'inductivisme associe l'implication surtout à la causalité comme nous l'avons vu. Cela signifie qu'il y a une confusion possible entre une implication et sa réciproque (il n'y a pas d'effet sans cause). D'autre part, l'inductivisme recherche à établir des lois à partir des faits vérifiés donc les quantificateurs universels ont une portée relative. Enfin pour ce qui est de la contradiction, elle provient de l'inadéquation évidente de la théorie avec les faits. En outre, cette inadéquation doit être jugée suffisamment gênante pour la loi vérifiée pour être prise en compte. L'application du tiers exclus est contingente.

Pour ce qui est de **l'existence des objets**, il n'y a pas forcément de nécessité de faire exister les objets par une définition précise, même si ce n'est pas exclu, car la confrontation des résultats de la théorie au réel sert de moyen privilégié de validation et ne nécessite pas forcément de définition. La définition en acte est courante. Mais on peut cependant aussi commencer à dégager un début de spécification des objets afin de pouvoir les soumettre à la vérification pour les cas litigieux. Nous sommes dans un entre-deux qui fait penser au « moment intermédiaire » d'Ouvrier-Buffet.

Les connaissances dans cette rationalité inductiviste peuvent être obtenues par induction ou par abduction.

Si le modèle inductiviste est le modèle privilégié de la rationalité empirique, il nous est apparu nécessaire de compléter cette rationalité d'un modèle de réfutation. Ce modèle, issu des travaux de Popper, lui aussi ne statue qu'à partir des instances et essais qu'il effectue, en cela c'est une rationalité empirique, mais contrairement à l'inductivisme il se refuse à établir, à partir des seuls exemples, la vérité. C'est en quelque sorte le renoncement à une cause immanente des phénomènes pour les sciences expérimentales et pour les mathématiques il s'agit de la conscience de ne pas avoir les moyens déductifs de statuer définitivement. En termes de vérité c'est la volonté de viser des vérités apodictiques en ayant seulement les moyens de la plausibilité.

Le modèle de la réfutation.

Le contrôle des connaissances est lié à l'épreuve systématique à laquelle ces connaissances sont soumises afin de les réfuter, tandis que la production des connaissances provient d'une rationalité inductiviste. Cette rationalité mise beaucoup plus sur le contrôle que la production, elle produit par élimination.

Pour ce qui est de **la logique**, ce modèle utilise la logique mathématique usuelle. La signification de l'implication, des quantificateurs et du tiers exclus sont les mêmes qu'en mathématiques. La contradiction est associée à l'existence d'un fait qui nie la loi générale. Il n'y a ici pas d'indulgence comme pour l'inductivisme puisque cette rationalité est basée sur la volonté de falsifier systématiquement les lois proposées. Il n'est pas possible de statuer sur la vérité d'énoncés universels mais seulement de statuer sur leur fausseté (présence d'un contre-exemple). Pour **la validation**, il n'y a donc que la fausseté qui est prouvable et les faits individuels qui peuvent être vérifiés un par un. L'existence des objets n'est pas forcément assurée par des définitions rigoureuses. Mais l'importance du contre-exemple incline a priori à être plus exigeant sur **la définition** dans la mesure où, bien que le réel assure là encore un rôle essentiel, les conséquences

éventuelles d'un fait unique (falsifier une loi) sont telles que cela conduit naturellement à vérifier la validité de la falsification, et donc en particulier l'adéquation des objets, propriétés. On peut donc commencer à voir apparaître des zéros définitions.

La stabilité de cette rationalité est assurée par la logique mathématique. L'ensemble ne souffre pas d'un manque de définition puisque la philosophie est de mettre à l'épreuve et de modifier en conséquence dès qu'on rencontre une falsification.

iii. La rationalité théorique

La rationalité théorique fait fonctionner la théorie en mathématiques : elle définit les objets, établit la vérité des assertions à partir d'une logique mathématique donnée, des axiomes, des résultats déjà établis. Les quantificateurs sont utilisés pour exprimer l'universalité et l'existence. Le principe de non contradiction est fort. La production et le contrôle de connaissance sont assurés par la logique classique au travers du modus ponens, du modus tollens,… de manière générale à travers la déduction. La validation est obtenue par des preuves sous forme de démonstration. Les objets existent dans cette rationalité d'abord parce qu'ils sont définis.

Nous distinguerons deux types de rationalités théoriques, l'une appelée lakatosienne, elle se distingue du fait qu'elle sert à établir d'abord des théories locales, et l'autre appelée rationalité bourbakiste qui cherche à établir des théories axiomatiques plus ou moins globales.

	Pragmatique	**Empirique**		**Théorique**	
Principe	**Action**	**Inductivisme**	**Réfutationisme**	**Théorie Locale**	**Théorie générale**
Type d'existence des objets - Type de définition	Existence matérielle ou préfabriquée - Définition en acte	Définition intermédiaire	Définition en construction 0-définition	0-définition Proof-generated-definition	Définition axiomatique
Type de validation	Preuve en acte - Evidence perceptive - Vérification	Induction - Abduction - Argumentation	Contre-exemple Réfutation	Démonstration déductive	Démonstration déductive
Type de logique	Logique de l'action (efficacité) pour les cas particuliers	Causalité - Logique naturelle ou classique	Logique classique	Logique classique	Logique classique

Tableau 4 : Types de rationalités, principes et caractéristiques

Il s'agit maintenant de vérifier de différentes façons que cette construction théorique de ces types de rationalités correspond à des données disponibles qui corroborent leur existence.

II.4 Transition de rationalité et effets de contrats associés

Dans cette partie, nous commençons par définir la notion de transition de rationalité, puis étudions longuement un exemple à partir d'un extrait de la situation didactique du flocon de Koch expérimentée par Bloch (2000) sur la limite pour faire apparaître la notion d'effet de contrat associé aux transitions de rationalité. Cette étude de cet extrait selon le modèle de rationalités devrait servir par la suite de référence pour illustrer les usages possibles de ce modèle.

a) Notion de transition

Dans le cadre de notre modèle, nous appelons *transition de rationalité* le fait de passer d'une rationalité à une autre rationalité.

Nous montrerons que ces transitions sont tellement spontanément acquises pour délicates qu'elles sont pilotées le plus souvent par le professeur, ce qui risque de priver l'élève d'un moment important de la conceptualisation, nous évoquerons alors l'effet de contrat.

Les transitions de rationalités peuvent s'effectuer dans tous les sens, par exemple de la rationalité empirique à la rationalité théorique mais aussi le contraire. Globalement la rationalité ultime pour le mathématicien est la rationalité théorique, et ceci même si certains auteurs notent que, y compris pour les mathématiciens, cela dépend du contexte :

> The analysis in this paper focused upon how mathematicians determined that questionable assertions in a proof were valid. In our study, it appears that formal logic was not often invoked in this regard. While mathematicians sometimes constructed sub-proofs to establish these assertions, they did not do so frequently. More often, mathematicians constructed only partial proofs, sometimes based on properties that were stated intuitively or were not formally established. Other times, their reasoning was based on inductive reasoning. It should be noted that the informal or inductive reasoning that mathematicians used was not applied haphazardly. (Weber et Alcock 2004 p. 626)

Dans cet article, les auteurs émettent en particulier l'hypothèse qu'un mathématicien ne validera pas forcément de la même manière une assertion qu'il fait lui-même et veut défendre face à la communauté et une assertion qui est utilisée au milieu d'une démonstration qu'on lui présente. Pour la première il utilisera les conventions de la communauté en utilisant une rationalité théorique, et pour la seconde il cherchera seulement à se convaincre lui-même et s'autorisera des arguments beaucoup plus intuitifs et une rationalité empirique.

Comme nous l'avons déjà signalé, nous pensons qu'avec l'expérience de la pratique mathématique la fluidité du passage d'une rationalité à l'autre s'accroît au point d'effacer la notion même de rationalité (au sens de la stabilité). Ne restent alors que des phases pragmatiques, empiriques et théoriques. La rationalité devient alors l'utilisation conforme de la rationalité théorique exploitant ces différents points de vue et différentes phases. Nous remarquons d'ailleurs à ce sujet que la fausseté d'une assertion se propage du point de vue des phases de manière ascendante. Si une assertion est jugée fausse en phase pragmatique ou bien empirique, alors elle le sera, en principe, en phase théorique. Ceci doit être nuancé dans la mesure où dans les phases précédentes les objets en question ne sont pas de même nature comme on l'a vu, et ne sont pas forcément identifiés de la même manière (définition théorique non nécessaire avant la rationalité théorique). Cette propagation n'est pas ascendante pour la vérité d'une assertion mais descendante : si elle est vraie en théorie, elle doit-devrait l'être dans les autres phases, ceci avec la même nuance.

Cependant, nous pensons qu'avant que cette fluidité s'installe, la notion de type de rationalité est provisoirement plus pertinente que la notion de phase (ou dimension pour Dias) car elle intègre naturellement la difficulté des transitions de rationalités. Nous allons voir que ce double statut phase/rationalité rend nécessaire, au niveau didactique, l'utilisation d'effets de contrat afin

de gommer cette transition qui représente un saut entre rationalités pour l'élève, et une continuité entre phases pour le professeur.

b) Effets de contrat de transition de rationalité

i. Présentation de la situation et de l'extrait étudié

Nous avons présenté la situation du flocon de Von Koch de la thèse de Bloch (2000), nous allons étudier le script d'un passage de cette situation de plusieurs manières. Nous commençons par le présenter. L'extrait est prévu par l'auteure initialement comme faisant partie de la phase empirique de la situation :

Après avoir demandé : « que deviennent Pn et An quand on a itéré le procédé jusqu'à l'infini » et une longue phase de propositions de valeur de An et Pn pour de « grands » n grâce à la calculatrice et les formules littérales trouvées plus tôt, une question se pose : le périmètre Pn est-il borné ou pas ?

Le professeur commence par faire le point, et lorsqu'il lance le débat, le désaccord annoncé au sujet du périmètre s'exprime immédiatement :

> **101** P : Alors... je fais le point des suppositions et des questions auxquelles on est arrivé ; sur la suite An tout le monde a l'air d'accord sur le fait qu'elle est croissante et bornée ; elle pourrait tendre vers un nombre qui n'est pas infini, mais là tout le monde n'est pas d'accord. Et il y a un nombre dont elle se rapproche autant qu'on veut, ça c'est une question qui n'a pas de réponse. Par contre pour la suite Pn, elle a un maximum pour certains, et pour d'autres elle n'a pas de maximum, elle n'est pas bornée, donc son maximum est infini.
>
> Alors maintenant on va faire 5 minutes de débat, c'est Mickaël qui va... (*applaudissements)* sur ces questions, je les écris sur le tableau de droite. Si tu veux Mickaël on parle de Pn pour commencer ; allez Davy veut parler de Pn.
>
> **102** Davy : non mais... je pense qu'elle est <u>bornée</u>, parce que chaque fois on rajoute des mesures de plus en plus petites.
>
> **103** Flora : mais ça s'ajoute quand même, donc ça augmente. Toujours !
>
> **104 P** : à part ça Il n'y a pas d'autre avis ? si y en a qui sont contre l'avis de Davy, faut le dire ! (rires) y en a plein qui se taisent là-bas (rires) ; c'est bien beau d'écouter, mais… bon j'vais désigner, si ça continue ; Caroline, là, t'as pas d'avis ?
>
> **105** Caroline : NON !

Le professeur va essayer de relancer la dynamique du débat en donnant du crédit à une position apparemment minoritaire (le périmètre est borné).

> **106** P : ça c'est une façon sympathique d'inciter les gens à parler ! (rires). Bon mais, je voudrais bien qu'on revienne sur l'argumentation, Davy a dit : ça augmente tout le temps, mais ça augmente avec des quantités de plus en plus petites, comme ça quoi (fait un geste).

On va donc lui demander de la défendre :

> **107** Es : comment ?
>
> **108** P : ça pourrait s'arrêter presque d'augmenter.
>
> **109** E : mais si ça augmente ! (débat confus) Au fur à mesure ça grandit ça grandit…

Ce qui le conduit à faire le parallèle avec l'aire et donc amène le débat sur l'aire :

> **110** P : mais An aussi elle augmente. An aussi on ajoute toujours quelque chose !

111 Frédéric : Si on prend la figure du fractal, on peut le mettre dans un hexagone. D'après moi, le fractal ne dépassera jamais l'hexagone, donc son aire, elle dépassera jamais celle de l'hexagone : on peut donner une limite ; en fait c'est borné.

112 Es : pourquoi ça ne dépassera pas ? (exclamations) sur ta figure ça dépassera pas, mais pourquoi ça a une limite ? voilà! Donne-nous tes hypothèses ! quelle est l'origine de ton fondement ? (rires)

113 Flora : il a raison, ça ne dépasse jamais l'hexagone, mais on rajoute tout le temps des triangles.

114 P : Moins de bruit SVP ! Je suis pas, là ! Laurent ?

Maintenant Aire et Périmètre sont tous deux au centre du débat :

115 Laurent : Moi je suis d'accord avec Frédéric : pour l'aire ça n'augmente pas, tandis que pour le périmètre ça va augmenter.

116 Frédéric : l'aire ça reste borné.

117 Mickaël : je croyais qu'on parlait que du périmètre.

118 Jérôme : si le périmètre augmente, l'aire aussi. (signes de dénégation dans la classe) (Discussion animée sur ce point : "non c'est pas..." ;"Ah oui"..."ça dépend"…)

119 P : autrement dit si le périmètre devient infini, à ton avis l'aire aussi. *(Ton très neutre : c'est une reformulation).*

***120** E : c'est logique : la logique mathématique ! (discussion animée)*

La conclusion de cet épisode concerne l'aire :

121 Yaëlle : l'aire elle va toujours augmenter, jusqu'à l'infini elle prendra des valeurs, mais qui n'arriveront jamais à l'aire de l'hexagone, voilà.

122 Sandra : oui voilà !

123 Yaëlle : ça rajoutera des décimales ; ça tendra vers l'aire de l'hexagone mais ça l'atteindra jamais.

(Bloch 2000 p. 380)

ii. Analyse selon une rationalité théorique (Tarski)

Nous utiliserons le schéma d'analyse de théorie locale, issue de la théorie des modèles de Tarski, et exemplifié dans Durand-Guerrier (2005) pour mettre en évidence l'articulation logique de cet extrait, en particulier pour mettre à jour la mobilisation, au moins implicite, d'un principe de non contradiction. Cette modélisation consiste à traduire les assertions explicites et les raisons implicites de ces assertions en axiomes et énoncés d'une théorie qui évolue au fur et à mesure de l'avancée du dialogue et fait apparaître la structuration logique de celui-ci.

Cette analyse peut être réinterprétée en termes de modèle de rationalités : elle prête généreusement aux protagonistes du débat qui a lieu une rationalité totalement théorique et même axiomatisante.

Il s'agit donc de déterminer si le périmètre a un maximum ou non. Nous allons donc modéliser « la théorie locale du groupe », que l'on notera T, et son évolution. T contient initialement trois axiomes[45] qui proviennent du travail instrumenté (calculatrice et formules) sur l'aire et le périmètre de la figure du flocon Fn, axiomes qui sont reprécisés par le professeur au début du débat.

[45] Les différents axiomes et énoncés sont une reconstruction logique du discours des élèves par le chercheur afin de modéliser l'évolution de la discussion et d'en comprendre les enjeux.

Voici les Trois axiomes :

A1 : L'aire est strictement croissante.

A2 : L'aire est bornée.

A3 : Le périmètre est strictement croissant.

Davy (102) commence par proposer un énoncé E1.

E1 : Le périmètre est borné.

Cet énoncé E1 se justifie par un axiome A4.

A4 : Une série et de terme général strictement décroissant et positif est bornée.

Mais Flora (103) qui ne semble pas d'accord avec E1 introduit implicitement un axiome A5

A5 : Si une suite est strictement croissante alors elle est non bornée.

Les axiomes A3 (périmètre strictement croissant) et A5 permettent donc de déduire l'énoncé E2 :

E2 : Le périmètre n'est pas borné.

E2 est en contradiction avec l'énoncé E1 (périmètre borné). En vertu du principe de non contradiction, l'un des deux est faux, et plusieurs possibilités sont ouvertes :

1) Soit on prouve l'énoncé E1 qui est un énoncé existentiel.

2) Soit on montre que l'énoncé E2 qui est un énoncé universel découle d'axiomes de la théorie.

4) Soit on travaille la théorie : axiomes/définitions.

3) Soit on questionne le dispositif expérimental (les calculs précédents).

Comme le professeur décale la contradiction sur l'aire (on a effectivement aussi A1 (aire strictement croissante) et A2 (Aire bornée) qui souffrent de la même contradiction avec A5), Frédérique propose de soutenir A2 avec E3 :

E3 : Le flocon est contenu dans un hexagone.

Ceci lui permet de conclure A2.

Sonia (113) justifie A1 (« on rajoute tout le temps des triangles »).

A ce moment-là, la théorie T contient A1, A2 et A5 : elle est contradictoire (puisque A1 et A5 impliquent non A2).

Le principe de non contradiction oblige à revoir la théorie T : l'un des axiomes doit être faux.

Laurent (115) met donc en cause l'axiome A1 (« L'aire ça n'augmente pas ») avec l'énoncé E4

E4: L'aire est non strictement croissante. (Nous pensons que cette affirmation non justifiée provient de la contraposée de A5 appliquée à A2)

Apparaît une nouvelle contradiction entre E4 et A1, l'un des deux est donc faux, aussi Jérôme (118) répond pour défendre A1 en introduisant un nouvel axiome A6 :

A6 : Si le périmètre d'une figure augmente alors l'aire aussi.

En effet A3 (périmètre strictement croissant) et A6 impliquent A1 (aire strictement croissante).

La nouvelle contradiction entre E4 et A1 peut se résoudre en mettant en cause soit A3, soit A6, soit E4.

La proposition A6 peut s'écrire aussi : « Si A3 alors A1 » et le professeur la reformule (de manière non équivalente) :

E5 : Si le périmètre est infini alors l'aire aussi.

Un élève approuve vigoureusement cette reformulation de A6 : « c'est logique : la logique mathématique. »

Yaëlle (121) défend qu'on a bien A1 « mais » aussi A2.

La professeure se trouve alors dans une situation délicate dans la mesure où l'axiome A6 est faux mais n'est ni contradictoire avec les autres axiomes et énoncés (sauf A4 qui n'est pas très crédible), ni avec la situation du flocon. Il y a tout lieu de penser qu'il ne sera pas mis en cause. En soit ce n'est pas gênant pour la théorie locale mais par contre la reformulation E5 de A6 qui pourrait être interprétée comme équivalente à A6, elle, risque de l'être puisque avec A2 (aire bornée) elle implique par contraposée E1 (périmètre borné) qui est fausse. De plus, à la fin de cette discussion on arrive à la conclusion (partagée ?) que l'aire est croissante et bornée mais les axiomes A4 et A5 qui sont faux ne sont pas véritablement déstabilisés.

Poussons un peu plus loin que le script donné initialement pour observer les conséquences logiques de ce débat sur la suite de la situation. La professeure intervient donc pour remettre un peu d'ordre et commence par donner du crédit aux propos de Yaëlle qui consistent à admettre la possibilité de concilier A1 et A2, discréditant ainsi A5, mais sans statuer définitivement ; ensuite la professeure fait rejeter A6 avec l'étude d'une situation sur le rapport aire-périmètre, proposée sous forme d'une figure accompagnée de la question « Dans ce dessin trouvez des figures de même périmètre mais d'aire différente » :

Figure 14 : Situation aire périmètre

A l'issue de ce débat, on se retrouve dans une situation où E1 (le périmètre est majoré) n'est pas une conséquence du modèle local ni d'ailleurs E2 sa négation. La proposition suivante du professeur est donc naturelle (sur le plan de la logique) pour se doter d'un critère borné/non borné, ce qui était d'ailleurs l'objectif déclaré :

> **127** P : Bon, alors ce qu'on va faire maintenant, c'est, puisque tout le monde a dit ce qu'il avait à dire, comment on pourrait faire pour prouver ça : avec quels moyens on peut prouver. /…../ alors pour ça, commençons par Pn, pour savoir si justement, elle s'arrête de grandir ou pas, on va tester ça : le but c'est de tester ce qu'en maths on appelle une conjecture, en biologie c'est une hypothèse : **Pn est bornée, ou pas ?** Alors on va se donner un nombre, et trouver n tel que Pn dépasse ce nombre. On va le faire une fois ensemble, ensuite c'est vous qui le ferez. Un élève donne un nombre, l'autre essaye de trouver n pour que Pn dépasse ce nombre. Tout le monde a compris ? (P. écrit au tableau, et souligne dépasse) (Bloch 2000 p. 384) C'est l'auteure qui souligne.

Cette relance va permettre de statuer finalement sur le périmètre, puis servira de modèle pour l'étude de l'aire.

A travers cette modélisation didactique selon la théorie des modèles de Tarski nous pensons qu'apparaissent, par rapport au script initial, de manière beaucoup plus claire la logique qui sous-tend les différentes interventions aussi bien d'un point de vue local, que d'un point de vue global. Le débat qui pouvait paraître un peu échevelé à première vue acquièrt ainsi une véritable cohérence.

Présenté selon ce modèle, la résolution de contradictions apparaît naturellement comme le moteur fondamental du débat puisque ceci est constitutif du modèle. Viennent alors deux questions :

1) La résolution de contradictions est-elle véritablement l'activité des élèves ou bien l'artefact de la modélisation utilisée pour mettre en évidence la structure logique sous-jacente du débat ?

2) Pourquoi, y compris dans ce modèle, certaines contradictions importantes (A5, A6, E5 qui sont faux et contradictoire avec la théorie T), ne sont pas prises en charge par les élèves alors que, même en l'absence de critère de « suite non bornée » pour pouvoir conclure de manière adidactique sur E1 et E2, ils auraient pu les résoudre ?

Pour la première question, nous pensons que le modèle fait apparaître une structuration logique qui est totalement implicite dans le script original. Cependant, cette structuration est réaliste dans la mesure où elle est à la portée d'élèves de ce niveau et d'autre part elle fait apparaître justement une forme de régularité inattendue : la ligne de démarcation entre les contradictions prises en charges et celles qui ne le sont pas est essentiellement la même que celle qui sépare les contradictions relevant d'une rationalité pragmatique et celles qui relèvent d'une rationalité théorique (nous verrons ça un peu plus loin).

Cependant, cette modélisation ne répond pas à la deuxième question qu'elle a contribué à poser. Il nous faut donc procéder différemment pour tenter de comprendre les raisons de cette non-prise en charge de ces contradictions, en particulier de l'axiome A5 (une suite strictement croissante est non majorée) qui est, à notre avis, le centre de gravité véritable mais masqué de cet extrait. Aussi, allons- nous revenir au script initial pour analyser cet aspect de l'épisode sous un angle plus didactique.

La première constatation que nous ferons c'est que le script montre une classe qui joue pleinement le jeu proposé par la professeure : l'argumentation est riche et variée, les désaccords sont publics et les conflits sont manifestement d'abord épistémologiques. Cette première constatation est importante car elle permet d'éliminer, a priori, les effets parasites liés au jeu social : ce qui se joue ici est avant tout un jeu de la science. S'il y a un dysfonctionnement il sera à trouver ailleurs.

La deuxième constatation est que l'axiome A5 n'est finalement jamais formellement exprimé alors que la modélisation (selon Tarski) montre bien qu'il est sous-jacent à la plupart des interventions. On ne réfute évidemment pas un argument absent mais on remarquera cependant que s'il avait été explicité ces élèves de première auraient eu les moyens de le réfuter avec une suite 1-1/n par exemple. Or il se trouve que ni la professeure ni les élèves ne l'explicitent pour le mettre au débat, essayons de comprendre pourquoi.

Tout d'abord la professeure a de nombreuses raisons de ne pas intervenir pour A5 comme elle le fait ensuite pour A6 où elle propose un débat spécifique pour le disqualifier. La première raison est que A5 est un moteur du débat. Comme on le voit dans la modélisation elle force les participants à expliciter les faits puisqu'il crée des contradictions qui doivent être élucidées et finalement contribue significativement à introduire la nécessité de la suite de la situation : la dévolution du critère de « suite non bornée ». Ensuite A5 apparaît (implicitement) dès le début du débat si bien que la professeure ne peut pas interrompre le débat et le traiter comme A6 (fin de débat) car cela pourrait constituer une rupture de contrat et risquerait de compromettre l'adidacticité de la suite de la situation. Cette rupture de contrat serait d'ailleurs renforcée par le fait que, contrairement à A6 qui a légitimité à être discuté puisqu'il est affirmé, A5 n'apparaît pas explicitement dans le débat. Enfin A5, quand il est implicitement utilisé la première fois, sert à justifier E2 (Le périmètre est non borné) qui est un énoncé correct. Cela rend une intervention du professeur délicate car elle risque d'être interprétée comme une prise de position sur la véracité de E2. Comme on le voit tout contribue au silence du professeur sur A5, mais qu'en est-il des élèves ?

Dans un premier temps, les élèves semblent être nombreux à penser le périmètre non borné (E2), et A5 n'est pas contradictoire avec cette position, au contraire elle en sert de justification. On ne peut donc pas attendre de réaction à ce moment-là. Cependant, il n'y a pas de raison que A5 qui sert de justification à E2 ne serve pas de justification à une aire non bornée puisque l'aire aussi est strictement croissante (« si le périmètre devient infini alors l'aire aussi ») : « c'est logique, la logique mathématique ! ». A ce moment-là A5 devrait devenir gênante pour ceux qui pensent l'aire bornée. Leur intervention le montre effectivement, Flora affirme : « il a raison, ça ne dépasse jamais l'hexagone, **mais** on rajoute tout le temps des triangles. ». Cette insistance sur l'articulation antagoniste des deux propositions montre qu'elle a conscience de la possible contradiction entre les deux arguments. Et cette possible contradiction n'est autre que A5. De même, ensuite, Yaëlle affirme que : « l'aire elle va toujours augmenter, jusqu'à l'infini elle prendra des valeurs, **mais** qui n'arriveront jamais à l'aire de l'hexagone, voilà. » puis que « Ça rajoutera des décimales ; ça tendra vers l'aire de l'hexagone <u>mais</u> ça l'atteindra jamais. ». On peut se demander ce que ces « mais » signifient vraiment. Sont-ils une manière implicite de réfuter A5 ou bien l'acceptation d'un antagonisme entre la théorie A5 et les faits A1 et A2 ? Ce seul extrait ne nous permettra pas de trancher sur cette question, nous allons maintenant utiliser le modèle de rationalités pour essayer de comprendre autrement cet épisode.

c) Analyse par le modèle de rationalités

i. Premier niveau d'analyse

Utiliser le modèle de rationalités suppose identifier le type de rationalité mobilisé. Nous analysons ci-dessous les différentes assertions des élèves de l'extrait de script :

Assertion	Type de justification	Type de rationalité
102 Davy : non mais... je pense qu'elle est <u>bornée</u>, parce que chaque	Ce qui s'ajoute ce sont des mesures. C'est donc le dessin qui fait ici référence. On peut parler de pragmatisme dans le sens de la manipulation concrète évoquée ici : je rajoute des mesures. Il semble y avoir une confusion entre implication et réciproque : si c'est	Pragmatique

fois on rajoute des mesures de plus en plus petites.	borné alors les mesures ajoutées sont « petites » c'est vrai mais le contraire est moins certain. On est dans un mode sémantique	
103 Flora : mais ça s'ajoute quand même, donc ça augmente. Toujours !	Le « ça » peut renvoyer aux mesures. Le mais semble signifier qu'il y a opposition entre « c'est borné » et le ça augmente « toujours ». Le mode est encore sémantique. Il y a de l'ordre de l'évidence physique, donc de la rationalité pragmatique.	Pragmatique
109 E : mais si ça augmente ! (débat confus) Au fur à mesure ça grandit ça grandit…	Idem	Pragmatique
111 Frédéric : Si on prend la figure du fractal, on peut le mettre dans un hexagone. D'après moi, le fractal ne dépassera jamais l'hexagone, donc son aire, elle dépassera jamais celle de l'hexagone : on peut donner une limite ; en fait c'est borné.	Il est difficile d'imaginer ce que signifie « prendre le fractal » puisque précisément c'est une limite et donc justement on ne peut pas le prendre. Il y a là l'expression d'un infini actuel. Or le « jamais » qui est utilisé renvoie davantage à un processus évolutif, c'est-à-dire un infini potentiel. On peut penser qu'il s'agit d'une induction : puisque les premiers stades de constructions sont inclus dans l'hexagone alors la limite aussi. On ne sait pas si le fractal désigne la figure intermédiaire de l'étape n ou bien le flocon lui-même. Ce n'est pas clair.	Empirique Ou théorique suivant ce qui est réellement signifié
113 Flora : il a raison, ça dépasse jamais l'hexagone, mais on rajoute tout le temps des triangles.	Flora est beaucoup plus cohérente en désignant seulement le processus de construction et en mettant en évidence la contradiction éventuelle qui n'existe pas selon elle.	Empirique
115 Laurent : Moi je suis d'accord avec Frédéric : pour l'aire ça n'augmente pas, tandis que pour le périmètre ça va augmenter.	A nouveau du pragmatique. L'évidence est qu'être borné c'est s'arrêter, donc ne plus augmenter. C'est l'évidence perceptive qui prédomine.	Pragmatique
116 Frédéric : l'aire ça reste borné.	Toujours le même problème : l'aire, est-ce An ou bien sa limite ?	Empirique
118 Jérôme : si le périmètre augmente, l'aire aussi.	Le lien entre périmètre et aire semble reposer sur une évidence perceptive.	Pragmatique
121 Yaëlle : l'aire elle va toujours augmenter, jusqu'à l'infini elle prendra des valeurs, mais qui n'arriveront jamais à l'aire de l'hexagone, voilà.	On est complètement dans l'induction : l'aire est bornée par celle de l'hexagone car les étapes successives le sont. Le registre du discours est graphique.	Empirique
123 Yaëlle : ça rajoutera des décimales ; ça tendra vers l'aire de l'hexagone mais ça l'atteindra jamais.	On est complètement dans l'induction : « ça rajoutera des décimale » est lié à l'observation des résultats successifs précédents. Le registre du discours est numérique.	Empirique

Tableau 15 : Analyse selon le modèle de rationalités

On peut remarquer que les assertions se fondent sur le flocon dans ses multiples aspects (géométriques, numériques, écritures littérales…). Ceci confirme la déclinaison effective dans la

contingence du travail conséquent réalisé en particulier sur les ostensifs puis sur les signes sémiotiques dans l'analyse théorique a priori et a posteriori de cette situation dans Bloch (2000) puis dans Bloch et Gibel (2011). Ce travail a précisément été mené pour donner un milieu matériel le plus consistant possible afin de rendre possible une activité adidactique des élèves qui débouche sur l'émergence du concept de limite. De fait tout ce travail préalable sur les dessins, les résultats numériques a changé la nature du réel pour les élèves : le milieu s'est enrichi d'ostensifs et de registres de représentations. Ainsi nous pouvons constater, en cohérence avec le modèle, que les rationalités pragmatiques et empiriques sont alors majoritairement mobilisées. Cependant, ce niveau de rationalité ne peut pas conduire les élèves à résoudre seuls les contradictions rencontrées car il les masque en laissant implicites les raisons théoriques qui se cachent derrière ce qui apparaît comme des évidences (mode de validation de la rationalité pragmatique) ou bien minore ces contradictions (rationalité empirique). Pour démasquer ces contradictions il faudrait à la fois une culture de l'explicitation des raisons par des arguments théoriques (seuls réfutables) et pas seulement une argumentation, et une culture du doute qui oblige à changer de niveau de rationalité pour obtenir des vérités assurées. Ceci explique que les contradictions révélées par l'analyse selon le modèle de Tarski ne soient pas prises en charge. En réalité, le niveau de rationalité ne le permettait pas. Ceci était d'ailleurs prévu par l'auteure en tant qu'épisode empirique.

Tournons-nous maintenant du côté du professeur pour étudier sa propre rationalité mais surtout celle qu'elle propose. Nous allons voir que la professeure, elle, semble adopter une rationalité surtout théorique.

Regardons pour commencer le cas de A6 (Si le périmètre d'une figure augmente alors l'aire aussi).

A la fin du débat de cet extrait Jérome entend défendre la croissance de l'aire et déclare D1 :« si le périmètre augmente, l'aire aussi. » qui est reprise par la professeure :

> Parce que tout ce que j'entends, ça laisserait penser que le périmètre et l'aire ils augmentent forcément en même temps. (Bloch 2000 p. 383)

Par la situation qu'elle propose ensuite pour invalider D1, la professeure semble traduire D1 en D2 :« si un polygone a un périmètre supérieur à celui d'un autre polygone alors son aire aussi est supérieure à celle de l'autre polygone » qui est évidemment est fausse. Nous remarquons que nous ne pouvons pas savoir si cette déclaration D1 de Jérôme ne concerne pas implicitement seulement le flocon, ce qui pourrait alors s'écrire sous la forme D3 : « Pour le flocon, si le périmètre augmente, l'aire aussi »[46]. Or D3 est correcte puisque le périmètre et l'aire du flocon sont tous deux croissants. Enfin même dans le cas d'une affirmation à caractère plus général, la traduction D2 reflète-t-elle vraiment le sens de ce qui a été affirmé par Jérôme ? L'idée exprimée aurait pu aussi correspondre à D4 : « plus le périmètre est grand, plus l'aire maximale entourable avec est grande » ? Là encore il est difficile de déclarer D4 comme non correcte.

[46] La désignation implicite du flocon dans D1 pourrait s'expliquer ainsi : pour une étape donnée de construction du flocon ni le périmètre, ni l'aire du flocon ne varient (ils sont fixes) et ce n'est donc que quand le périmètre augmente, c'est-à-dire en considérant le processus de construction et non une étape donnée, que l'aire augmente aussi. Dans ce cas d'interprétation, on peut comprendre pourquoi il pourrait sembler alors inutile de préciser « pour le flocon » dans D1 et néanmoins penser exprimer D3.

Pourquoi la professeure traduit-elle alors assez spontanément D1 en D2 et non en D3 ou D4 ? A priori on ne peut pas savoir, mais remarquons que cette traduction est conforme à la rationalité théorique qui privilégie **les énoncés à caractère universel.** Cela n'entend pas nier que certains théorèmes d'existence sont fondamentaux, mais que les théorèmes à caractère universel sont plus forts que les sous-théorèmes qui énoncent le même résultat pour un ensemble de validités restreint à quelques valeurs. L'intérêt de D2 est justement de lier le comportement de l'aire du flocon à celui de son périmètre pour une raison de nature générale qui dépasse le cas particulier du flocon. Or si D3 est vraie, elle ne suffit pas pour en expliquer la raison et la rationalité théorique a besoin **des raisons explicites qui fondent une vérité (nature de la démonstration et de la vérité).** Dans le cas de D3, il faudrait seulement rajouter qu'à partir du moment où on augmente le périmètre (en réalité c'est n qui augmente), comme on a rajouté pour cela des triangles, l'aire alors inévitablement augmente aussi.

Enfin D4 souffre d'un grave défaut pour la rationalité théorique qui a besoin **d'une syntaxe qui lui permette de statuer sur la vérité** : D4 exprime une idée plutôt correcte sous une forme qui empêche celle-ci de conclure. Il faut des précisions :« Pouvoir entourer » que cela signifie-t-il vraiment ? Est-ce que ça veut dire que c'est possible ? « Possible » cela signifie-t-il dans tous les cas ? A D4 la rationalité théorique préférera nettement D5 : « Soit x un nombre réel positif et Ex l'ensemble de toutes les courbes fermées du plan de longueur x. Soit Mx l'ensemble des réels composés des aires des surfaces comprises à l'intérieur des courbes de Ex. Si f est la fonction qui associe à tout nombre réel x positif le maximum de Mx alors f est croissante »[47].

On peut conclure que la professeure produit une traduction de D1 conforme à une rationalité théorique. Cela n'est guère surprenant mais montre que le professeur a tendance à naturaliser la rationalité scientifique sans forcément en avoir conscience (ce point de vue a été notamment souligné par Legrand (1990)). Mais remarquons que si elle utilise elle-même une rationalité théorique dans le cas de la traduction de D1, elle induit pour les élèves une rationalité de type empirique (réfutation) en transformant l'étude de D2 en l'étude d'un polygone qui constitue un contre-exemple à D2. On remarquera en outre que la professeure intervient très peu lorsque les assertions erronées des élèves relèvent d'un niveau de rationalité pragmatique ou empirique, ce qui est conforme avec le respect de la phase adidactique.

Nous remarquons également que lorsque le critère « non borné » est donné par la professeure sous forme formalisée, cela est précédé du changement de problématique indiqué clairement, il va falloir prouver :

> 127 P : Bon, alors ce qu'on va faire maintenant, c'est, puisque tout le monde a dit ce qu'il avait à dire, comment on pourrait faire pour **prouver** ça : avec quels moyens on peut **prouver**. (Bloch 2000 p. 384) C'est nous qui soulignons.

Autrement dit, la professeure, en demandant de prouver, induit une rationalité de type théorique. Ceci est prévu par la construction et l'analyse a priori de la situation qui se veut à dimension adidactique et dont les ruptures d'adidacticité se situent précisément à cet endroit.

[47] On peut d'ailleurs montrer que $f(x)= x^2/4\pi$.

ii. Effets de contrat de transition de rationalité

Dans l'analyse précédente, nous avons distingué quatre types d'interventions du professeur liés à des transitions de rationalités :

* La non-intervention sur ce qui relève d'une rationalité pragmatique ou empirique que nous appellerons *neutralité pragmatique ou empirique*.

Cette neutralité pragmatique/empirique s'explique dans une situation adidactique par le fait de respecter le contrat didactique en cours mais aussi par la possibilité (au moins supposée) des élèves de régler facilement eux-mêmes les contradictions qui surviendraient dans ce cadre.

* La précision du niveau de rationalité théorique souhaité (démontrez que) que nous appellerons *le forçage théorique*.

Ce forçage théorique s'explique par l'absence (au moins supposée) de possibilités des élèves de faire appel eux-mêmes à une rationalité théorique quand cela est nécessaire. L'exemple le plus évident d'un tel forçage de rationalité sont les séries d'exercices de manuels commençant tous par « Démontrez que ». Nous ne portons pas ici de jugement sur ce type d'exercices, mais simplement nous devons admettre qu'ils obligent l'élève à se placer dans un type de rationalité qu'il n'aurait peut-être pas adopté immédiatement si la question avait été plus ouverte. Il y a donc bien forçage. De même quand on demande à un élève « d'effectuer une conjecture » on tente de le placer délibérément dans une rationalité qui ne serait pas forcément spontanément la sienne car on lui signifie qu'il doit énoncer une assertion en laquelle il croit tout en gardant un doute à son sujet (c'est une conjecture) doute qu'il ne partage peut-être pas (y compris en l'absence de démonstration). Cela ne présume pas de la qualité de la réponse de l'élève, il est peut-être sincère dans la mesure où, pour lui, conjecturer c'est seulement affirmer ce dont il est certain, mais cela peut témoigner d'un effet de forçage. Cet effet, qui n'est ni positif, ni négatif en soi, comme pour les autres effets de contrats, change la nature du contrat didactique.

* La traduction dans une rationalité théorique d'un énoncé ambigu que nous inclurons dans *le forçage théorique*.

Ce type de forçage théorique peut s'expliquer évidemment par la culture professorale, sorte de déformation professionnelle non forcément consciente à transformer les assertions selon une rationalité théorique. Mais elle peut aussi provenir de la volonté consciente du professeur de durcir l'objet d'étude plutôt que de le laisser désigné par une expression trop évasive afin de permettre aux élèves de s'en saisir vraiment.

* La transformation d'un problème relevant d'une rationalité théorique en un problème relevant d'une rationalité pragmatique que nous appellerons *la déflation pragmatique*.

Cette déflation pragmatique s'explique par le fait que l'on suppose les élèves non préparés à affronter la difficulté de la généralité.

Nous considérons ces types d'intervention comme des *effets de contrat* au sens de Brousseau. Ils sont nécessaires pour s'assurer que la classe ne stagne pas ou s'enferre dans une erreur trop longtemps. Selon notre analyse ils pallient à l'impossibilité (au moins supposée) pour les élèves d'effectuer, seuls, des transitions de rationalités. Ainsi Balacheff évoque, d'une certaine façon,

lui- même cette question de la difficile transition de rationalité autonome car ses expérimentations lui permettent de distinguer la capacité de mobiliser une rationalité ou une autre et le fait de passer de l'une à l'autre de manière autonome :

> Enfin nous voulons indiquer que l'absence de démarche de preuve au sens des mathématiques ne doit pas nécessairement conduire à mettre en question la rationalité des élèves. Nous pouvons d'ailleurs constater que, comme le rapporte le professeur, lorsque cela leur sera demandé les élèves (de la seconde expérience, classe de troisième) seront capables techniquement de produire une démonstration. (Balacheff 1988 p. 560)

Nous pouvons nous demander non seulement ce que signifie démontrer pour ces élèves dans la mesure où ils sont capables de le faire mais n'en n'éprouvent pas la nécessité, mais surtout quel sens peut avoir la vérité qu'ils établissent. Nous pensons que démontrer un résultat n'est pas seulement « produire techniquement une démonstration », c'est aussi avoir conscience de l'enjeu de l'activité même, qui est de produire une vérité apodictique, ou encore comme le dit Sackur et al. : faire « l'expérience de la nécessité ». Cet enjeu se traduit précisément dans l'autonomie de la transition de rationalité.

Dans cette partie, nous avons identifié la difficulté des transitions de rationalité mais aussi les effets de contrat qui permettent de soulager ces difficultés. Nous allons maintenant examiner les éléments de nature à accréditer ce modèle de rationalités.

II.5 Éléments de plausibilité du modèle

Nous exploitons dans cette partie quatre types d'éléments de nature à accréditer ce modèle de rationalités, trois sont directs, et un indirect :

1) Certaines analyses épistémologiques identifient des découpages de l'activité mathématique similaires à celles du modèle.

2) Divers travaux didactiques étudient précisément certaines caractéristiques des rationalités (définition, preuve) et proposent des typologies cohérentes avec celles du modèle de rationalités.

3) Les choix de construction de ce modèle de rationalités impliquent théoriquement certaines conséquences didactiques, conséquences que l'on peut concrètement observer.

4) Il existe une correspondance facilement identifiable entre le modèle des rationalités et celui de la structuration des milieux. Ceci est crucial dans la mesure où notre problématique correspond à la mise en place dans la TSD, d'une ingénierie didactique. Nous montrerons, dans le chapitre 4, que la mise en œuvre du modèle de rationalités ne se limite pas à une correspondance biunivoque entre niveaux de milieux et niveaux de rationalités : l'usage de ce modèle permet de porter une attention particulière et déterminante sur la nature du jeu didactique lorsque les notions sont mathématiquement avancées et complexes.

a) Éléments de pertinence épistémologique de ce modèle de rationalités

Nous avançons ici quelques arguments épistémologiques en faveur de la construction théorique précédente. Nous nous focaliserons surtout sur la rationalité empirique dans la mesure où rationalité théorique et pragmatique sont par nature déjà établies plus sûrement.

i. Les modèles épistémologiques classiques

Le premier argument de cet ordre concerne la construction même de la double rationalité empirique à partir de modèles épistémologiques. Cette construction s'appuie sur des modèles épistémologiques historiques, ce qui assure une certaine cohérence interne (hypothèse 3), en particulier des systèmes de validations spécifiques associés, mais aussi garantit, a priori, l'existence de l'équivalent de telles pratiques épistémologiques. Ces arguments ne dispensent cependant pas d'une mise à l'épreuve du modèle.

ii. Identification de deux types de praxéologies dans l'institution mathématique

Nous cherchons ici à identifier les convergences/divergences que le modèle de rationalités peut avoir avec les deux types de praxéologies (type 1 et type 2) de Maggy Schneider que nous avons décrit au chapitre 2.

Nous voyons dans cette distinction historique et épistémologique de deux praxéologies, une analogie forte avec notre propre distinction entre deux types de rationalités (empirique et théorique). La première similitude concerne le type d'objets dont traitent praxéologies de type 1 et 2 et rationalités empirique et théorique. Les objets manipulés par la praxéologie de type 1 sont préconstruits, donnés par le contexte, sujet à l'ostension et non définis, tout comme les objets de la rationalité empirique qui émanent fortement du réel questionné. Les objets de la praxéologie de type 2 sont eux définis tout comme ceux de la rationalité théorique. La deuxième similitude, conséquence de la première, concerne les modes de validation. La validation par la cohérence externe pour les praxéologies de type 1 (on cherche la validation dans la comparaison avec les résultats d'autres techniques ou d'expérimentations liées à d'autres domaines scientifiques) correspond bien à la validation externe de la rationalité empirique (la recherche de plausibilité). La validation par la démonstration d'une théorie inductive pour les praxéologies de type 2 correspond bien à celle de la rationalité théorique. Nous dirons que la rationalité qui dirige une praxéologie de type 1 est essentiellement une rationalité empirique, tandis que la rationalité qui dirige celle de type 2 est essentiellement théorique.

Pourquoi fabriquer une autre catégorisation alors que celle des types de praxéologies semble analogue ? La réponse à cette question tient dans un aspect que nous avons peu encore abordé ici, car nous souhaitions faire apparaître les deux types de rationalités dans leurs propres singularités, il s'agit de la complémentarité nécessaire de ces rationalités. En effet nous pensons que l'efficacité de la pensée rationnelle scientifique repose sur la complémentarité de cette double rationalité. Nous adoptons en cela une position proche de celle de Dias qui explore la démarche expérimentale des mathématiques :

> Expérimenter en mathématiques, pratiquer la démarche expérimentale, ces expressions ont un sens très précis dans notre travail de thèse. Il ne s'agit en aucun cas d'assimiler l'expérimentation à une démarche qui prône la manipulation en lieu et place de l'observation et qui serait intrinsèquement source et garantie de connaissance. L'expérimentation telle que nous l'entendons n'a de sens que par ses articulations avec la formulation (dimension langagière) et la validation (par la preuve). Le va-et-vient entre théorie et expérience est précisément ce qui caractérise une démarche de type expérimentale. Il n'y a pas d'un côté les aspects expérimentaux et de l'autre côté la preuve, entre lesquels il faudrait choisir (Dias 2008 p. 27).

Comme lui, nous pensons que la démarche scientifique se fonde dans l'articulation de théories et expériences. En particulier nous pensons que, y compris pour les problèmes qui se situent essentiellement dans le monde intellectuel, les rationalités pragmatiques et empiriques sont une première marche essentielle et d'un point de vue didactique car elles contribuent à la dévolution, et qu'elles constituent ensuite la possibilité d'un contrôle (mais souvent pas d'une validation) sur le résultat obtenu par la rationalité théorique. Ainsi quand il ajoute :

> Expérimenter c'est organiser de façon méthodique un fait, une décision de l'extérieur et ce n'est pas seulement observer ou manipuler sans intention. (Dias 2008 p. 27)

nous reconnaissons l'intention de déterminer des lois (organiser) de la rationalité empirique, et l'absence de cette intention dans la rationalité pragmatique. Cependant nos observations conduisent à distinguer clairement rationalité empirique et rationalité théorique, non pour conférer à cette dernière un statut supérieur mais pour rendre compte des obstacles rencontrés par les élèves que nous observons lorsqu'il s'agit de transformer, en mathématiques, les lois en théorèmes. Ces obstacles, nous allons les évoquer dans la partie « cohérence avec les études didactiques ».

Du côté des types de praxéologies rappelons que Schneider affirme leur incompatibilité temporelle. Il y a donc discontinuité entre ces deux modélisations (rationalité et praxéologie) car si la première envisage la complémentarité, la seconde procède d'une rupture. Cela est logique puisque la modélisation par les types de praxéologie tend à répondre des pratiques d'institutions dont les discours qui justifient ces pratiques sont antagonistes : les deux types de praxéologies ne peuvent pas cohabiter (dans la même institution). Mais les deux rationalités le peuvent puisqu'elles sont à la recherche finalement d'une cohérence globale entre un domaine de réalité donné et celui des idées. Cela ne va pas sans heurts évidemment mais leur complémentarité est essentielle.

On voit bien aussi que si les types de praxéologies peuvent modéliser des pratiques/discours d'institutions distinctes, elles ne peuvent pas répondre des mécanismes de pensée localement apparemment contradictoires et globalement nécessairement cohérents pour penser dans une dialectique entre théorie et réel. Cependant sur le plan didactique, comme nous l'avons vu, Schneider tire des conclusions qui vont dans le sens d'une complémentarité de ces deux praxéologies vues comme des moments consécutifs. Si nous comprenons que pour une institution il n'est pas concevable de tenir deux discours antagonistes simultanément sans créer confusion et incohérence, il nous semble important cependant de prendre en compte que cette rupture des modes de pensée est à l'œuvre dans toute intelligence des problèmes : comment rationaliser (idéaliser) sans réaliser (prendre le réel), comment réaliser (rendre réel) sans rationaliser (donner un sens au réel) ?

Mais Schneider ajoute :

> Cette distinction de deux types de praxéologies permet de penser en d'autres termes la dialectique outil/objet de R. Douady (1984). Elle permet aussi d'éclairer la transition secondaire/université. En effet, on sait, depuis la réforme des mathématiques modernes, qu'une entrée trop abrupte dans les praxéologies de type 2 se solde par des apprentissages creux. Et, comme le montrent les travaux d'E. Rouy (à paraître), les praxéologies de type 1 constituent un niveau de rationalité soit non identifié, soit négligé, ce qui prive les élèves à un moment donné de leur apprentissage, d'une entrée dans une rationalité de leur niveau, les poussant ainsi à privilégier une approche des

> mathématiques exclusivement procédurale. (Schneider, 2007 p. 34)

Nous voyons dans cette citation la volonté de « remplir » les apprentissages creux qui proviennent de volontés de trop théoriser (type 2) et cela trop tôt. Nous nous demandons si la vacuité des apprentissages n'est pas surtout liée à la volonté de théoriser sans payer le prix de l'apprentissage d'une rationalité théorique. C'est en quelque sorte la conclusion de Pierre Job pour ce qui est de la définition.

Nous avons montré que cette partition en praxéologies et en institutions correspond à l'usage historique de deux types de rationalités (par exemple pour la question de la limite d'une fonction). Cela atteste que la rationalité empirique, au-delà d'une construction théorique, a bel et bien existé dans l'histoire des mathématiques et à ce titre est susceptible d'être mobilisée par des élèves qui sont en phase d'apprentissage d'une rationalité scientifique.

iii. Quelques éléments sur l'évolution de la rationalité mathématique dans l'histoire

Dans l'histoire des mathématiques, la définition n'a pas toujours eu l'importance qu'elle a aujourd'hui. En témoigne par exemple une correspondance entre Leibniz et Bernouilli (entre 1712 et 1713) sur ce que pourrait être le logarithme d'un nombre négatif. Cette correspondance est produite par Hitt pour montrer que la discussion finit par quitter la rationalité mathématique car :

> Rester dans une rationalité mathématique impliquait de résoudre les contradictions en précisant :
> a) Les propriétés des nombres négatifs
> b) La définition de la fonction logarithme et par conséquent la définition de fonction.
> c) La définition de fonction inverse (Hitt 2006 p. 7).

C'est ainsi que Bernouilli donnera plus tard (1718) une définition de fonction d'une variable. Ce qui est visible dans cette correspondance est justement que ce qui doit être défini n'est pas clair ; il n'est aucunement question de définition comme si tous les arguments mathématiques devaient reposer sur une forme de nécessité intrinsèque liée aux objets et non sur certains choix primitifs. C'est exactement le sens de la notion de préconstruit qui dispense d'une définition rigoureuse.

Mais la notion de contre-exemple a aussi été sujette à des évolutions historiques. Les fonctions qui ne respectaient pas certains théorèmes admis comme évidents étaient simplement qualifiés de monstres ou d'exceptions et rejetés. Ainsi par exemple,

> Abel était au fait de fonctions non continues, limites (simples) de fonctions continues. Il n'en a cependant pas conclu que le théorème énoncé par Cauchy (la fonction limite d'une famille de fonctions continues est continue) était erroné mais simplement qu'il souffrait d'exceptions. Sa validité n'était donc pas remise en cause, ni non plus la preuve proposée par Cauchy. (Job 2011 p. 260)

Ces évolutions profondes de la rationalité mathématique sont finalement assez récentes. Comme le dit Hitt :

> La construction d'une rationalité mathématique prend beaucoup de temps chez les mathématiciens, et par conséquent nous devons laisser de côté la position naïve à l'effet qu'une rationalité mathématique puisse être développée de façon naturelle chez les élèves. (Hitt 2006 p. 8)

Ceci était déjà la conclusion de Legrand (Legrand 1990), la naturalisation par le professeur de la rationalité scientifique prive l'élève de la possibilité de jouer avec les bonnes règles du jeu puisqu'il a spontanément tendance à mobiliser une rationalité du quotidien inadaptée au jeu scientifique. Nous montrons cependant qu'il existe une rationalité intermédiaire, la rationalité empirique, qui prend en charge la volonté de fabriquer des lois, c'est-à-dire des généralités, volonté absente de la rationalité pragmatique plus proche de celle du quotidien, mais en s'appuyant essentiellement sur le réel ou des arguments induits par ce réel.

iv Les différents moments dans l'activité de définition de Ouvrier-Buffet

A partir d'entretiens menés avec huit mathématiciens au sujet de l'activité de définition dans la recherche mathématique, Ouvrier-Buffet distingue quatre moments (en fait cinq car un moment intermédiaire est défini) dans cette activité de définition. Il existe une forme de parallèle entre les spécificités de ces moments et les spécificités des différents types de rationalités de notre modèle. Étudions chacun de ces moments en comparaison de la rationalité associée.

Commençons par le moment « en-acte ». Comme dans la rationalité pragmatique il n'y a pas encore de motivation pour la généralité : il est trop tôt. Les objets sont en germes et émergent de l'exploration immédiate. Il y a des définitions en actes et l'on utilise l'analogie. Ce que nous appellerons ultérieurement *théorie* n'apparaît ici que sous la forme de cas particulier (exemple, non exemple, contre-exemple). Nous ne prétendons pas évidemment que le chercheur mobilise une rationalité pragmatique dans les prémisses de sa recherche mais nous remarquons cependant certaines similitudes entre ce début d'activité de définition et l'activation d'une rationalité pragmatique. Ces points communs ne sont pas si surprenants dans le sens où les tout débuts d'une activité de définition correspondent à un moment d'exploration et de découverte absolument pas formalisée et cela rejoint un mode de logique moins contraint.

> **Le moment « en-acte ».** Il s'agit du lieu de l'intuition des objets, des idées, des résultats. L'activité mathématique pendant ce moment est principalement une activité d'exploration et d'imprégnation d'un ou de plusieurs problèmes, mais aussi des objets en jeu pour mieux les connaître (fréquentation d'exemples, non-exemples, contre-exemples). Des analogies et des champs mathématiques voisins peuvent alors être mobilisés, de même que des problèmes plus faibles peuvent être formulés. C'est là que des définitions-en-acte et des *concept image* apparaissent. (Ouvrier-Buffet 2013 p. 70)

Vient un moment intermédiaire où des catégories d'objets émergent et où la classification des objets est l'activité principale. Nous relions ce moment intermédiaire à une rationalité empirique de type inductiviste dans laquelle la confrontation au réel est essentielle pour y décerner des régularités et des invariants. C'est bien le sens d'une classification : déterminer des catégories selon des invariants.

> **Un moment intermédiaire entre « en-acte » et « zéro ». Lien possible avec le moment « axiomatique ».** Ce moment a deux versants : il s'agit de faire des premières catégories d'objets, de classer et d'exploiter des classifications existantes, mais aussi d'essayer des analogies et de faire des liens avec des concepts existants et théories existantes. Ce qui oriente l'activité de définition ici est principalement la classification, la catégorisation d'objets, et la dénomination de ceux-ci. (Ouvrier-Buffet 2013 p. 70)

Le moment « zéro » est celui des zéro-définitions qui vont être éprouvées : elles permettent d'énoncer des théorèmes qui résistent à la falsification au point de devenir ensuite des proof-generated definition (dans la rationalité théorique) ou bien sont modifiées pour une autre

épreuve. Ceci correspond à l'exercice d'une rationalité empirique associée à la falsification ou bien même une rationalité théorique de preuve et réfutation.

> **Le moment « zéro ».** C'est le lieu des zéro-définitions (définitions de travail) mais aussi de définitions locales de portée plus faible. L'activité mathématique peut se décrire avec des opérateurs lakatosiens (par exemple : utiliser et construire des exemples et contre-exemples, reléguer les monstres) et intègre également d'autres aspects : faire des choses fausses, accéder à une idée de la preuve (la preuve forçant les concepts et les définitions selon les mathématiciens). Ainsi, les zéro-définitions et autres définitions locales auront ici différentes fonctions : nommer ; proposer différentes voies d'accès sur un concept ; travailler sur la preuve ; délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée, d'une conjecture ou d'une preuve ; communiquer. (Ouvrier-Buffet 2013 p. 70)

Enfin viennent les moments « formalisés » et « axiomatiques » qui correspondent à l'exercice de ce que nous qualifions de rationalité théorique. Il s'agit de démontrer les théorèmes avec les définitions choisies (zero-definition). On obtient ainsi des proof-generated definitions lorsqu'elles ont effectivement pu permettre de démontrer le théorème visé. Le moment axiomatique se distingue surtout, pour la définition, d'un choix de définition qui prend en compte un critère supplémentaire : celui de l'expression d'une théorie ayant un potentiel d'application le plus large possible au sens de Popper (2009).

Ainsi nous pouvons constater une certaine convergence entre des pratiques identifiées chez les mathématiciens et la mobilisation de rationalités comme nous les avons définies. En particulier nous avons bien dans cette description des pratiques un moment qui se situe vraiment entre la première découverte du lieu de recherche (moment « en acte ») et le moment « formalisé » où ont lieu les démonstrations mathématiques abouties. Ce moment correspond à la mobilisation d'une rationalité empirique forte qui fait intervenir massivement le domaine de réalité pour valider ou invalider les idées non encore véritablement formalisées mais déjà travaillées et plus du tout aussi naïves qu'au tout début de la recherche.

Si un parallèle assez fort peut donc être dressé entre rationalités et moments de l'activité de définition d'Ouvrier-Buffet (2013), nous remarquons cependant une distinction majeure entre les deux. Les moments de construction ne sont, comme leur nom l'indique, que des moments passagers, ils ont vocation à servir d'étapes dans la réflexion et le raisonnement, étapes ni linéaires, ni hierarchisées. Les rationalités dans notre modèle, elles, sont construites comme des entités stables et autosuffisantes. Nous pensons qu'il est nécessaire de leur garder cette construction qui les autonomise, car elles correspondent à certaines étapes « stables » du développement cognitif de l'élève, comme de l'histoire des mathématiques elle-même. Si nous voulons pouvoir décrire ces étapes il est utile d'avoir des outils qui les représentent au mieux. Cependant, il nous paraît tout aussi nécessaire d'assouplir ce caractère rigide qui entrave la circulation inter-rationalités, circulation que l'on peut observer dans les pratiques professionnelles auxquelles Ouvrier-Buffet fait référence, nous utilisons à ce moment-là plutôt les dénominations de *phases* pragmatiques, empiriques, théoriques que de rationalités du même nom.

b) Éléments de cohérence avec certains travaux didactiques

Comme la notion de rationalité s'appuie sur les notions de définition, logique, et validation, on peut chercher comment les travaux concernant ces notions recoupent la catégorisation du modèle de rationalités. Nous regarderons essentiellement la définition avec les travaux de Job (2011) et la démonstration avec ceux de Balacheff (1988).

i. Cohérence avec les travaux de Job sur la définition

Job (2011)reprend à son compte cette nécessité (annoncé par Schneider 2007) d'assumer la succession des étapes d'une praxéologie de type I à une praxéologie de type II dans le cadre de son projet concernant la limite en présentant la difficulté précédemment évoquée comme un problème de communication sur le plan didactique :

> Autrement dit, l'enseignement de l'analyse devrait, selon nous, être « bicéphale » et assumé comme tel, c'est-à-dire qu'il devrait enchaîner, au moins en partie, les deux projets fondamentaux (Calculus et analyse formalisée) la constituant dans l'ordre de leur émergence historique. Plus encore, cette « bicéphalie » devrait être annoncée explicitement auprès des élèves et étudiants afin qu'ils sachent à quel jeu on tente de les faire jouer, car la confusion entre les deux tâches fondamentales de chacune de ces praxéologies nous semble être une des causes principales de la difficulté à entrer dans l'analyse « formalisée » et la notion de limite. Elle doit d'ailleurs être annoncée d'autant plus nettement que la transition d'une praxéologie de type 1 à une praxéologie de type 2 est nécessairement problématique parce qu'elle correspond au franchissement d'une instance de l'obstacle épistémologique générique empirique-sensualiste. (Job 2011 p. 219)

Quand Job (2011) fait référence à l'obstacle épistémologique générique empirique-sensualiste, il relie cela au problème de la conception de la définition pratiquée à « l'école qui induit chez l'élève l'idée d'une définition de limite qui ne serait qu'une description. ». La notion de définition serait un obstacle pour passer d'une praxéologie de type 1 à une praxéologie de type 2 car sa conception en tant que description (praxéologie 1) ne correspond plus à la fonction même de la définition (praxéologie 2), en particulier pour la définition de la limite, qui est selon Job, essentiellement d'ordre Lakatosienne (elle s'élabore dans une dialectique définir/démontrer). Cette distinction de Job (2011) correspond d'ailleurs aux catégorisations de Ouvrier-Buffet (2003) concernant les définitions (conception aristotélicienne, Popperienne, et Lakatosienne de la définition). Nous pouvons remarquer deux aspects concernant cette analyse de Job (2011). D'une part il pointe le fait que les élèves adoptent une praxéologie de type 1, praxéologie que nous avons associée à une rationalité empirique, et d'autre part il pointe la difficulté de passer à une praxéologie de type 2, que nous avons associée à une rationalité théorique. Cette analyse conforte l'hypothèse de deux rationalités distinctes (empirique et théorique) et des difficultés pour passer de l'une à l'autre spontanément, mais aussi associe cette rupture avec le statut de la définition, statut qui est l'un des critères de distinction des types de rationalités.

ii. Cohérence avec les travaux de Balacheff sur la démonstration

Balacheff (1988) affirme à la suite de ses travaux que les niveaux de démonstrations des élèves ne semblent pas spécifiques de la rationalité des élèves et que d'autres facteurs ont un rôle significatif, en particulier les rapports sociaux engagés, le niveau de connaissance et de la nature du contrat didactique :

> Un résultat essentiel de notre recherche est que les démarches de validation observées ne caractérisent pas de façon intrinsèque les élèves. Elles ne prennent sens qu'en référence à la nature et au statut de leurs connaissances, dans la perspective des interactions au sein du binôme, et de leur lecture de la situation. (Balacheff 1988 p. 146)

L'exemple pris pour illustrer cela est issu d'une expérimentation où il s'agit de déterminer une formule pour donner le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés. Le binôme de Pierre et Mathieu, après une longue discussion sur le sens du mot diagonale, discussion qui dépasse largement l'empirisme naïf, va adopter une formule n/2 qu'il ne remettra pas en question malgré la production par le binôme d'un contre-exemple avec un polygone à cinq côtés. Cela correspond à la manifestation d'un empirisme naïf selon la catégorisation de Balacheff (1988). Par la suite Pierre ajoutera une deuxième « conjecture naïve » : le nombre de diagonales est égal au nombre de sommets. Les deux conjectures concurrentes demeureront proposées, aucune ne sera invalidée. Deux explications à ce fait sont proposées. La première est que les deux élèves pensent participer davantage à un jeu qu'à une activité scientifique : on a davantage de chance d'avoir raison en proposant plusieurs solutions ! La seconde explication provient des caractères des élèves : Mathieu semble fataliste et Pierre impatient, cela explique également, pour Balacheff (1988), que leur interaction s'avère moins efficace que ce qu'aurait pu laisser supposer le début de leur activité.

Ce résultat nous alerte et nous met en garde : pour obtenir des résultats significatifs en ce qui concerne le type de validation, il faut prendre en compte les variables mises à jour par Balacheff (1988) : connaissances des élèves, contrat didactique, nature des interactions sociales. Cependant ceci est devenu une précaution standard en didactique des mathématiques depuis ces travaux, tant on a remarqué la sensibilité des phénomènes didactiques à ces variables.

Ce qui retient aussi notre attention dans les travaux de Balacheff (1988) concerne la catégorisation des types de preuves que nous allons essayer de croiser avec les types de rationalités.

Voilà notre classement en fonction des types rationalités :

Types de rationalités	**Types de preuves**
Rationalité pragmatique	empirisme naïf
Rationalité empirique	empirisme naïf - expérience cruciale – exemple générique
Rationalité théorique	exemple générique - expérience mentale - démonstration

Tableau 5 : Tableau de correspondance entre rationalités et types de preuve de Balacheff

L'empirisme naïf peut parfois être aussi a priori rencontré en rationalité empirique cela dépend surtout de la volonté de fonder une loi générale. Mais c'est surtout l'expérience cruciale qui marque cette rationalité : elle constitue l'ultime recours aux faits pour essayer de prouver. L'exemple générique peut être lui aussi révélateur d'une rationalité empirique s'il exprime l'effectivité des opérations, c'est-à-dire s'il est du côté des preuves pragmatiques. Mais il sera plutôt

révélateur d'une rationalité théorique s'il met en évidence les moyens d'exprimer une preuve. Cette double possibilité renvoie à celle que Balacheff (1988)évoque au sujet de l'exemple générique, lequel peut être considéré suivant les cas comme preuve pragmatique ou bien preuve plutôt intellectuelle. L'expérience mentale et la démonstration témoignent clairement d'une rationalité théorique, c'est-à-dire pour Balacheff (1988) d'une preuve intellectuelle.

c) Conséquences théoriques concrètement observables

Dans cette partie nous mettons en évidence que certaines conséquences théoriques qui découlent des choix de construction du modèle de rationalités sont concrètement observables, ce qui a tendance à accréditer ces choix. Ces conséquences sont liées essentiellement aux hypothèses 2 et 3 de modélisation (caractéristiques et stabilité des types de rationalités).

i. Vie d'un objet en fonction de la rationalité investie

D'après l'hypothèse 2, les connaissances et les objets répondent de contraintes (logique, existence, validation) qui dépendent du type de rationalité mobilisé pour les appréhender. On peut inférer de cette hypothèse que ces objets ne sont pas pourvus d'une existence unique comme le supposerait le fait d'être un objet mais leur existence dépend fortement de la rationalité qui leur est appliquée. Ceci est une conséquence théorique de notre modélisation. Étudions un exemple concret de réalisation de cette conséquence, exemple emprunté à Brousseau (2002) :

> Le professeur demande « sérieusement » à ses élèves débutants de tracer les trois médiatrices d'un triangle ABC très aplati et prétend donner des noms appropriés A', B', C' aux sommets du petit « co-triangle » qu'ils doivent ainsi obtenir. Devant la trop petite taille de ce triangle le professeur prétend avoir choisi un triangle ABC particulier et incommode. Il demande aux élèves de trouver un triangle dont le co-triangle sera le plus grand possible. Les élèves s'acharnent et doivent finalement émettre l'hypothèse que ces trois points pourraient n'en représenter qu'un seul et en apporter la preuve contre « l'évidence » de la figure et non pas avec. Pour cela il faut s'accorder sur la définition de la médiatrice comme lieu. Le professeur explique alors la différence entre « voir » et « démontrer ». La géométrie ne consiste pas à décrire ce qu'on voit mais à établir ce qui « doit » être vu. (Brousseau 2002 p. 155)

Figure 9 : Le co-triangle de Brousseau

Dans cette situation, l'objet que nous étudions est le centre du cercle circonscrit. Cet objet apparaît dans une rationalité pragmatique, par l'évidence de l'ostension, comme un (co)triangle. Sa réalité est attestée et nullement mise en cause, le co-triangle existe parce qu'il est là, devant les élèves. Mais lorsque ce triangle est soumis à une rationalité empirique qui va questionner sa

généralité (« les élèves s'acharnent »), alors là le triangle commence à s'effacer devant le centre du cercle circonscrit : « les trois points pourraient n'en représenter qu'un seul ». Mais c'est uniquement lorsque la situation sera étudiée selon une rationalité théorique (« démontrer ») que « l'évidence » du co-triangle pourra laisser place à « ce qui doit être vu », le centre du cercle circonscrit. On voit que tout au long de ces trois étapes de mobilisation des rationalités, d'une part l'objet *co-triangle* disparaît et d'autre part l'objet *centre du cercle circonscrit* apparaît. Ce que la théorie pouvait laisser prévoir, les objets dépendent de la rationalité qui les appréhende, est attesté dans cet exemple paradigmatique.

Nous ajoutons qu'en utilisant ce modèle de rationalités, l'analyse formulée par Brousseau peut être singulièrement nuancée. Selon le modèle de rationalités c'est initialement une rationalité pragmatique qui est mobilisée. A première vue et de manière inhabituelle, le réel sensible semble devoir s'incliner devant le réel théorique. Mais ce sont les multiples essais qui permettent de faire l'hypothèse d'un point unique, autrement dit l'exercice d'une rationalité empirique. Ce sont les dessins qui sont à l'origine de cette hypothèse : on ne lutte pas contre l'évidence des dessins, comme le dit Brousseau, mais bien avec. Cependant, dès lors qu'on voudra s'assurer que pour une figure abstraite où les traits sont des droites, les angles sont bien droits et les milieux au milieu, les médiatrices sont concourantes, il faudra « s'accorder sur la définition de médiatrice » et donc faire appel à la rationalité théorique. Il nous semble alors que la différence entre « voir » et « démontrer » n'est pertinente que pour matérialiser l'idée de changement de rationalité, et donc de mode de validation, et non pour confronter deux types de réalités, celle qui est vue et celle qui « doit » être vue. Les élèves **voient** effectivement trois points, puis par leurs expérimentations successives les voient se rapprocher, et finissent par **imaginer** qu'il y en a qu'un seul. C'est bien le moment où cette « hypothèse » (une seule intersection) apparaît que le dessin devient figure, non parce que le dessin s'est conformé à la théorie (les élèves ne connaissent pas cette théorie), c'est parce qu'une rationalité théorique s'y applique désormais : on imagine au lieu de voir ! Dès lors, la démonstration devient le moyen de s'assurer que ce qu'on imagine correspond bien à une forme de réalité, celle qui répond de la validation théorique.

i. Difficultés de transition de rationalité

Comme nous l'avons évoqué, l'hypothèse 3 de stabilité de type de rationalité conduit à penser que la transition de rationalité, le fait de passer d'une rationalité à l'autre, est compliqué pour un élève. Nous allons ici identifier des indices de réalité de cette conséquence a priori théorique à travers quelques situations bien réelles.

La première transition (pragmatique-théorique ou empirique-théorique) de rationalité à laquelle on peut naturellement penser est celle qui est visée par la situation précédente de Brousseau, à savoir le passage d'une géométrie perceptive à une géométrie déductive. Les difficultés liées à cette transition sont bien connues et amplement documentées. Nous n'avons pas besoin de l'évoquer davantage.

Une autre transition de rationalité pose parfois des difficultés : la transition pragmatique-empirique. Brousseau (1998a) explique que l'incertitude liée à une situation didactique est source d'angoisse et de plaisir pour un élève, mais que lorsque la solution est connue, la situation est alors vidée de son intérêt, ce qui conduit certains élèves à refuser de découvrir cette solution.

Les positions de l'actant et du joueur peuvent être opposées : par exemple le goût excessif du

> joueur pour l'incertitude du jeu peut le conduire à refuser ou à se désintéresser d'un apprentissage qui le priverait de son plaisir. Nous avons observé des phénomènes de ce genre chez des enfants chez qui apprendre signifiait faire le deuil de leur innocence, grandir, quitter le confort de l'enfance. (Brousseau 2002 p. 198)

Ainsi l'enfant souhaitant garder son innocence n'adopte pas de démarche qui pourrait réduire l'incertitude, il ne passe donc pas dans une rationalité empirique ou théorique car il préfère pouvoir continuer à jouer au coup par coup sans pouvoir anticiper l'issue du jeu et reste donc dans une rationalité pragmatique.

Une autre situation montre que la transition (empirique-théorique) est compliquée : il s'agit de celle de Job (2011) où il montre que le rapport d'élève de Terminale option maths (en Belgique) à la notion de définition constitue un obstacle qui les empêche d'avancer dans la situation où une dialectique lakatosienne devait être menée. Dans ce cas-là, l'empêchement provient du fait que ces élèves ne mobilisent pas la définition provisoire de limite qu'ils ont pour s'apercevoir qu'elle rendrait fausse une propriété qu'ils tenaient pour vraie, ce qui aurait dû les amener à questionner cette définition. Ils restent donc dans une rationalité empirique où la notion de définition n'est pas nécessaire et se contentent donc de la plausibilité qu'ils confondent avec la nécessité. Ce que d'ailleurs montrent aussi les scripts du début de la situation, c'est que leur rapport à la démonstration rend nécessaire au début certaines interventions de l'animateur pour préciser ce que signifie démontrer, autrement dit que la transition à la rationalité théorique est loin de pouvoir être assurée, encore moins de manière adidactique. Cet exemple montre que cette transition-là est difficile bien après le collège.

Mais la transition dans le sens contraire peut aussi tout à fait poser des difficultés, la transition théorique-empirique ou théorique-pragmatique où, par exemple, l'étude d'un cas particulier suffirait pour donner de la chair à un énoncé théorique complexe mais cette initiative n'est pas prise.

Après avoir établi une forme de plausibilité au modèle, nous nous tournons maintenant vers les usages du modèle, usages dont la description servira aussi à éclairer la modélisation elle-même.

d) Jonction Modèle des rationalités/ Structuration des milieux

i. Distinction raisonnement/rationalité

Nous abordons ici une question essentielle du rapport entre le modèle de rationalités et le modèle de structuration des milieux à travers la question de la distinction entre raisonnement et rationalité. Si l'on reprend la définition d'Oléron (cité par Bloch & Gibel 2011), « Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicités et conduits en fonction d'un but », on s'aperçoit qu'Oléron définit UN raisonnement mais pas LE raisonnement. Un raisonnement est une réalisation concrète aussi concrète qu'un objet puisqu'on peut la transmettre (écrit, oral). Or, comme la rationalité, LE raisonnement est abstrait et n'est pas une catégorie concrète. On peut dire que l'élaboration d'un raisonnement fait intervenir LE raisonnement mais mobilise également une forme de rationalité. Rationalité et raisonnement se trouvent côte à côte, plus exactement ils surplombent tous les deux Un raisonnement dans lequel on peut les reconnaître, dans lequel on peut voir qu'ils sont à l'œuvre ou qu'ils ne le sont pas. La question est alors : quelles sont leurs différences ? On peut commencer à appréhender la nuance en confrontant

deux énoncés d'une certaine manière réciproques l'un de l'autre. S'ils paraissent fondés tous les deux, alors on aura tendance à parler d'équivalence, non en terme logique mais plutôt sémantique. Voici les deux énoncés :

(1) Le raisonnement mobilise la rationalité et (2) La rationalité mobilise le raisonnement.

Contrairement à l'énoncé (2), on perçoit immédiatement que l'énoncé (1) a du sens. Pourquoi ?

Curieusement, alors que l'énoncé (1) a du sens, il faut peu de temps pour lui découvrir des failles. Si nous utilisons le terme rationalité au sens large habituel, on dira effectivement que l'énoncé (1) est faux dans la mesure ou certains discours, par exemple sur la foi religieuse, peuvent être tenus pour des raisonnements mais pas pour être rationnels. D'autre part, on peut quand même trouver une rationalité adaptée pour ce raisonnement, ici la rationalité théologique. Que l'énoncé (1) soit tenu pour vrai ou pour faux suivant le sens précis qu'on donne à la rationalité, il n'en demeure pas moins qu'il a du sens. Par contre, l'énoncé (2) ne semble pas pouvoir être interprété facilement.

Nous ne chercherons pas davantage les raisons de cette différence mais nous voyons ainsi que rationalité et raisonnement ne peuvent pas être identifiés l'un à l'autre. Nous proposons de dire que la rationalité qualifie le raisonnement : il y a des raisonnements rationnels et d'autres non, c'est à dire qu'ils relèvent ou non d'une certaine rationalité. Ainsi nous pouvons comprendre que l'énoncé (1) a du sens puisque « le raisonnement mobilise ou non la rationalité » équivaudra à « le raisonnement est rationnel ou non ».

Pour résumer, *le raisonnement* est ce qui produit des raisonnements et *la rationalité* est d'une certaine manière une qualité du raisonnement, c'est à dire le type de rationalité dans lequel les raisonnements peuvent prendre sens.

Ainsi, on peut comprendre qu'au seul niveau du raisonnement, la prise en compte de la transition de rationalité, transition qui se traduit, faute d'une formalisation de la rationalité, seulement par un changement de milieu, ne peut être analysée et prise en charge de manière totalement adaptée puisque les moyens de commande de cette transition de rationalité ne se situent plus à ce niveau (milieu-raisonnement) mais au niveau supérieur (rationalité). Lorsque le niveau de rationalité ou la transition de rationalité n'est pas initialement prévu, l'on observe des effets de contrats de rationalité provoquant des ruptures d'adidacticité. Finalement, la prise en compte de cette différence raisonnement/rationalité, et donc de transitions, est susceptible de substantiellement améliorer le potentiel adidactique des situations.

ii. Rapport niveaux de milieux/niveaux de rationalités

Dans cette partie nous montrerons que le modèle de rationalités s'adapte naturellement au cadre du modèle de la structuration des milieux enrichi par le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011). Dans le cadre d'une adaptation aux spécificités des notions mathématiques de fin du lycée et de l'université, les auteurs utilisent la définition d'Oléron d'un raisonnement et spécifient ensuite ce raisonnement selon une double grille croisée d'interprétation. D'une part le raisonnement est analysé selon le niveau d'avancement dans les milieux (M-2, M-1, M0), en phase adidactique, et d'autre part selon trois axes : fonctions des raisonnements, niveaux d'utilisation des symboles, niveau d'actualisation du répertoire. A partir d'une définition générale d'un raisonnement, il s'agit de le caractériser à la fois dans sa dimension didactique

(milieux) et dans sa dimension épistémologique (3 axes). Nous montrons ici les correspondances niveau de milieu par niveau de milieu selon ces descriptions en trois axes et avec les types de rationalités, types de rationalités qui contribuent à la même recherche « d'épistémologisation » de la théorie des situations pour les niveaux plus élevés d'enseignement. Nous montrons aussi les nuances qu'apporte le modèle de rationalités.

Pour ce qui est du niveau M-2, qui est le milieu de l'action, qui correspond au milieu où l'élève prend connaissance du milieu matériel en agissant sur lui, il teste, essaie, et progressivement développe des heuristiques implicites (le milieu devient alors objectif), la correspondance paraît évidente avec la rationalité pragmatique qui s'intéresse à ce qui répond de l'efficacité effective sous forme de vérifications concrètes dans des cas particuliers.

	Milieu -2	Rationalité pragmatique
Fonction des raisonnements	Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	Vérification sur des cas particuliers : « ça marche ou ça ne marche pas ».
Niveau d'utilisation des symboles	Icônes, indices dépendant du contexte (Schémas, intuitions...)	La rationalité pragmatique ne s'occupe que des cas concrets et particuliers, les classes d'objets sont en dehors de son champ d'investigation, ou alors sous la forme d'un représentant de la classe. Ce qui correspond à la notion d'icône et d'indice.
Niveau d'actualisation du répertoire	-Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes -Enrichissement au niveau heuristique : calcul, conjectures ponctuelles	La rationalité pragmatique mobilise des outils totalement naturalisés au point de d'être transparents et de tenir lieu d'évidence. Ces outils permettent de déterminer des énoncés qui ont un caractère d'évidence sur des cas particuliers.

Tableau 6 : Comparaison Milieu M-2 rationalité pragmatique

Pour ce qui est du milieu M-1, milieu de la formulation et de la validation, ce milieu correspond à la rationalité empirique dans la mesure où précisément la rationalité empirique est composée d'une rationalité inductiviste, qui est le lieu de la formulation de lois générales, et de la rationalité réfutationiste qui correspond à la vision de la validation de Brousseau quand il décrit ce qu'est un problème de validation :

> Un problème de validation est bien plus un problème de comparaison d'évaluation, de rejet de preuves que de recherche de la démonstration. (Brousseau 1998a p.127)

	Milieu -1	Rationalité empirique	
		Rationalité inductiviste	Rationalité réfutationiste
Fonction des raisonnements	-Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique	- Énoncer des lois à partir d'arguments de plausibilité - Déterminer des généralités	Réfuter une assertion
Niveau d'utilisation des symboles	Arguments locaux plus ou moins génériques : indices, calculs	Utilisation d'arguments de plausibilité donc non génériques	On peut commencer à voir apparaître des formalisations

			(définitions) pour répondre du besoin de réfutation
Niveau d'actualisation du répertoire	Enrichissement du niveau argumentaire : - Des énoncés - du système organisateur	Les énoncés sont plus généraux et s'articulent à des arguments de plausibilités.	Élimination d'énoncés faux

Tableau 7 : Comparaison Milieu M-1 rationalité empirique

Le milieu M0 est celui de l'institutionnalisation. Il est donc celui du niveau théorique qu'emploie le professeur en principe pour faire son institutionnalisation. Mais ce niveau théorique peut être atteint par les élèves lorsqu'ils effectuent eux même des démonstrations, par exemple. Ce milieu correspond à l'exercice de la rationalité théorique et il est partagé ainsi entre élèves et professeur. Cela ne signifie pas que l'institutionnalisation peut être réalisée par l'élève. L'institutionnalisation est à la charge du professeur puisqu'il doit reconnaître, au nom de l'institution, la (non)validité des connaissances mises à jour pour les instituer en savoir. Mais cela signifie certainement que la distance, dans certains cas et à certains niveaux d'enseignement, entre les connaissances et le savoir peuvent être éventuellement faibles, que l'élève occupe alors une place dans le milieu M0 de plein droit, et que les aspects dépersonnalisation et décontextualisation habituels de l'institutionnalisation en sont, de fait, limités. Cela provient du fait qu'à certains niveaux d'enseignements, particulièrement en fin de lycée et début d'université, les problèmes dont émergent les connaissances puis savoirs font parfois déjà partie intégrante de la théorie, contrairement aux situations de primaire, par exemple, où souvent un milieu matériel plus concret est nécessaire pour assurer la dévolution effective du problème.

	Milieu 0	Rationalité théorique
Fonction des raisonnements	Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec l'aide éventuelle du professeur)	Formalisation de preuve dans la théorie.
Niveau d'utilisation des symboles	Arguments formels spécifiques : ici symbole de l'analyse	Les symboles utilisés sont ceux de la théorie. Les objets sont définis et leurs noms renvoient à des définitions.
Niveau d'actualisation du répertoire	Formalisation des preuves Introduction d'ostensifs organisés Intégration théorique d'éléments du domaine mathématique	Formalisation des preuves Introduction d'ostensifs organisés Intégration théorique d'éléments du domaine mathématique

Tableau 8 : Comparaison Milieu M0 - rationalité théorique

On remarque finalement l'étroite correspondance entre les niveaux de milieux (M-2, M-1, M0) de la théorie des situations enrichis par les trois axes (raisonnements, signes, répertoire) de Bloch et Gibel avec le modèles des types de rationalités (pragmatique, empirique, théorique).

Cette correspondance est un élément supplémentaire de plausibilité de notre modèle dans la mesure où elle montre que le découpage en types de rationalités entre en synergie avec des découpages préalables des niveaux de milieux.

D'un autre côté le modèle de rationalités gagne la représentation sémiotique des objets mathématiques, représentation sémiotique qui avait été écartée du modèle lors des choix des caractéristiques selon la typologie des connaissances de niveau II de Sackur (Sackur et al 2005). Cet apport au modèle de rationalités permet de mieux appréhender la transformation des objets sous la contrainte des différents types de rationalités, « transformation » que nous avons déjà évoquée, car cette transformation fait partie du système sémiotique de Pierce, sous le nom de « sémiose ». En effet, la mise en correspondance de la ligne « niveau d'utilisation des symboles » avec le type de rationalité génère des remarques similaires. Alors que la « montée » dans les niveaux de milieux se caractérise, du côté des symboles et signes, par un raffinement qui tend à rendre les symboles manifestant les connaissances de plus en plus explicites vis à vis des savoirs visés, pour ce qui concerne la rationalité, les objets (et outils) acquièrent progressivement un caractère à la fois plus générique et en en même temps plus formalisé. Cette évolution conjointe, raffinement des symboles et signes et des connaissances sur les objets nous semble traduire une nécessité intrinsèque qui découle du processus de confrontation de représentations des objets et des objets eux même : représentations et objets évoluent nécessairement dialectiquement. C'est cette évolution qui est qualifiée par Pierce de sémiose.

II.6 Méthodologie d'usage de ce modèle

Nous proposons, dans cette partie, d'examiner quelques-uns des usages possibles du modèle de rationalités. Nous regarderons comment exploiter ce modèle pour les ingénieries, dans leur conception, leur analyse a priori et a posteriori, mais aussi pour suivre l'évolution de la dynamique de rationalité d'un groupe sur un plus long terme. Cette partie est moins conçue pour détailler de manière exhaustive les applications effectives du modèle que pour éclairer certaines questions de modélisation à la lumière des questions que révèlent certains usages spécifiques. Nous verrons au chapitre 4 comment ce modèle de rationalités peut être utilisé dans le cadre spécifique de la TSD et des exemples dans la partie II (partie expérimentale).

a) Conception d'ingénieries et d'analyse a priori

La notion de transition de rationalité permet de porter l'attention dans les situations didactiques sur une des difficultés épistémologiques pour les élèves, celle de sortir d'une rationalité lui limitant l'accès aux concepts par nature théoriques, et une difficulté didactique pour le professeur est de se trouver contraint par un milieu insuffisant de priver l'élève d'une partie de la dimension théorique de l'objet, de la propriété à l'étude. Comme nous l'avons vu, cet instant où un objet, une propriété, change de rationalité est décisif puisque c'est à ce moment-là que s'amorce sa « transformation » sous l'effet de nouvelles contraintes, d'existence en particulier. Que cette transformation puisse être à l'initiative de l'élève nous paraît donc essentiel dans la mesure où si ce choix est contraint alors les raisons qui motivent cette transformation risque de lui échapper. On peut penser que lui échappe alors simultanément une raison d'être de l'objet car ce qui rend nécessaire qu'on change rationalité constitue par essence une raison d'être de l'objet dans cette « nouvelle rationalité ». Aussi, nous pensons que si cette dimension de la transition est anticipée alors il est possible de mieux échapper aux effets de contrats de transitions de rationalités et de scénariser ces passages de manière à ce qu'ils soient le plus adidactiques possible.

Nous voyons deux conditions principales pour que les transitions de rationalités d'un objet ou d'une propriété puissent être adidactiques. La première, sur laquelle nous avons jusqu'à présent porté notre attention et qui est indépendante de l'objet est la question de la rationalité. Il faut, pour pouvoir prendre l'initiative de s'engager dans une transition de rationalité, disposer des connaissances correspondantes, autrement dit entretenir avec la notion de définition, la logique mathématique et la validation (connaissances d'ordre II) une certaine familiarité aux différents niveaux de rationalité. Il faut donc disposer d'une certaine culture scientifique. Mais ce n'est pas tout. Il faut également que le scénario didactique prévoit une raison spécifique pour l'objet, la propriété, de changer de rationalité, raison qui elle dépend avant tout de l'objet et de ses particularités (connaissances d'ordre I).

Nous allons donc aborder ces deux conditions du point de vue des connaissances d'ordre II et d'ordre I dans la perspective de concevoir des ingénieries qui préservent des transitions de rationalités autonomes du côté de l'élève.

Nous proposons dans ce qui suit quelques pistes d'étude à caractère général que le cadre temporel de notre étude ne nous a pas permis de suivre plus avant, mais nous proposons surtout, à titre d'exemple, d'étayer les choix qui ont présidé, sur ce plan, à la conception des situations de l'expérimentation que nous avons réalisée, situations que nous détaillerons ultérieurement.

i. Connaissance d'ordre II

Il ne s'agit pas ici de faire l'inventaire de toutes les connaissances qu'il serait bon de maîtriser pour un élève afin qu'il puisse agir comme un mathématicien et effectuer systématiquement seul ses transitions. Il s'agit plutôt de pointer celles qui sont susceptibles de créer des instabilités de rationalités et donc favoriser la nécessité des transitions autonomes.

Tout d'abord nous pensons que des situations didactiques d'initialisation sont nécessaires, c'est-à-dire des situations didactiques prévues pour générer un début de transformation sur ces sujets. C'est effectivement beaucoup plus difficile d'installer des connaissances d'ordre II, au moins initialement, en même temps que de viser des connaissances d'ordre I car les difficultés des deux interagissent de manière inextricable.

Ces situations d'initialisation visent, dans chacun des trois domaines (validation, logique et définition), à initier un processus de changement de rapport à l'activité mathématique de l'élève. Le changement visé correspond à trois aspects :

- Une plus grande liberté pour transformer ce qui peut l'être, pour tordre les situations et « tirer » sur les variables, oser des rapprochements habituellement laissés au seul professeur. Il s'agit d'une certaine façon de prendre l'initiative et l'habitude de chercher des expériences cruciales, c'est-à-dire les expériences correspondantes aux valeurs extrêmes de variables que l'élève aura identifiées lui-même comme décisives.
- Un début de culture du doute : on commence à devenir plus suspicieux et à tenir pour vrai seulement ce qui s'explique. Le doute, systématique dans un premier temps, laissera progressivement place à un doute raisonné.
- Un début d'expérience de la solidité (nécessité) : il y a des sujets pour lesquels le doute n'est pas de mise pour de bonnes raisons. C'est, d'une certaine manière, l'expérience de la nécessité épistémique dont (Sackur *et al.*, 2005) identifient l'importance.

Pour ce qui est de la définition, la rencontre de situations où le manque de définition apparu après coup comme la clef qu'on cherchait désespérément pour résoudre les contradictions, nous paraît susceptible d'initier un nouveau rapport à la définition. Ce genre de situation fait apparaître un nouveau besoin, celui de définir les objets qu'on utilise, et ce faisant favorise des exigences qui sont de l'ordre de la transition empirique-théorique. Nous détaillerons les situations en question ultérieurement.

Pour ce qui est de la validation et la logique, nous proposons un travail spécifique sur le contre-exemple. Le contre-exemple peut donner sens au type de vérité de la théorie, vérité qui n'est pas celle de la plausibilité. L'adoption du contre-exemple, par les élèves, comme outil familier est susceptible d'initier une culture du doute et suppose aussi un début d'exercice de la liberté dans le choix des cas destinés à produire des contre-exemples. Cette utilisation du contre-exemple est aussi de nature à modifier le rapport à la validation. Puisqu'un contre-exemple remet à lui seul en cause une assertion universellement quantifiée, la validation de la plausibilité, à savoir produire une argumentation, ne peut plus être un recours aussi crédible pour fonder ce nouveau type de vérité.

ii. Connaissances d'ordre I

Nous pouvons donner quelques pistes générales sur cette question de déterminer les ressorts nécessaires au niveau des connaissances visées par une situation pour produire des transitions de rationalités autonomes. Sur le plan didactique nous pensons que l'organisation de la confrontation de points de vue sur un objet est susceptible de créer les conflits sociocognitifs à même de justifier et de produire des transitions de rationalités. Ces conflits peuvent être de deux types. Soit ils sont intra-rationalité ou bien inter-rationalité, autrement dit à l'intérieur d'une seule rationalité ou bien entre deux rationalités. Dans le premier cas, intra-rationalité, une culture scientifique telle que définie ci-dessus devrait permettre d'identifier que la solution du conflit se trouve dans la rationalité supérieure et donc amorcer une transition de rationalité. Dans le cas inter-rationalité nous pensons encore une fois qu'une culture de rationalité minimale est nécessaire pour permettre la transition autonome.

iii. Analyse a priori

Pour utiliser le modèle de rationalités dans l'analyse a priori d'une situation didactique, il faut prendre en compte la difficulté que représentent les transitions de rationalités et se demander à qui elles reviennent. Si elles sont prévues pour être à la charge de l'élève alors il faut se poser la question des éléments du milieu qui peuvent favoriser cette prise en charge et se demander si l'élève a les connaissances d'ordre II nécessaires. Si les transitions ne sont pas à la charge de l'élève alors la question est différente : en ne donnant pas à l'élève la charge d'assurer la transition de rationalité, de quelle dimension de l'objet, de quelles connaissances le prive-t-on ? Ce sont ces questions qui doivent s'ajouter à l'analyse a priori habituelle.

b) Éléments d'analyse a posteriori

L'analyse a posteriori selon les types de rationalités sert évidemment à mesurer l'écart entre le prévu et le réalisé, ici en termes de rationalités, transitions et effets de contrat, mais ce que nous voulons surtout évoquer dans cette partie concerne deux problèmes liés à la modélisation et que

l'on rencontre inévitablement dans l'analyse a posteriori. Le premier problème concerne la question de continuité/discontinuité dans le modèle de rationalités, et le second problème concerne l'analyse de discours collectif.

i. Question continuité/discontinuité de la rationalité

Nous avons déjà rencontré la question de la continuité/discontinuité à de multiples occasions (Logique, épistémologique, didactique…). Nous traitons l'un de ses aspects principaux pour notre modèle dans ce paragraphe, à savoir ce qui correspond à l'hypothèse 3 de modélisation, c'est-à-dire la stabilité de la rationalité qui induit de fait un modèle discontinu. On rencontre inévitablement cette question lors de l'analyse a posteriori car on peut se demander si l'analyse des interventions avec le modèle de rationalités n'est pas trompeuse dans le sens où on ne peut pas savoir si, par exemple, une intervention relève d'une rationalité empirique ou bien si elle ne relève que de l'expression d'une phase empirique. La différence pourrait être perçue comme importante car dans le premier cas d'interprétation l'intervention signifierait une sorte de blocage, au moins temporaire dans un type de rationalité, alors que dans le deuxième cas il ne s'agirait que d'une étape d'un raisonnement qui avance sans blocage. En fait cette question pose aussi la question de l'analyse au niveau local/global, et peut également être relativisée pour une seconde raison. Les interventions sont analysées localement et la question phase ou rationalité s'interprète souvent bien mieux au niveau global : on voit quand un type d'argument stagne et n'évolue que difficilement. Il faut donc avoir une double lecture local/global avant d'attribuer une interprétation à une intervention et probablement aussi savoir accepter qu'il n'est pas possible, dans certains cas, de décider sûrement. Mais il y a une autre raison qui relativise cette différence. Ce qui importe dans l'analyse par le modèle des rationalités est avant tout la transition de rationalité, or celle-ci est insensible à la question phase ou rationalité. Il est clair que si les transitions ne s'effectuent pas et qu'elles ne sont pas réclamées, il y a de fortes chances pour que ce soit une rationalité plus qu'une phase. Mais phase ou rationalité, la transition reste apparente ou absente.

Pour illustrer ce propos, reprenons l'exemple (extrême de ce point de vue) d'Anna cité par Boero qui démontre que « le pgcd de tous les produits de trois nombres consécutifs est 6 ». Nous reprenons cet exemple en analysant seulement la caractéristique « type de validation ».

> 1x2x3 makes 6, so the GCD cannot be bigger than 6.

Anna commence par utiliser la **déduction** en utilisant la propriété implicite suivante : « Le diviseur d'un nombre ne peut pas être plus grand que ce nombre ». Ici l'un des nombres vaut 6 donc un diviseur commun doit être un diviseur de 6 et donc ne peut pas être plus grand que 6.

> I must see if 6 is a divisor of the product of three consecutive numbers in every case.

Anna utilise ici **l'abduction.** En on sait qu'un diviseur commun divise chacun des nombres. Or ici 6 divise un des nombres. Par abduction on peut faire l'hypothèse que 6 est un diviseur commun.

> I try with 2x3x4=24, it is divisible by 6. 3x4x5=60, it is divisible by 6. 9x10x11=990, it is still divisible by 6.

Par **induction** sur ces quelques cas on peut en déduire que 6 diviseur commun est plausible.

Anna cherche ensuite à savoir si cela s'explique, c'est-à-dire si c'est nécessaire :

> I try to understand why.

2, 3, 4. 3, 4, 5. 9, 10, 11.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

L'explication est mise en évidence par **induction** car Anna tire la conclusion générale de divisibilité par 2 et 3 à partir des premiers entiers :

> If I take three consecutive numbers, one or two out of them are even, so they are divisible by 2; one out of them must be divisible by 3, because the multiples of 3 follow each other with two other numbers in the middle.

De l'hypothèse « ces produits sont divisibles par 2 et 3 », par **déduction** ces nombres sont divisibles par 6 en utilisant la propriété implicite : « si un nombre est divisible par deux nombres premiers entre eux alors il est divisible par leur produit ».

> So the product of three consecutive numbers must be divisible by 2 and by 3, namely by 6.

Comme tous les produits de trois nombres consécutifs sont divisibles par 6 et que le PCGD est inférieur ou égal à 6, par **déduction** il est égal à 6 :

> Hence 6 is the CGD of all the products of three consecutive integer numbers.

Dans cet exemple, les trois types de validations sont utilisés, donc a priori tous les types de rationalités. Cependant, clairement nous voyons bien que les transitions sont toutes réalisées par Anna et pouvons en déduire que chacune de ces rationalités est bien davantage une phase de son raisonnement, pragmatique, empirique ou théorique. On peut conclure que Anna articule parfaitement toutes les rationalités, ce qui lui permet de changer de stratégie en fonction de ses objectifs intermédiaires : vérifier, conjecturer, prouver. L'analyse par le modèle des rationalités ici n'apporte que la confirmation d'une élève qui dispose de facilités dans le raisonnement mathématique, ce qui était le constat de Boero. Nous ajouterons cependant, puisque la question avait été posée, que la seule analyse de la rationalité épistémique (c'est-à-dire sans tenir compte des rationalités communicative et téléologique qui sont ici très visibles aussi) aboutit déjà à caractériser ce raisonnement comme exceptionnel du point de vue de la maturité mathématique.

ii. Question collectif/individuel

La deuxième question est aussi en relation avec nos observations du chapitre 2 où la dialectique collectif/individuel était apparue comme récurrente dans l'analyse des contributions de divers auteurs au sujet de la rationalité. Il s'agit ici de se demander comment évaluer la rationalité d'un collectif sachant que chaque intervention est individuelle. En effet on comprend bien qu'on puisse évaluer la rationalité d'un élève qui développe longuement sa pensée (comme Anna), pensée qui peut évoluer et changer de rationalité en fonction de certaines rétro-actions (professeur, milieu matériel…). Mais comment peut-on évaluer le niveau de rationalité lorsque les interventions successives proviennent d'élèves différents qui interagissent les uns avec les autres ? Que cela signifie-t-il ? De qui (de quoi ?) évalue-t-on la rationalité finalement ?

Tout d'abord, remarquons que cette question du collectif/individuel est une question générale de l'analyse didactique et pas seulement spécifique de notre modèle. Dans tous les cas, l'analyse simultanée de chacune des interventions des élèves permet de caractériser globalement le niveau de rationalité du collectif. Le développement de la rationalité individuelle est à son tour

tributaire du niveau des interactions et de la nature des contradictions que celles-ci génèrent. Toutefois, adopter un tel point de vue conduit à poser les questions suivantes : y-a-t-il des phénomènes incompréhensibles ou bien y-a-t-il une logique globale qui se dégage ? Suivant les réponses à ces questions, on ajustera l'analyse pour pouvoir expliquer des phénomènes locaux et spécifiques. Dans tous les cas, l'interprétation est un mixte entre une interprétation globale pour connaître les mouvements d'ensemble de la démarche et un regard beaucoup plus local pour analyser des phénomènes plus fins qui apparaissent. Il est donc important d'étudier le partage des transitions de rationalités : sont-elles collectives ou restent-elles isolées ?

Nous devons savoir également comme le rappelle Douek (2014) que :

> Recognizing students' rationality is almost always a challenge. (Boero *et al.* 2014 p. 8)

c) Evolution de la dynamique de la rationalité d'un groupe

Dans cette partie qui concerne l'évolution de la rationalité d'un groupe nous déterminons les éléments d'évolution a priori. Il s'agira dans un deuxième temps de confronter cette construction théorique à la contingence. Deux aspects généraux doivent être pris en compte : la nature de l'évolution, court ou moyen terme, et le rôle de groupe, ces deux aspects interagissent de manière évidente.

Pour ce qui de l'évolution de la rationalité nous distinguons l'évolution à court terme, à l'échelle d'une séance ou d'une situation didactique plus longue, de celle du plus long terme, à l'échelle de plusieurs semaines, mois ou même d'une ingénierie didactique longue.

Pour le court terme, prenons le cas emblématique d'une seule séance. A l'échelle de la séance apparaissent de manière évidente comme nous l'avons déjà montré les indices de mobilisation de rationalités, de stagnation dans les rationalités et les raisons épistémologiques de ces stagnations, mais aussi les transitions réalisées. Nous pouvons ainsi suivre conjointement l'avancée dans le problème et l'évolution des rationalités. Nous pouvons ici distinguer, a priori, trois types d'évolutions :

<u>Stagnation dans une rationalité.</u> Nous en avons vu un exemple sur l'extrait de la situation du Flocon expérimentée par Bloch. Dans ce type d'évolution, les interventions finissent par tourner en rond par défaut d'un élément théorique nécessaire et non disponible. Repérer la stagnation permettra alors de subodorer qu'un manque existe et conduira à déterminer sa nature ou à établir des hypothèses à son sujet. Nous pourrons chercher ces raisons dans les différentes caractéristiques des rationalités (logique, validation, existence) et dans leurs sous-catégories respectives mais éventuellement aussi dans des connaissances d'ordre I absentes.

<u>Evolution droit au but.</u> Dans ce type d'évolution, les transitions se font de manière unidirectionnelle vers le théorique. Il n'y a pas de stagnation et les interventions construisent progressivement un chemin droit de la conjecture à la validation. Les transitions s'opèrent de manière évidente. Nous sommes là davantage dans l'expression de phases de raisonnement.

<u>Evolution erratique.</u> Dans ce type d'évolution, on peut constater des allers-retours permanents, des transitions de rationalités dans un sens puis dans l'autre, de manière à s'assurer que les généralités qu'on suppose ou bien commence à valider sont bien cohérentes avec les cas particuliers ou bien avec les arguments d'autre nature. Ce qui est significatif ici, c'est là fluidité : les

transitions de rationalités sont naturelles et font partie d'un fonctionnement manifestement intégré. Là encore nous pouvons parler de phases de raisonnement.

Effets de contrat. Nous ajoutons que les effets de contrats de rationalités sont de nature à modifier ces évolutions et éventuellement à masquer leur type véritable à un moment donné. Cela signifie qu'il faut, dans la mesure du possible, maintenir l'adidacticité pour déterminer la nature intrinsèque de l'évolution de rationalité des élèves. Cependant, parfois cette contrainte n'est pas tenable et cela pourrait être aussi révélateur sur les raisons de ces effets : qu'est-ce qui empêche vraiment de maintenir l'autonomie de rationalité ? Qu'aurait-on pu prévoir pour éviter cet effet ?...

Pour le long terme, nous pourrons avoir une lecture plus distanciée de l'épistémologie, et chercher à reconnaître au-delà des objets à l'étude à divers moments, au-delà des péripéties locales, les transformations et évolutions en termes de changement de rapport à l'activité mathématique au travers de la mobilisation des différents types de rationalités.

Par exemple, voit-on davantage, avec le temps, d'évolutions droit au but, ou davantage d'évolution erratique, ou bien de stagnations ? Les raisons des stagnations observées ont-elles changé de nature ? Lorsqu'on prend en compte, par exemple, la vérité apodictique, alors que précédemment seule la plausibilité importait, alors on peut éventuellement passer par une phase de stagnation qui traduit le manque d'habitude pour mobiliser une telle rationalité dont on n'a pas encore véritablement les clefs mais dont on sait cependant qu'elle est décisive.

Nous pourrons aussi nous poser la question de l'évolution des types de rationalités en une rationalité intégrée impliquant des phases de nature différentes. En effet, l'évolution ultime serait que les types de rationalités s'estompent au profit d'une seule rationalité, que nous appellerions scientifique, et qui ferait appel aux différents types de rationalités en tant que phases du raisonnement.

Pour ce qui est du rôle du groupe, nous pensons a priori regarder un paramètre qui nous semble déterminant de l'évolution de la rationalité d'un groupe en termes d'interactions : le partage et la diffusion des types de rationalités dans le groupe.

Il s'agit d'étudier l'évolution du groupe vis à vis de la prise en compte d'éléments de rationalités individuels. Observe-t-on des interventions individuelles qui invitent à la transition de rationalité mais ne sont pas suivies ? Au contraire, y-a-t-il une diffusion rapide au groupe, c'est à dire une adoption collective, de ces transitions ? Y-a-t-il une évolution à long terme de ce phénomène de diffusion ?

III Conclusion

Ce chapitre a vu un modèle de rationalités se construire par la définition de trois types de rationalités (pragmatique, empirique et théorique) dont certaines se subdivisent davantage. Ce sont essentiellement les caractéristiques de ces rationalités qui les différencient (existence des objets, validation, logique). Nous avons distingué les phases et les rationalités du même nom par le fait que ces phases ne sont que des étapes de raisonnement tandis que les rationalités sont des systèmes stables d'appréhension du réel : elles s'autosuffisent en principe. Cela nous a conduit à introduire la notion de transition de rationalité, transition qui est naturelle ou presque pour les

phases et par construction plus difficiles pour les rationalités. Ces transitions délicates justifient des effets de contrats afin de les gommer quand le professeur a le sentiment d'une impasse. Plusieurs types d'effets de contrat ont ainsi été définis. Si ces effets de contrat sont au niveau didactique, d'une certaine manière, nécessaires, ils sont également de nature à oblitérer une dimension essentielle liée à la transition. En effet, les raisons du changement de rationalité pour résoudre le problème mis à l'étude acquièrent avec ces effets de contrat une dimension plus didactique qu'épistémologique, ce qui modifie la nature des objets questionnés, puisque cette nature est justement déterminée par ces raisons. En d'autres termes l'objet est « didactisé », au lieu d'être « épistémologisé ».

Pour éviter cette forme de négociation à la baisse de la nature du savoir mais surtout des connaissances susceptibles d'être atteintes dans un situation adidactique, nous avons mis en évidence la correspondance et la complémentarité entre le modèle de rationalités et le modèle de structuration des milieux enrichis par Bloch et Gibel. Cette approche par les milieux et la rationalité devrait justement permettre d'améliorer significativement la conception des ingénieries didactiques Il s'agit de concevoir des situations didactiques à fort potentiel d'adidacticité. Cette synergie de ces deux niveaux de prise en compte (milieu et rationalité) laisse présager également de nouvelles possibilités pour les analyses a priori et a posteriori, en particulier d'identifier plus facilement certaines raisons possibles ou avérées de stagnation dans les situations.

Il est maintenant temps de revenir à notre projet initial, d'utiliser ce modèle pour une ingénierie de la limite, de le tester et de le critiquer le cas échéant. Pour cela nous commencerons, dans le chapitre suivant, par établir un modèle théorique qui prenne en compte les apports de ce modèle de rationalités. Nous verrons que la notion de transition de rationalité est de nature à apporter un nouvel éclairage sur certaines des difficultés d'utilisation de la Théorie des Situations Didactiques à des niveaux avancés d'enseignement (Lycée, début université). Nous verrons ainsi que la prise en compte du modèle de rationalités dans le cadre de la conception d'ingénieries didactiques au sein de la théorie des situations didactiques ouvre de nouvelles perspectives.

Parti donc du projet de reconsidérer l'hypothèse « d'actant rationnel » de Brousseau, nous avons défini un modèle de rationalités. Il s'agit maintenant de l'intégrer à une démarche globale au sein de la TSD qui vise à conserver le caractère adidactique des situations y compris pour les objets complexes enseignés en fin de secondaire et début de supérieur, en particulier pour la définition de la notion de limite.

Chapitre 4 – Une prise en compte du modèle des rationalités dans la TSD par le débat scientifique

Ce chapitre vise à étudier l'hypothèse de recherche H2 que nous rappelons ici :

H2 : Les adaptations de la TSD à la complexité des notions mathématiques avancées peuvent être prises en charge aux niveaux heuristiques du milieu des situations par le débat scientifique en classe. L'étude des transitions de rationalités permet, à son tour, de renforcer l'adidacticité des situations.

Nous commençons par rappeler les principes du débat scientifique en classe. Nous proposons ensuite des adaptations de la TSD pour les savoirs avancés avec notamment les notions de milieu subjectif et de métaphore fondamentale. Le débat scientifique constitue alors un modèle d'apprentissage prenant en compte ces adaptations. Le modèle de rationalités vient enfin compléter cette construction théorique au sein de la TSD en donnant un rôle fondamental à la notion de transition de rationalité. Ainsi un nouveau schéma d'analyse des situations verra le jour.

I Débat scientifique : Un centrage sur la problématique des rationalités

I.1 Généralité sur le débat scientifique en classe

Nous commençons par une brève description des principes de fonctionnement du débat scientifique, principes dont beaucoup sont issus de la TSD.

Le débat scientifique désigne le débat qui a lieu dans la communauté scientifique. Le « débat scientifique en classe » est caractérisé par la constitution de la classe en mini communauté scientifique qui se structure autour de débats conformes à ceux de la communauté scientifique. Mais soyons conscient que même si des principes sont, pour l'essentiel, similaires et comparables, il reste une différence fondamentale : dans la communauté scientifique, il n'y a pas de professeur qui connaît la réponse. Par souci d'allègement de l'écriture nous utiliserons le mot « le débat scientifique » pour désigner le mot « le débat scientifique en classe ».

Le débat scientifique mobilise les présentations du savoir dans lesquelles domine le principe cognitif constructiviste suivant :

- Tout ce qui est franchement nouveau, théorique et requiert un saut conceptuel n'est jamais d'abord présenté, montré, démontré, expliqué par le professeur seul mais est initialement abordé par les élèves/étudiants à partir de situations problématiques où ce qu'on veut enseigner de nouveau est indirectement (puisque les élèves ne le connaissent pas encore) abordé, mis en cause, bousculé, où le savoir nouveau apparait en creux car il fait défaut de façon criante.

Pour arriver à ce positionnement par rapport au savoir, les élèves étudiants sont donc invités à se faire une opinion propre sur la situation et sont placés en position d'auteurs de solutions : ils doivent faire des propositions qui généralisent le trop particulier, qui universalisent le trop conjoncturel (des conjectures) et ils doivent ensuite porter des jugements en termes de vérité et de pertinence sur ce qui a été proposé par leurs pairs.

- Dans ce principe constructiviste, on considère que la responsabilité intellectuelle que le professeur tend à dévoluer à ses interlocuteurs pendant son enseignement (en particulier en cours) est considérable : elle n'est absolument pas de « faire cours a sa place » (ce qui serait alors une utopie démagogique) mais de construire du sens et un sens pertinent de ce qui est enseigné. Pour cela les élèves doivent donc chercher à se faire une opinion propre autour de ce dont ce professeur veut les instruire, non pour l'inventer, le découvrir seuls mais pour entrer résolument dans une problématique ad hoc, car une fois dans cette problématique, il leur sera possible de donner véritablement sens au cours magistral qu'il leur sera fait in fine par ce professeur.

– Au lieu de dire immédiatement ce qu'il pense, de répondre lui-même aux questions qu'il pose, et d'indiquer ce qu'il faut faire face à un problème précis, le professeur qui adopte ce point de vue constructiviste suscite un questionnement de la part de ses élèves/étudiants qui va les obliger à prendre position en termes de vérité et de pertinence a plusieurs niveaux, en particulier :

- dans la confrontation du nouveau et de l'ancien, (pourquoi l'ancien ne suffit-il plus à lui seul pour avancer ici ?) ;

- en les invitant à faire des propositions de généralisation plausibles (conjectures) à partir de leurs idées/expériences personnelles ;

- en les incitant à fournir sinon des preuves tout au moins des explications rationnelles qui visent à éclairer leurs pairs et qui leur indiquent comment ils discernent personnellement le vrai du faux, le pertinent du hors-sujet.

Concrètement, le problème donné à résoudre aux élèves est souvent formulé sous forme de conjecture à résoudre (cette conjecture peut être aussi la proposition d'élève). Dans un premier temps les élèves se déterminent séparément sur la validité qu'ils accordent à cette conjecture, puis un vote est réalisé. Il ne s'agit pas, bien sûr, de déterminer démocratiquement la vérité mais de prendre un cliché des rapports de forces dans la classe : tout le monde doit savoir que les avis divergent (ou pas). Les votes peuvent être de trois types : Vrai, Faux ou Autre. Voter « Autre » signifie que l'on a des raisons valables pour choisir ce vote. Ce peut être que l'on pense la conjecture vraie et fausse à la fois, ou bien qu'on ne la pense ni vraie, ni fausse (ce qui devrait être le cas quand il manque des informations) ou bien que l'on ne comprenne pas la conjecture, et bien d'autres raisons. Le vote « Autre » garantit la possibilité de l'authenticité épistémique des votes Vrai et Faux, car il permet, lorsqu'on n'est pas fondamentalement convaincu, de l'exprimer ainsi. Dans un second temps le débat entre les élèves a lieu : il s'agit de rechercher collectivement la vérité et donc de confronter les différents avis et leurs raisons. L'élève ne doit pas chercher à avoir raison à tout prix mais à comprendre pourquoi il pourrait avoir tort/raison et pourquoi un pair, qui n'a pas le même avis, pourrait avoir tort/raison. Cette recherche est animée par le professeur qui reste neutre sur le fond du problème abordé mais qui, cependant, donne aux élèves les moyens de mettre eux-mêmes en exergue les contradictions qui apparaissent. Il structure le débat de manière à ce que les positions antagonistes soient perçues de tous. Il ne s'agit pas pour lui de laisser le débat se dérouler et suivre son propre cours mais de lui permettre de faire son office : qu'une prise de conscience collective émerge concernant la véritable nature du problème. Bien sûr, le chemin de cette prise de conscience est erratique et non linéaire, bien que de plus en plus directe, avec l'habitude des élèves. Les obstacles de nature épistémologique qui sont si souvent escamotés par un cours par ostension apparaissent

souvent avec force lorsque le professeur s'interdit de donner son avis immédiatement. Un débat ne débouche ni nécessairement sur une unanimité, ni même sur le savoir en jeu. Mais il devrait cependant, et c'est ainsi qu'on le qualifiera de réussi, déboucher sur la conscience du problème soulevé et sur un milieu qui, s'il n'est pas encore structuré en connaissances stabilisées totalement adéquates au savoir visé, contient une partie significative des expériences et connaissances qui justifient ce savoir et lui donne la possibilité d'être entendu pour ce qu'il est.

C'est à ce moment-là qu'intervient la phase d'institutionnalisation. Autrement dit le professeur, représentant de l'institution, donne le statut de savoir aux connaissances qui émergent du débat, reconnaissant ainsi que les vérités établies dans le groupe classe s'accordent (ou pas) avec celles de l'institution. Le travail du professeur, à ce moment-là, ne se limite pas seulement à donner une garantie institutionnelle. En effet, comme nous l'avons déjà signalé, le terme du débat est rarement celui du savoir sous sa forme achevée. C'est beaucoup plus celui d'un enchevêtrement de raisonnements qui contribuent tous à donner sens au savoir visé. Il s'agit maintenant de le structurer en un discours linéaire, logique et « dépoussiéré », que la classe peut reconnaître comme une mise en forme de ses propres idées, interrogations. Car cette filiation directe avec ce qui a été pensé et exprimé et qui apparaît maintenant dans une clarté nouvelle, celle d'un savoir dépersonnalisé et décontextualisé, est précisément ce qui est censé rendre ce savoir hautement signifiant pour la classe.

Un exemple va permettre de donner corps au fonctionnement du débat scientifique. Il s'agit d'un débat avec des doctorants scientifiques pour réinterroger la notion de définition à partir d'un questionnement lié à l'analyse.

I.2 Le débat scientifique à partir de l'exemple de la balle rebondissante

Nous proposons de détailler un exemple[48] de situation didactique de Lecorre (2016) réalisée sous forme de débat scientifique pour plusieurs raisons. Il s'agit en premier lieu de pouvoir concrétiser les mécanismes propres au débat scientifique. Puisque ce choix de situation, celle de la balle rebondissante, correspond à notre problématique globale sur la question de la limite et celle de la définition, il s'agit aussi de chercher à identifier comment jouent les aspects fondamentaux de ces notions dans la construction de la situation mais aussi dans le script des interventions des étudiants lors de l'expérimentation.

a) Description de la situation et début d'analyse

Il s'agit d'une situation didactique sous forme de débat scientifique conçue pour donner du sens à la notion de définition. Dans cette situation, une contradiction apparait comme liée à la prégnance de la signification du terme « s'arrêter » qui peut être interprété de plusieurs manières qui conduisent à des conclusions opposées. Evidemment si cette situation est prévue pour donner un sens à la notion de définition, elle questionne aussi les notions de limites, de modélisation et de choix de variables.

Le scénario est simple. Le professeur explique qu'on va discuter d'une balle rebondissante : il joint le geste à la parole en laissant tomber un ballon devant lui jusqu'à ce qu'il s'arrête de rebondir. Il précise immédiatement que la balle dont on va parler n'est pas celle-ci mais une balle

[48] Le script intégral correspondant à une expérimentation de cette situation se trouve en annexe.

très particulière qui *rebondit systématiquement* <u>*exactement*</u> *à la moitié de sa hauteur de chute* (et note cette phrase mot pour mot au tableau). Il produit le schéma suivant (figure 1).

Figure 16 : La balle rebondissante

Puis il demande : quand on lâche cette balle d'une hauteur non nulle, s'arrête-t-elle de rebondir ? Il laisse un peu de temps aux participants pour se faire une idée afin de répondre soit Oui, soit Non, soit Autre.

En général, les trois positions Oui, Non et Autre sont représentées avec une nette prédominance du Autre. Les arguments sont les suivants. Ceux qui ont voté Autre se demandent s'il s'agit d'une balle idéale ou pas. Pour eux, s'il s'agit d'une balle idéale, alors elle rebondit *exactement* à la moitié de la hauteur, et dans ce cas elle ne s'arrête pas car la hauteur à rebondir n'est jamais nulle. Tandis que si la balle n'est pas idéale, c'est une balle réelle alors dans ce cas elle s'arrête comme toutes les balles. En général ceux qui ont voté Non (elle ne s'arrête pas) interviennent pour expliquer qu'il s'agit bien d'une balle idéale puisque l'énoncé stipule que la balle rebondit *exactement* à la moitié de la hauteur de chute, et donc qu'elle ne s'arrête pas. Enfin ceux qui ont voté Oui (elle s'arrête) invoquent la plupart du temps leur propre expérience des balles rebondissantes. Mais parfois le Oui est défendu par un autre type d'argument. Ce type d'argument fait intervenir le temps qui n'est généralement pas apparu avant : les temps de chaque rebond sont de plus en plus petits et il se peut que ces temps soient suffisamment petits pour que leur somme soit finie. C'est le cas par exemple si le temps de chaque rebond est aussi divisé par deux à chaque rebond (série géométrique de raison 1/2 donc convergente). En général il est ajouté que rien n'est certain, il faudrait faire les calculs, mais qu'une telle possibilité ne peut pas être exclue. Ce dernier argument crée souvent du trouble et de l'incompréhension : comment une balle peut-elle s'arrêter de rebondir alors qu'elle rebondit une infinité de fois ?

A ce moment-là le professeur propose généralement de préciser le problème : se placer dans un modèle idéal et mathématique où la balle devient un point ayant la masse de la balle qui ne subit pas de frottement et qui a un mouvement rectiligne de hauteur chaque fois divisée *exactement* par deux. Il redemande aux participants de se positionner une ultime fois. La balle s'arrête de rebondir, Oui, Non, Autre ?

En général, à ce moment-là, c'est la position Non (elle ne s'arrête pas) qui est très majoritairement plébiscitée et le débat qui a lieu ne fait pas changer les avis. Le professeur clôt alors le temps du débat pour ouvrir celui d'une institutionnalisation qui va porter sur la notion d'obstacle épistémologique. Dans le cas de la balle rebondissante, cet obstacle n'est pas celui de savoir si l'on se situe ou pas dans le modèle, car une fois qu'on a décidé de travailler dans le modèle on

se trouve quand même devant un paradoxe. D'une part, si on compte les rebonds, il y en a nécessairement une infinité puisque la hauteur de rebond n'est jamais nulle, et donc d'une certaine manière on peut affirmer que la balle ne s'arrête pas de rebondir. D'autre part si on compte le temps passé à rebondir, celui-ci est la somme de tous les temps de rebonds. Ces rebonds ont une hauteur de plus en plus « petite », la vitesse également diminue, si bien que pour savoir comment se comporte le temps de rebond, il faut modéliser cette situation par les lois de la physique (cette mise en équation est donnée en annexe).

Mais avant de se lancer dans ce calcul, les mathématiques nous préviennent : on ne peut pas exclure qu'il s'agisse d'une série convergente et donc que la balle s'arrête de rebondir (au sens du temps). Ceci est d'ailleurs la conclusion de la modélisation standard de ce type de phénomène physique[49]. Pour sortir de cette impasse (la balle rebondit ou pas) il faut définir ce que signifie pour une balle « s'arrêter de rebondir ». Ceci est bien évidemment totalement contre-intuitif et lié aux paradoxes[50] créés par la rupture entre notre appréhension du réel et certaines de ses modélisations. Dans le « réel » (la « réalité ») on ne peut pas compter/réaliser une infinité d'événements dans un temps fini, et en conséquence il est inutile de distinguer le temps de rebond et le nombre de rebonds, si l'un est fini, l'autre l'est aussi. Mais le modèle du « réel » est ici celui des réels (**R**). Et dans l'ensemble des nombres réels, des sommes infinies de nombres positifs peuvent être finies et on peut compter/réaliser une infinité d'événements en un temps fini. Autrement il faut distinguer le temps de rebond et le nombre de rebonds car le premier peut être fini et le second infini. Ce que révèle cette expérience de la balle rebondissante est le fossé énorme qui existe entre, d'une part, notre appréhension immédiate des phénomènes dans un monde accessible par le fini et, d'autre part, ce que les ensembles infinis comme **N** et **R** nous laissent la possibilité d'envisager comme réalisation plausible. Ce fossé, qui peut être interprété en termes d'infini potentiel ou d'infini actuel (Gilbert et Rouche, 2001) et que le savoir que nous avons des séries convergentes et des réels ne comble pas forcément en situation, est d'une certaine manière la manifestation d'un obstacle épistémologique (Sierpinska, 1985). La description mathématique et les difficultés que les rebonds d'une balle font surgir du point de vue de la conception de l'infini sont décrites dans Gilbert et al (2001).

b) Etude a priori succincte

<u>Analyse didactique et épistémologique</u>

Nous distinguons ici deux niveaux d'analyse : le niveau didactique et le niveau épistémologique.

Au niveau didactique, nous observerons particulièrement comment se noue le contrat didactique. Il s'agit de conditions d'expérimentation un peu particulières dans la mesure où les participants sont des étudiants en troisième cycle ou de jeunes maîtres de conférences en science qui ne se connaissent pas forcément. Le professeur (l'auteur de la thèse) fait dévolution du problème mais également de la responsabilité scientifique : il engage les participants à exprimer

[49] Mais d'autres modélisations sont cependant a priori possibles, par exemple il est possible d'imaginer que le « choc » du rebond prenne un temps incompressible non nul et dans ce cas la série aurait pour limite l'infini.

[50] Cette situation correspond en fait à l'un des paradoxes de Zénon d'Elée.

leurs opinions sincères. Etablir un tel contrat dans lequel chacun s'autorise à dire ce qu'il pense au risque de se tromper, au risque de pouvoir paraître ridicule dans une assemblée, certes jeune, mais composée de spécialistes des mathématiques, est essentiel pour le fonctionnement du débat. Si cette obligation de nouer un contrat qui délie les langues est capitale, il est nécessaire que le rapport entre les participants évolue au point qu'ils puissent s'apostropher, s'interpeller, se contredire. Sans cela on risque de voir apparaître une juxtaposition de prises de positions sans interaction et le débat risque d'être pauvre. En termes didactique, puisque le milieu est ici constitué des interventions au sujet du problème, ce milieu doit être l'affaire de chacun, notion de responsabilité individuelle scientifique, et surtout doit être partagé collectivement, il y a là une nécessité d'objectivisation collective du milieu. On observera donc particulièrement d'une part les gestes du professeur qui favorisent ce contrat didactique et la constitution du milieu, autrement la nature de l'interaction entre les participants.

Au plan épistémologique, nous distinguons trois plans d'accès au phénomène en jeu du rebond d'une balle : le plan de la réalité pragmatique, le plan de la physique, le plan des mathématiques. Nous étudions pour chacun des plans ce qu'il comporte comme éléments et étudions les rapports possibles de ces différents plans.

Le plan de la réalité pragmatique. Dans le réel les balles lâchées finissent par s'arrêter, plus exactement on n'est pas capable de voir si elles continuent de rebondir de manière microscopique ou si elles sont stables, mais dans ce cas on les considère comme au repos. Dans le réel il n'existe pas de balle rebondissant éternellement, ce qui signifie que son temps de rebond est fini. On peut d'ailleurs sans grande difficulté compter le nombre de rebond avec une petite marge d'erreur due aux faibles rebonds difficiles à compter. Le nombre de rebond est donc manifestement fini.

Pour ce qui est de la situation de la balle rebondissante, on peut s'attendre à ce que cette réalité pragmatique soit invoquée comme une forme de recours ultime à la rationalité. En dehors de tout calcul on peut savoir ce que fait une balle qui rebondit : elle s'arrête ! S'arrêter, ici, ne distingue pas le temps de rebond et le nombre de rebonds, ils sont tous les deux finis. On peut s'attendre à un contre-argument à l'invocation du réel modélisé fidèlement par la physique : une balle dans la réalité ne rebondit pas systématiquement exactement à la moitié de sa hauteur de chute. En effet, une balle qui rebondit exactement à la moitié de sa hauteur de chute, peut-elle être vraiment réelle ?

Le plan de la physique. Sur ce plan, les lois et la prise en compte des différents paramètres impliqués (lois de la gravité, friction avec l'air, choc (in)élastique…) sont sensés rendre compte de la réalité pragmatique au travers de modèles dans lesquels on réalise des calculs, on résout des équations. Puisqu'on œuvre dans un modèle il ne s'agit pas de la réalité mais le modèle physique à vocation à être cohérent avec la réalité.

Dans le cas de la balle rebondissante on peut s'attendre à ce que soit invoqué ce modèle de la physique, qui prenant en compte tous les paramètres nécessaires, va permettre de « calquer » la réalité pragmatique. Or la réalité pragmatique est claire à ce sujet-là, comme nous l'avons vu : la balle s'arrête. Remarquons qu'avec un tel raisonnement, la physique « colle » à la réalité, on s'absout de tout calcul : les équations de la physique n'ont pas à être mobilisées, le réel semble accessible, on connait leurs résultats. Ce cheminement, le phénomène est traité par la physique

donc conforme au réel, prive a priori d'une réflexion sur les variables prises en compte, temps ou distance, puisque justement le réel empêche d'imaginer que les comportements des deux peuvent être asymptotiquement distincts. Le même contre-argument peut être opposé : la balle étudiée, dans la mesure où elle rebondit exactement à la moitié de sa hauteur de chute, peut-elle être modélisée de manière à correspondre au réel, ou bien cette contrainte est de nature à remettre en cause le lien physique-réalité ?

Le plan des mathématiques. Sur ce plan on s'occupe d'abord de résoudre des équations et le réel ne guide pas ce travail. Les résultats seront évidemment comparés à ce réel mais s'ils ne correspondent pas à ceux des calculs, on mettra en cause la modélisation, les hypothèses, et pas les mathématiques (une fois les calculs vérifiés). Autrement dit il y a une forme d'indépendance entre réalité et mathématiques. Cette indépendance peut aider à identifier les variables en jeu, temps, distance, ou encore nombre de rebonds, car le réel est moins aveuglant. En fait ces variables sont en réalité des fonctions ou des suites. Prenons la hauteur de rebond par exemple : elle varie en fonction d'autres variables. De quelle variable dépend-t-elle ? A priori elle dépend assez naturellement du nombre de rebonds. On la notera (h(n)) où n désigne le nombre de rebonds déjà effectués. Mais on pourrait aussi l'envisager comme une fonction du temps, on la noterait h(t). Cela est moins naturel dans la mesure où la hauteur de rebond est définie par le nombre de rebonds en premier lieu. L'analyse mathématique pour chacune de ces fonctions est la suivante :

- La hauteur de rebond en fonction du nombre de rebonds est modélisée par la suite (h(n)) où n est le nombre de rebonds. On a $h(n)=h_0\ 0{,}5^n$ où h_0 est la hauteur initiale. Cette suite est géométrique, décroissante et a pour limite zéro. Cette limite peut être interprétée faussement comme un indice du fait que la balle s'arrête dans une conception de l'infini actuel.

- Le temps de rebond en fonction du nombre de rebonds est a priori donné par la somme des temps de chaque rebond. En utilisant les lois de la gravité, on peut calculer le temps t_1 de chute qui est indépendant de la hauteur du rebond suivant. Reste à calculer alors le temps de remontée. Par le principe de conservation de l'énergie, ce temps t_2 est égal au temps de chute de la même hauteur (la moitié de la précédente). On fait la somme de ces temps de rebond et on obtient (voir annexe pour détail) que T(n) est la somme d'une suite géométrique t_n de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ où h_0 est la hauteur de chute initiale et g la constante de gravité. C'est donc une suite convergente et c'est la limite de cette suite qui donne le temps total de rebond ($T_{total} = \frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$). A priori cette réponse est non intuitive et les calculs nécessitent des connaissances en physique. Cependant en raisonnant simplement on peut avoir l'idée, sans calcul, du fait que le temps de rebond total est une somme des temps de rebonds et que cette somme infinie peut être évidemment divergente mais surtout aussi convergente. C'est justement cette convergence possible qui est contre-intuitive sur le plan du réel : comment peut-on rebondir une infinité de fois en temps fini ?

Le nombre de rebonds peut être pris comme une variable, ce qui revient à dire implicitement que l'on dispose d'un moyen de compter les rebonds, dans ce cas on voit que le nombre de rebond total est infini puisque la hauteur du nième rebond n'est jamais nulle.

Le nombre de rebonds peut aussi être envisagé selon la variable temps. La fonction est alors une fonction définie sur l'intervalle $[0 ;T_{total}]$ et constante par morceaux sur les intervalles $[t_i ;t_{i+1}[$. Sa limite à droite lorsque t tend vers T_{total} est infinie.

- On pourrait exprimer aussi la hauteur de la balle en fonction du temps, et dans ce cas-là il s'agirait d'une forme d'oscillations amorties et la fonction deviendrait nulle à partir de T_{total}.

Nous pensons que cette situation est de nature à provoquer l'utilisation de ces fonctions de manière explicite ou bien implicite. Pour l'analyse a priori nous pourrons nous appuyer sur cette analyse en termes de fonctions pour identifier les conceptions à l'œuvre.

<u>Etude de la situation en termes de limites.</u>

Nous prendrons ici les trois suites suivantes (h(n)) et (t(n)) et (n). Nous prendrons aussi les deux définitions raisonnables[51] suivantes :

Définition1 : la balle s'arrête si le temps de rebond total est fini.

Définition 2 : la balle s'arrête si le nombre de rebonds est fini.

Pour la suite (n) où n est le nombre de rebonds, la limite de la suite (n) quand n tend vers l'infini est l'infini. Cela suffit pour dire qu'au sens de définition2, la balle ne s'arrête pas. Mais au sens de la définition 1, avec cette seule limite on ne peut pas conclure.

Pour la suite (h(n)), la limite de la suite (h(n)) lorsque n tend vers l'infini est zéro. Cela ne signifie pas que la balle s'arrête ni au sens de la définition1, par exemple si les temps de rebonds sont constants indépendamment de la hauteur, ni au sens de la définition2.

Pour la suite (t(n)), la limite de (t(n)) lorsque n tend vers l'infini est $\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ qui est un nombre fini. Cela permet de conclure que le temps de rebond est fini, donc que la balle s'arrête au sens de la définition1.

On remarquera que pour ces différentes fonctions on peut tirer des conclusions ou pas selon les limites. Le temps de rebond total est une limite et seule la suite du temps de rebond peut avoir une limite qui permet de conclure au sens de la définition1. Et seule la suite du nombre de rebonds peut avoir une limite qui permette de conclure au sens de la définition2. Il y a donc une certaine indépendance entre le temps et le nombre de rebonds, l'un pourrait être fini et l'autre pas ou bien tous les deux infinis, ou bien tous les deux finis. Mais cette indépendance n'est pas totale puisque si le nombre de rebonds est fini nécessairement le temps aussi (à moins d'admettre le temps d'un seul rebond comme infini). C'est la croyance en une totale dépendance (qui existe dans le réel) qui peut amener à penser implicitement les deux définitions équivalentes.

[51] Au sens où elles ne heurtent pas l'intuition

Etude de la situation en termes de situation pour la définition.

Il y a, selon nous, au moins trois types de situations sur la définition :

- Les situations (notons Sd1) de construction de la notion définition. L'exemple du travail fait par Ouvrier-Buffet (2003) sur les Situations de Construction de Définitions (SCD) illustre parfaitement ces propos. En effet, l'objectif initial de cette recherche était de concevoir les éléments d'une situation fondamentale de la définition. Cependant, comme précisé par l'auteur :

> Nous avons montré que les Situations de Construction de Définitions de type CLASSIFICATION sont facilement dévoluables, telle la situation « Arbre ». Dans les autres types de situation, la dévolution dépend de la demande explicite de définition, mais pas seulement. (Ouvrier-Buffet, 2003 p. 305)

  Les situations de classification (Aristote) sont facilement dévoluables, tandis que les autres types de situations de définition, départager les théories (Popper) et démontrer un théorème (Lakatos) le sont bien moins.

- Les situations (notons Sd2) qui génèrent le besoin de la notion de définition. Ce sont les situations qui conduisent à une contradiction qui est identifiée comme provoquée par le manque de définition. Ces situations sont a priori plus faciles que Sd1 à construire dans la mesure où l'on n'attend pas que l'élève définisse.

- Les situations (notons Sd3) qui donnent un sens fondamental à la notion de définition. Ce sont les situations qui conduisent à une contradiction mais où l'on ne peut pas soupçonner que cela provient d'emblée d'un manque de définition partagée. Il est possible alors d'institutionnaliser ; le professeur, dans ce cas, résout la contradiction, montrant ainsi le rôle d'une définition pour les mathématiques. Ces situations-là sont également plus facile à construire pour les mêmes raisons que Sd2.

Pour ce qui est de notre situation de la balle rebondissante, il s'agit d'une situation de type Sd3. Ici les deux façons de tenter de répondre, l'une en modélisant par le nombre de rebonds et l'autre par le temps de rebond conduit à la contradiction suivante : dans un cas la balle ne s'arrête pas et dans l'autre, elle s'arrête. Comme on peut faire l'hypothèse qu'un tel conflit ne peut pas être résolu par les étudiants, on peut s'attendre à ce que ce soit l'institutionnalisation qui pointe cette nécessité de définir et qui montre comment elle résout « simplement » la contradiction. Mais il se pourrait cependant qu'elle soit résolue par les étudiants, c'est-à-dire que soit identifié qu'il y a un problème de définition, réalisant ainsi une transition de rationalité.

On remarquera, à ce sujet, que le fait qu'un étudiant dise que le nombre de rebonds est infini donc que la balle ne s'arrête pas, ne peut pas, dans ces conditions, constituer un indice suffisant pour catégoriser cet argument en rationalité théorique. En effet s'il existe une contradiction avec l'autre position, la balle ne s'arrête pas, et que cet étudiant n'invoque pas explicitement la question de la définition, alors il y a tout lieu de penser qu'il n'associe pas la résolution du conflit au rôle de la définition, donc qu'il ne se situe pas en rationalité théorique.

Nous tenons ici à faire remarquer qu'un travail similaire à celui réalisé sur la définition, en termes de lien entre cette notion et celle de transition de rationalité, aurait pu aussi être mené pour la notion de limite. Or nous focalisons notre analyse surtout sur la notion de définition

pour éviter les surcharges d'un exemple avant tout destiné à montrer les mécanismes du débat scientifique.

En conclusion de cette analyse a priori, nous allons focaliser notre attention sur le rôle des plans didactiques (interaction, niveau de responsabilité, dévolution), épistémologiques (réalité, physique, mathématique) mais aussi sur le rôle de la limite et de la notion de définition.

c) Eléments d'analyse a posteriori

L'étude de la réalisation effective en s'appuyant sur les critères mis à jour dans l'analyse a priori, va permettre en particulier de mieux cerner le fonctionnement du débat scientifique, ainsi que ses mécanismes.

Au niveau didactique, nous allons analyser les mécanismes de dévolution du professeur ainsi que la nature des interactions qui se produisent. :

Le professeur commence par expliquer les règles de travail dans le cadre du débat scientifique :

- Se fonder une thèse sur la question posée ;
- La partager et la défendre en public ;
- Accepter de s'en dessaisir le cas échéant ;
- Se sentir responsable du débat collectif ce qui suppose de participer à la confrontation des idées.

Les interventions du professeur visent à structurer le groupe autours d'une recherche commune. Il appelle à la responsabilité de chacun de donner son avis, y compris dans une confrontation des idées. Il fait appel à chacun pour poursuivre « l'utopie de la recherche collective de vérité » : « Et je pose la question : la recherche de la vérité n'est-ce pas précisément notre utopie ? Moi je pars de l'hypothèse qu'on est là collectivement pour essayer de vivre cette utopie, on cherche la vérité... ». Il s'agit maintenant de vérifier si cette « utopie » s'actualise véritablement dans les échanges.

Lorsque le premier vote est proposé, il s'avère que les étudiants se rebiffent et ne votent pas :

> [>R1] : repose la question [s'adressant au professeur] parce que...ils attendaient de voir ...
>
> [>Le professeur] : Ah ils attendaient de voir qui allait voter comme eux pour voter...Classique...
>
> [>R2] : Ils attendaient de voir ce que j'allais voter parce que.... (Rires)
>
> [>R3] : J'aurais besoin de préciser la question. J'ai besoin de savoir si c'est cette balle...mettons que cette balle s'arrête exactement à la moitié...
>
> [>Le professeur] : Si tu as des questions… libre à toi d'avoir des questions...simplement toutes les questions que vous posez...vous pouvez répondre Oui Non Autre et Autre c'est une situation où on peut dire "moi tant que je n'ai pas de réponse à cette question précise, je ne peux pas répondre à la question". C'est le sens du Autre qui est là. Et ensuite dans le débat vous exposerez vos questions, les raisons pour lesquelles vous votez Autre.

Ce premier extrait montre que l'on n'est pas à, ce stade, encore dans un contrat du débat scientifique. Les étudiants n'ont manifestement pas assez d'éléments pour statuer. Or ce que suppose une attitude scientifique, dans ces conditions, c'est beaucoup plus exprimer l'impossibilité de statuer, que de demander une autre règle du jeu. Les questions sans réponse, à l'école, n'étant

pas habituelles, il est logique que l'on ne vote pas immédiatement Autre et que l'on demande des informations supplémentaires pour conclure véritablement ; puisque Autre ne peut alors être considéré comme une conclusion. Ce petit épisode, semble révélateur du rapport initial au savoir dans le groupe. Cependant, le professeur renvoie la discussion au débat qui va avoir lieu et propose de voter Autre pour ceux qui n'ont pas assez d'informations. Ceci est donc vécu comme une rupture de contrat : non seulement le professeur pose des questions incomplètes, mais en plus il ne répond pas directement à la demande d'information supplémentaire. Un vote a finalement lieu, six étudiants pensent que la balle s'arrête, six pensent qu'elle ne s'arrête pas et onze votent Autre.

Le débat commence par R3 qui a voté Autre et qui distingue balle de la réalité physique et balle idéale. Le professeur reprend les arguments de R3 et demande au groupe si certains ont voté Autre pour la même raison. Les onze Autre se déclarent avoir voté Autre pour cette raison. On peut penser que cet effet de regroupement du professeur est dicté par l'efficacité, ne pas avoir à entendre plusieurs fois le même argument. Il est, en tout cas, cohérent avec la déclaration initiale de recherche collective de la vérité : si chacun se fonde un avis personnel, ces avis au sein du collectif sont souvent partagés.

R4 intervient pour dire que son vote Autre est motivé par une Autre raison. Selon R4, le rayon de la balle est de nature à modifier la réponse, s'il est nul la balle s'arrête sinon elle ne s'arrête pas. Le professeur répète les arguments de R4 et les note au tableau de manière identique à l'intervention de R3. Or la question du rayon n'est pas véritablement pertinente ici, et apparaît comme telle au groupe ; elle sera reprise plus tard. Nous pensons que cet épisode peut être décisif dans la dévolution d'une responsabilité intellectuelle. Une réponse manifestement non pertinente est traitée de manière totalement identique à n'importe quelle Autre. Cela signifie que le professeur signifie clairement, mais sans avoir besoin de le dire, que non seulement tous les arguments auront le droit de citer, mais également qu'il ne faut plus compter sur lui pour démêler le Vrai du Faux.

On remarque une cohérence globale qui se dégage dans le renvoi systématique de responsabilité. Ceci est aussi perceptible dans les interventions du professeur qui consiste souvent à reprendre les arguments sans les modifier, en les présentant systématiquement comme : « tu dis que », exemple :

> [>Le professeur] : Oui alors tu dis ça dépend de ça. C'est pour cela que tu te mets dans Autre. Est-ce que tu pourrais être plus précise...Si c'était une balle idéale tu dirais quoi ?

Et à la fois cette neutralité et cette progressive dévolution ont des effets : on commence à voir apparaître, non des réponses à la question posée, mais des interventions mettant en cause des arguments précédemment donné. Par exemple, à propos de l'argument du rayon :

> [>R1] : Et par rapport à l'argument de R4 ce qui est dessiné, les schémas, il montre que ce qui est diminué de moitié c'est la distance entre le sol et le bas de la balle...

Et l'on voit que la possibilité de se tromper est intégrée comme condition du débat et que règne un climat qui l'autorise, quand on voit apparaître les interventions pour changer d'avis et revenir sur d'anciennes positions tenues. Par exemple R4 qui répond à R1 :

> [>R4] : Ouais ouais...Je suis d'accord...parce que moi dans ma tête ce n'était pas rapport au milieu...

C’est justement à partir de là que les interactions deviennent plus autonomes, le professeur ne constitue plus le relai obligé, on commence à s’interpeler directement. Par exemple :

> [>R1] : Donc pour moi c'est vraiment, on lâche cette balle qui est une balle qui est une balle idéale et ce qui fait moitié à chaque fois c'est la distance entre le sol et le bas de cette balle et moitié ça tend vers zéro mais ça ne fait jamais...
>
> [>R5] : Oui mais il a montré une balle physique...
>
> [>R1] : Oui mais il a dit ce n’est pas cette balle...

R5 s’interroge sur le rôle du ballon initialement lâché par le professeur et apostrophe R1 à ce sujet, tandis que R8, s’adressant au professeur, le met en cause dans le « trouble » qu’il ainsi crée :

> [>R8] : Si tu veux tu as lancé le débat de deux façons : tu nous mets un texte affiché et en même temps tu nous fais une simulation avec la balle. (Rires) C'est toi qui l'a créé le trouble...
>
> [>Le professeur] : Ah tu dis que le professeur crée des troubles...

On peut penser que R8 attend un éclaircissement sur ce point, mais c’est encore un renvoi de responsabilité de la part du professeur : « tu dis que… ».

Globalement on assiste tout au long du débat à une progressive prise de responsabilité qui se traduit par une utilisation de plus en plus fréquente du « je » qui exprime la prise en charge, au niveau personnel, des affirmations énoncées. En découpant le débat de quinze minutes en tranches de trois minutes, on voit que durant les trois premières minutes le terme « je » n’est employé que cinq fois par les participants puis pendant les trois minutes suivantes huit fois, puis treize fois. Il y a ensuite un creux avec quatre fois, puis enfin quinze fois. On remarque aussi que cette progressive montée en puissance du niveau individuel de prise en charge des assertions est doublée d’une même progression des interactions directes.

Pour conclure, on remarque que les interventions du professeur sont très neutres mais engagent les participants et leur renvoie systématiquement la responsabilité non seulement de leurs propres assertions mais aussi de celles des autres. On remarque que parallèlement se développent des interventions assumées, et des interactions directes de plus en plus nombreuses. On peut alors se demander si cette élévation du niveau d’interaction va de pair avec une élévation de la profondeur épistémologique du débat. Cela va être maintenant discuté :

Au niveau épistémologique, on sera amené à distinguer les arguments selon les différents plans mobilisés (réalité pragmatique, physique, mathématiques) et à observer leurs relations, nous étudierons aussi le rôle donné à la limite et à la notion de définition.

Dès la première intervention, la question du modèle intervient et ce sur les trois plans. Mais R3 n’est pas claire sur la distinction entre réalité et réalité physique si bien que lorsque R2 propose de rajouter « physique » au terme que R3 vient de proposer, R3 reprend cette proposition.

> [>R3] : Ça dépend si la balle est une balle idéale ou bien une balle de la réalité...
>
> [>R2] : Physique…
>
> [>Le professeur] : Physique ?
>
> [>R3] : Qui est physique et sujette... assujetties aux lois... à la friction de l'air...et tout ça.
>
> [>Le professeur] : Oui alors tu dis ça dépend de ça. C'est pour cela que tu te mets dans Autre. Est-ce que tu pourrais être plus précise...Si c'était une balle idéale tu dirais quoi ?

[>R3] : ça ne s'arrêtera pas.

[>Le professeur] : Dans ce cas-là ça ne s'arrêtera pas...dans ce cas ça serait oui...Euh, non ça ne s'arrête pas : Non. Et dans l'autre cas, ça serait ?

[>R3] : Ça serait Oui elle va s'arrêter.

Comme dans l'analyse a priori, on remarque que le plan physique est associé à la réalité pragmatique. Ces plans ne sont d'ailleurs pas évidents à différencier dans les interventions. Ici il n'est pas clair si l'emploi du terme physique pour qualifier la réalité, renvoie à la physique comme discipline ou bien à la réalité matérielle. Dans la mesure où le terme est associé à des lois nous faisons l'hypothèse première : la physique comme discipline. Pour le plan physique la conclusion est que la balle s'arrête et cela sans aucun calcul, tandis que pour le plan mathématique, « la balle idéale », elle ne s'arrête pas, cela ne peut provenir que du calcul de la hauteur non nulle, mais cette justification reste implicite à ce stade. Un peu plus tard, R3 va sentir la nécessité de préciser :

[>R3] : Moi j'entendais par balle idéale, c'est à dire si on est dans une situation purement théorique, c'est à dire que chaque fois ça rebondit de la moitié comme c'est marqué au tableau. Mais qu'on étudie pas du tout effectivement la résistance de l'air...C'était ça pour moi la balle idéale, c'était la situation théorique...J'ai marqué ça rebondit chaque fois de la moitié donc ça ne s'arrête jamais.

[>Le professeur] : idéale c'est en fait ça rebondit exactement égal à un demi.

[>R3] : Voilà c'est ça...Mais si c'est une vraie balle...

On perçoit mieux la confusion entre ce que R3 appelait réalité physique soumise aux lois et « une vraie balle ». La réalité physique est soumise aux lois dans le modèle de la physique. Aucune « vraie balle » ne s'est jamais soumise ou assujettie aux lois pour tomber, elle tombe objectivement et les lois décrivent sa chute dans un modèle, celui de la physique.

R1 va trancher en ajoutant que le « exactement » ne laisse aucun doute sur le choix de la situation théorique, nous dirons que R1 mobilise un plan mathématique :

[>R1] : Ben moi je pense que la réponse à la question : est-ce qu'on est dans le cas d'une balle idéale, on l'a en fait. Parce que qu'une balle qui rebondit à une hauteur exactement...Je trouve que le exactement est un indice du fait que l'on est dans une situation théorique idéale et cetera...

[>Le professeur] : Exactement, pour toi, ...

[>R1] : Donc pour moi c'est vraiment, on lâche cette balle qui est une balle idéale et ce qui fait moitié à chaque fois c'est la distance entre le sol et le bas de cette balle et moitié ça tend vers zéro mais ça ne fait jamais...

[>R5] : Oui mais il a montré une balle physique...

[>R1] : Oui mais il a dit ce n'est pas cette balle...

[>R1] : Du coup la réponse est non. Du coup la distance sol-bas de la balle diminue à chaque fois donc on a la distance qui tend vers zéro mais qui ne fait jamais zéro à chaque fois.

La limite intervient ici pour montrer que la fonction hauteur a beau avoir une limite nulle, elle n'est jamais nulle. On remarquera que la variable n'étant pas désignée ; le temps ou le nombre de rebonds mais celle-ci est implicitement désignée (« chaque ») ; la phrase a un statut ambigu, dans mesure ou pour la variable temps, l'assertion est fausse (h(t) finit par s'annuler), tandis que pour la variable nombre de rebonds elle est vraie (h(n) ne s'annule pas). Ce que montre cette analyse c'est que le langage naturel, qu'on utilise pour faire sens, est source d'ambiguïté

et peut conduire, dans certains cas, celui de la limite par exemple, à ne pas distinguer un processus et sa limite. Dans notre cas, c'est le fait de ne pas différencier de ne pas identifier la variable, temps ou nombre de rebond, qui conduit des confusions possibles.

Justement une intervention va faire intervenir la variable temps qui jusque-là était restée non désignée comme pertinente.

> [>R6] : C'est que ça dépend du temps...parce ce que ce qu'on a c'est des considérations de distances...Mais ça dépend du temps de rebond...et en fait si…En fait c'est parce qu'on en a parlé avec R2 et du coup ça a fait son chemin...Parce que si le temps est proportionnel à la distance...Finalement dans un temps fini...Si on considère que l'infini actuel est réalisé, on dit que oui ça s'arrête. Mais là on n'a pas le temps.
>
> [>Le professeur] : Donc tu es dans Autre...et qu'est-ce qui t'embête finalement ?
>
> [>R6] : On ne sait pas...On n'a pas de considération sur le temps donc on ne peut pas répondre sur le temps parce qu'on demande quand !
>
> [>Le professeur] : D'accord, tu dis que la question c'est quand, donc le temps. Et comme on n'a pas de considération sur le temps...
>
> [>R6] : On ne sait pas combien de temps ça met à rebondir...

On remarque que cette intervention, bien que désignant l'essentiel du problème (le temps total de rebond comme variable pertinente) est encore hésitante. Il n'y a pas d'intention ni de définir, ni d'indiquer que le problème vient d'un problème de définition. R6 identifie qu'il y a bien une question d'infini (actuel ou non), c'est-à-dire un problème de limite. Mais manifestement R6 ne dispose pas des connaissances physiques qui lui permettraient de conclure véritablement, ni de la conscience que le problème peut être traité comme un problème de définition. Les interventions suivantes ignorent cet argument concernant le temps. Par exemple, l'intervention suivante, de R7, justifie la position elle ne s'arrête pas.

> [>R7] : Ah non moi j'ai répondu par rapport à la formulation de la question. C'est par rapport à mes conceptions si la balle...je sais que la balle va s'arrêter...Si je tiens compte de mon expérience personnelle je sais que la balle va s'arrêter. Mais eu égard à la formulation de la question, la balle, elle ne s'arrêtera pas.

Ici ce qui est opposé est clairement le plan de la réalité pragmatique (« mon expérience ») et celui de « la formulation », expression qui peut être interprétée comme le modèle mathématique de la hauteur en fonction du nombre de rebond. L'intervention sur le temps n'a pas été décisive pour ouvrir immédiatement d'autres perspectives. L'intervention suivante ignore également le temps mais témoigne d'une plus grande confusion car les plans de la réalité et la physique sont clairement identifiés (« voir cette balle » = réalité pragmatique) et il y a une sorte de difficulté à se positionner : les maths ou la physique.

> [>R9] : Moi j'aimerai bien la voir cette balle qui fait ça, parce que je n'ai pas assez de connaissance en physique, non ce n'est pas possible qu'elle puisse faire ça...il y a quand même...il me manque des connaissances en physique là...
>
> [>Le professeur] : Toi tu as voté quoi ?
>
> [>R9] : Ben moi j'ai voté Autre d'un point de vue matheux je dis ben oui on prend des moitiés de moitié de moitié...Mais on n'est pas en maths on est en physique. Et là ça m'enquiquine !

Le débat dérive vers le doute concernant la nature exacte du problème : un problème de définition commence à être perçu. R1 qui avait commencé avec assurance commence à se questionner :

> [>R1] : Non mais c'était un peu là-dessus, moi j'ai un souci avec le mot distance, parce qu'en fait...parce que un demi, un demi, un demi, ça ne fait jamais zéro donc du coup si je mesure...enfin mathématiquement...J'ai une mesure qui ne fait jamais zéro...mais je ne sais pas si j'ai une mesure qui ne fait jamais zéro...Je ne sais pas si on mesure physiquement je ne sais pas si on est dans les mesures aussi idéales que le sont les mesures mathématiques. Et donc quand je dis la distance elle ne sera jamais nulle...La hauteur, toi tu as dit la hauteur, du coup c'était bien...Mais je dis du coup la distance elle diminue de moitié à chaque fois mais justement à un moment il y a un passage...Alors moi je l'ai résolu en disant on est dans une situation idéale donc voilà…donc voilà toute la question elle est là. Tous ces mots qui sont peut-être ambiguës.

R1 identifie les contradictions comme relevant d'un problème d'ambigüité sur les mots, donc R1 annonce les prémisses d'une transition vers une rationalité théorique.

R10 fait le point sur le débat, et explique que tout le monde s'accorde sur le fait que suivant réalité physique ou modèle mathématique, la balle s'arrête ou pas. R10 ajoute que seul l'argument du temps semble contradictoire.

> [>R10] : Je voulais juste dire que dire jusqu'ici j'ai l'impression qu'on était tous d'accord sur la distinction entre le modèle mathématique et la réalité physique et on a peu près tous dit que dans le modèle mathématique ça ne s'arrête pas et que dans le modèle physique ça s'arrête...Sauf sur le modèle idéal celui de R7 avec le temps...

Quatre étudiants qui n'ont pas encore expliqué pourquoi, selon eux, la balle s'arrête. L'un deux, R11 le justifie à l'aide de la réalité pragmatique :

> [>R11] : Moi j'ai voté Oui parce que si le fait vraiment alors on verra que la balle s'arrête. J'en suis sûre.

Enfin ceux qui ont voté oui s'expriment. Et ils expriment que leur expérience commune des balles leur fait penser qu'une balle lâchée ainsi s'arrête. C'est alors que R2 propose de prendre en compte véritablement le temps.

> [>R2] : Moi j'ai voté oui mais je n'ai pas eu le temps de faire les calculs pour savoir si j'aurai voté non. Mais ce que je me dis c'est autant on est capable de dire si dans le modèle théorique si les rebonds sont de la moitié du précédent alors théoriquement on a toujours un nombre qui est un demi du précédent et là dans les réels on n'aura pas de problème à avoir une suite qui est comme ça...
>
> [>R7] : Oui c'est ça donc ça fait une demi puissance n fois h la hauteur initiale.
>
> [>R2] : Oui mais ce que je dis c'est qu'il y a infinité de rebonds, ça ne me dit pas que ça va rebondir pendant une infinité de temps, parce que je sais que je peux additionner une infinité d'intervalle de temps, si ces intervalles de temps sont deux fois plus petits que le précédent, je sais qu'il y a un temps que je ne vais jamais dépasser, et peut-être qu'elle va rebondir une infinité de fois dans un laps de temps fini...théoriquement...dans le modèle théorique...
>
> [>R7] : Absolument...
>
> [>R2] : Même si je sais qu'en pratique ce n'est pas ce qui se passera parce que je sais parce que je sais qu'une balle ne peut pas...
>
> [>Le professeur] : Toi tu dis qu'il peut y avoir une infinité de rebonds dans un temps fini...
>
> [>R2] : Je dis que ce n'est pas qu'une question de modèle, parce que dans le modèle peut-être qu'elle s'arrête de rebondir parce que il y a un temps t après lequel elle n'est plus en train de

rebondir puisque le temps pendant lequel elle rebondit s'arrête.

[>Le professeur] : Oui donc une infinité de rebonds dans un temps fini.

[>R2] : Oui voilà. Mais ce que je dis c'est que ce n'est pas une question d'être dans le pratique par rapport au théorique...Là c'est bien une réponse dans le théorique, là c'est dans le modèle.

[>Le professeur] : Oui là c'est dans le modèle.

R2 dans cette longue intervention résout la totalité du problème : il explique et reprend l'argument du temps en montrant par les séries qu'il pourrait y avoir convergence, autrement dit ce n'est pas seulement un problème de « réalité/idéalité » … Mais R12 ne saisit pas la nature de cette convergence …

[>R12] : Le temps peut avoir une limite ?? C'est à dire ne pas dépasser une certaine valeur mais continuer à croitre tout le temps ??? Non ? Je ne suis pas certaine de bien comprendre : le temps peut ne pas dépasser une certaine valeur mais ça peut quand même toujours augmenter ?

[>R2] : Non mais le temps pendant lequel elle rebondit pourrait s'arrêter, même si pendant ce temps-là elle aurait rebondi une infinité de fois.

[>R12] : Pourquoi il s'arrêterait ?

[>R2] : Alors ce que je dis c'est que c'est le même argument que celui de la hauteur mais avec le nombre de rebonds. J'ai le même argument sur les intervalles de temps que je mets bouts à bout. Le premier met une seconde, le deuxième une demie seconde...

[>R4] : Pourquoi ?

[>R2] : C'est une hypothèse. C'est une hypothèse mais comme on n'a pas d'information je dis dans ce cas-là ça se pourrait qu'elle s'arrête...une seconde plus une demie plus un quart...

[>R12] : Dans ce cas-là ça ne dépassera pas deux secondes mais la quantité de temps ça va continuer à augmenter...

[>R2] : Mais après deux secondes il n'y a plus de rebonds donc...Après deux secondes elle s'est arrêtée.

[>R12] : Oui mais ça continue...

[>R2] : C'est mon hypothèse...

R12 ne semble pas comprendre pourquoi le temps s'arrête. Nous formulons une hypothèse sur une confusion qui a lieu ici entre le temps de rebond qui est une suite indicée sur le nombre de rebonds, et la variable temps, celle de l'horloge, qui est une variable réelle. La variable temps augmente et dépasse n'importe quelle valeur, tandis que la suite du temps de rebond est croissante et majorée. Le temps « ne s'arrête » pas, c'est le temps de rebond qui « s'arrête ». Cette confusion en encore liée à un problème de définition lié au temps. L'échange final suivant, montre que malgré les explications données par R2, le fait de ne pas définir laisse un flou :

[>R1] : Du coup tout le ...c'est des jeux sur les termes, parce que moi l'ambiguïté elle est sûr de s'arrêter parce que ce que tu dis c'est que quelque part elle ne s'arrête jamais de rebondir mais à un moment elle a arrêté de rebondir.

[>R2] : Voilà.

[>R7] : C'est ça qui est exceptionnel...

[>R1] : Alors moi je ne sais pas comment c'est possible... (Rires)

[>R7] : La balle va s'arrêter...

[>R1] : De fait à un moment la balle a arrêté...

[>R2] : Je n'ai pas dit que j'étais complètement cohérent... (Rires)

[>R7] : Tu fais l'hypothèse que la balle s'arrête...

De fait ce flou persiste même lorsque le professeur décide d'achever cette discussion en se plaçant dans le cadre « idéal », la balle est un point, il n'y a pas de frottement avec l'air…un vote est à nouveau organisé et un seul étudiant pense maintenant que la balle s'arrête, dix-sept pensent qu'elle ne s'arrête pas et seulement trois étudiants se placent dans Autre.

Ce vote signifie que la discussion et les arguments de R2 n'ont pas convaincus. Hors débat, R2 avouera qu'il n'était, lui-même, effectivement pas absolument certain de son raisonnement... On voit là, y compris à des niveaux très élevés une illustration du phénomène général suivant : un argument donné par un pair, quand bien même pertinent, n'a pas la même portée que le même argument donné par le professeur. C'est cela qui, dans le débat scientifique entre pair, autorise qu'on se conteste, que l'on cherche à convaincre et à être convaincu. On ne fait pas de cadeaux aux pairs alors qu'à contrario on accepterait bien davantage les arguments, y compris ceux qui ne sont pas perçus comme convainquants, quand ce sont ceux du professeur.

En conclusion, on peut constater dans cet exemple une progressive libération de la parole conjointe aux avancées épistémologiques. Si l'essentiel des difficultés sont alors abordées, voir résolues, on peut aussi constater que ces solutions ne sont pas collectivement adoptées, en partie car la question de la définition n'est pas apparue. Dans une situation classique de la TSD, on pourrait conclure à une impasse de la situation qui ne génère pas la réponse optimale. Cependant le débat scientifique mise sur un autre ressort cognitif. Le travail réalisé a permis de faire le tour de l'ensemble des difficultés et la définition va pouvoir apparaître, dans le discours du professeur faisant une institutionnalisation, comme la solution tant espérée d'un problème dont chacun a pu saisir la portée en expérimentant ses propres solutions vainement. Nous allons justement préciser ces ressorts dans la partie suivante, la notion de milieu subjectif et la notion de métaphore fondamentale.

I.3 Des adaptations de la TSD prises en charge par le débat scientifique

Dans cette partie nous commençons par mettre en évidence le besoin d'adapter le cadre de la TSD aux notions complexes comme peuvent l'être celles qui sont enseignées à l'université, la définition de limite étant un exemple paradigmatique. Ces adaptations répondent à des contraintes rencontrées, décrites dans González-Martín, Bloch, Durand-Guerrier et Maschietto (2014), pour utiliser la TSD à des niveaux universitaires et pour des notions complexes. Ces contraintes sont liées à la constitution différente du milieu à ces niveaux d'enseignement (due au niveau d'abstraction et de la complexité des signes en jeu), et à la prise en compte de la relativité inévitable de l'adidacticité (dû à l'apport incontournable du professeur pour s'assurer de l'avancement dans la situation). Artigue (2014) souligne ces distinctions de constitution des milieux à ces niveaux d'enseignement et de la relativité de l'adidacticité, relativité qu'elle traduit par une vision trop restrictive de la notion de situation fondamentale, en particulier pour traiter le cas difficile des concepts FUG[52]:

[52] FUG = Formalisateur, Unificateur, Généralisateur. De tels concepts permettent d'unifier des problèmes issus de domaines mathématiques différents en donnant une formalisation de sorte que ces concepts peuvent se géné-

> My feeling in the light of the evolution of TDS is that the difficulty met with FUGS concepts results more from a restrictive vision of TDS and of the idea of Fundamental situation than from its essence. Regarding the first argument, I agree that the ingredients of the milieu change when the level of schooling increases/…/ (Artigue 2014 p. 136)

Nous proposons les concepts de métaphore fondamentale et de milieu subjectif comme adaptations essentielles pour préserver, autant que possible, le caractère adidactique des situations didactiques à ce type de notions complexes.

Dans le cadre de la TSD, le débat scientifique s'avère prendre en charge ces deux adaptations. Nous utilisons la situation de la balle rebondissante afin d'illustrer ces adaptations.

a) Situation fondamentale versus Métaphore fondamentale

La notion de métaphore fondamentale est introduite par Margolinas (1993) puis reprise et interprétée par Legrand (1997) pour déterminer les conditions d'usage de la notion de situation fondamentale dans le cadre du débat scientifique.

La situation fondamentale est caractérisée par trois conditions qui la régissent :

- Une situation fondamentale doit ainsi faire intervenir le savoir comme solution optimale et exclusive d'un problème.
- Elle doit identifier les variables didactiques qui ont un rôle sur le changement du statut cognitif des connaissances en jeu.
- Et enfin, la situation doit engendrer l'ensemble des significations du savoir visé.

Ces conditions s'avèrent délicates à vérifier, encore plus simultanément, et particulièrement la dernière. En effet sur le seul plan théorique, les savoirs désignés comme FUG interrogent l'hypothèse : « à tout savoir correspond une situation fondamentale » dans la mesure où un tel savoir émerge historiquement d'un croisement de problématiques très distinctes initialement et qui trouvent là une unité (Le U d'unificateur). Engendrer cette signification unificatrice d'un savoir FUG via une situation fondamentale reste difficilement surmontable. Or, toute restriction ferait que la situation fondamentale finalement construite à propos d'un tel savoir ne pourrait posséder le caractère universel qu'on voudrait lui prêter selon les fondations théoriques de la TSD.

Malgré une telle prévention, Legrand défend la thèse paradoxale suivante :

> Même lorsqu'on ne trouve aucune situation vérifiant strictement les trois conditions fondamentales de G. Brousseau et que cela parait illusoire d'espérer y parvenir dans les conditions actuelles d'enseignement, la problématique de recherche des situations fondamentales demeure consistante pour la recherche en didactique comme pour l'enseignement. (Legrand 1997 p. 233)

Legrand justifie cette position par :

> La recherche de situation fondamentale nous conduit à trouver les moyens effectifs pour que les principaux obstacles puissent être abordés dans la classe et y être travaillés suffisamment longtemps pour que s'amorcent conceptualisation et prise de sens et que néanmoins le cours

raliser et répondre à d'autres problèmes. On utilise aussi le terme FUGS, avec S pour Simplificateur. Un tel concept simplifie certains problèmes, mais cette simplification n'est accessible qu'à ceux qui ont la maîtrise du concept.

avance. (Legrand 1997 p. 234)

Autrement dit la situation fondamentale est une construction nécessaire au respect de l'essence du savoir, elle fonde ses raisons d'être propres, et permet ainsi de guider et délimiter les conditions de conception des situations didactiques. Or c'est justement cette fermeture ad hoc de la situation fondamentale qui est ici interrogée ; le recours à la notion de métaphore fondamentale permet de la doter d'un degré vital de liberté. Plus précisément, la recherche d'une situation fondamentale devient le cadre dans lequel on va déterminer des moyens effectifs d'accès au savoir, moyens que Legrand nomme métaphore fondamentale. Cette métaphore induit une forme de centration sur un aspect particulier mais fondateur de la situation fondamentale. Cela se traduit par une certaine atténuation des conditions caractérisant la situation fondamentale. Il s'agit de déterminer parmi les significations du savoir visé, qui justement engendrent la situation fondamentale qui en relève, celles qui constituent une clef d'accès à ce savoir. La situation n'aboutirait forcément pas à une conceptualisation « exhaustive » de ce savoir, l'idée est de faire en sorte à rendre accessible ce savoir en mettant en exergue ses principaux obstacles. La métaphore fondamentale est fondamentale parce qu'elle déverrouille l'accès au savoir au niveau épistémologique, elle est métaphore car sans le décrire intégralement elle préserve l'essence de ce savoir.

Dans le cas de la situation de la balle rebondissante, les éléments d'étude a priori et a posteriori permettent de revisiter les principales caractéristiques de ce qui a été retenu comme fondamental pour la notion de définition. Dans cette situation, l'objectif n'est pas que les élèves trouvent seuls la solution au problème qui leur est posé ; à savoir définir s'arrêter ; l'objectif de la situation expérimentale est de créer les conditions d'appropriation du problème de la balle, en particulier via l'émergence de conflits cognitifs, de sorte que le discours du professeur sur la définition va apparaître comme la solution des contradictions rencontrées, solution qu'on ne soupçonnait pas. C'est ainsi que la définition devrait prendre sens dans son rôle spécifique. Le discours aurait pour objectif de faire prendre conscience que l'acte de définir est un préalable à toute communication rationnelle. Sur le moyen et long terme, cette situation est utilisée aussi pour faire prendre conscience durablement de l'impossibilité d'accéder à un niveau de compréhension des problèmes qui conduise à leur résolution si cette notion de définition n'est pas mobilisée explicitement. Cette situation fait donc non seulement émerger le besoin de définir le sens des mots, même élémentaires, mais souligne aussi l'importance d'être explicite lorsqu'on définit : un problème n'a pas une solution en soit, mais une solution qui dépend totalement des choix de définition du problème. Du point de vue de la situation fondamentale, la notion de définition se constitue au niveau d'au moins trois significations : définir pour classifier (Aristote), définir pour départager les théories (Popper), définir pour prouver et concstruire des concepts (Lakatos). La métaphore fondamentale utilisée pour concevoir la situation de la balle rebondissante se concentre essentiellement sur l'une des facettes de la notion de définir : définir pour départager des théories. En effet définir « s'arrêter » suppose un acte de modélisation qui permet de comprendre qu'on a deux modèles en présence et que bien que leurs conclusions soient contradictoires, aucun des deux n'est incorrect. Dans un prolongement de la situation qui n'est pas prévu ici on pourrait se demander comment retenir un modèle plutôt qu'un autre ; la cohérence avec le « réel » (la « vraie » balle !) sera alors certainement invoqué. On remarque que les raisonnements tenus supposent des définitions implicites de « s'arrêter » pour

prouver (le temps ou le nombre de rebonds) et pour classifier (s'arrête ou pas), mais ce ne sont pas ces facettes qui sont spécifiquement questionnées par la situation. Problématiser prioritairement le piège de l'évidence a priori du sens des mots, dès lors que l'on veut modéliser une situation à plusieurs par les moyens de la raison, est fondamental car ceci conditionne les usages et mobilisations ultérieurs de la notion de définition. C'est aussi métaphorique car cela touche à l'essence de la notion de définition sans pour autant contenir toutes les autres significations. Ces autres significations sont à la fois compatibles avec la situation (on prouve, on classifie) et ne sont que provisoirement et partiellement hors du jeu fondamental.

Notons ici que le débat scientifique articulé par une métaphore fondamentale, niveau d'analyse qui nous suffit pour nos travaux, a évolué ultérieurement vers le concept de débat pré-cognitif (ou débat préparatoire), détaillé dans Charlot (2015).

b) La notion de milieu subjectif

Dans la perspective d'assurer l'adidacticité des situations didactiques, il nous est apparu nécessaire d'adjoindre à cette première adaptation, une seconde adaptation, le milieu subjectif, pour prendre en compte la nature particulière des rétroactions dans le cas des notions complexes qui sont enseignées au lycée comme à l'université.

Dans la TSD, l'activité de l'élève repose sur la présence d'un milieu matériel (M-3) qui représente les données du problème et son caractère quasi concret dans le sens que ses manifestations sont incontestables et partageables immédiatement (on gagne ou on perd à un jeu, on réussit ou non à paver un quadrillage avec certaines pièces, un résultat obtenu est conforme ou pas aux données du problème…). Brousseau définit le milieu objectif ainsi :

> L'élève considère comme milieu objectif l'ensemble des objets et relations qui ne dépendent ni de ses actions et connaissances, ni de celles du professeur. Ce milieu peut être lui-même structuré comme une situation non didactique avec des actants objectifs et des milieux en interactions. (Brousseau, 1997, p. 21)

Ce milieu est celui dans lequel les rétroactions vont se produire (M-2) lorsque l'élève va confronter ses heuristiques, essais et tentatives au milieu matériel. Dans la TSD, ces rétroactions constituant des réponses claires et objectivables, car elles ne se prêtent pas à des interprétations, servent de moteur à l'activité et son contrôle. C'est précisément la possibilité des rétroactions rendues possibles par le milieu matériel qui permet de donner son caractère adidactique à la situation, le professeur n'étant plus le référent de la (in)validation des assertions.

Or de telles rétroactions directes assurées par le milieu matériel sont beaucoup plus difficiles à réaliser pour des notions plus complexes et plus abstraites. En effet, le niveau matériel, seul susceptible de renvoyer des rétroactions objectives, c'est-à-dire qui ne donnent pas lieu à des interprétations, ne peut plus jouer ce rôle du fait même de la complexité des notions en jeu. En effet il est beaucoup plus difficile de constituer un milieu matériel antagoniste pour les notions complexes que pour celles enseignées en primaire. Bloch présente les mêmes conclusions pour le cas spécifique des concepts de fonction ou de limite :

> En l'absence d'une situation fondamentale pour introduire les concepts de fonction ou de limite, nous sommes conduits nécessairement à considérer des situations qui, tout en portant une partie du savoir, par exemple ce qui est nécessaire pour la dévolution des problèmes d'analyse, ne comportent pas un milieu suffisamment résistant pour qu'il soit possible de compter seulement

> sur les rétroactions qu'il fournit pour engager le processus de formulation et de validation.(Bloch, 1999, p. 138)

Les rétroactions du milieu matériel comportent alors une part d'interprétation, et deviennent ainsi subjectives. Il parait alors beaucoup plus adapté de parler de milieu subjectif que de milieu objectif (nous n'opposons pas les deux dénominations mais justifions le nouveau choix en termes de nature des rétroactions) afin de prendre en compte cette transformation substantielle de la nature des rétroactions possibles. La question se pose alors naturellement de savoir comment un tel milieu subjectif peut jouer le rôle du milieu objectif en termes de structuration de l'activité, et de contrôle. C'est ce que nous proposons dans la partie suivante.

c) Prise en charge de ces adaptations par le débat scientifique

Dans le cadre de la TSD, le débat scientifique prend en charge ces deux adaptations. En particulier, la notion de métaphore fondamentale a déjà été abordée par(Legrand, 1997). Pour ce qui est du milieu subjectif, nous proposons ici de détailler comment, dans le cadre d'un débat scientifique, ce milieu permet de déboucher sur les formulations et les validations prévues.

Le débat scientifique provoque et organise la confrontation de positions opposées sur le même sujet. Ce débat entre pairs à propos d'assertions contradictoires (ou non) est de nature à faire apparaître la nécessité de résoudre ces contradictions. Comme pour le milieu objectif, il y a bien possibilité d'action (autorisée par le milieu matériel) et de rétroactions (les avis des pairs), mais ces rétroactions ne sont pas nécessairement objectives, elles sont le fruit d'interprétation (par l'émetteur comme le récepteur). Il y a aussi évolution vers un milieu de la validation (pour la formulation elle commence dès le milieu subjectif) lorsqu'on cherche à résoudre les contradictions. Evidemment la substitution d'un milieu subjectif à un milieu matériel suppose de substituer dans le milieu subjectif la forme de dureté du milieu matériel qui oblige à prendre en compte toutes formes de rétroactions. Cette dureté sans laquelle les contradictions risquent d'être ignorées, prend sa source dans le milieu subjectif, non plus dans l'aspect incontestable et en même temps inévitable du milieu matériel mais dans la présence d'une culture de la non contradiction. Et cette culture est essentielle pour assurer les potentialités d'un milieu subjectif à évoluer vers un milieu de formulation et de validation : si cette culture est insuffisante, il faut l'installer. Enfin, la qualité des interactions détermine dans une grande part l'objectivisation progressive du milieu, voilà pourquoi le débat scientifique suppose une attention particulière à ces interactions, à la dévolution du problème et son partage collectif. Voilà pourquoi l'animation du professeur pour créer ces conditions d'échange et ces rétroactions entre pairs détermine l'efficacité du dispositif, c'est-à-dire son niveau d'adidacticité. Evidemment, la qualité également de la situation, problématique ou pas, joue aussi un rôle fondamental pour susciter des positions contraires qui s'affrontent sur les questions dont le savoir visé constitue une clef de résolution.

La situation de la balle rebondissante illustre très bien cette notion de milieu subjectif. On peut voir que le milieu matériel dans cette situation est constitué d'un énoncé décrivant comment la balle rebondit, une illustration de cet énoncé précisant ce que signifie rebondir de la moitié de la hauteur, et enfin une question : la balle s'arrête-t-elle ou pas ? Un tel milieu n'est pas a priori susceptible, comme il devrait l'être dans la TSD, de fournir des rétroactions objectives. Comme

nous l'avons vu, le milieu qui se constitue dans l'interaction des étudiants dépend de leurs interprétations du problème. Et comme nous l'avons vu ce sont ces interprétations, qui se discutent et se contredisent, qui manifestent le milieu subjectif. L'expérimentation a montré que la non contradiction est clairement installée et ne nécessite aucun travail préalable : les intervenants sont des doctorants en science. On voit bien également que ce milieu subjectif est très dépendant de la qualité de l'échange qui a lieu et donc de la capacité du professeur à susciter et encadrer un tel échange. Ce rôle du professeur a été souligné dans l'analyse a priori de la situation.

II La notion de transition de rationalités pour l'adidacticité

Nous avons vu précédemment que le débat scientifique tient compte des adaptations que nous avons soulignées comme pertinentes lorsque l'on s'intéresse à des notions mathématiques avancées. Dans cet ordre d'idée, si les interactions en jeu produisent des rétroactions de nature à questionner les connaissances en jeu, le professeur va pouvoir s'exonérer des effets de contrat de rationalité, au contraire si ces interactions restent « pauvres » le professeur sera contraint d'intervenir, et cela probablement au niveau des transitions de rationalités. Or un apport essentiel du modèle des rationalités consiste à déterminer ces transitions. Comment se réalisent-elles ? A la charge de qui sont-elles ? Quels sont les éléments du milieu prévus pour dévoluer ces transitions ? Mais aussi comment les conflits cognitifs prévus jouent-ils un rôle dans ces transitions (conflits inter-intra rationalité) ? Ce questionnement des transitions de rationalité est de nature à occuper une place significative dans l'élaboration d'ingénieries didactique dans la mesure où, comme nous l'avons précisé plus haut, les réponses vont commander la constitution du milieu et conférer à la situation un fort potentiel adidactique (ou non). A côté de la correspondance biunivoque entre modèle des rationalités et modèle des milieux, et ce dans le cadre des acceptions originaires des situations dans la TSD, le modèle des rationalités permet de plus d'analyser ce que pourrait apporter les situations jouées dans le cadre des modifications retenues et prises en charge par le débat scientifique.

II.1 Différence entre niveaux de rationalités et phases de raisonnements

Dans les fondements de la TSD, le passage d'un milieu à l'autre au niveau adidactique est naturel et constitutif même de la notion de milieu. Le milieu objectif est le lieu de l'action où émergent des stratégies de résolution sous forme de modèles implicites. La solidité de ces modèles implicites est éprouvée dans l'action, et c'est naturellement qu'ils sont alors formulés par les élèves dans le milieu de référence, lieu de la formulation et de la validation. Ces modèles se confrontent, ce qui donne lieu à des réfutations, partie essentielle de la validation, à des tentatives de preuves et de démonstrations. Les milieux sont présentés comme une forme de continuum (non forcément linéaire puisque des allers retours sont possibles) et Brousseau (1986), souligne la « complémentarité inter-niveaux » en ces termes :

> Les différents niveaux du milieu s'appuient les uns sur les autres lors du traitement cognitif d'un concept mathématique. Cet appui se manifeste par des relations de nécessité structurelle et de complémentarité et par des relations temporelles de succession et de production : une situation produit les éléments de la suivante. (Brousseau, 1986, p. 64)

L'adidacticité de la situation est donc en partie garantie par ce passage spontané d'un milieu à un autre, passage spontané lui-même assuré par la robustesse de la situation fondamentale (ainsi

que des choix, qui en découlent, des variables didactiques et de leurs valeurs). Cette conception initiale de la TSD qui a été pensée dans le cadre des connaissances et savoirs en jeu à ce niveau-là du primaire, n'avait pas semblé justifier, au moment de la conception de la théorie, qu'on problématise systématiquement le passage d'un milieu à l'autre.

Cependant, lorsque des adaptations sont nécessaires pour utiliser la TSD dans des contextes d'enseignement de niveau supérieur (lycée et université par exemple), ces changements de milieux retiennent l'attention dans la mesure où, compte tenu de la nouvelle complexité des savoirs en jeu, ils ne se produisent plus aussi facilement (Cf. citation de Bloch (1999) dans I.3.b), et peuvent être alors de la responsabilité du professeur : "Dans ces conditions, les connaissances et les savoirs nécessaires à ce processus seront obligatoirement introduits, à un moment donné, par le professeur."(Bloch, 1999, p.138). Ceci implique d'estimer la nécessité de telles interventions :

> L'analyse de la situation par la structuration du milieu permet de dire quels sont les savoirs et les connaissances susceptibles d'être activées ; de juger de l'opportunité et du coût d'un changement de niveau de justification, de prévoir les régulations du professeur… (Bloch, 2005, p. 57)

Ainsi ces « changements de niveaux de justifications », que nous désignons sous l'appellation « transition de rationalités », sont identifiés et laissés à la charge des « régulations de l'enseignant » suivant leur « coût ». La question soulevée de ce coût montre que le passage d'un milieu à l'autre n'est plus envisagé comme naturel à ce niveau d'enseignement. Le modèle de la structuration des milieux est utilisé par Bloch et Gibel (2005) pour analyser les raisonnements d'élèves. Nous parlons de phase de raisonnement lorsqu'un raisonnement s'enchaine naturellement selon plusieurs phases. Nous appelons transition de niveaux de rationalité, cette transition lorsqu'elle est envisagée comme possiblement résistante, et cela notamment pour les objets de savoir complexes. Nous remarquons que cette idée de la transition ou bien du « coût » éventuel « du changement de niveau de justification » n'apparait pas dans le tableau de structuration des milieux pour l'analyse des raisonnements dans Bloch et Gibel (2005). Ceci est cohérent avec le choix de focaliser l'analyse, suivant ce tableau, essentiellement sur des schémas et des indicateurs de l'activité de l'élève, et en même temps de déléguer au professeur la possibilité de la régulation de ces transitions.

En conclusion, dans les conditions optimales des situations de la TSD, le modèle des rationalités permet déjà d'étudier ces transitions que le modèle des milieux peut paraître considérer comme relativement spontanées (phases de raisonnement) en raison de la solidité de la situation fondamentale. Le modèle des rationalités permet en outre d'étudier ces transitions lorsque ces conditions optimales ne sont pas réunies, en particulier pour les notions avancées où l'on introduit les adaptations nécessaires à la TSD.

II.2 Les transitions de rationalités pour préserver l'adidacticité

L'usage du modèle des rationalités va permettre de mieux prendre en compte, en amont, certaines causes de résistance dans les situations didactiques, en particulier les transitions de rationalités difficiles qui obligent des ruptures d'adidacticité qui sont de nature à fragiliser ces situations. Parallèlement les analyses de la contingence prenant en compte cette dimension de la rationalité devraient également permettre d'étudier sous un jour nouveau les raisons de ces résistances.

Dans cette partie nous explicitons en particulier le rôle majeur de l'étude des niveaux et des transitions de rationalités dans l'analyse a priori et dans l'analyse de la contingence.

a) Rôle de la transition de rationalité vis-à-vis des adaptations de la TSD

Pour les notions avancées enseignées en fin de secondaire et au lycée, nous avons été amenés à proposer les notions de métaphore fondamentale et de milieu subjectif pour rendre possible la conception de situations adidactiques. Nous avons déjà évoqué le fait qu'un milieu subjectif, milieu découlant d'une métaphore fondamentale, ne peut produire à lui seul les rétroactions susceptibles de provoquer des modifications de connaissances substantielles. Il faut adjoindre à l'étude des divers niveaux de milieux, une analyse de la rationalité en jeu de nature à ce que les rétroactions subjectives soient prises en compte et provoquent des conflits cognitifs. Ces conflits cognitifs qui ont pour but de mener à des réarrangements et transformations de connaissances supposent une prise en compte a priori d'abord de la rationalité disponible pour les faire émerger, mais aussi des transitions de rationalités possibles et nécessaires à les résoudre. Ce nouvel éclairage des situations didactiques devrait renforcer le potentiel adidactique des situations conçues en prenant en compte ce modèle de rationalités.

Prendre en compte ce modèle suppose d'identifier :

- Les objets et outils potentiellement en jeu sur le plan mathématique.
- La nature des objets aux différents niveaux de rationalité.
- Les conflits intra-rationalités possibles ou prévus, lorsque le même objet peut donner lieu à des interprétations contradictoires dans la même rationalité, du fait par exemple de représentations sémiotiques non congruentes.
- Les conflits inter-rationalités possibles ou prévus, lorsque le même objet donne lieu à des interprétations contradictoires dans des rationalités de niveaux différents, par exemple quand un objet est appréhendé de manière intuitive (rationalité pragmatique) ou bien par sa définition (rationalité théorique).
- Les éléments de rationalités nécessaires pour résoudre ces conflits.

Dans le cadre d'un projet global de situations visant un objet mathématique spécifique, il est nécessaire de vérifier que les éléments de rationalités essentiels sont disponibles, et prévoir des situations correspondantes en cas de besoin. Ces situations didactiques particulières portent sur des objets méta-mathématiques ou plus précisément sur des connaissances d'ordre 2 (notion de définition, notion de démonstration, notion de vérité et validité en logique), et visent à installer les éléments de rationalité indispensables pour permettre que le milieu subjectif puisse jouer son rôle, par rapport à l'objet mathématique visé, et que les transitions de rationalités puissent être effectuées. Nous appelons ces situations préalables à tout projet à moyen et long terme d'activité mathématique rationnelle, les situations d'initialisation. Pris dans ce contexte, la situation de la balle rebondissante devient un exemple emblématique d'une telle situation puisqu'elle a pour objectif d'instaurer un nouveau rapport à la notion de définition. Ainsi la notion de définition est ici elle-même l'objet visé par cette situation. On voit bien que, même à

des niveaux avancés, de telles situations peuvent être nécessaires. Nous utiliserons des situations d'initialisation dans notre ingénierie de la limite pour des connaissances d'ordre 2 nécessaires.

b) Un réassemblage action-formulation et formulation-validation

Nous avons déjà avancé la notion de *milieu subjectif* pour prendre en compte le caractère nécessairement subjectif du milieu lorsque les rétroactions proviennent d'interprétations du milieu matériel pouvant conduire à des conflits cognitifs. Ce milieu subjectif est formé conjointement d'actions et de formulations.

Les conflits apparus dans le milieu subjectif sont tentés d'être résolus, voire le sont, dans le milieu de référence à travers des validations selon des formulations. Pour la balle rebondissante, on voit bien, par exemple, que lorsque la variable temps est évoquée pour la première fois, un conflit apparait et la validation joue un rôle beaucoup plus important. Il ne s'agit plus seulement, à ce moment-là, de soutenir des positions éventuellement argumentées mais de confronter les argumentations soutenant ces positions. On est là entré dans un milieu de la validation. Dans ce milieu, du fait de l'adaptation de la notion de situation fondamentale par une métaphore fondamentale, on ne va pas forcément jusqu'au savoir visé. Mais les connaissances mises en œuvre, les tentatives réalisées pour lever les conflits, ainsi que les validations imaginées et proposées sont de nature à rendre accessible maintenant le savoir visé par la situation (soit la notion de définition). On pourra dire que les objectifs de ce milieu sont atteints lorsque la signification principale choisie pour la savoir visé (notion de métaphore fondamentale) aura été suffisamment problématisé pour pouvoir passer au milieu suivant.

Le milieu de l'institutionnalisation est celui dans lequel le professeur réorganise les connaissances mises à jour, les décontextualise pour mettre en exergue le savoir en jeu dans la situation. Dans ce milieu, le professeur peut s'appuyer sur la consistance des milieux précédents pour établir l'évidence entre la signification principale du savoir qu'il propose et les conflits apparus que cette signification du savoir résout. Mais ce milieu peut être aussi investi par les élèves quand ceux-ci parviennent à mobiliser des éléments théoriques de manière à résoudre le problème, autrement dit quand ils devancent l'institutionnalisation du professeur.

Dans le cas de la balle rebondissante, on voit bien que le débat a fait apparaître le conflit sur l'arrêt de la balle avec suffisamment de force et a été discuté suffisamment longtemps, tous les arguments attendus ont été donnés, pour que le professeur puisse, par son institutionnalisation, mettre en évidence la pertinence de la notion de définition comme notion qui permet de totalement résoudre le conflit apparu, conflit insoluble sans elle. Toutefois les élèves auraient pu eux-même définir « s'arrêter » et investir ainsi le milieu de l'institutionnalisation habituellement réservé au professeur.

Nous appellerons *milieux régulés*, les milieux définis ci-dessus prenant en compte les adaptations de la TSD liées à la complexité des notion abordées, afin de les distinguer des milieux habituels de la TSD.

c) *Transitions de rationalités intra et inter milieux*

Dans cette partie, nous abordons le rapport des milieux et des transitions de rationalités. Nous avons décrit précédemment la correspondance étroite entre les différents types de rationalités et les niveaux de milieux lorsqu'on se place dans les conditions optimales théoriques de la TSD, en particulier lors du déroulement linéaire théorique d'une situation didactique reposant sur une analyse de type situation fondamentale. Or nous avons modifié ces conditions optimales, dans le sens d'un assouplissement, pour tenir compte de la spécificité de la nature du savoir en jeu. Ces modifications conduisent à réexaminer cette correspondance.

Pour étudier cette correspondance, nous proposons d'effectuer un exemple d'analyse a priori selon les niveaux de milieux régulés en prenant en compte les niveaux et transitions de rationalités.

Pour cela, nous utilisons la situation de la balle rebondissante qui a pour objet la notion de définition, plus particulièrement la définition pour modéliser. Rappelons que la métaphore utilisée pour la situation correspond à l'acte de définir pour départager des théories concernant le mouvement d'une balle. Chacun pense savoir ce que signifie « s'arrêter » et il ne vient à l'idée de personne de définir une telle évidence, or dans notre cas plusieurs théories aux résultats contradictoires s'affrontent selon la signification donnée à s'arrêter. La notion visée par la situation est donc celle de définition, et la notion dans laquelle elle s'actualise est celle de définir « s'arrêter ».

Voici quelque uns des différentes positions et différents arguments, qui peuvent être tenus, rangés par niveaux de rationalités par rapport à l'objet visé :

Au niveau de la rationalité pragmatique.

A1 : La balle s'arrête car on la voit s'arrêter (définition en acte).

Au niveau de la rationalité empirique

A2 : Toutes les balles finissent par s'arrêter (propriété en acte).

A3 : La balle ne s'arrête pas car la hauteur de rebond n'est jamais nulle (propriété reposant sur une définition implicite).

A4 : La balle s'arrête car le temps de rebond est fini (propriété reposant sur une définition implicite).

Au niveau de rationalité théorique

A5 : Avec la définition du nombre de rebonds la balle ne s'arrête pas (zéro-définition).

A6 : Avec la définition du temps de rebond, la balle s'arrête (zéro-définition).

Remarquons que les positions A1 et A5 sont contradictoires, pour l'une la balle s'arrête, pour l'autre elle ne s'arrête pas. Quand deux individus tiennent chacun l'une de ces positions en y croyant fermement, il se produit un conflit socio-cognitif : les deux affrontent des idées contradictoires. Il est d'ailleurs possible aussi que ces deux positions soient tenues par la même per-

sonne, dans ce cas on parlera de conflit cognitif. Quand ces deux individus finissent par s'écouter vraiment alors ils ne peuvent plus évacuer aussi facilement la position de l'autre, position qu'ils finissent par intérioriser. Dans ce cas ils expérimentent un conflit cognitif : pour eux, la balle a simultanément des raisons de s'arrêter et des raisons de ne pas s'arrêter. Si ce conflit cognitif est pour eux insupportable parce qu'ils donnent de l'importance à la question, ils vont chercher à comprendre d'où provient cette contradiction et à la résoudre en mobilisant leur rationalité. Ce conflit cognitif qu'ils éprouvent est source alors d'une dynamique de rationalité. Dès lors nous abordons la notion de conflit cognitif à travers le point de vue de la rationalité, ceci donnant lieu à la notion de conflit de rationalité. Pour le cas de la balle rebondissante, nous allons étudier les conflits de rationalités possibles et les transitions de rationalités susceptibles de les résoudre selon deux catégories les conflits inter-rationalités et les conflits intra-rationalités :

Conflits inter-rationalités

Conflit 1 : A1 et A3 sont contradictoires : la transition de rationalité TR1 peut être motivée par l'impossibilité de trouver dans le « réel » une balle rebondissant toujours exactement à la moitié de la hauteur.

Conflit 2 : A3 et A6 sont contradictoires : : la transition de rationalité TR2 peut être motivée par une demande de définition de A6.

Conflit 3 : A4 et A5 : idem que conflit 2. (TR3)

Conflits intra-rationalités

Conflit 4 : A2 et A3 sont contradictoires et peut être résolu par un argument motivé par l'impossibilité de trouver dans le « réel » une balle rebondissant toujours exactement à la moitié de la hauteur.

Conflit 5 : A3 et A4 sont contradictoires : la transition de rationalité TR4 peut être motivé par la résolution de ce conflit insoluble sans définition.

Non conflit entre A5 et A6, car bien que les conclusions diffèrent, les prémisses étant différentes, en rationalité théoriques il n'y a pas de contradiction, seulement des théories concurrentes. La contradiction initiale n'a plus de sens.

Remarquons maintenant que, pour la situation de la balle rebondissante, les transitions de rationalités correspondent à des changements de milieux pour la signification retenue de l'objet visé par cette situation. Ceci est un fait général qui coïncide avec l'analyse selon les conditions optimales de la TSD puisque la situation repose sur une signification fondamentale de l'objet visé. Cette métaphore qui en découle se comporte comme la situation fondamentale pour cet objet, les rationalités et les milieux régulés se superposent.

Notons ici que cette analyse suivant les niveaux et transitions de rationalités sera intégrée à une analyse selon les niveaux de milieux pour réaliser une analyse a priori complète.

D'un autre côté, l'analyse mathématique fait apparaître des objets annexes, c'est-à-dire non visés prioritairement par la situation. Ces objets peuvent intervenir dans la situation et, eux aussi, peuvent être mobilisés à différents niveaux de rationalitéset de milieux. La mise en œuvre habituelle de ces objets annexes dans l'analyse selon les niveaux de milieu se fait classiquement

par l'intermédiaire de l'étude des connaissances en jeu aux différents niveaux de milieux. Nous allons étudier maintenant un objet annexe pour la problématique de définition mais jouant un rôle significatif dans cette situation, la notion de limite, selon les niveaux de rationalité. Nous montrons que cet objet ne se comporte pas pour les transitions de rationalité vis-à-vis des milieux comme l'objet visé par la situation. Nous utilisons pour cela la même démarche que précédemment mais cette fois-ci pour la limite, en proposant quelques positions et arguments possibles :

Au niveau de la rationalité pragmatique.

A1 : Le nombre de rebonds est fini car on le voit bien sur cette balle (théorème en acte).

Au niveau de la rationalité empirique

A2 : Le nombre de rebonds est fini car je n'ai jamais vu de balle qui rebondisse une infinité de fois (induction).

A3 : Le temps de rebond est fini car je n'ai jamais vu de balle rebondir indéfiniment (induction).

Au niveau de rationalité théorique

A4 : La suite du nombre de rebonds a pour limite plus l'infini car tous les rebonds donnent une hauteur non nulle (déduction).

A5 : Le temps est fini car la série est convergente (déduction).

Regardons les conflits possibles et les transitions associées :

<u>Conflits inter-rationalités</u>

Conflit 1 : A1 (ou A2 ou A3) et A5 sont contradictoires : la transition de rationalité TR1 peut être motivée par l'impossibilité de trouver dans le « réel » une balle rebondissant toujours exactement à la moitié de la hauteur.

<u>Conflit intra-rationalités</u>

Non conflit entre A4 et A5 : en termes de temps et de nombre de rebonds il n'y a pas de conflit puisque les conclusions portent sur des fonctions distinctes.

La transition de rationalités ici peut s'effectuer soit lors d'un changement de milieux, par exemple du milieu subjectif au milieu de référence mais surtout ce qu'il faut noter, c'est qu'elle peut se passer en intra milieux. Par exemple, la transition TR1 peut avoir lieu dans le milieu subjectif ou bien dans le milieu de référence. En effet puisque seul le niveau de rationalité relatif au savoir visé commande les changements de milieux, les objets annexes peuvent être sujets à des transitions de rationalité dans un même milieu. La correspondance pour les objets annexes n'est donc pas assurée par la situation. Cela a une conséquence forte en termes d'analyse : le niveau de rationalité qui importe concerne avant tout le savoir visé, puisque les objets annexes, eux ne commandent pas l'avancement dans les milieux même s'ils y contribuent. Autrement dit, l'évolution de la situation se réalise à travers des transitions de rationalités concernant des objets annexes mais ces transitions ne suffisent pas pour réaliser l'avancement de la situation : seules les transitions concernant l'objet visé sont déterminantes à ce sujet.

Regardons un épisode de la balle rebondissante et voyons ce que cette analyse en termes de transitions de rationalités permet de mieux comprendre. Il s'agit de l'épisode où R2 expose la possibilité d'obtenir un temps fini avec un nombre de rebonds infini :

> [>R2] : Oui mais ce que je dis c'est qu'il y a infinité de rebond, ça ne me dit pas que ça va rebondir pendant une infinité de temps, parce que je sais que je peux additionner une infinité d'intervalle de temps, si ces intervalles de temps sont deux fois plus petits que le précédent, je sais qu'il y a un temps que je ne vais jamais dépasser, et peut-être qu'elle va rebondir une infinité de fois dans un laps de temps fini...théoriquement...dans le modèle théorique...

A ce moment-là on pourrait penser que R2 va clore la discussion en expliquant clairement que deux cas peuvent se produire si on considère la variable temps, soit qu'elle s'arrête, soit qu'elle ne s'arrête pas. Mais curieusement, ces explications, qui devraient être limpides pour un groupe de ce niveau d'étude et devraient entrainer un réexamen de la situation, ne provoque pas de changement massif de positions : une fois que le professeur place le problème dans des conditions « idéales », l'ensemble du groupe va affirmer que la balle ne « s'arrête pas de rebondir ». R2, lui-même, dira ensuite hors-situation, qu'il n'était pas complètement convaincu par ses propres arguments. Ce phénomène, vu à travers la question de la transition de rationalité s'explique naturellement. En effet lorsque R2 évoque les séries convergentes, il est clairement dans une rationalité théorique. Il l'est certes pour la question de la possible finitude du temps, les séries convergentes sont des objets théoriques, mais il n'est pas dans une rationalité théorique pour l'objet même de la situation : la notion de définition. Or la résolution de la contradiction dont il ne sort pas complètement tient dans la transition de rationalité qu'il ne réalise pas : l'acte de définir propre à la rationalité théorique. On remarquera que du point de vue des niveaux de milieux, R2 est clairement passé dans un milieu de référence mais pas dans un milieu d'institutionnalisation.

Après ce travail de mise au point du rôle des rationalités et de leurs transitions, de la place du conflit dans les transitions de rationalités, mais aussi de la distinction entre objet principal et objet annexe de la situation, nous pouvons proposer une méthodologie générale pour notre projet d'ingénierie.

III Projet de l'ingénierie : Méthodologie générale et progression des situations

Notre projet initial est de construire une ingénierie de la limite, en particulier une ingénierie qui vise à rendre nécessaire la définition de la limite et son formalisme associé, c'est-à-dire de rendre nécessaire la formalisation de la définition, et donner un sens à la formalisation en epsilon / alpha. Nous rappelons que notre hypothèse de recherche à ce sujet est :

H3 : Il existe un milieu didactique suffisant pour permettre l'accès adidactique à la définition de limite la rendant nécessaire dans le sens du besoin de définition et de de l'intelligibilité de son formalisme. Ce milieu permet essentiellement de développer conjointement certaines connaissances nécessaires à cet accès et les niveaux de rationalités et de transitions de rationalités qui vont le rendre possible.

Nous avons étudié certaines des conditions sous lesquelles un tel milieu existe. Cette étude nous a conduit, dans un cadre socio-constructiviste (mode adidactique pour la TSD), à pointer l'importance de la notion de conflit cognitif pour générer des transformations de connaissances. Pour que de telles transformations aient lieu nous avons mis en évidence deux conditions concernant ces conflits. Il s'agit d'abord que ces conflits puissent se réaliser, c'est-à-dire qu'ils deviennent effectifs. Il s'agit ensuite que les moyens pour les résoudre, ou au moins tenter de les résoudre, soient disponibles.

Ces deux conditions nous ont conduit, sur le plan théorique, à proposer un modèle de rationalités avec la notion de transition de rationalité, mais aussi à proposer, pour ce qui concerne les notions complexes (comme celles de la limite), des adaptations à la TSD, avec les notions de métaphore fondamentale et de milieu subjectif. Ces deux apports (modèle de rationalités et adaptations de la TSD) sont apparus comme nécessaires pour donner les moyens de contrôler cette effectivité du conflit et sa résolution. Le débat scientifique en classe constitue alors un moyen naturel de respecter les contraintes précitées. Nous ne prétendons pas qu'il n'existe pas d'autres moyens mais nous n'en connaissons pas d'autre et avons choisi celui-ci. Nous avons maintenant besoin d'un nouveau schéma d'analyse des situations qui prennent en compte ces nouveaux modèles. C'est ce schéma que nous réaliserons au III.1.

Ces deux conditions font également apparaître également le besoin de déterminer une progression des situations qui concernent les différents éléments de connaissances qui rende possible une telle ingénierie. En particulier nous verrons comment s'articulent les situations concernant les connaissances indispensables, les nombres, les quantificateurs, pour concevoir une situation de la limite. Il faudra également intégrer à cette progression les situations d'initialisation concernant les notions de logique mathématique et de définition, éléments de rationalités incontournables d'une activité mathématique autonome, d'autant plus incontournable que les notions en jeu sont avancées. Nous étudierons cette progression et cette intégration au III.2.

III.1 Le schéma structurant les analyses expérimentales

Nous nous sommes appuyés sur le schéma des différents niveaux de modèles de milieux dans la TSD, proposé par Bloch (2002), pour donner une vision globale des adaptations et modèles que nous avons avancés pour réaliser la conception et l'analyse de situations didactiques dans le cadre de la TSD. Cette vision illustre, via le rapport entre niveau théorique, niveau expérimental a priori et la contingence, la place de la métaphore fondamentale et de la structuration des milieux régulés qui en découle, ainsi que le rôle du modèle des rationalités dans un tel rapport.

Figure 17 : Rapport entre niveau théorique/niveau expérimental a priori/niveau contingent sous l'angle des adaptations de la TSD aux mathématiques avancées

Légende :

SF : Situation Fondamentale

SFi : Signification fondamentale ième

MF : Métaphore fondamentale

VDi : ième Variable Didactique

VDn_i : ième Variable Didactique associée à la SFn

Kcs : Connaissances et Savoirs

DS : Débat scientifique

TR : Transition de rationalité

Dans ce schéma, nous focalisons particulièrement sur les distinctions apportées par les adaptations retenues aussi bien sur le niveau expérimental a priori que celui de la contingence.

Plus précisément, afin d'être en mesure de procéder aux analyses a priori des situations prévues à l'image de la structuration des milieux dans la TSD, nous avons fait le choix de mettre en place le schéma de structuration des niveaux de milieux régulés et des niveaux de rationalités.

Milieux	Elève	Professeur	Situation	L'objet visé selon la rationalité	L'objet Oi annexe selon la rationalité
M0 : Institutionnalisation	E0 Théoriciens	P0 Enseignant	S0 Didactique	Théorique	OiT ou OiE ou OiP
M-1 Référence	E-1 Validateurs	P-1 Animateur	S-1 Apprentissage	Empirique	
M-2 Subjectif	E-2 Opérants	P-2 Animateur	S-2 Référence	Pragmatique	
M-3 Matériel	E-3 Subjectifs		S-3 Subjective		

Tableau 9 : Schéma de structuration des niveaux de milieux et des niveaux de rationalités

La fonction d'un tel schéma est de prévoir les différentes interactions en prenant en compte, à chaque niveau, l'analyse de(s) :

- niveaux de rationalités sur l'objet visé ;
- conflits de rationalités C1, C2,… ;
- niveaux de rationalités sur les objets annexes O1, O2,… ;
- transitions nécessaires TR1, TR2,… pour l'objet visé pour les changements de milieux de la situation ;
- niveaux de rationalités nécessaires pour O1, O2,…pour pouvoir effectuer les transitions TR1, TR2,… pour résoudre C1, C2,…

Pour que ce modèle d'apprentissage se concrétise dans les interactions de la classe, c'est-à-dire que la classe globalement affronte réellement les conflits prévus, réalise les transitions de rationalités, un contrat didactique idoine doit être à l'œuvre. Ce contrat se caractérise par un rôle primordial de l'enjeu de vérité, par conséquent au doute raisonné, et donc à une forme de retrait du professeur sur ces enjeux. Comme chacun le sait, le contrat didactique n'est pas donné d'avance, la coutume scolaire est plutôt opposée à un contrat de ce type. Il est donc nécessaire de rendre de prime abord, visible ses règles du jeu. Dans le cadre de la progression des situations que nous expérimentons, nous aurons de plus la possibilité, dès la première situation, d'aller dans le sens d'une adaptation à ce nouveau contrat. Ceci permettra en particulier d'optimiser les échanges dans le reste des situations, dans le sens du déroulement requis (ou prévu).

III.2 La progression des situations

Il y a deux niveaux de progression des situations à étudier, le niveau global où les connaissances s'articulent entre elles progressivement pour permettre d'aborder de manière autonome de nouveaux savoirs, et le niveau local qui consiste en un schéma de construction de situation pour une notion donnée. Nous commencerons par la progression globale.

Nous faisons l'hypothèse que les situations qui donnent un sens fondamental à la notion de définition (comme la situation de la balle rebondissante, par exemple) sont des situations d'initialisation au projet global de construction en mode adidactique des notions mathématiques, en l'occurrence avancées, telle que celle de limite. En effet, ces situations sont de nature à favoriser la possibilité d'affronter ensuite les situations qui génèrent le besoin de la définition de la notion en jeu (par exemple de limite), puis celles de construire la définition de la notion en jeu (exemple de limite) sans avoir à réaliser un effet de contrat de rationalité. En effet lorsqu'une contradiction apparaît l'étudiant se trouve souvent au niveau de la rationalité empirique. La notion de définition, elle se trouve au niveau de la rationalité théorique. Il lui faut donc effectuer une transition de rationalité. Dans ces conditions : soit le niveau de rationalité qu'il a développé va lui permettre d'effectuer seul cette transition, soit le professeur va être obligé de l'aider, réalisant ainsi un effet de contrat de rationalité.

Cette progression globale est ainsi quasiment déterminée par les savoirs visés. Il va de soi que les connaissances d'ordre 2 (logique et notion de définition) sont premières à installer pour pouvoir à la fois les rendre disponibles pour les situations suivantes où elles sont indispensables dans le cadre de situations adidactique concernant des savoirs complexes. Elles correspondent à une élévation du niveau de rationalité disponible et mobilisable. Ensuite les connaissances qui précédent la notion de limite (nombre et quantificateurs) doivent être logiquement installées. Enfin vient la notion de limite.

Reste un choix possible sur l'ordre entre quantificateurs et nombres. Nous pensons que, puisque la notion de nombre est beaucoup mieux installée préalablement que celle de quantificateur, nous commencerons par une situation sur les nombres. Et nous profiterons de cette pseudo familiarité, en fait comme on l'a vu cette familiarité est toute relative, pour traiter les connaissances d'ordre 2 initiales en même temps.

Pour ce qui est de la progression locale, nous pensons qu'il existe essentiellement, comme pour la notion de définition, au moins trois types de situations concernant les savoirs complexes :

- Il y a les situations, qu'on notera de type S1, issues de situations fondamentales qui permettent de mener à la construction de la notion dans sa pleine signification (notées Sd1 pour la notion de définition).

- Il y a aussi les situations issues de métaphores fondamentales qui visent une signification fondamentale du savoir. Parmi celles-ci nous en identifions deux sortes :

  - Celles qu'on notera de type S2, qui conduisent, grâce à la scénarisation de la rencontre avec une contradiction, à concevoir que les anciennes connaissances sont insuffisantes et qu'un autre savoir est nécessaire. Dans ce type de situation, le savoir visé commence à émerger des tentatives infructueuses mais porteuses de sens sur ce nouveau savoir (situations notées Sd2 pour la notion de définition).

  - Celles qu'on notera de type S3, qui conduisent seulement à prendre conscience des limites des anciennes connaissances sans que la situation ne désigne vraiment ne serait-ce que les contours d'un nouveau savoir, à part dans la perception de l'inadéquation des anciennes connaissances pour le nouveau type de problème rencontré (situations notées Sd3 pour la notion de définition).

Nous utiliserons pour nos situations, conformément aux analyses préalables concernant les savoirs avancés, seulement les situations issues de métaphores fondamentales. Nous choisirons entre ces deux types de situations suivant les notions visées. Il nous semble que le premier type de ces situations est adapté comme première rencontre avec un objet puisqu'elle en dessine les contours et la rend nécessaire. Il nous semble également que le deuxième type de ces situations est beaucoup plus adapté à un objet déjà rencontré puisqu'on découvre, dans l'institutionnalisation du professeur, que cet objet que l'on connaissait a déjà une signification que l'on ignorait ou ne savait pas mobiliser (exemple de la balle rebondissante avec la notion de définition).

Nous utiliserons des questionnaires afin de vérifier l'état de certaines connaissances ou afin de comprendre comment fonctionnent certaines connaissances, cela afin de concevoir des situations adaptées à ces constats.

Nous choisissons, parmi les limites possibles de fonctions ou de suite, d'étudier dans nos travaux le cas de la limite finie d'une fonction en l'infini pour deux raisons :

- Le cours de première S concerne les suites et leur convergence, autrement dit leur comportement asymptotique. Ce travail de première sera prolongé en terminale sur le seul mode pragmatique, avant d'introduire les limites de fonctions, afin de prolonger cet apprentissage de première. Nous projetons d'identifier ces connaissances essentiellement pragmatiques, en vue de les adapter à la limite finie d'une fonction en l'infini.
- Nous allons faire jouer un rôle important aux graphes. Nous nous appuyons donc sur l'habitude des graphes de suite pour faire dessiner des graphes de fonctions a priori plus simples à exécuter.

III.3 Conditions d'expérimentation

Nous expérimenterons principalement l'ingénierie (situation des nombres, la double quantification, la limite) sur une même classe de TS que nous nommerons classe expérimentale mais aussi une partie de cette ingénierie (la situation des limites) en début de L1 en réalisant une adaptation pour les spécificités de ce niveau. Toutes les séances seront enregistrées et retranscrites et les tableaux contenant les dessins des élèves photographiés.

L'expérimentation en classe expérimentale s'échelonne sur 12 séances de 1h, 2h ou 3h, soit deux séances sur les nombres, une sur la double quantification et neuf sur la limite.

D'autres expérimentations ou pré-expérimentations de l'ingénierie de la limite ont été menées pour l'ingénierie de la limite en terminale S, et en L1 de mathématiques. Nous nous concentrerons sur la classe expérimentale et n'évoquerons ces autres expérimentations que pour mettre éventuellement en perspective les résultats obtenus avec la classe expérimentale.

Cette classe expérimentale est composée de vingt-neuf élèves de Terminale S. L'ambiance de classe est bonne, le niveau des élèves standard dans le sens où leurs résultats au bac est au niveau de celui du lycée, qui lui-même se situe dans la moyenne académique. Le professeur qui encadre la recherche est l'auteur de cette thèse. Il est agrégé et a l'expérience d'une vingtaine d'années dans l'enseignement, dont une douzaine en lycée. Il participe aux travaux de l'IREM de Grenoble depuis une quinzaine d'année.

Le recueil des données se fera par enregistrement audio qui sera systématiquement retranscrit d'une séance sur l'autre afin d'adapter, si nécessaire, le scénario et surtout réaliser les synthèses de début de séance afin de créer la continuité nécessaire entre les différentes séances. Pour ce qui est des dessins effectués au tableau, ils sont systématiquement photographiés avant d'être effacés.

DEUXIEME PARTIE

INGENIERIE DIDACTIQUE DE LA NOTION DE LIMITE

Chapitre 5- Nombres : Première situation d'entrée

I Présentation et analyse a priori de la situation sur les nombres

Nous avons déjà bien souligné que le formalisme usuel et moderne de la définition de limite tire sa spécificité d'une autre manière de regarder l'égalité en analyse. En effet, alors qu'en algèbre a = c est obtenu souvent de a = b et de b = c, par transitivité, ou bien de la connaissance de a – c = 0, ici on utilise ce qu'on a appelé le principe fondamental de l'analyse : si la distance entre deux nombres fixes est arbitrairement proche alors ces deux nombres sont égaux. Ce principe est au cœur de la notion de limite et de la preuve en analyse, c'est la raison pour laquelle nous proposons ici une série de situations didactiques ayant pour objectif final d'établir ce principe fondamental de l'analyse afin de pouvoir le mobiliser, le moment venu, dans une situation didactique pour la limite.

I.1 présentation globale de la situation

Il se trouve que, dans le temps didactique, cet enseignement intervient assez tôt dans l'année, aussi avons-nous décidé de réaliser une situation associant plusieurs objectifs de ce moment spécial pour un cours : le début d'année. La série de situations suivantes vise donc, en début d'année, d'abord à installer une culture nécessaire à pouvoir débattre en classe de la vérité de conjectures en mathématique, et ensuite établir un milieu assez riche à propos de la topologie de R pour le travail ultérieur sur la notion de limite. Les trois situations que nous avons retenues, et que nous proposons aux élèves dans cet ordre, sont les suivantes :

- Le questionnaire sur les nombres. Il s'agit, par un travail sur les nombres, les intervalles, les approximations, d'actualiser des connaissances sur le monde numérique.
- La situation des nombres consécutifs. L'objectif de cette situation est d'introduire les règles minimales de logique et d'initier à une fonction fondamentale de la définition en science : celle de pouvoir parler à plusieurs du même objet.
- La situation des nombres de proximité maximale. L'importance de cette situation réside dans ses potentialités à confronter les élèves à l'égalité en analyse et à son rôle dans la conceptualisation de la notion de nombre réel.

Le travail sur une situation de niveau i permet de préparer un milieu convenable pour s'attaquer à la situation de niveau i+1 ; l'objectif final étant une entrée des élèves aux enjeux de l'égalité en analyse.

Plus précisément au niveau épistémologique, nous retenons le principe fondamental de l'analyse comme l'un des fondements de l'analyse réelle en raison de son rôle central dans la construction de celle-ci. En particulier, comme nous l'avons déjà dit, elle permet de démontrer des égalités entre des grandeurs définies formellement (sous forme d'intégrale par exemple) à partir d'une infinité d'inégalités sur des approximations. De plus, le formalisme lié à ce principe est celui qui guide la définition formelle de limite en epsilon et son unicité dans le cas où elle existe. Ainsi la métaphore fondamentale que nous utilisons pour cette situation sur les nombres se constitue autours de ce principe. Par ailleurs, une démonstration de : « si pour tout réel epsilon strictement positive, la distance entre deux nombres réels *a* et *b* est inférieure à epsilon alors *a*

égal *b* » consiste à supposer que *a* différent de *b*, on a alors la distance entre *a* et *b* strictement positive et donc la moitié de la distance entre *a* et *b* est strictement positive. Or en prenant epsilon égal à la moitié de la distance entre *a* et *b*, l'hypothèse pour tout epsilon la distance entre *a* et *b* est inférieure à epsilon est fausse. Par contraposée, on en déduit que le principe fondamental est vrai.

Il y a donc plusieurs points clefs dans cette démonstration : un raisonnement par contraposée (aussi exprimable sous forme de raisonnement par l'absurde), le fait de choisir un epsilon adapté à un projet pour nier une quantification universelle, et de choisir la moitié de la distance entre a et b. Le niveau d'initiative réclamé par cette démonstration pour des élèves de terminale en début d'année est tel qu'il n'est pas envisageable de dévoluer instantanément le cas général. Nous proposons pour cela de procéder en trois étapes :

- La première étape consiste à utiliser un raisonnement par contraposée sur un cas particulier, raisonnement qui sera à la charge du professeur. Il s'agit de déterminer le plus grand nombre de l'intervalle [2 ;3[. On s'attend à ce que soit proposé 2,999… Si ce nombre est strictement inférieur à 3, en prenant la moyenne de ce nombre avec 3 on obtient un plus grand nombre encore dans l'intervalle. Donc 2,999… n'est pas le plus grand nombre de l'intervalle.
- Dans un deuxième temps (les nombres consécutifs), on fait statuer sur une conjecture vraie dont la démonstration utilise le fait que dans un cas général entre deux nombres distincts il y a forcément un troisième nombre distinct des deux précédents.
- La dernière étape (les nombres de proximité maximale) consiste à faire conjecturer le principe fondamental de l'analyse puis le faire soumettre au débat, ce qui devrait conduire à sa démonstration. Tous les éléments nécessaires devraient être disponibles pour cela.

Nous ajoutons que les deux dernières étapes présentent deux manières équivalentes sur le plan logique de se représenter le problème de ce cas d'égalité. Ces deux manières nous semblent complémentaires pour conceptualiser cette égalité particulière pour l'analyse. D'une part il s'agit d'appréhender cette égalité comme elle est énoncée : la distance entre deux réels étant inférieure à n'importe quel réel positif. D'autre part, il s'agit d'appréhender le problème comme le fait qu'il ne peut pas ne pas y avoir de réel entre deux réels distincts, dit de manière plus imagée, s'il y a un trou entre deux réels, c'est qu'ils ne sont pas distincts.

I.2 Première situation : Le questionnaire sur les nombres de Claire Margolinas

Il est évident qu'un apprentissage de l'analyse réelle repose sur une connaissance minimale des nombres et de leurs propriétés : la topologie de R. Nous allons donc pointer les connaissances étiquetées par les programmes scolaires actuels du secondaire sur la question du numérique. Pour ce qui est des programmes du collège (programme de 6ème à la 3ème applicables à la rentrée 2009), les nombres sont introduit par étapes :

- 6ème : Les entiers et les décimaux (comparer, encadrer, repérer, calculer) + écritures fractionnaires

- 5ème : Les fractions : (ajouter, multiplier) + nombres entiers et décimaux relatifs (ajouter, soustraire)
- 4ème : Les fractions et les nombres relatifs (toutes les opérations) + écriture scientifique
- 3ème : Les radicaux (toutes les opérations)

Pour ce qui est du lycée, rien de nouveau concernant les nombres (mis à part les exotiques nombres complexes de terminale S). On pourra à ce sujet évoquer le manque d'ambition des programmes actuels au sujet du bagage théorique minimal sur les nombres. Par exemple, en seconde, dans le passage concernant les fonctions, on pourra lire :

> Par ailleurs, la résolution de problèmes vise aussi à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique et à approfondir la connaissance des différents types de nombres, en particulier pour la distinction d'un nombre de ses valeurs approchées. (B.O.E.N., 2009)

L'ambition pour la seconde est manifestement très limitée. En complément des objectifs des programmes, une préconisation globale (de la seconde à la terminale) concernant les ensembles de nombres est faîte :

> Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. (B.O.E.N., 2009)

Ainsi, cette citation, qui est l'unique endroit dans les programmes officiels du lycée (juin 2009) où l'on évoque les ensembles de nombres (sauf pour les nombres complexes), concerne seulement les notations de ces ensembles. Les propriétés topologiques minimales de R (les relations entre les différents ensembles de nombres, l'écriture décimale illimitée des nombres réels...) ne sont pas des objectifs des programmes actuels. Cette relative pauvreté institutionnelle pour ce qui est de la culture des concepts numériques est aussi constatée dans Bloch et al. (2006) où l'étude des manuels du collège permet de conclure par exemple que :

> Un bilan des nombres effectivement utilisés, fréquentés... par les élèves, de la Sixième à l'entrée en Seconde, fait finalement apparaître que ceux-ci peuvent être considérés comme familiers avec une vingtaine ou une trentaine de nombres ... (Bloch et al., 2006)

Les auteurs affirment que cette expérience du numérique dans le secondaire n'est pas suffisante pour comprendre le nouveau statut théorique des nombres à l'entrée de l'université, en particulier pour l'entrée dans l'analyse. Il faut ici ajouter que de tels constats se fondent sur des programmes qui contenaient encore (en seconde notamment) des propriétés sur les nombres qui ont maintenant disparu des programmes.

Nous pensons également que de tels manques peuvent constituer des obstacles à la conceptualisation de la notion de limite. Par exemple, la notion de nombre irrationnel joue un rôle premier dans l'appropriation d'une problématique de l'approximation. En effet, si l'on cherche à approximer certains nombres par l'écriture décimale ou bien par les fractions (fractions continues, Cf Ghedamsi, 2008) c'est précisément que ces nombres ne s'écrivent pas de cette manière (décimale ou fraction). Par exemple, si l'on ne conçoit pas le rapport entre les réels et la droite numérique, alors il peut être difficile de concevoir la densité des réels. Ces connaissances lacunaires sur les nombres peuvent de ce fait conduire à des difficultés à appréhender une définition de la limite fondée sur " le principe fondamental de l'analyse" et qui correspond à une propriété

de certains ensembles de nombres, notamment les réels (mais les décimaux également, par exemple) : si deux nombres réels sont arbitrairement proches alors ils sont égaux.

L'un des objectifs de cette série de situations est d'introduire ce principe, il nous faut donc travailler d'abord sur les nombres. Nous utiliserons pour cela un questionnaire élaboré par Margolinas (1985) et complété (Q0) par Bloch pour un atelier de l'école d'été de didactique des mathématiques de 2005. Ce questionnaire, bien que construit initialement pour les quatrièmes, convient pour évaluer les actuelles terminales S car les programmes de l'époque en quatrième comportaient une réorganisation des connaissances sur les nombres aujourd'hui absente des programmes du secondaire.

Nous utiliserons ce questionnaire à la fois pour évaluer les connaissances sur les nombres, mais aussi pour questionner les relations entre les nombres et les propriétés numériques engagées.

Nous faisons ci-dessous une analyse a priori succincte des réponses au questionnaire ainsi que des scénarios prévus lors de la discussion (débat).

Cette étude se fera par bloc de questions en fonction de leur nature.

Question 0

1) Le nombre $\sqrt{78}$ est décimal : oui non/Rationnel non/Irrationnel.

2) Lorsqu'on tape $\sqrt{78}$ sur une calculatrice, celle-ci affiche : 8,8317609. Le nombre affiché est 8,8317609 :

- est égal à $\sqrt{78}$: oui non
- est une valeur approchée de $\sqrt{78}$: oui non. Si oui, à quel ordre ?

Question 1

Parmi les écritures suivantes, entoure celles qui sont égales au nombre 2

$0{,}2 \quad \frac{2}{1} \quad 2{,}\overline{0} \quad \frac{1}{2} \quad \sqrt{4} \quad 2{,}00 \quad \frac{6}{3} \quad 2^1 \quad 0{,}2 \quad \frac{2}{1} \quad 2^1 \quad 1{,}\overline{9} \quad (\sqrt{2})^2 \quad 2{,}00 \quad 1^2 \quad 2{,}001 \quad 1{,}09$

Question 2

1) Ecris deux nombres entiers (sans racine) qui encadrent le nombre $\sqrt{13}$: … < $\sqrt{13}$ < …

2) Ecris le meilleur encadrement possible, c'est-à-dire celui dans lequel les nombres entiers sont les plus rapprochés de $\sqrt{13}$: … < $\sqrt{13}$ < …

Question 3

1) Ecris deux nombres décimaux avec 3 chiffres après la virgule qui encadrent le nombre 4,1 :

… < 4,1 < …

2) Ecris le meilleur encadrement possible avec 3 chiffres après la virgule : … < 4,1 < …

Question 4

Ecris deux nombres décimaux avec 3 chiffres après la virgule qui encadrent le nombre $2{,}\overline{32}$

… < $2{,}\overline{32}$ < …

Ecris le meilleur encadrement possible avec 3 chiffres après la virgule : … < 2, < …

Question 5

Ecris deux nombres décimaux avec 3 chiffres après la virgule qui encadrent le nombre $\frac{25}{7}$:

… < $\frac{25}{7}$ < …

Ecris le meilleur encadrement possible avec 3 chiffres après la virgule : … < $\frac{25}{7}$ < …

Question 6

Classe du plus petit au plus grand les nombres suivants :

$0,\overline{2}$ $\sqrt{2}$ 1 3,5 0,21 $\sqrt{3}$ 2 3,545

Question 7

Ecris trois nombres entiers ou décimaux appartenant à l'intervalle] $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$ [

Question 8

Ecris à ta manière le résultat de l'opération : $1,\overline{4} + 3,\overline{7}$

Les questions Q0 jusqu'à Q8 ont pour objectif principal celui de travailler sur la distinction entre décimal, rationnel et irrationnel via la représentation d'un nombre réel par un développement décimal illimité. Un tel travail devrait amener à réfléchir sur la question de la densité de **Q** dans **R**. Une discussion, via vote et débat, est prévue à la suite de la question Q0 de sorte que les définitions nécessaires soient introduites par le professeur.

Question 9

1) Ecris le plus grand nombre de l'intervalle [2,3]

2) Y a-t-il un plus grand nombre dans l'intervalle [2,3[?

o Oui, c'est … o Oui, mais je ne sais pas lequel o Non, parce que ….

3) Ecris le plus petit nombre de l'intervalle [2,3]

4) Y a-t-il un plus petit nombre dans l'intervalle]2,3] ?

o Oui, c'est … o Oui, mais je ne sais pas lequel o Non, parce que ….

Lors de la discussion, la réponse à la question 2 risque de poser problème car 2,999...=3. Or ici on ne veut pas démontrer cette égalité car cette démonstration est le ressort même de la troisième situation. Par contre si les élèves s'accordent sur ce nombre, le professeur peut facilement montrer que ce ne peut pas être lui le plus grand nombre de l'intervalle. Il utilisera alors un argument qui va être central dans les trois situations et qui représente le cœur même du principe fondamental de l'analyse : quand deux nombres réels sont distincts alors il existe un autre nombre entre les deux (la moyenne des deux par exemple). En effet, dans notre cas, le professeur peut demander aux élèves, si pour eux le nombre 2,999.... est distinct ou non de 3. En principe on peut s'attendre à ce que ces deux nombres soient déclarés distincts. Dans ce cas 2,9999... ne peut pas être le plus grand nombre de l'intervalle [2;3[puisqu'il existe un nombre entre 2,9999...et 3 (la moyenne des deux, par exemple) qui est plus grand que 2,99999... et dans l'intervalle [2;3[. Prendre entre deux nombres distincts, un troisième nombre est institutionnalisé comme une technique efficace pour "séparer" les nombres différents : on en intercale un troisième. De plus cette démonstration correspond aussi à un raisonnement par l'absurde. On suppose que 2,999…est le plus grand nombre de l'intervalle (donc qu'il est distinct de 3), on montre alors qu'il en existe un plus grand.

Question 10

1) Le nombre $0,\overline{9}$ est : o égal au nombre 1 o plus petit que 1 o plus grand que 1

2) Quel est le résultat de l'opération $1 - 0,\overline{9}$? Si tu ne peux pas répondre, explique pourquoi.

Question 11

1) Ecris une division de nombres entiers qui ne finit jamais : ….

2) Penses-tu qu'il y ait une règle pour trouver les divisions qui finissent ? o oui o non

Si oui, à quelle règle penses-tu ?

3) Y a-t-il des valeurs entières du nombre a pour lesquelles la division a : 4 ne finit pas ?

o oui lesquelles ? o non, pourquoi ?

Question 12

On se pose la question de savoir si la fraction a une écriture décimale illimitée périodique

```
300        | 31
 210       |-----
  240      | 0,0967741
   130     |
    060    |
```

Oui, le développement est périodique car : ….
Non, il ne se répète pas car : ….
On donne le début de l'opération 3 : 31 :

Question 13

On considère le nombre a = 1,010010001….

1) Ecris encore 5 décimales de ce nombre

2) Ce nombre est-il un nombre : o décimal ? o Rationnel ? o Irrationnel ?

Question 14

Y a-t-il des nombres positifs qui ne sont pas le résultat de la division de deux nombres entiers ?

o Oui, je peux en donner un : o Non, il n'y en a pas o Oui, mais je ne sais pas lesquels.

L'objectif des questions Q10 jusqu'à Q14 est de permettre aux élèves d'aller plus loin dans la conceptualisation de la distinction entre décimal, rationnel et irrationnel. Cette mise en œuvre devra les introduire aux nouvelles règles de l'égalité dans le cas de l'analyse.

L'intervention du professeur à la suite de la question Q12 devra aboutir sur la généralisation du fait que tout nombre rationnel s'écrit soit avec une période illimité de 0, soit avec un développement périodique illimité.

I.3 Deuxième situation : La situation des nombres consécutifs

a) Présentation générale de la situation

Cette deuxième situation a pour objectif de mettre en place certaines des règles de la logique concernant la validité d'une conjecture en « si…alors… » mais aussi la nécessité de définir les objets dont on parle pour pouvoir se mettre d'accord au niveau mathématique. Cette situation reprend l'architecture de la situation "d'initialisation du débat scientifique" dite "situation du circuit" (électrique ou automobile) exposé dans Legrand (1990a).

Le support utilisé est différent, on étudiera certaines propriétés concernant les nombres. Ce choix (ne pas utiliser une situation déjà prête pour la logique) s'explique par la volonté de gagner du temps : on devrait arriver à traiter à la fois cette initiation à la logique et à certaines propriétés des nombres réels, propriétés qui serviront de milieu pour la dernière situation. Ce choix est un risque calculé, il s'agira de vérifier que les objectifs sont atteints. Il s'agit sur le plan logique d'étudier les notions d'exemple, de contre-exemple, de hors-sujets, la règle de la vérité en mathématique, la différence entre nécessitée et causalité – vérité et utilité. La situation sert à montrer, comme pour la balle rebondissante, que sans définition (de nombres consécutifs), on ne peut pas se mettre d'accord, c'est à dire que suivant les définitions, les conclusions peuvent différer. Enfin sur le plan de l'analyse, il s'agit de mettre en évidence le principe fondamental de l'analyse.

La situation didactique des nombres consécutifs est construite autour de l'étude de trois conjectures successives. Ce type de situation ne fait pas partie des situations standards des cours ordinaires. Il suppose que s'amorce un nouveau contrat didactique en classe où le professeur non seulement ne fait plus le tri dans les réponses, s'abstient de donner son avis mais va jusqu'à donner des questions qui s'avéreront sans réponse. Les élèves sont amenés à fonder leurs certitudes d'abord en mobilisant leurs connaissances et en défendant leurs points de vue face à leurs camarades. Le doute devient le moyen de tester la résistance des conjectures dans le but de fabriquer des certitudes.

Soyons clairs, les objectifs de cette situation sont ambitieux et nous espérons seulement initier des transformations qui vont être remobilisées tout au long des situations didactiques suivantes. Il ne s'agit donc pas du tout de faire croire que les objectifs listés ici sont atteints comme des transformations stables et permanentes à la fin de cette situation. Nous avons comme objectif cependant de déclencher sur ces sujets un "bougé" tel que les débats ultérieurs seront beaucoup moins naïfs qu'à l'occasion de cette première situation.

Nous rappelons les principaux éléments de l'analyse a priori par la structuration des milieux régulés et rationalités à mettre en œuvre. Pour chacun des niveaux de milieux régulés, notamment subjectif, de référence et institutionnel, notre analyse repose sur trois dimensions :

- *Les niveaux de rationalités*. Nous considérons, pour cette dimension de l'analyse, d'abord l'objet principal visé par la situation. Nous identifions les niveaux de rationalités dans lesquels il évolue, ainsi que les transitions de rationalités nécessaires à cette évolution. Chaque transition est identifiée par ses causes possibles.
- *Les connaissances des élèves ou objets annexes* de la situation sont décisives pour l'avancement de la situation : à travers les conflits qu'ils génèrent, ils suscitent des transitions de rationalité de l'objet visé par la situation.
- Les interactions élèves-élèves sont décisives pour l'avancement adidactique de la situation. Il s'agit de prévoir a priori la nature de ces interactions et les conséquences sur la situation. Pour ce qui est de l'interaction professeur-élève, le professeur anime le débat dans les milieux subjectif et de référence, c'est-à-dire qu'il donne la parole et fait en sorte que les arguments donnés soient compréhensibles de l'ensemble des élèves, mais il reste neutre sur le fond. Pendant l'institutionnalisation, il adopte un autre rôle, celui de remettre en ordre les avancées et la pensée erratiques en montrant comment les erreurs commises nous informent sur le savoir visé et comment le savoir visé résout la question abordée.

b) Présentation détaillée et analyse a priori de la situation

i. Etape 1 : La définition

La conjecture **C1** mise au débat est **« Si deux nombres sont consécutifs alors ils sont égaux ».** Comme ni le terme nombre ni le terme consécutif ne sont spécifiés, l'étude de cette conjecture devrait conduire à un conflit d'interprétation ou bien à l'identification de l'insuffisance de la spécification des termes. L'étude de cette conjecture vise donc le besoin de définition.

Nous proposons l'analyse de la situation selon la structuration des niveaux de milieu et rationalité selon le tableau suivant :

Milieux	Matériel	Subjectif	Référence	Institutionnel
Rationalité		Pragmatique	Empirique	Théorique
Connaissances ou objets annexes	- O1 : Nombre - O2 : Consécutif - O3 : Implication	- O1 est non explicité seulement exhibé par des non-exemples - O2 est pris comme des nombres qui se suivent ou bien séparés d'une unité. O2 est non explicité mais utilisé comme exemple ou non exemple	- On pointe l'idée de contre-exemple sans avoir véritablement défini encore ni O1, ni O2 - On peut voir des accumulations de cas particuliers ou bien d'arguments non décisifs pour soutenir une position	Une fois précisés nombre et consécutif, et les règles de la logique on statue sur C1
Conflits possibles		C1 = (O2.1/O2.2)	C1 = (O2.1/ O2.2) C2 = (manque de définition/O1 ou O2) C3 = conflit de définitions O1/O2	Résolution des conflits
Transition		TR1 = appel à la théorie ou la notion de définition TR1' = appel à l'usage courant des mots TR2 = Apparition explicite du doute	TR1 pour C1, C2, C3 TR2 TR3 = « c'est quoi la définition de O1 ou O2 ? »	
Interaction		Exprime surtout des positions, et écoute les positions opposées. Demande d'explication aux positions adverses	Cherche à convaincre par des argumentations. Cherche à falsifier l'argumentation de la position adverse	Démontre et convainc
Objet visé par la situation : **La notion de définition**		Définition en acte de nombre et consécutif	On voit apparaître des explicitations des précisions mais sans définition formalisée	Une spécification des nombres en jeu est donnée ainsi qu'une définition de nombres consécutifs

Tableau 10 : analyse de la première étape de la deuxième situation de la série de situation sur les nombres.

Remarquons que O2, en rationalité pragmatique, peut être :

a) Nombres qui se suivent (rien entre les deux)
b) Nombres séparés d'une unité
   - Premier cas O2.1 : ce peut être une unité valant 1, si les nombres choisis sont entiers, ou bien 0,1 si les nombres choisis sont décimaux à une décimale D1, ou bien encore D2….
   - Deuxième cas O2.2 : les nombres envisagés comme des écritures décimales illimitées avec par exemple 0,999… et 1.

Ce que montre le tableau de structuration, c'est le phénomène conjoint de constitution d'un milieu subjectif contradictoire et d'apparition du doute, tandis que les validations ne convainquent pas faute de définition, et le questionnement de plus en plus fort sur le sens des mots. La transition de rationalité vers le théorique est motivée par l'apparition explicite du doute (TR2), puis des questions sur le sens des mots (TR3), et enfin l'appel à la théorie ou la définition (TR1). Cette progression est déterminée par la progressive conscience de l'irréductibilité des conflits qui d'abord sont identifiés (milieu subjectif) et ensuite donnent lieu à des tentatives de résolutions qui s'avèrent vaines.

L'institutionnalisation va être construite à partir de la définition suivante : **On dira que deux nombres distincts sont consécutifs dans un ensemble s'il n'existe pas de nombre (de cet ensemble) différent des deux nombres entre les deux.** Cette définition tout à fait particulière de deux nombres consécutifs s'explique par la suite du scénario, en particulier de se demander l'existence, en ce sens, de nombres consécutifs dans **R**.

Au final, il s'agit de faire prendre conscience que tant qu'on ne sait pas exactement de quoi on parle, tout est possible. Définir devient alors le moyen de se mettre d'accord. En effet, puisque le conflit se situe entre divers acteurs du débat qui utilisent des définitions en actes, définir permet de s'accorder. C'est donc une fonction spécifique de la définition qui est activée par ce scénario. Au-delà de cet objectif, le professeur montre que pour enseigner une notion, il peut être amené à poser des questions sans réponse (prédéfinie). Si cela est courant en science, pour ce qui concerne la classe, il s'agit d'une rupture du contrat didactique traditionnel. C'est donc, en plus de la gestion du professeur qui laisse le débat s'éterniser autours de positions contradictoires sans donner son avis immédiatement, ce qui n'est pas habituel, la première manifestation forte de la mise en place d'un nouveau contrat didactique. En outre, la mise en place du nouveau contrat didactique s'articule autour d'un fonctionnement d'ordre épistémologique : il est possible d'exprimer une impossibilité de statuer quand les définitions sont trop floues ou absentes. Ceci est une nouvelle possibilité pour l'élève, mais doit aussi devenir progressivement quasiment une obligation intériorisée par l'élève : dans les cas où les objets sont trop vagues, on ne peut pas réussir à statuer rationnellement. Cette institutionnalisation concerne donc à la fois le rôle de la définition en mathématique, mais aussi une nouvelle responsabilité de l'élève par rapport à la définition.

ii. Etape 2 : les règles de la logique en mathématiques

La conjecture **C2** mise au débat est **« Si deux nombres entiers sont consécutifs alors ils sont égaux ».** L'étude de cette conjecture vise à revisiter les règles de la logique concernant la validité des implications. Cette étape de la situation n'est pas très problématique dans la mesure où la définition de consécutif étant donnée et les nombres spécifiés, on peut facilement s'accorder sur la fausseté de C2. Comme C2 n'a pas d'exemple, il n'y a pas de moyen de douter de sa fausseté. Ce qu'on peut observer, par contre, c'est au niveau de référence ou d'institutionnalisation, comment s'expriment les validations et démonstrations des niveaux pragmatiques et théoriques, et comment les définitions sont utilisées.

Ainsi trois types de raisons de la fausseté peuvent être invoqués :

- La première raison est qu'il y a au moins un contre-exemple (1 et 2 par exemple). Cette raison mobilise bien la définition de consécutifs.

- La deuxième c'est que pour les entiers si deux nombres sont consécutifs alors ils sont forcément différents (n et n+1), ce qui signifie que cette affirmation ne peut avoir que des contre-exemples (un tel raisonnement ne suffit en réalité pas pour statuer puisqu'il ne montre pas qu'il existe au moins un contre-exemple[53]).
- La troisième est liée à la définition de consécutif : deux nombres sont consécutifs d'abord s'ils sont distincts, ils ne peuvent donc pas être égaux

Nous verrons, à la conjecture suivante, pourquoi, pour des raisons subtiles, les deux dernières raisons ne sont pas acceptables[54]. Enfin certains élèves pourraient croire que pour qu'une conjecture soit fausse, il faut justement qu'elle n'ait aucun exemple (à l'instar d'une conjecture vraie qui n'a aucun contre-exemple) ce qui est aussi la même confusion sur la négation de (A(x) est vraie pour tout x) qui est prise pour (A(x) est fausse pour tout x).

L'institutionnalisation concerne les règles de logique à propos des implications en mathématique : « Si A alors B » est une conjecture, A s'appelle Hypothèse, B Conclusion. Il existe plusieurs types cas de figures possibles pour une même conjecture : les exemples où l'on vérifie l'hypothèse et la conclusion, les contre-exemples où l'on vérifie l'hypothèse mais pas la conclusion et les Hors-sujet où l'on ne vérifie pas l'hypothèse. Pour C2, il n'existe pas d'exemple puisque pour les entiers deux nombres consécutifs sont toujours différents, les nombres 2 et 3 constituent un contre-exemple puisqu'ils sont consécutifs et différents, et 4 et 6 constituent un hors-Sujet puisqu'ils ne sont pas consécutifs.

La règle fondamentale de la vérité d'une conjecture en mathématiques est aussi introduite par : Si une conjecture admet un contre-exemple alors elle est fausse et elle est vraie si elle n'est pas fausse. Ce qui signifie que : une conjecture est soit vraie soit fausse (si elle est suffisamment définie), un seul contre-exemple suffit pour prouver la fausseté ou encore la vérité en maths pour une conjecture ne s'occupe pas de savoir s'il y a beaucoup d'exemples, ou des exemples intéressants. En fait, les exemples ne disent rien sur la vérité d'une conjecture en mathématiques.

iii. Etape 3 : la différence entre causalité et nécessité – rapport vérité/utilité

La conjecture **C3** mise au débat est : **« Si deux nombres réels sont consécutifs alors ils sont égaux »**. Voici le tableau récapitulatif des connaissances impliquées dans C3 :

[53] En effet, cette raison de la fausseté de C2 repose sur une généralité concernant les nombres consécutifs que l'on pourrait écrire de la façon suivante : « s'il existe des nombres entiers consécutifs alors ils s'écrivent n et n+1 et donc sont distincts ». Pour **N**, c'est bien le cas, par exemple 2 et 3 sont des entiers consécutifs (il existe donc un contre-exemple). Mais si l'on ne pousse pas cette vérification jusqu'à là (vérifier que le discours général s'actualise dans un cas particulier, ce qui est évident pour **N**), alors on prend le risque de tenir pour correct un raisonnement général de fabrication de contre-exemple qui ne cherche pas à savoir s'il s'applique ou non pour au moins un cas. Et ce type de raisonnement, pour R, conduit précisément à une erreur.

[54] Même raison que note de bas de page précédente.

Milieux	Matériel	Subjectif	Référence	Institutionnel
Rationalité		Pragmatique	Empirique	Théorique
Connaissances ou objets annexes	O1 : si deux nombres réels sont distincts alors on peut placer un nombre entre les deux.	O1P : si deux nombres réels sont distincts alors on peut placer un nombre entre les deux.		O1T : Si a et b réels et a<b alors a<(a+b)/2<b
	O2 : nombres consécutifs	O2P = ayant une unité d'écart		O2T : deux nombres distincts tels qu'il n'existe aucun nombre entre les deux
	O3 : Si deux nombres sont consécutifs alors ils sont distincts et donc non égaux			
Objet visé par la situation O : **La notion de validité d'une assertion**		OP : Il faut des exemples importants pour montrer la vérité	OE : Il faut beaucoup d'exemples pour assurer la validité	OT : Les règles de la logique

Tableau 11 : Connaissances impliquées dans C3 en fonction de la rationalité

Dans le milieu subjectif, les connaissances en présence conduisent à exprimer que C3 est fausse ou absurde sur la base de l'absence d'exemple.

Par ailleurs, dans le milieu de référence, des arguments plus précis sont donnés :

- O1+O2T -> pas de nombres consécutifs donc C3 fausse
- O2T -> les nombres consécutifs ne peuvent pas être égaux donc C3 fausse (raisonnement utilisé éventuellement pour C2 et non encore invalidé)

Dans le milieu institutionnel, la règle logique de la validité est appliquée pour déclarer C3 vraie.

Les conflits possibles peuvent provenir :

- Des écarts de connaissances sur un objet annexe (exemple : O2P et O2T)
- Des écarts de connaissance sur l'objet visé (OP, OE, OT)

Les transitions de rationalité proviennent donc du rappel de (O2T,OT).

L'institutionnalisation porte sur les similitudes-différences entre logique du quotidien et logique mathématique : Deux nombres consécutifs sont distincts, or dans R si deux nombres sont différents il y a un nombre entre les deux, la moyenne des deux. Cela signifie que dans R il n'y a pas deux nombres consécutifs. Cela signifie donc qu'on ne peut pas trouver de contre-exemple puisque aucune paire de nombre ne peut vérifier l'hypothèse (être consécutifs). Cela signifie, puisqu'il n'y a pas de contre-exemple, que la conjecture C3 est vraie. Cela est perturbant, et

semble absurde pour les élèves... Ce sentiment d'absurdité provient de plusieurs différences entre la logique du quotidien et celle des mathématiques.

Dans ce qui suit, nous survolons les principaux éléments de ces différences :

- Rapport vérité utilité : Dans la logique du quotidien, on attend à ce qu'une affirmation vraie soit utile : on peut en donner des exemples et même souvent on montre qu'on a raison en montrant qu'il y a beaucoup d'exemples. Dans la logique des mathématiques, la vérité ne s'occupe pas de l'utilité, une conjecture est vraie si elle n'a pas de contre-exemple, y compris si elle n'a pas d'exemple non plus (et dans ce cas elle est vraie mais vraiment inutile).
- Différence entre Causalité et Nécessité : Dans la logique du quotidien : Quand « Si A alors B » est vrai, cela signifie que A est la cause de B. Par exemple : Si quelqu'un dit : « s'il pleut alors je prends mon parapluie » alors on attribue à la pluie un caractère de causalité, et on en déduit que : S'il pleut et que la personne est fidèle à ses propos alors on peut être certain qu'elle prendra son parapluie. S'il ne pleut pas alors on peut aussi être certain qu'il ne prendra pas son parapluie. (sinon à quoi sert de dire qu'on prend son parapluie à la condition qu'il pleuve, c'est à dire à quoi sert d'affirmer que la pluie est la cause du parapluie ?). Par ailleurs, dans la logique mathématique quand « Si A alors B » est vrai cela établit un rapport de nécessité entre A et B, ce qui signifie que : Si A est vrai alors B l'est aussi (sans exception, c'est à dire il n'y a pas de contre-exemple) (et là c'est la même chose que pour la causalité). Alors que si A est faux alors B peut être soit vrai soit fausse, car l'affirmation « Si A alors B » n'a de conséquence sur B que quand A est vrai, ce qui diffère de la causalité.

C'est bien ce dernier aspect qui nous fait penser que C3 est fausse puisqu'en terme de causalité on a du mal à penser que « consécutifs » puisse être la cause de l'égalité. En termes de cause on a bien raison de penser cela mais C3 ne relève pas de la causalité mais de la nécessité et donc de l'existence ou non de contre-exemple (et pas d'exemples !).

Maintenant, si nous reprenons les arguments donnés pour falsifier C2, on remarquera que le troisième argument est lié à la définition de consécutif : « deux nombres sont consécutifs d'abord s'ils sont distincts, ils ne peuvent donc pas être égaux. ». Nous voyons que cet argument n'est pas suffisant dans la mesure où si on le reconnaissait comme valable pour C2, alors il faudrait déclarer C3 fausse aussi pour la même raison. Or nous savons maintenant que C3 est vraie. D'où vient l'erreur de raisonnement ? En fait ce raisonnement montre que C2 ne peut avoir que des contre-exemples mais il ne montre pas qu'il en a effectivement. Nous sommes effectivement dans un cas particulier avec C3 : Il n'y a ni exemple, ni contre-exemple. Pour rendre valable ce raisonnement pour C2, il suffit d'ajouter que pour 1 et 2 on a bien un contre-exemple. En outre, le deuxième argument, « pour les entiers si deux nombres consécutifs alors ils sont forcément différents (n et n+1), ce qui signifie que cette affirmation ne peut avoir que des contre-exemples », n'est pas recevable pour la même raison.

Pour la pratique des mathématiques en général, l'intérêt de C3 est tout à fait particulier. Tout d'abord, remarquons en termes d'objectifs épistémologiques, C3 a deux fonctions principales : d'une part insister sur la règle de la vérité de la logique (vérité = pas de contre-exemple et

fausseté=au moins un contre-exemple), et d'autre part distinguer causalité et nécessité. On pourrait cependant avoir une forme de réserve vis à vis de cette conjecture C3 qui représente un cas mathématique peu fréquent, voir même exotique (pathologique ?). Quand a-t-on vraiment affaire, en mathématiques, avec ce qu'on pourrait qualifier de cas extrême. Justement, il se trouve que le cas de la vérité de C3 correspond à un usage implicite du mathématicien beaucoup plus fréquent qu'on ne le penserait immédiatement[55], au moins dans trois cas que voici :

- Premier cas de l'usage de l'implication vide

Cet usage peut se trouver requestionné par exemple lors d'une démonstration par contraposée. Voyons cela sur un exemple : « si le carré d'un nombre est pair alors ce nombre est pair ».

En général pour les élèves de TS, il y a seulement deux types de démonstrations à cette conjecture. La première démonstration s'articule comme suit : « Soit n pair, donc $n = 2k$, avec k entier donc $n^2 = 4\ k^2 = 2\ 2\ k^2$ donc n^2 pair ». Quant à la deuxième démonstration, elle s'énonce comme suit : « Si n est pair, alors $n = 2k$, avec k entier donc $n^2 = 4k^2 = 2\ 2k^2$ donc n^2 pair et si n impair alors $n = 2k+1$ avec k entier donc $n^2 = 4k^2+4k+1=2\ (\ 2k^2 + 2k\ ) + 1$ donc n^2 impair ». La première démonstration est fausse puisqu'elle démontre la réciproque de la conjecture. Ceci est une erreur classique. Mais beaucoup d'élèves utilisent plutôt la seconde démonstration qui est correcte mais dont la première ligne est inutile. Tout se passe comme si pour cette deuxième démonstration, les élèves voulaient se prémunir des ennuis : les pairs donnent des carrés pairs, les impairs des carrés impairs. Aucun risque !

Celui qui connaît les règles logiques en cause raisonne un peu différemment : il sait que la seule chose qui importe dans cet énoncé concerne les carrés pairs, et donc que si les nombres impairs ne donnent que des carrés impairs, alors on peut être certain que les carrés pairs ne peuvent pas provenir de nombres impairs, et proviennent donc de nombres pairs (puisque non impair est pair). Consentir à accepter cette dernière démonstration comme valide, c'est à dire ne pas vérifier ce qui se passe pour les nombres pairs (leurs carrés sont-ils pairs ou impairs ?) signifie accepter que si d'aventure les nombres pairs avaient aussi un carré impair, l'énoncé « si le carré d'un nombre est pair alors le nombre est pair aussi » serait vrai quand même, malgré l'absence d'exemple ; ce qui correspond bien au cas de C3. C'est donc bien cette convention (peu importe qu'il y ait ou non des exemples, du moment qu'il n'y a pas de contre-exemple) qu'on utilise implicitement dans la démonstration habituelle de cet énoncé et qui se révèle être une difficulté pour les élèves puisqu'ils se sentent obligés de montrer qu'il y a des exemples. Remarquons d'ailleurs que ces mêmes élèves ne sentent pas une obligation identique lors d'une démonstration directe, par exemple de « si n est pair alors n^2 est pair ». En effet, lorsqu'on le démontre en écrivant : « Soit n pair, donc $n = 2k$, avec k entier donc $n^2 = 4k^2 = 2\ 2k^2$ donc n^2 pair », on démontre seulement qu'il ne peut y avoir de contre-exemple, mais pas qu'il existe des exemples. L'existence d'exemples, elle, provient, une fois ce raisonnement fait, de l'existence de nombres pairs, ce que personne ne contestera. Voilà peut-être qui explique pourquoi l'obligation de montrer des exemples, pour l'élève, dans ce cas est manifestement absente.

- Deuxième cas de la démonstration par récurrence

[55] Sur l'intérêt et la difficulté des étudiants à concevoir des implications à hypothèses fausses voir (J. Rogalski et Rogalski, 2004)

Dans la démonstration par récurrence d'une propriété P(n) où P(n) est une expression logique qui dépend n, on utilise la notion d'hérédité d'une telle propriété qui est définie ainsi : On dit que P(n) est héréditaire si et seulement si P(n) implique P(n+1) pour tout n entier.

Pour une propriété P(n) héréditaire (sur N) nous différencierons trois cas : le cas 1 où la propriété est vraie pour tout entier n, le cas 2 où la propriété est vraie pour tout n à partir d'un certain nombre entier et fausse avant et le cas 3 où la propriété est fausse pour tout entier n. Les difficultés avec la logique surviennent évidemment dans les deux derniers cas.

Pour un élève qui considère l'implication comme la causalité, A=>B n'est pas vrai quand A est Faux et B Vrai (puisque A n'est alors pas la cause de B), le deuxième cas ne peut pas être envisagé comme celui d'une propriété héréditaire avant puisque le passage de P(n) à P(n + 1) est de ce type. Mais c'est surtout le troisième cas qui nous intéresse puisqu'il correspond à C3. Ici, la difficulté est encore plus importante : elle provient de l'impossibilité viscérale pour l'élève/étudiant de déclarer vraie un énoncé du type « Pour tout x de H, A(x) => B(x) » où A(x) est faux pour tout x de H. Ce qui empêche le « novice »[1] en logique de déclarer vrai un tel énoncé, c'est que déclarer vraie un énoncé qui n'a pas d'exemple, c'est automatiquement entrer en conflit avec les méthodes classiques de validation par l'exemple, mais surtout d'invalidation (par absence d'exemple), de la vie quotidienne. Or ces méthodes relèvent d'une connaissance beaucoup plus stable que celles de la logique mathématique : le pas de contre-exemple s'incline naturellement devant le pas d'exemple. Ainsi dans l'étude de l'hérédité le cas « exotique » apparaît immédiatement. On pourrait, en ce qui concerne l'enseignement de la démonstration par récurrence, esquiver, passer sous silence ce cas pénible, mais on est relativement contraint de l'étudier si l'on veut établir la différence pour une propriété entre son caractère héréditaire et sa validité. Cette différence est, en effet, souvent objet de confusion, et conduit les élèves à seulement étudier l'hérédité d'une propriété pour statuer sur sa validité. Ce cas « pathologique » est finalement un cas assez inévitable...

- Troisième cas de l'utilisation de l'équivalence dans la résolution d'équation

Voici un autre type d'exemple de cet emploi caché ou au moins implicite : l'utilisation de l'équivalence. La résolution de l'équation (1) $x^2 - 2x + 36 = 0$ se ramène à étudier l'équation (2) $(x - 1)^2 + 35 = 0$. Ces deux équations sont équivalentes, autrement dit les solutions de l'une sont solutions de l'autre. Cette équivalence permet de conclure à partir de ce qui se voit très bien sur l'écriture de l'équation (2), c'est-à-dire qu'elle n'a pas de solution, que l'équation (1) n'en a pas non plus (ce qui, par contre, ne se voit pas du tout sur l'écriture (1)). Cette résolution par équivalence, on transforme une équation où les (non)solutions ne sont pas visibles en une équation équivalente où les (non)solutions sont visibles, repose sur l'utilisation d'implications à prémisses (potentiellement) fausses. Et c'est justement l'intérêt ici de ne pas avoir à se soucier de savoir si les prémisses se réalisent ou pas qui fait la force de cette résolution par équivalence. Car une telle résolution peut se mener jusqu'au bout sans avoir à vérifier pas à pas si les objets cherchés existent ou pas. La plupart du temps c'est d'ailleurs à la fin du raisonnement que cette (in)existence apparait de manière évidente. Et cela permet justement de conclure dans notre cas que (1) n'a pas de solution à partir du fait que (2) n'en a pas.

I.4 Troisième situation : La situation des nombres de proximité maximale.

Cette troisième situation nécessite des connaissances solides concernant les règles de la logiques institutionnalisées dans les deux premières situations afin d'être réalisée en complète adidacticité jusqu'à l'institutionnalisation. La troisième situation correspond au questionnement concernant le principe fondamental de l'analyse. La notion de limite ne sera pas utilisée dans cette situation puisqu'elle fait l'objet d'une autre approche et que l'on souhaite ici faire apparaître ce principe comme une propriété d'abord liée aux réels.

Ce principe comporte au moins deux obstacle susceptibles de produire deux conflits cognitifs en fonction des différentes conceptions et connaissances en présence :

- Le premier provient d'une conception de l'égalité qui est d'abord algébrique, c'est-à-dire qui repose essentiellement sur deux principes : la transitivité ou bien la nullité d'une différence. Dans le principe de l'analyse, les deux nombres ne vérifient qu'une infinité d'inégalités. Et ce qui peut sembler aller contre le bon sens, c'est qu'alors que chacune de ces inégalités permettent à ces deux nombres d'être distincts, leur collection les en empêche.
- Le deuxième provient de conceptions sur l'écriture des nombres en base décimale qui pourrait se résumer ainsi : « si deux nombres ont une écriture décimale différente alors ces nombres sont distincts ». Ceci est un problème en primaire avec 12,3 et 12,300 qui est réglé en terminale. Par contre apparaît en terminal un nouveau problème avec le nombre qui s'écrit 0,9999...avec une infinité de 9 après la virgule et le nombre 1. Il est difficile pour les élèves d'admettre que ces deux nombres sont égaux. S'il existe plusieurs démonstrations prétendument algébriques (en fait on raisonne sur un nombre qui est implicitement défini par une limite d'une série), cette égalité repose intrinsèquement sur le principe fondamental de l'analyse. La situation qui suit est précisément fabriquée sur cette idée : on peut assez facilement adapter un principe local de l'analyse pour prouver que 2,9999...=3 et en déduire par généralisation un principe fondamental pour l'analyse.

Cette situation est construite autour de l'étude de quatre questions. Les deux premières concernent les entiers naturels et la propriété de nombres de proximité maximale (première étape). Les deux suivantes, concernent les réels avec la même propriété, ce qui amène finalement à conjecturer le principe fondamental de l'analyse (deuxième étape). Cette conjecture sera mise en débat, ce qui devrait conduire à sa démonstration.

a) Première étape : dans N

Il s'agit de commencer à manipuler les collections d'inégalités en se basant sur la définition : Soit a et b deux nombres d'un ensemble de nombres K. On dit que a et b sont de proximité maximale dans K si la distance entre a et b est inférieure ou égale à n'importe quel nombre strictement positif de K. Ce qui s'écrit aussi : a et b de K sont de proximité maximale dans K si pour tout ε, de K avec $\varepsilon > 0$ on a $d(a\,;b) < \varepsilon$

Question 1 : 2 et 6 sont-ils de proximité maximale dans N ?

Vu la complexité de la définition de proximité maximale, on peut s'attendre à des avis différents. Le débat qui s'ensuivra devrait permettre de clarifier la définition. Cette question 1 a pour fonction donc de prendre connaissance de la définition dans un cas simple.

Question 2 : Trouvez deux nombres entiers de proximité maximale dans N.

On devrait voir apparaître des propositions de nombres successifs qui seront proposés en conjecture. Par exemple, on pourrait conjecturer que : « 2 et 3 sont de proximité maximale dans N. » On peut s'attendre alors à une discussion qui tourne autour de la dénomination maximale éventuellement. Car, indépendamment de la définition, proximité maximale a un sens, et on pourrait bien voir des approches proposées qui reposent sur cette signification immédiate.

b) Deuxième étape : dans R[56]

Question 3 : 2 et 3 sont-ils de proximité maximale dans R ?

La question permet de discuter de la possibilité de prendre des nombres non entiers.

Question 4 : Trouvez deux nombres réels distincts de proximité maximale dans R.

Des couples peuvent être proposés et étudiés sous forme de conjecture. Si le cas 1 et 0,999… apparaît alors il sera traité comme on l'avait pour les nombres consécutifs. On peut penser que la proposition de l'impossibilité est rapidement effectuée : elle sera mise alors au vote sous forme de conjecture C : « Il n'existe pas deux nombres réels distincts a et b de proximité maximale dans R »

Deux avis peuvent être émis : Oui c'est vrai ou bien non c'est faux avec un contre-exemple du type : 1 et 0,999... Dans ce dernier cas le professeur soumet à la classe la question suivante : « $a = 1$ et $b = 0{,}999...$ » est un exemple, un contre-exemple, un hors-sujet pour C ?

Si une majorité d'avis pour le contre-exemple devrait être exprimée, il devrait exister des élèves ayant l'idée qui a déjà été rencontrée deux fois, à savoir prendre un troisième nombre entre deux nombres distincts et qui penseront donc que c'est un contre-exemple. Ce dernier avis devrait l'emporter ou moins créer du doute. Sinon le professeur proposera lui-même $d(a;b)/2$ et montrera que $d(a;b) / 2 < d(a;b)$. Ce que l'on montre ainsi c'est que 1 et 0,9999… ne peuvent pas être distincts et de proximité maximale simultanément.

Le professeur pourra institutionnaliser cette méthode : pour trouver plus petit qu'un réel strictement positif donné, il suffit de prendre la moitié ; en fait on a déjà rencontré cette situation lors des nombres consécutifs. La démonstration consiste donc à supposer les deux nombres distincts, la distance entre les deux est donc non nulle, ce qui permet de trouver un nombre plus petit que cette distance et de conclure ainsi que les nombres ne peuvent donc pas être distincts et de proximité maximale à la fois.

Il s'agira alors de revenir à C que l'on peut écrire aussi C' : « Si a et b sont distincts alors ils ne sont pas de proximité maximale ». La démonstration précédente (sur 1 et 0,9999...) ayant été

[56] Nous ne passons par l'étape Q car du point de vue de cette propriété Q et R ne se différencient pas.

réalisée, on peut espérer qu'un élève l'adapte pour C'. C'est à dire, suppose que a et b sont distincts et montre dans ce cas que les deux nombres ne peuvent pas être de proximité maximale. Finalement, le cas précédent aura servi à préparer le cas général. Cette proposition démontrée constituera le principe fondamental de l'analyse qui sera reformulé sous la forme : **« Si *a* et *b*, deux nombres réels vérifient que la distance entre les deux est aussi petite que l'on veut ; c'est à dire que si pour tout ε > 0 de R avec on a | a - b |<ε ; alors *a* = *b* ».**

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les objets visés par la situation et les objets annexes en fonction des niveaux de milieux régulés et de rationalités.

Milieux	Matériel	Subjectif	Référence	Institutionnel
Rationalité		Pragmatique	Empirique	Théorique
Connaissances ou objets annexes	O1 : égalité algébrique	Comme $\varepsilon \neq 0$ alors $a \neq b$		a = b ssi a – b = 0
	O2 : formalisme (variables, quantificateur universel…)	- K c'est quoi ? - Pour que ça soit faux, il faut que ça soit faux pour tous les epsilons		- K=**N** ou **R** - négation du quantificateur universel comme quantification existentielle
	O3 : si deux nombres réels sont distincts alors on peut placer un nombre entre les deux	O3P : si deux nombres réels sont distincts alors on peut placer un nombre entre les deux		O3T : Si a et b réels et a<b alors a<(a+b)/2<b
	O4 : raisonnement par contraposée ou par l'absurde	On ne suppose pas le contraire de ce qu'on veut montrer		Logique mathématique
	O5 : la distance entre deux nombres	C'est quoi la distance ?		Distance = |a-b|
	O6 : les nombres réels	1 ≠ 0,999…donc il existe deux nombres distincts de proximité maximale		1=0,999…
Objet visé par la situation : **principe fondamental de l'analyse**		OP : Pour que a=b il faut que $\varepsilon = 0$		Si pour tout epsilon > 0 |a-b| < epsilon alors a =b

Tableau 12 : Objets et connaissances en fonction du niveau de milieu et de rationalité 3ème étape de la situation 1 de la situation des nombres

Dans le milieu de référence, sont questionnés tous les formalismes liés à la définition de nombre de plus grande proximité. C'est seulement à l'issue de l'élucidation de ces aspects ainsi que la question de la distance et de la contraposée que l'on peut passer au principe fondamental de l'analyse en rationalité théorique. Deux conflits peuvent avoir lieu pour donner lieu à une transition de rationalité. Le premier est lié à un conflit entre l'égalité de l'analyse et de celle de l'algèbre. En analyse une infinité d'inégalités du type $a - b < \varepsilon$ avec un epsilon non nul va produire l'égalité alors qu'en algèbre seul a-b=0 donne a=b. L'autre conflit porte sur l'inégalité

supposée de 1 et de 0,999… Cette pseudo inégalité conduit à penser qu'il existe des nombres distincts et pourtant de proximité maximale. Dans les deux cas, les connaissances usuelles ou issues des deux situations précédentes devraient être suffisante pour les transitions de rationalité.

II Analyse a posteriori de la situation des nombres

II.1 Analyse a posteriori de la première situation

a) Synthèse des résultats

Nous allons analyser maintenant les réponses[57] au questionnaire une par une.

- Q0

$\sqrt{78}$	Décimal	Rationnel	Irrationnel
	oui 62 % non 31 %	oui 48 % non 31 %	oui 38 % non 41 %
8,8317609	Egal à	Valeur approchée	A quel ordre
	oui 14 % non 86 %	oui 90 % non 10 %	55 % bonne réponse

Tableau 13 : Résultats à Q0

Les résultats montrent que les notions de nombre décimal, nombre rationnel et nombre irrationnel ne sont collectivement pas maîtrisées. Nous remarquons que deux élèves qualifient de nombre à la fois rationnel et irrationnel. Cet échantillon d'élèves connaît le statut de l'affichage d'une calculatrice : il ne marque pas toutes les décimales du nombre quand le nombre de décimales du nombre dépasse le nombre maximal de décimales défini par la calculatrice. Nous remarquons qu'avec les calculatrices graphiques, l'écran étant beaucoup plus grand, ce nombre maximal de décimales ne sature pas l'écran comme c'est le cas des calculatrices non graphique. Dans ces conditions il est plus difficile de savoir si l'écriture à l'écran est l'écriture décimale du nombre ou pas.

- Q1

Quasiment tous les élèves sauf trois ne considèrent pas $1,\overline{9}$ comme une écriture égale au nombre 2. Ceci était prévisible et prévu. Quelques autres rares erreurs sont commises

- Q2

Il y a 83 % de réponses correctes à la première question (les autres sont essentiellement des non réponses) et 62 % à la deuxième question (les autres réponses sont à moitié des réponses erronées et des non réponses).

- Q3

Il y a 97 % de réponses correctes pour la première question et 72 % de réponses correctes pour la deuxième question. Les erreurs proviennent beaucoup plus de l'approximation par défaut que de l'approximation par excès. Cependant le taux de réussite est plutôt bon même si à ce niveau de l'apprentissage des mathématiques on pourrait s'attendre à des résultats meilleurs et avoisinant la perfection.

[57] Nous rappelons que 29 élèves passent ce questionnaire.

- **Q4**

Il y a 90 % de réponses correctes à la première question et 10 % à la deuxième question. Les encadrements avec trois chiffres après la virgule sont souvent incorrects, et cela est probablement dû à l'incompréhension de l'écriture avec la partie surlignée pour indiquer la répétition de la partie décimale. En effet nous trouvons de nombreuses réponses utilisant 2,319 (ou bien $2,\overline{32}$) comme approximation par défaut (huit réponses sur vingt-neuf). Cette réponse correspond en fait à l'approximation par défaut avec trois chiffres après la virgule de 2,32 (et non de $2,\overline{319}$).

- **Q5**

Il y a 76 % de réponses correctes pour la première question et 7 % pour la seconde. Beaucoup de réponses correctes à la première question proviennent de la possibilité d'approcher la fraction par des entiers. Cependant le très faible score à la deuxième question semble provenir d'une difficulté d'effectuer la division en question. Nous pourrions nous étonner de ce constat mais en terminale S, la calculatrice a remplacé depuis longtemps les calculs posés, ainsi les compétences acquises sur le calcul ont disparues. A l'appui de cette hypothèse on décompte neuf non réponses et seulement sept réponses qui ressemblent à un encadrement au millième (différence de un ou deux millième entre les bornes) dont seulement deux correctes.

- **Q6**

Cette question est réalisée correctement par 62 % de l'échantillon.

- **Q7**

Cette question est réalisée correctement par 55 % de l'échantillon. Seulement 55 % des réponses comportent effectivement trois décimaux dans cet intervalle mais beaucoup d'autres réponses en comportent un ou deux.

- **Q8**

Cette question est réalisée correctement par 21 % de l'échantillon. En fait vingt-et-une réponses (72%) correspondent à la proposition 5, c'est à dire à effectuer l'opération 1,4 +3,7 =5,1 puis à rajouter des traits au-dessus : $1,\overline{4} + 3,\overline{7} = 5,\overline{1}$

- **Q9**

Environ 66 % de l'échantillon ont choisi la réponse 3 pour le plus grand nombre de l'intervalle [2,3]. On peut s'interroger sur le fait qu'il n'y ait pas plus de telles réponses en terminale S. Quelles sont alors les autres réponses proposées ? Elles sont non moins étonnantes pour ce niveau. Ainsi cinq élèves considèrent que l'intervalle [2,3] correspond à l'ensemble contenant qu'un seul nombre : 2,3. Ainsi ils répondent que 2,3 est le plus grand nombre de cet intervalle. L'un d'eux ajoutera à l'écrit que cette interprétation vient du fait que le « ce n'est pas un point-virgule qui sépare le 2 et le 3 ». Il y a aussi trois non réponses et deux réponses correspondant à la proposition 2, qui, si elle est une bonne réponse n'est comptée ici comme la même réponse que 3.

A la question « Y a-t-il un plus grand nombre dans l'intervalle [2,3[? » environ 69 % des réponses de l'échantillon sont « Non, parce que... » tandis que 28 % répondent « Oui c'est $2,\overline{9}$ ». Les réponses correctes sont souvent justifiées par « car 3 est exclu de l'intervalle », ce qui est formellement correct mais certaines justifications plus complètes (« car 3 est le plus grand

nombre et il est exclu de l'intervalle » laissent un doute sur la validité de cette justification. Signifient-elles que lorsqu'on enlève le plus grand nombre d'un ensemble, il n'y a plus de plus grand nombre ?

A la question d'écrire le plus petit nombre de l'intervalle [2,3], environ 72 % des réponses correspondent à « 2 ». Les autres réponses se partagent entre les 2,3 et les non réponses.

Enfin à la question y a-t-il un plus petit nombre dans l'intervalle]2,3] ? environ 62 % de réponses « Non, parce que... » avec toujours les mêmes ambiguïtés : « Parce 2 est exclu de l'intervalle ». On observe deux fois la réponse $2,\overline{0}\ 1$ et une fois la réponse $3\text{-}0,\overline{9}$ qui constituent des réponses plutôt fines (mais fausses) à la question.

A la suite du questionnaire, une discussion avec les élèves fera apparaitre que peu d'entre eux avaient pensé au nombre $2,\overline{9}$ comme plus grand nombre de l'intervalle [2 ;3[, mais qu'une fois proposé ils l'adoptent massivement. On voit donc que les conceptions collectives concernant l'écriture décimale illimitée sont antagonistes avec cette égalité des réels qui est visée par la situation globale des nombres. Cette réponse sera finalement invalidée par le professeur par un raisonnement utilisant la moyenne de deux nombres distincts : si $2,\overline{9}$ est distinct de 3 alors il ne peut pas être non plus le grand nombre de cet intervalle puisqu'il y a alors un nombre plus grand.

- **Q10**

A la question le nombre $0,\overline{9}$ est égal, plus petit ou bien plus grand que 1, environ 86 % des réponses correspondent à « plus petit que 1 ». Les quatre autres réponses correspondent, de manière partagée, à seulement « = » ou aux réponses « = » et « plus petit que 1 » cochées toutes les deux.

Pour la question quel est le résultat de l'opération $1 - 0,\overline{9}$? Si tu ne peux pas répondre, explique pourquoi, il y a essentiellement deux types de réponses : « 0, » (38%) et « c'est impossible car il y a une infinité de chiffres » (45%).

- **Q11**

A la question écris une division de nombres entiers qui ne finit jamais, 79 % de réponses sont correctes avec des fractions simples (1/3 par exemple).

Par ailleurs 72 % pensent qu'il y a une règle pour trouver les divisions qui finissent, mais très peu proposent une règle et aucune règle n'est correcte.

Enfin 41 % de réponses disent qu'il existe des valeurs entières du nombre a pour lesquelles la division a : 4 ne finit pas correctes, mais quasiment aucune justification correcte. Beaucoup de non réponses (31%).

- **Q12**

On s'est posé la question de savoir si la fraction $\frac{3}{31}$ a une écriture décimale illimitée périodique. Environ 34 % de non réponses. Seulement 10 % de réponses correctes avec aucune justification

correcte. Les réponses incorrectes sont 55 % et se basent sur la non répétition apparente sur la division réalisée et non finie du questionnaire.

- Q13

Environ 83 % des réponses sont conformes à l'écriture de 5 décimales de a = 1,010010001… (00001). Ce qui signifie que les élèves parlent bien du nombre correspondant à la série de la suite (u_n) de terme général $u_n = 0{,}1^{\frac{n(n+3)}{2}}$.

Par ailleurs, 7 % des élèves considèrent que ce nombre est rationnel contre 45% qui le considèrent comme étant irrationnel.

On pourrait considérer ces réponses comme plutôt satisfaisantes mais la forme du questionnaire empêche de conclure. En effet pour cette question, le questionnaire ne demande pas pour chaque proposition si c'est oui ou non, comme pour la question 0, mais propose seulement de colorier ou non le rond (ci-dessus) associé à la proposition. Cela a pour conséquence qu'on ne sait plus distinguer les non-réponses des non-coloriages délibérés. Cette question est en conséquence non exploitable.

- Q14

A la question « y-a-t-il des nombres positifs qui ne sont pas le résultat de la division de deux nombres entiers ? » 34 % répondent qu'ils peuvent en donner un, tandis que 34% autres disent qu'il y en a mais qu'ils ne savent pas lesquels, et 21% o des élèves disent qu'il n'y en a pas.

Parmi les 34 % de réponses « Oui, je peux en donner un : », seulement deux des propositions faites sont correctes (racine de deux et pi) et toutes les autres propositions sont hors sujet avec des fractions de nombres non entiers (décimaux ou irrationnels).

b) Conclusion

Sur la question des nombres, l'échantillon questionné montre peu de connaissances solides sur les différents types de nombres, leurs rapports, leurs écritures différentes. En particulier, nous constatons une méconnaissance des irrationnels, des écritures décimales illimitées, de la notion d'intervalle et même d'opérations sur les nombres. Il y a manifestement un problème de structuration des connaissances accumulées au cours du cursus à propos des nombres. Ceci est cohérent avec les études sur les connaissances des nombres au lycée (Chapitre 1 I.2) et tient, en particulier, au fait que cette structuration n'est jamais véritablement prévue par les programmes actuels du lycée.

Cependant cette méconnaissance des nombres n'est pas, dans son ensemble, directement impliquée dans la suite de la situation. En particulier pour ce qui est de l'égalité des réels, objectif de la situation globale des nombres, nous identifions une difficulté majeure concernant l'égalité de 0, $\overline{9}$ et 1 rencontrée à plusieurs reprises dans le questionnaire. Cette difficulté est de nature à s'opposer à l'égalité des nombres réels puisque celle-ci conduit à conclure ces deux nombres égaux.

La discussion sur le plus grand nombre de l'intervalle [2 ;3[qui a abouti à la proposition d'un raisonnement (si deux réels sont différents on peut en glisser un troisième entre les deux) invalidant des réponses sous formes d'écriture décimales illimitées constitue un premier outil pour déstabiliser cette conception ($0,\overline{9}<1$) et donner un crédit à l'égalité des réels dans un cas très spécifique. La suite de la situation consiste justement à généraliser ce raisonnement.

II.2 Analyse a posteriori de la deuxième situation

La deuxième situation sur les nombres consécutifs est expérimentée sur une durée de deux heures. La première partie vise à la fois à faire prendre conscience de la nécessité de définir consécutif et préciser l'ensemble de nombres concernés mais aussi d'instaurer les règles du nouveau contrat didactique relatif au modèle. La seconde vise à rappeler les règles classiques de la vérité des conjectures. La dernière partie vise à montrer les différences que ces règles impliquent dans un cas particulier. Rappelons des trois conjectures étudiées :

C1 : "Si deux nombres sont consécutifs alors ils sont égaux"

C2 : "Si deux nombres entiers sont consécutifs alors ils sont égaux" avec définition de consécutifs

C3 : "Si deux nombres réels sont consécutifs alors ils sont égaux"

a) Analyse a posteriori de la première partie

La première partie se déroule suivant l'analyse a priori. Autrement dit, la situation fait apparaitre la nécessité de préciser « nombre » et « consécutif ». On peut cependant s'étonner du nombre d'élèves ayant voté initialement Autre (la moitié de la classe) pour les uns à cause d'une absence de précision sur les nombres concernés, et pour les autres à cause du fait qu'en prenant les réels, le concept de nombre consécutif est vidé : il n'y en a pas. L'autre partie de la classe a voté faux pour plusieurs raisons dont l'une n'a pas été prévue par l'analyse a priori. Victor affirme que si C1 est vrai, puisque tout nombre a un consécutif, alors tous les nombres seront égaux. Comme tous les nombres ne sont pas égaux, C1 est forcément fausse. En fait, quasiment tous ceux (sauf un) qui ont voté faux ont cette raison-là :

> [>Victor] : Chaque nombre est consécutif à un autre donc cela voudrait dire que tous les nombres seraient égaux et ça ne voudrait rien dire si tous les nombres étaient égaux.

Remarquons que cet argument pour la fausseté de C1 est valable pour **N** (principe de récurrence), mais pas pour **R** où il n'y a pas de nombres consécutifs (au sens de la future définition). Donc C1 vraie n'a pas la conséquence fâcheuse annoncée par Victor.

Nous regardons maintenant **les transitions de rationalités** réalisées <u>pour la notion de définition de nombres consécutifs et la précision du type de nombre</u>.

Valentin commence avec une rationalité pragmatique en mobilisant une définition en acte. En utilisant une propriété des réels, il se place, sans le dire, dans les nombres réels, alors que (définition en acte de nombre) :

> [>Valentin] : Oui. D'après la question d'avant, on dit qu'on peut toujours glisser un nombre entre

deux.

Nathan poursuit en effectuant une transition de rationalité pour nombres (pragmatique vers empirique) : il exige une précision au niveau du mot « nombre »:

> [>Nathan] : Oui je pensais la même chose. En fait pour qu'elle ait vraiment du sens, il faudrait être plus précis, genre entiers consécutifs.

Puis Maxime revient à une rationalité pragmatique pour consécutif, avec une définition en acte (« consécutif » est remplacé par « juste avant » et si cela précise, cela ne définit pas):

> [>Maxime] : J'ai dit que vu que 2,999...c'est juste avant 3, enfin ils sont consécutifs, enfin d'après moi, donc s'ils sont consécutifs comme cela, on ne peut rien ajouter à 2.999... pour arriver à 3. Enfin il n'y a rien de palpable qu'on peut ajouter. Donc du coup ça veut dire que c'est les mêmes chiffres vu qu'on ne peut rien ajouter pour passer de l'un à l'autre en même temps.

Louis continue sur le même niveau de rationalité pragmatique en utilisant une autre définition en acte (là encore, il s'agit d'une précision qui ne tient pas lieu de définition) :

> [>Louis] : Moi je n'avais pas pensé à ça mais ça me parait vrai. Mais sinon j'avais pensé à autre chose, moi enfin, deux nombres consécutifs c'est quand il y a un des deux nombres qui est soit plus petit soit plus grand que l'autre. Et donc qui n'a pas la même valeur et donc qu'ils ne sont pas égaux.

Enfin, Baptiste amorce une transition vers la rationalité théorique en demandant une définition :

> [>Baptiste] : Est-ce qu'on pourrait avoir la définition de consécutif en mathématiques ?

On voit donc que la rationalité n'est pas linéaire pour l'objet principal visé (définition), mais elle évolue de manière évidente vers une rationalité théorique.

Regardons maintenant quelques éléments concernant la manière dont se noue en début de situation, côté élève comme professeur, les éléments qui identifient les possibilités du nouveau cadre d'interactions. En particulier nous montrons ici comment ce qui est prévu par l'analyse a priori se réalise, à savoir les interventions du professeur pour souligner la particularité du modèle d'apprentissage en jeu (chapitre 4) où les questions sans réponse sont possibles.

Lorsque Valentin déclare :

> [>Valentin] : Déjà, il n'y a pas de nombre consécutif. Du coup cette question elle n'a pas vraiment de sens.

Et que le professeur répond :

> [>Le professeur] : Pas de sens à la question...Je ne sais pas si tu te rends compte mais tu es en train de dire que le prof pose des questions insensées, hein ? (Rires)

Alors sa rationalité propre (« je trouve que cela n'a pas de sens ») est immédiatement rattrapée par les habitudes didactiques : un professeur pose des questions sensées :

> [>Valentin] : Ça veut peut-être dire que je dois mal la comprendre.

Nous rajoutons ici que le professeur insiste intentionnellement sur le caractère étonnant de ce « non-sens » car son institutionnalisation prévue va mettre en évidence de nouvelles habitudes : on peut rencontrer des questions sans réponse.

Maxime ensuite déclare :

> [>Maxime] : Moi, en fait, quand j'ai lu votre question, je me suis dit, le prof il va encore nous

sortir quelque chose d'absurde pour trouver un moyen que ce soit vrai. /…/

Maxime, plutôt que d'envisager le jeu comme un problème dont il peut avoir raison, interprète d'abord le jeu comme un piège potentiel du professeur, c'est-à-dire davantage en termes de d'intention du professeur que de questionnement mathématique. Le professeur continue de relever et d'envoyer les messages qui vont lui permettre, à la fin, d'expliquer les nouveaux termes de l'activité de l'élève :

> [>Le professeur] : Ah oui je comprends. Alors première chose que dit Maxime : Le prof est piégeur. Vous vous êtes lâchés, il y en a un qui dit que le professeur pose des questions insensées, l'autre le prof pose des pièges. /…/

Lors de l'institutionnalisation, le professeur va expliquer que les questions sans réponse font partie du jeu qu'il propose :

> [>Le professeur] : Alors il faut répondre à cette question-là. En fait la première chose qu'on va apprendre avec cette conjecture c'est que on ne se mettra pas d'accord sur une conjecture comme ça, c'est fondamentalement impossible de se mettre d'accord tant qu'on n'a pas précisé ce que veut dire consécutif, et ce que veut dire nombre, de quels nombres on parle. Et ici ce n'est pas clair. Ni pour l'un, ni pour l'autre.
>
> [>Hadrien] : C'est fait exprès ?
>
> [>Le professeur] : Oui bien sûr que c'est fait exprès ! Pour qu'on se rende compte que la seule position qui est tenable ici c'est de dire : moi je ne peux pas répondre ici à une question comme ça tant que je ne sais pas ce que consécutif veut dire.

Dans cet épisode de la question insensée, il se joue deux aspects. Le premier aspect concerne la possibilité nouvelle de rencontrer des questions sans réponse, et d'une certaine manière de rencontrer des questions insensées. En soulignant dans le dialogue, le caractère inhabituel de telles déclarations sur le sens et en leur donnant force de légitimité dans l'institutionnalisation, le but est non seulement de pointer que certaines questions n'ont intrinsèquement pas de sens mais surtout que cette question du sens est centrale. Hadrien demande une confirmation du nouveau jeu : « c'est fait exprès ? ». C'est là qu'intervient le deuxième aspect qui concerne l'apprentissage de la définition, de son rôle dans l'établissement de la vérité. Pour pouvoir établir la validité d'une assertion, les objets en jeu doivent être définis. On remarquera que ces deux aspects sont traités conjointement, cela est conforme au modèle d'apprentissage (chapitre 4) qui place l'activité mathématique comme objectif prioritaire et la question du sens comme un moyen pour la susciter.

b) Compte rendu succinct de la deuxième partie

Nous ne nous appesantirons pas sur cette partie. Comme prévu tout le monde pense que la conjecture C2 est fausse. Les trois arguments prévus pour la fausseté de C2 sont donnés : deux nombres consécutifs dans **N** sont forcément distincts d'après la définition donnée ; deux nombres consécutifs s'écrivent n et n+1 et sont donc distincts ; un contre-exemple. L'institutionnalisation sur les règles de la vérité d'une implication est réalisée.

c) Analyse a posteriori de la troisième partie

Dans la troisième partie, les élèves sont partagés à moitié entre Faux et Autre. Le débat qui a lieu progressivement fait émerger un conflit entre ceux qui pensent que c'est faux et ceux qui

se sont mis dans Autre. Ces derniers ne votent pas vrai car ils sont seulement convaincus que C3 n'est pas fausse. Voici les arguments utilisés pour le Faux :

- F1 : Si on prend deux nombres alors on peut toujours en mettre un autre entre les deux
- F2 : Ce n'est pas possible que deux réels soient consécutifs
- F3 : Deux nombres consécutifs sont par définition distincts donc ils ne sont pas égaux
- F4 : la définition ne marche pas pour les réels

Voici les arguments utilisés pour Autre qui souvent justifient que ce n'est « pas faux » :

- V1 : En réponse à F1 : donc c'est un hors-sujet
- V2 : Il n'y a que des hors-sujets, donc pas contre-exemple, donc ce n'est pas faux.
- V3 : On ne peut pas trouver de réels consécutifs donc ce n'est ni vrai, ni faux.

On peut voir dans ces arguments que la possibilité d'intercaler un nombre entre deux autres distincts est devenue une évidence, aussi bien pour ceux qui pensent que c'est faux que pour les autres. Mais personne ne va jusqu'à dire que C3 est vraie. En fait, il parait partagé par tous (Autre comme Faux) que puisqu'il n'y a pas d'exemple, on ne peut pas dire que c'est vrai. Ce peut être interprété comme le fait de rester dans une rationalité pragmatique ou empirique où l'exemple joue un rôle important pour la vérité. Cependant, si l'on ne voit pas arriver l'utilisation des règle logiques (rationalité théoriques), les objets annexes eux, passent jusqu'à la rationalité théorique (exemple, contre-exemple, et hors-sujet).

On remarquera que dans le débat la nature des nombres réels est discutée et en particulier on voit apparaitre une complexification progressive des nombres envisagés et de leurs propriétés :

Juliette commence à envisager les nombres « qui se terminent » (partie décimale finie) :

> [>Juliette] : C'est deux nombres qui se terminent donc entre deux nombres qui se terminent, on peut mettre un autre nombre entre les deux. Par exemple, entre 2,3 et 2,4 on peut mettre 2,35.

Puis les nombres entiers comme une manière de rendre C3 vraie :

> [>Juliette] : On pourrait dire qu'il n'y a de nombres consécutifs que si on donnait un ensemble de nombres et donc on a 1, 2, 3, 4, 5 on aurait un ensemble de nombres.

Maxime réclame une définition des nombres réels :

> [>Maxime] : Ben je pense que comme d'habitude, il faudrait une définition de nombres réels.

Et Marine envisage les nombres réels « qui ne se terminent pas » ce à quoi Maxime répond qu'il y a aussi ceux qui se terminent qui sont réels :

> [>Marine] : deux nombres réels ne peuvent pas être consécutifs parce que s'il y en a un qui ne se finit pas, on peut pas ???? un nombre qui se finit à un nombre qui ne se finit pas.
>
> [>Le professeur] : D'accord, Ok. Oui alors quand tu dis se finir tu parles de la partie décimale. La partie décimale ne s'arrête pas et dans ce cas-là trouver un nombre consécutif à ça c'est difficile. Ou pas possible, carrément. Hein ?
>
> [>Marine] : Ouais.
>
> [>Le professeur] : Alors Maxime.
>
> [>Maxime] : Moi je vais juste mettre une nuance à ce qu'a dit Marine. Elle a dit: "les nombres

réels ne se finissent pas". C'est certains nombres réels se finissent et certains nombres réels ne se finissent pas. Ce n'est pas tous les nombres réels ne se finissent pas.

d) Conclusions sur la deuxième situation

Dans cette deuxième situation, on peut remarquer l'enrichissement d'un point de vue des niveaux de rationalités des objets annexes mobilisés : on passe des assertions concernant des nombres et leur propriété au statut logique de ces énoncés : exemples, contre-exemples ou hors-sujets. Cet enrichissement s'effectue comme prévu à travers le passage du milieu subjectif au milieu de référence. En effet, les premières interventions concernent effectivement des visions personnelles des différents objets (milieu subjectif), puis progressivement ces interventions mobilisent des objets ayant un statut plus théorique (exemples, contre-exemples, hors-sujet). Mais la règle de validité d'une assertion (pas de contre-exemple) n'est pas mobilisée au cours du débat. Cependant le niveau de rationalité atteint sur les objets annexes permet une institutionnalisation dans de bonnes conditions. Il ne s'agissait pas, effectivement, que le débat mène forcément à l'adoption collective, ni même locale, de la vérité de C3, mais seulement qu'il prépare un niveau de rationalité suffisant pour l'institutionnalisation.

II.3 Analyse a posteriori de la troisième situation

a) Description du déroulement

Dans cette situation sont étudiées les quatre questions suivantes :

Question 1 : 2 et 6 sont-ils de proximité maximale dans **N** ?

Question 2 : Trouvez deux nombres entiers de proximité maximale dans **N**.

Question 3 : 2 et 3 sont-ils de proximité maximale dans **R** ?

Question 4 : Trouvez deux nombres réels distincts de proximité maximale dans **R**.

Dans la première partie du débat (C1, C2, C3) il y a une élucidation systématique de tous les termes de la définition. En particulier, sont questionnés, les variables, l'ensemble de nombres K, epsilon, le strictement supérieur et la distance, mais aussi la différence entre la définition de proximité maximale et nombres consécutifs. Chacun de ces termes est explicité par un camarade si bien qu'en fin de discussion tout le monde se met d'accord sur C1, C2, C3.

Dans la deuxième partie de la situation (C4), on se demande s'il y a des nombres consécutifs dans **R**. Beaucoup pensent qu'il n'y en a pas. Seuls deux hésitent, l'une ne sait pas et l'autre ne comprend pas comment une définition générale de nombres consécutifs pourrait ne correspondre à aucun élément puisqu'il n'y en a pas dans **R**. Cette dernière position est loin d'être anodine puisqu'elle soulève un débat fondamental et historique pour la définition : doit-on exiger d'une définition qu'elle prouve l'existence de ce qu'elle définit ? Nous n'avons pas retenu cette caractéristique des définitions (conception aristotélicienne ; Cf. Ouvrier-Buffet 2003) pour l'étudier dans notre thèse, mais notons au passage qu'elle émerge spontanément d'un débat. La discussion qui a alors lieu commence par une justification du fait qu'il n'existe pas de tels nombres. Mais rapidement la possibilité que ces deux nombres puissent être égaux voit le jour. Certaines résistances à cette possible égalité s'expriment en lien avec l'égalité algébrique : « a et b ne peuvent être égaux puisque epsilon est strictement positif ». La discussion s'oriente alors

vers la possibilité qu'il existe des nombres de proximité maximale ou pas. Pour structurer le débat le professeur propose de statuer sur les conjectures correspondantes aux prises de positions. Mais en voulant respecter trop la forme des arguments donnés par les élèves (il reprend à son compte certaines propositions pour la rédaction des conjectures), il déproblématise le cas de l'égalité de l'analyse (nous verrons cela en détail ultérieurement). Le débat finit par aboutir mais l'on peut se demander si une partie de celui n'a pas esquivé le cœur du problème.

b) Analyse du point de vue du savoir visé

- Egalité de l'analyse versus égalité algébrique

Ce questionnement de l'égalité intervient au cours de l'étude de la quatrième question comme cela a été prévu. Il faut distinguer en effet deux enjeux dans cette quatrième question : le premier consiste à valider la possibilité des nombres d'être de proximité maximale, le deuxième consiste à démontrer que deux nombres de proximité maximale sont égaux. Le premier enjeu doit évidemment être résolu avant le second et ce premier enjeu correspond à confronter l'égalité algébrique à l'égalité de l'analyse, l'une exigeant que la distance de deux nombres soit nulle, l'autre exigeant « seulement » que cette distance soit infiniment petite.

La première impression collective est qu'il n'existe pas de nombre de proximité maximale dans R. Nous pensons que cela provient de la situation des nombres consécutifs dans R où la conclusion est que des nombres consécutifs dans R n'existent pas :

> [>Baptiste] : Ouais, ouais. Du coup proximité maximale ça entend qu'il doit y avoir un nombre qui ne peut pas s'intercaler entre les deux. Et moi cette définition elle sonne comme deux nombres consécutifs.

Mais dans le cas de la proximité maximale, la définition n'exclut pas la possibilité de l'égalité comme pour les nombres consécutifs, si bien que la possibilité va être identifiée par Evann puis Quentin :

> [>Evann] : Ils ne disent pas que c'est pas égal. Ils ne disent pas que les deux chiffres sont différents. Ben, non. Ce n'est pas marqué. /…/ Et si a peut-être égal à b ça veut dire du coup que la proximité maximale elle existe mais sinon il n'y en a pas.

A ce moment-là, d'autres élèves expriment leur désaccord en invoquant implicitement l'égalité algébrique qui ne s'obtient que par une distance nulle, par exemple Maxime :

> [>Quentin] : J'ai voté Autre pour dire, il y en a. Parce que dans la définition de proximité maximale, on ne dit pas que a et b sont distincts. Donc si on a trois et trois c'est deux nombres qui sont de proximité maximale.
>
> [>Le professeur] : Alors toi tu es dans Autre et tu dis : "il y en a !". Trois et trois par exemple. a égal trois et b égal trois. Oui ? Maxime ?
>
> [>Maxime] : Ce que vient de dire Quentin est Faux. Enfin ça peut être vu comme ça, mais sachant qu'on a pas le droit, enfin, il faut que la différence soit forcément positive, enfin il ne faut pas que ce soit égal à zéro...

C'est alors Margot qui va défendre la possibilité de l'égalité :

> [>Margot] : Ça dépend, oui du coup a est égal à b, donc c'est possible parce que si a égal b la distance entre a et b serait zéro et le nombre...La distance, elle est censée être plus petite que n'importe quel nombre strictement positif de K qui ici est R, le nombre le plus petit strictement positif de R est plus grand que zéro. Donc du coup la distance entre a et b sera plus petite que ce

nombre-là.

Cette réponse ne clôt pas le conflit qui reprend un peu plus tard avec Loïc :

> [>Loïc] : Moi c'est pour contredire Margot. C'est parce qu'elle dit que trois et trois sont de proximité maximale mais si on prend trois et trois, la distance est égale à zéro et ils disent que la distance entre a et b doit être plus petite ou égal à epsilon. Sauf qu'epsilon il est strictement supérieur à zéro.

Comme prévu par l'analyse a priori, les différentes conceptions de l'égalité s'affrontent ici. Les élèves ont les moyens de résoudre cette contradiction qu'ils affrontent puisqu'il suffit de vérifier que deux nombres égaux ont bien une distance majorée par n'importe que nombre strictement positif de R, comme le dit Margot. Mais d'une part cet argument peine à convaincre et d'autre part le professeur va empêcher la résolution de ce conflit par deux décisions successives, nous verrons cela plus tard. Cependant, ces décisions conduisent malgré tout à problématiser la démonstration de l'égalité.

- Egalité des nombres réels

Le professeur, suivant la suggestion de Margot, a, en fait, rajouté à la définition de nombres de proximité maximale, le fait que a et b doivent être distincts et ceci élimine la question débattue précédemment et ouvre la voie à la démonstration qu'il n'existe pas de nombres de proximité maximale quand ils sont distincts :

> [>Matthieu] : Étant donné que a et b ne sont pas égaux, a- b ne peut pas être nul.
>
> [>Le professeur] : Ah a différent de b donc la distance entre a et b est non nulle c'est ça ?
>
> [>Sébastien] : Oui c'est ça.
>
> [>Le professeur] : Donc ?
>
> [>Sébastien] : donc la distance entre a et b elle va toujours être différente de zéro et si on a … on aura toujours la possibilité de mettre un nombre plus petit que la distance a, b qui n'atteindra pas le zéro.

Mais cette démonstration ne convaincra pas totalement et certains pour qui cette démonstration n'est pas une preuve :

> [>Quentin] : Moi je suis d'accord avec ce qu'a dit Nathan. Et je veux dire que : est-ce que c'est parce qu'on ne peut pas en trouver qu'il n'y en pas ? Parce que depuis tout à l'heure les arguments qu'on a dans il n'y en a pas, c'est parce qu'on ne peut pas en trouver. Est-ce que si on ne peut pas en trouver il n'y en a pas ?
>
> [>Le professeur] : Il y a quelqu'un qui veut te répondre, Sébastien ?
>
> [>Sébastien] : Dans les nombres consécutifs, on a fait la même chose, on a dit qu'on ne pouvait pas trouver de nombres consécutifs dans les réels donc on a dit qu'il y en avait pas.
>
> [>Louis] : C'est tout simplement la logique mathématique qui est écrite sur le papier qu'on nous a distribué en cours.

Le professeur va ensuite faire une institutionnalisation, en reprenant la démonstration proposée et en lui donnant le crédit de l'institution, puis il demandera ce que l'on peut conclure lorsque deux nombres a et b sont de proximité maximale dans **R**, en reprenant la définition initiale, c'est-à-dire sans le mot « a distinct de b ». Les élèves répondent en chœur à ce moment-là : « a et b sont égaux ». Il institutionnalise alors l'égalité des nombres réels.

c) *Analyse selon les critères du modèle d'apprentissage*

- Rôle du professeur

Lors de la discussion à propos de la quatrième question, le professeur prend deux décisions qui empêchent la résolution du conflit entre égalité algébrique et égalité de l'analyse. La première décision consiste à proposer un vote inapproprié. La question étudiée est de savoir s'il existe ou pas des nombres de proximité maximale. Après avoir proposé un vote entre « il y en a » et « il n'y en a pas » qui a initiée une discussion franche et contradictoire, le professeur soumet, à nouveau, au vote la question en remplaçant la position « il y en a » par « ça dépend » en reprenant la proposition d'un élève. Or cette position « ça dépend » ne permet plus d'exprimer les conflits puisqu'elle ne s'oppose à aucune autre position. Le débat perd de sa vigueur. Margot suggère alors, pour sortir de l'impasse, de modifier la définition :

> [>Margot] : Du coup pourquoi dans la propriété on fait pas a et b distincts ?

Le professeur va s'emparer de cette proposition et soumettre la même question avec cet ajout. Mais cette décision va également empêcher la résolution du conflit en le faisant disparaitre. En effet, puisque le cas de l'égalité n'est plus concerné, la nouvelle définition l'exclut, il n'y a plus d'objet de désaccord. Mais, de ce fait, la distinction entre égalité algébrique et égalité de l'analyse n'est plus en jeu.

- Evolution de la rationalité

Le professeur garde une neutralité tout au long du débat en termes de rationalité. Ses décisions sont effectuées à partir de propositions d'élèves. Les élèves réalisent les transitions de rationalité qui les conduisent jusqu'à démontrer qu'il n'existe pas de nombres de proximité maximale, ce qui conduit directement à l'égalité des réels.

- Interactions entre élèves

Nous avons pu constater dans les extraits précédents que le niveau d'interaction entre les élèves est élevé. Nous avons aussi vu que la question posée et la forme des votes proposée est déterminante dans cette interaction. Soit cette question et les votes proposés permettent de mettre en évidences des positions contradictoires, ce qui donne lieu alors à des échanges riches qui visent les aspects principaux en jeu, soit elles ne le permettent pas, et dans ce cas ces échanges n'ont plus la même intensité. On peut mesurer alors l'importance du questionnement et la sensibilité du dispositif à celui-ci.

d) *Conclusions*

Ce qu'on a pu constater dans cette troisième partie, c'est l'extrême sensibilité du déroulement du débat à l'animation du professeur. Celui-ci adopte une attitude neutre mais néanmoins est contraint de prendre des décisions pour animer le débat. Ces décisions dans notre cas sont peu éclairées par les enjeux réels du débat, ce qui va notablement appauvrir le débat. Car le débat qui a lieu est particulièrement riche malgré ces maladresses et suit remarquablement l'analyse a priori prévue. En particulier, ce débat s'attaque aux difficultés principales sur le sujet, et cela même si l'animation involontairement conduit à abréger trop rapidement certains conflits (égalité algébrique versus égalités des réels) et à empêcher la poursuite de cet effort de clarification

des élèves. Cependant, on observe bien, le passage à une rationalité théorique où la démonstration de l'égalité des réels est réalisée par les élèves.

III conclusions sur la situation des nombres

L'ensemble des trois situations conduit bien à démontrer l'égalité des réels qui en était l'objectif fondamental. Le savoir essentiel et transversal à ces trois situations qui permet d'aboutir à cette démonstration est celui de la possibilité d'intercaler un réel entre deux autres réels distincts. L'appropriation de cet outil est réalisée à travers une progression qui en généralise l'usage. Tout d'abord dans la question du plus grand nombre de l'intervalle [2 ;3[, il permet, au professeur, de démontrer qu'un tel nombre n'existe pas, dans un contexte strictement numérique qui en facilite l'accès. Puis dans la situation des nombres consécutifs, les élèves adoptent cet argument pour démontrer que de tels nombres n'existent pas dans R, au sens de la définition donnée, dans un contexte plus général faisant intervenir des variables. Enfin, dans la situation des nombres de proximité maximale, les élèves, à nouveau utilisent cet argument pour démontrer le cas d'égalité des réels. L'évitement dû aux décisions d'animation du professeur qui a empêché de distinguer vraiment l'égalité des réels et l'égalité algébrique n'a finalement pas été un obstacle pour cette démonstration. Mais cet objectif secondaire, la distinction entre les deux, n'est pas véritablement atteint. Cela peut contribuer à générer des résistances à l'usage de l'égalité des réels dans la mesure où cette égalité des réels suppose de pouvoir envisager l'égalité autrement qu'une différence nulle. Nous étudierons cette question lorsque dans la suite de l'ingénierie, en particulier lors de la situation sur la limite.

Cette situation des nombres avait pour but d'amorcer le travail suivant deux composantes de l'activité mathématique : la logique et la définition. Les éléments de logique (exemple, contre-exemple, hors-sujet et règle de validité d'une conjecture en si alors) notamment visés par la situation des nombres consécutifs ont été institutionnalisés. Il s'agit de donner les éléments minimaux de logique pour la suite de l'ingénierie qui nécessite d'évaluer la validité de conjectures complexes. Enfin, la question de la définition a été abordée à plusieurs reprises, en particulier lors de la situation des nombres consécutifs où le défaut de définition rendait impossible une conclusion partagée. A ce moment-là, on a vu les élèves eux même demander les définitions manquantes. Les institutionnalisations réalisées ont alors servi à souligner le rôle de la définition dans l'établissement de la vérité.

Les institutionnalisations successives ont porté prioritairement sur les connaissances mathématiques (en particulier sur la procédure de démonstration liée à l'utilisation de la moyenne deux nombres pour les « séparer ») mais aussi aux processus de l'activité mathématique. Ainsi les aspects fondamentaux de notre modèle ont pu être mis en évidence : éléments de logique, rôle de la définition, et validation. Ces institutionnalisations ont, conjointement aux aspects mathématiques, pu traiter des aspects plus didactiques. La surprise des élèves de pouvoir rencontrer des questions sans réponse, par exemple, a pu donner lieu à une justification purement mathématique mais aussi concernant le type d'activité attendu de la part des élèves. Ce type d'activité inclut désormais un questionnement sur le sens des objets en jeu dans les questions abordées.

Nous constatons que l'analyse selon les milieux régulés et de rationalité est fonctionnelle. La trajectoire des débats erratiques à travers ce modèle s'éclaire : on voit clairement dans le milieu

subjectif le partage d'une problématique à travers l'expression d'interprétations personnelles du problème, et le début de l'affrontement des positions antagonistes puis une focalisation sur la validation afin de résoudre les conflits apparus. Parallèlement les objets annexes de la situation sont appréhendés selon des niveaux de rationalités qui évoluent vers une rationalité théorique, permettant à l'objet visé par la situation d'évoluer à son tour. Quand l'objet visé n'atteint pas la rationalité théorique, l'environnement constitué des connaissances mises en œuvre le rend quand même accessible lors de l'institutionnalisation.

Nous avons remarqué avec la troisième situation un phénomène lié à l'animation du professeur. La gestion, par le professeur, du débat de cette troisième situation traduit une difficulté de perception des enjeux épistémologique en situation. A deux reprises, le professeur, voulant certainement respecter une forme de neutralité, prend les propositions d'élèves et en fait des objets de débat. Ce geste permet bien de montrer à la classe qu'elle a le débat en main, qu'elle n'est pas manipulée par un professeur qui ne cherche qu'à lui faire dire ce qu'il veut entendre. Cette certitude de la classe est fondamentale pour respecter le besoin d'équilibre entre le caractère adidactique de la situation et la nécessaire animation. Cependant ce geste, soit reprendre les propositions des élèves, conduit ici à compliquer sa résolution ou au contraire à vider le problème de sa substance. Dans les deux cas, malgré une activité intense de la classe, les enjeux fondamentaux bien que discutés ne sont pas assez clairs pour que le débat débouche véritablement sur un constat de dépassement du conflit (il a été en partie évité). Compte tenu de l'engagement évident des élèves, on aurait pu attendre ce dépassement de cette partie de la troisième situation qui visait la distinction entre égalité algébrique et égalité des réels. Nous soulignons là, la sensibilité du dispositif à l'animation du professeur, mais aussi sa stabilité, dans la mesure où malgré ces aléas, les difficultés sont essentiellement affrontées et l'on voit de véritables transitions de rationalité adidactiques pour l'objet principal de la situation, l'égalité des réels.

Cette situation des nombres vise à établir les connaissances nécessaires pour la suite de l'ingénierie. Deux niveaux de connaissances sont en jeu : celles qui concernent l'égalité des réels et la propriété fondamentale ; entre deux réels distincts il y en a un troisième ; et les connaissances relatives à la rationalité théorique : notion de logique, notion de définition, et notion de validation. Ces objectifs ont été travaillés conjointement. Il s'agissait de commencer à éprouver l'efficacité de cette rationalité théorique sur des problèmes concernant les nombres. Evidemment ce travail n'est qu'un début et cette rationalité est appelée à s'affermir progressivement lors de sa mobilisation ultérieure, mais l'on a initié, par cette situation des nombres, les éléments nécessaires pour changer la façon d'aborder les problèmes, de se convaincre, et de faire appel à des connaissances communes pour régler les conflits. Nous serons attentifs, dans les situations suivantes de l'ingénierie, aux indices qui peuvent indiquer que cette situation a bien initié le développement des connaissances nécessaires au travail dans une rationalité théorique.

Le chapitre suivant a pour objet d'étudier les difficultés des élèves concernant de l'interprétation de la double quantification. Les résultats de cette étude serviront à l'élaboration de la situation expérimentale de la double quantification.

Chapitre 6 Retour sur les difficultés d'interprétation de la double quantification

Concevoir une situation didactique amenant les élèves au formalisme de la définition de limite, mais de manière plus générale amener les élèves à appréhender les énoncés multi quantifiés présents partout en mathématique et particulièrement en analyse, implique naturellement d'étudier les difficultés d'interprétation de la double quantification. Or ces difficultés sont déjà l'objet de nombreuses études. L'article de Dubinsky et Yiparaki (2000) fait référence dans la littérature à ce sujet. Or nous avons vu que certaines des modalités de l'expérimentation de Dubinsky & Yiparaki (2000) semblent pouvoir être questionnées. Aussi nous souhaitons dans ce chapitre revenir sur les hypothèses d'interprétation de la double quantification issues de ces travaux. Autrement dit, la double quantification de type EA est sujet à des interprétations inversées contrairement à celle de type AE. Il s'agit non seulement de tester ces hypothèses à nouveau pour les conforter le cas échéant, d'identifier les variables didactiques pertientes, mais aussi d'essayer de mieux cerner l'origine des difficultés observées afin de pouvoir concevoir une situation didactique pour la double quantification. Cette étude se présentera sous la forme des résultats obtenus grâce à plusieurs questionnaires (Q1, Q2, Q3, Q4) sur la même classe que l'on appellera échantillon initial (ce n'est pas la classe expérimentale) qui donnent crédit aux résultats de Dubinsky et al (2000). Ces résultats indiquent également que d'autres variables didactiques sont susceptibles de jouer un rôle dans cette interprétation, neutralisant les difficultés ou bien les augmentant. Suite à cette première série de questionnaires, une hypothèse de prévalence d'énoncés de types EA sur les énoncés de type AE, hypothèse susceptible d'expliquer cette interprétation asymétrique, est mise à l'épreuve sur le manuel de lycée. Enfin, un questionnaire Q5 est donné à la classe expérimentale[58] des situations sur les nombres, la double quantification et sur la limite, afin de vérifier que son profil correspond bien aux types d'interprétation standard observés. Mais cela n'est pas le cas, aussi afin de déterminer l'atypicité de cette classe, le même questionnaire est donné à plusieurs autres classes du même niveau, cette étude (182 élèves en tout). Les résultats obtenus remettront finalement en cause la double hypothèse d'interprétation conforme des énoncés de type AE et inversée de ceux de type EA, et mettrons en évidence le rôle de variable didactiques dans ces diverses interprétations.

I Préquestionnaires Q1, Q2, Q3 et Q4

Quatre questionnaires successifs sont donnés à la même classe de TS comportant trente-trois élèves afin de progressivement cerner les difficultés d'interprétation des énoncés doublement quantifiés.

Plusieurs résultats sont mis en évidence, en particulier des résultats concernant la méthodologie de ce type de questionnaire ayant pour objet de discriminer une interprétation inversée des énoncés doublement quantifiés et de celles qui sont conformes. En outre, ces questionnaires mettront en évidence le rôle joué par des variables didactiques dans la qualité d'interprétation

[58] Nous entendons par classe expérimentale la classe sur laquelle nous avons expérimenté toute la série de situation didactique et tous les questionnaires.

des énoncés. Ainsi, les hypothèses de Dubinsky et al. seront nuancées dans la limite de l'effectif de l'échantillon questionné.

Ces questionnaires se concentrent à partir de Q2 sur les énoncés doublement quantifiés qui se sont révélés difficiles à interpréter dans Q1 contrairement aux autres. Ces résultats initiaux semblent conforter l'hypothèse de Dubinsky et al. Nous nous intéresserons spécifiquement aux énoncés doublement quantifiées[59] de type « Il existe...tel que pour tout... » (notée EA[60] notation provenant de l'anglais Exists...All) et « Pour tout ...il existe... » (notée AE, notation provenant de l'anglais All...Exists…).

Considérant l'interprétation inversée d'énoncé de type EA en type AE, nous sommes amenés à donner l'appellation « Faux jumeaux ». Par exemple, à l'affirmation A4 de Q2 : « Il existe un nombre réel c tel que pour tout nombre réel b, on a c > b », il est répondu « Vrai en prenant c = b+1 ». En fait cette réponse démontre la vérité de l'énoncé "inversée" : « Pour tout nombre réel b, il existe un nombre réel c tel c >b », c'est cet énoncé que nous appellerons le faux jumeau de A4. Cette dénomination nous permet d'exprimer que le fait qu'il existe une relation au niveau de la validité d'un énoncé de type EA et de son faux jumeau de type AE. Quand l'énoncé de type EA est vraie alors son faux jumeau AE est vrai aussi et par contraposée si un énoncé de type AE est faux alors son faux jumeau EA aussi. Cela signifie que si une affirmation vraie de type EA est interprétée comme son faux jumeau et que celui-ci est bien interprété alors du point de vue de la seule validité cette affirmation sera bien interprétée (comme vraie). Cela signifie que pour réaliser un questionnaire discriminant de l'hypothèse de Dubinsky, il faut choisir des énoncés qui n'ont pas la même interprétation du point de vue de la validité lorsque ceux-ci sont interprétés comme leur faux jumeau. En particulier Il s'agit de faire interpréter des énoncés de type EA faux mais ayant un faux jumeau AE vrai, ou bien un énoncé AE vrai ayant un faux jumeaux EA faux. Cette remarque ne concerne a priori que la validité, et la justification associée devrait pouvoir permettre d'identifier l'inversion d'interprétation. Ce n'est pas, en fait, toujours le cas, par exemple, lorsque pour l'énoncé A3 de Q2 : « Il existe un nombre réel a tel que pour toute fonction f définie sur R, on a f (a) > 2 », on obtient l'argument correct « Faux en prenant f(x) = 1 », on ne peut pas savoir de quelle interprétation elle provient, celle de A3 ou celle de son faux jumeau. Cet argument est effectivement valable selon les deux interprétations. Lors de la constitution du questionnaire, Il faut donc veiller à ce que la justification soit elle-même discriminante.

Pour le questionnaire Q3, d'autres types de question sont posées, en faisant varier le contexte. Il ne s'agit plus d'énoncés concernant des variables et des fonctions mais des énoncés concernant des grilles colorées et numérotées (numérotées pour pouvoir exprimer des arguments en désignant des cases). Par exemple en prenant A3 : « Il existe une case grise telle que toute case blanche lui est voisine » :

[59] Nous regardons exclusivement les énoncés du type « pour tout x, il existe y tel que A(x ;y) » ou bien « Il existe x tel que pour tout y on a A(x ;y) » où A(x ;y) est un énoncé atomique dépendant de x et y. En particulier A(x ;y) n'est pas une proposition conditionnelle, ce qui impliquerait encore un autre niveau de difficulté.
[60] Notation utilisée par Dubinsky et Yiparaki (Dubinsky et Yiparaki 2000)

1	5	7
9	2	3
4	6	8

Figure 18 : grille du questionnaire Q3

Ce questionnaire met en évidence que d'autres variables didactiques que le type d'énoncé (AE ou EA) interviennent dans l'interprétation des énoncés doublement quantifiés : présence ou non de variable, contexte mathématique ou non, taille de l'ensemble quantifié (infini ou fini).

Au final, ces questionnaires (Q1, Q2, Q3, Q4) semblent indiquer, pour ce qui est du contexte mathématique, une forte interprétation inversée des énoncés de type EA. Pour ce qui est du contexte non mathématique, les résultats sont un peu différents de ceux de Dubinsky & Yiparaki. Pour ces derniers l'interprétation des énoncés est bien meilleure que dans le contexte mathématique mais fait déjà apparaître une interprétation peu sûre des énoncés de type EA (surtout lors de l'interview), tandis que dans notre troisième questionnaire et pour la classe interrogée, l'interprétation inversée des énoncés EA dans le contexte non mathématique est quasiment absente. Nous pensons que cette différence est liée au type d'univers invoqué par les assertions. En effet, si dans les deux cas le contexte est non mathématique, les questions dans les deux études portent sur des univers très distincts. Pour l'un, il s'agit du contexte de la vie de tous les jours, pour l'autre il s'agit d'un univers très restreint (la grille). Cela nous incline à penser que la taille de l'univers impliqué par l'énoncé joue un rôle dans la capacité d'interprétation d'un énoncé doublement quantifié.

Les auteurs concluent que l'on ne peut pas utiliser la compréhension de la double quantification issue du contexte familier pour fabriquer une situation didactique, puisque leurs résultats prouvent que cette compréhension est fragile. Au contraire, et en accord avec nos résultats, nous pensons qu'il existe un domaine du contexte non mathématique (qui reste à préciser) qui peut être mobilisé et servir d'appui pour fabriquer une situation didactique pour la double quantification. Nous vérifierons ces résultats avec le questionnaire Q5 pour nous assurer que la classe qui expérimentera l'ensemble des situations (nombres, double-quantification et limite) correspond effectivement aux constats réalisés pour l'échantillon de la classe ayant répondu aux questionnaires Q1, Q2, Q3, Q4. Mais préalablement à Q5 nous avons réalisé une étude complémentaire sur une hypothèse de prévalence du quantificateur universel sur le quantificateur existentiel dans les manuels scolaires, prévalence qui pourrait être un élément pour expliquer ce phénomène d'interprétation asymétrique. Cette étude et sa méthodologie sont détaillés en annexe. Nous identifions, par cette étude de quelques manuels, surtout une faible apparition du quantificateur existentiel, comparé à l'universel, et des types de rédactions qui éliminent le quantificateur existentiel. Par exemple, en utilisant la définition de suite majorée suivante « Soit M un réel, on dit qu'une suite est majorée par M si tout terme de cette suite est inférieur à M » plutôt que « Une suite est majorée <u>s'il existe</u> un nombre réel M tel que tout terme de cette suite est majoré ». Cette tendance observée a pour conséquence de réduire considérablement le nombre d'énoncés véritablement doublement quantifiés et selon l'échantillon étudié, davantage encore les énoncés de type (EA). Si l'on ne peut pas facilement mesurer les conséquences négatives d'une telle distribution asymétrique des différents types d'énoncés et de quantificateurs, on peut au moins affirmer qu'une telle distribution est cohérente avec l'asymétrie d'interprétation des

énoncés doublement quantifiés identifiée par Dubinski et confirmée par notre première étude sur une classe.

L'étude d'un questionnaire Q5 va permettre de confirmer/infirmer, la classe expérimentale, les résultats précédemment obtenus, en particulier de nouvelles variables didactiques.

II Questionnaire Q5

II.1 Un autre questionnaire, pour quoi faire ?

Suite à la série de pré-questionnaires Q1, Q2, Q3, Q4 sur la double quantification et l'étude de la littérature associée, un certain nombre d'hypothèses semblent stabilisées. Nous souhaitons maintenant vérifier si ces hypothèses se maintiennent dans la classe expérimentale avant de mener nos expérimentations sur cette classe (les questionnaires précédents ont été réalisés sur une autre classe de terminale). Et pour cela nous allons construire un nouveau questionnaire Q5. Nous en profiterons pour tester de nouvelles hypothèses. Il s'avérera finalement que les résultats obtenus sur ce nouvel échantillon sont atypiques par rapport aux hypothèses « stabilisées ». Nous serons alors amenés à proposer ce questionnaire sur un échantillon plus significatif (182 élèves) pour vérifier si ces résultats sont finalement aussi « atypiques » et remettent en cause effectivement les premières hypothèses issues des premiers questionnaires et de la littérature. Il s'agit in fine de pouvoir construire une situation didactique pour la double quantification sur les bases d'une analyse solide de l'interprétation « naturelle » de la double quantification. Il y a donc deux enjeux pour ce questionnaire : pointer l'état de la classe expérimentale et vérifier à quel point celui-ci est représentatif, c'est-à-dire envisager l'interprétation dans un cadre plus vaste que celui d'une seule classe pour identifier des « invariants ».

II.2 Questions initiales

Dans la classe questionnée sur Q1, Q2, Q3, Q4 apparaissent des résultats (questionnaire Q3) qui prouvent une sensibilité forte de l'interprétation d'énoncés doublement quantifiés au contexte. Par exemple, quand l'ensemble de définition des variables est fini (grilles 3 par 3) les énoncés de type EA sont interprétées correctement mais le sont bien moins quand l'ensemble est infini. Dans le cas infini, en effet, les énoncés de type EA sont lues de manière inversée ("il existe x tel que pour tout y" est lu comme "pour tout y il existe x"), tandis que cette inversion n'est quasiment pas effectuée en cas fini, pour ces grilles. Notons que dans les deux cas les énoncés de type AE sont interprétés correctement. Ceci est étonnant car si la différence entre un énoncé AE et un énoncé EA est comprise manifestement dans un cas (fini) on pourrait s'attendre que cette différence soit marquée aussi dans d'autres cas (infini). Nous pensons que cet apparent paradoxe pourrait nous aider à comprendre les difficultés d'interprétation de ces énoncés. Remarquons avant de poursuivre que nous distinguons les deux contextes impliqués par le cardinal des ensembles de quantification mais rien ne nous assure qu'il s'agit de la variable didactique décisive. Ce pourrait être plutôt, par exemple, la présence de variables littérales, nous y reviendrons lors de l'analyse des variables didactiques, mais provisoirement nous nous servirons du cardinal pour distinguer les deux contextes en jeu.

Pour tenter de résoudre ce paradoxe, nous allons aborder deux dialectiques complémentaires : syntaxique/sémantique et uniforme/ponctuel.

Tout d'abord, remarquons une différence entre les registres impliqués dans le questionnement pour les deux cas : dans le cas infini, il s'agit d'énoncés mathématiques portant sur des variables littérales définies sur des ensembles infinis (par exemple : Il existe un réel x tel que pour tout réel y on a x>y »), tandis que dans l'autre cas, il s'agit d'énoncés portant sur des colorations de grilles trois par trois. Nous pensons que le premier cas (énoncés mathématiques) sollicite essentiellement un décodage de type syntaxique car les variables littérales en jeu ne représentent a priori aucun phénomène concret. Voilà les questions qui peuvent être envisagées dans une interprétation de type sémantique : Que signifie « il existe x » ? Existe-t-il un tel x ? Que signifie que « pour tout y, x>y » ? Pour répondre de manière adéquate à ces questions il faut mettre en œuvre un processus adapté d'instanciation des variables. On remarquera dans ce jeu question/réponse que les questions sont naturellement données par l'énoncé (qui est donné), tandis que les réponses proviennent d'une règle syntaxique d'interprétation (qui fait partie d'une culture mobilisable ou non).

Dans l'autre cas (par exemple : Il existe une case grise telle que toute case blanche lui est voisine), nous pensons que l'énoncé sollicite beaucoup plus une approche sémantique dans le mesure où les objets concernés ont une représentation concrète : l'ensemble des cases blanches est immédiatement accessible ainsi que les positions respectives des cases grises par rapport aux cases blanches. Voilà les questions qui peuvent se poser alors dans une interprétation de type sémantique : où sont les cases grises-blanches ? Y a-t-il une grise à coté de toutes les blanches ? Dans ce cas la réponse à ces questions est une interprétation du coloriage donné selon ces questions, ce qui est élémentaire pour une grille trois par trois. On a donc ici une autre configuration : si les réponses sont évidentes, ce sont les questions qui, si elles veulent traduire l'affirmation, pourraient être difficiles à exprimer, en tout cas ce sont les questions qui sont décisives. Or il se trouve que précisément ces questions ne se fondent plus seulement sur une interprétation syntaxique mais sur une mise en relation d'un énoncé concernant la coloration et le coloriage lui-même. L'interprétation de cette conjecture s'appuie naturellement sur la représentation des objets en jeu dans la conjecture, contrairement à l'énoncé mathématique contenant des variables littérales, qui n'ont pas de réalité tangible immédiate en dehors d'un choix d'instanciation.

Cette différence pourrait expliquer à elle seule la sensibilité au contexte mise à jour et minimiser le rôle du cardinal de l'ensemble de définition des variables pour le phénomène observé. Cependant cela n'explique pas pourquoi les énoncés de type AE sont lus correctement dans les deux cas puisque a priori, la même dialectique sémantique/syntaxique est à l'œuvre. Nous aborderons cette dialectique lors de la construction de la situation pour la double quantification car nous pensons que l'interprétation adéquate d'énoncés doublement quantifiés est le résultat d'une complémentarité entre ces deux aspects.

Il nous faut maintenant aborder, d'un point de vue sémantique, la dialectique ponctuel-uniforme de la double quantification.

Pour cela, nous remarquerons qu'un énoncé de type AE (pour tout x il existe y) représente l'expression d'un phénomène ponctuel (à chaque x, je peux associer un y), tandis qu'un énoncé de type EA (il existe y tel que pour tout x) est l'expression d'un phénomène uniforme (il existe un

y qui marche pour tous les x). Cette distinction est présente par exemple sur le concept de continuité d'une fonction réelle : une fonction peut être continue sur un intervalle, qui s'exprimera par un énoncé de type AE (en fait A-AE) ou bien elle peut être uniformément continue sur cet intervalle, qui s'exprimera par un énoncé de type EA (en fait A-EA).

Notons l'énoncé qui exprime un phénomène uniforme U = « il existe y de Y tel que pour tout x de X on a R(x;y) » (où R est une relation logique à deux variables et X et Y les ensembles de définition de x et y) et celle qui exprime un phénomène ponctuel P =« pour tout x de X il existe y de Y tel que on a R(x;y) ». Avec ces notations, on sait de manière générale que U implique P. Ainsi si une fonction est uniformément continue sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle. Mais évidemment P n'implique pas U de manière générale. Par exemple une fonction continue sur un intervalle n'est pas forcément uniformément continue sur cet intervalle. Or il se trouve que dans certaines conditions on a aussi P implique U. Par exemple, un théorème affirme que « Une fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle ».

C'est le cas aussi si la relation R est une relation d'ordre, que X et Y sont deux sous-ensembles d'un ensemble totalement ordonné et ayant un plus grand élément. C'est en particulier le cas si la relation R est la relation « est supérieur ou égal à » et X et Y deux sous-ensemble finis de **R**, ou deux intervalles fermés bornés de l'ensemble des nombres réels. On a alors, dans ces cas, P implique U. Cela signifie alors que d'un point de vue logique, dans ce cas-là, P équivaut à U. Ceci peut être une explication de la rupture du cas fini et infini, puisque dans le cas fini (sous certaines conditions sur la relation R) il y a équivalence entre P et U, mais pas en cas infini (pour les entiers) et non fermé bornés (pour les réels). Ce qui revient à dire que la compréhension de U comme l'expression de l'uniformité n'est pas nécessaire dans les cas finis (et pour certaines relations R) pour le distinguer de P du point de vue uniquement de la validité.

Remarquons que dans les cas finis expérimentés (où R est « est une case voisine de ») les justifications données pour la validité des énoncés de type AE correspondent à des justifications adaptées à ce type d'énoncés, et c'est aussi le cas pour les énoncés de type EA en cas fini. Ceci pourrait être le fruit de l'équivalence de P et U mentionnée plus haut justement dans les cas finis mais ce n'est pas le cas ici. En effet dans ce cas particulier, l'ensemble de définition des variables (les cases de la grille) a beau être fini, on n'a pas l'équivalence entre P et U. Ceci est dû à la relation utilisée (relation de voisinage) qui, entre autres, n'est pas une relation d'ordre. On peut, pour ces deux raisons, affirmer que les relations entre P et U (ponctuel et uniforme) en cas fini et infini n'expliquent pas le phénomène observé, à savoir une interprétation différente dans les deux cas.

Nous tenons à ajouter que l'uniformité en mathématique revêt une acception très spécifique, en effet on pourrait, hors mathématiques, facilement qualifier d'expression d'un phénomène à caractère uniforme l'énoncé qui dit « pour tout x, il existe un y ». Il y a bien une propriété uniforme (au sens commun), c'est-à-dire partagée par tous, chaque x a son y. Ce n'est pas l'uniformité entendue habituellement en mathématiques.

II.3 Variables didactiques

Nous allons reprendre ici l'ensemble des variables didactiques que nous pensons pertinentes pour un questionnaire concernant la quantification. Certaines de ces variables ne seront pas retenues pour fabriquer le questionnaire Q5 car elles ont été déjà testées lors des pré-questionnaires. Nous tenons cependant à les faire apparaître pour justifier leur absence dans Q5. Voici l'ensemble des variables didactiques disponibles :

V1 : Nombre de quantificateurs impliqués différents (1 ou 2).

V2 : Ordre des quantificateurs (AE ou EA)

V3 : Domaine mathématique (oui ou non)

V4 : Registre du langage (usuel ou symbolique)

V5 : Validité de l'énoncé (Vrai ou Faux)

V6 : Type de langage (naturel ou mathématique)

V7 : Justifications (avec ou sans)

V8 : Cardinal de l'ensemble des valeurs des variables quantifiées (fini ou infini)

V9 : Domaine familier (oui ou non)

V10 : Objet de la demande de la validité (affirmations ou arguments)

V11 : Façon de demander les justifications (prouve ou justifie)[61]

V12 : Présence de variables littérales (oui ou non)

Regardons pour chacune de ces variables son intérêt particulier pour notre étude et l'élaboration du questionnaire Q5.

- V1 : Nombre de quantificateurs impliqués

La présence de quantificateurs dans des cas simples, où ils n'interviennent « qu'isolés », peut nous renseigner, pour ce niveau « élémentaire », et nous permettre de repérer des éventuelles difficultés d'interprétation de ceux-ci, et de mieux distinguer la nature des difficultés pour les cas plus complexes où deux quantificateurs interviennent. Nous pensons que le quantificateur existentiel est le plus susceptible de générer des interprétations non conformes dans la mesure où il est le moins utilisé en classe (annexes - analyse des manuels). Pour cette raison, il a été testé seul dans le questionnaire Q1 et les résultats ne montrent pas de difficulté spécifique à son sujet dans le contexte testé (contexte de lecture graphique). Aussi en resterons-nous là. Pour Q5 nous étudierons seulement des énoncés contenant deux quantificateurs. Ce choix s'explique d'une part par le sujet de l'étude : la définition de limite. Dans la définition formelle de la limite en alpha/A il y a au moins trois[62] quantificateurs explicites. Ce choix s'explique aussi par les difficultés révélées par les pré-questionnaires sur l'interprétation des énoncés de type EA, dif-

[61] Cette distinction est faite car nous pensons qu'une demande de prouver est davantage susceptible de créer des blocages chez les élèves qu'une demande de justification par nature plus ouverte.

[62] Par exemple pour la définition : « f a pour limite L en $+\infty$, si et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une réel A tel que pour tout réel $x>A$, on a $|f(x)-L|<\varepsilon$. »

ficultés sur lesquelles nous avons centré notre étude. En outre, nous pensons que le questionnaire Q5 et la situation didactique à venir Q² (chapitre 7) pourront mettre en évidence d'éventuelles difficultés d'interprétation des quantificateurs universels et existentiels.

- V2 : Ordre des quantificateurs

Dans le cas où deux quantificateurs interviennent, l'ordre dans lequel ils apparaissent est déterminant sur la dépendance que signifie cet ordre sur les variables quantifiées. Comme les pré-questionnaires ont révélé une difficulté spécifique sur l'interprétation des énoncés de type EA, nous testerons les deux types d'énoncés EA et AE afin de valider (ou infirmer) cette hypothèse.

- V3 : Domaine mathématique ou pas

Comme nous l'avons vu pour l'étude de Dubinsky et Yiparaki (2000) cette variable didactique est aussi déterminante. En effet, pour distinguer ce qui provient d'une difficulté spécifiquement mathématique et d'une difficulté liée à l'interprétation de la double quantification, on peut être tenté de choisir un domaine non mathématique. Mais alors on se confronte à de nouvelles difficultés : l'interprétation de la double quantification ne correspond plus forcément à une convention mathématique (puisque le contexte ne l'est plus) et un contexte non mathématique perd son caractère objectif donnant lieu souvent à de multiples interprétations. Pour résoudre cette difficulté nous avons cependant décidé de tester les deux contextes en choisissant, pour le contexte non mathématique, un contexte objectivable (au contraire des assertions de l'étude de Dubinsky et Yiparaki 2000). Pour cela nous proposons (pour Q3 et Q5) un carré découpé en neuf cases numérotées et coloriées ou non en gris. Nous appellerons ce carré, « Grille de jeu Q² »[63]. Nous nous intéresserons aux relations : « être voisin » (pour Q3 et Q5) et « Avoir une somme des numéros paire »[64] (seulement pour Q3), les variables quantifiées seront les cases grises ou blanches. En voici un exemple :

9	2	8
3	1	4
6	5	7

Figure 19 : Exemple de grille du jeu Q²

Pour Q5 nous garderons seulement la relation « être voisin » car la relation « Avoir une somme des numéros paire » génère des difficultés d'interprétation qui nous détournent de notre étude (Q3).

Dans le cadre du contexte mathématique, il semble judicieux de pointer le registre utilisé (numérique/graphique). Il existe de multiples registres dans lesquels la quantification peut intervenir (numérique, graphique, algèbre…). Pour Q1, nous avions choisi de n'évaluer que les registres numériques et graphiques qui concernent directement notre sujet d'étude, la notion de limite. Il s'agissait moins pour nous de faire varier les registres afin de reconnaître les problèmes

[63] Cette grille donnera lieu à l'élaboration d'un « jeu » nommé Q². Ce jeu est la colonne vertébrale d'une situation pour la double quantification.
[64] Par exemple en posant la question : « Pour toute case grise, il existe une case blanche telle que la somme de leur numéro est paire ».

propres à chaque registre mais plutôt de permettre d'identifier des invariants et valider une observation d'un registre sur l'autre en faisant l'hypothèse que pour l'essentiel, dans les cas simples, la sensibilité au registre est moindre. La tournure de notre étude nous a conduits à limiter cette variabilité, et nous nous sommes restreints aux registres numériques, surtout pour éliminer les difficultés spécifiques du registre sur l'interprétation. Afin de limiter l'impact du contexte mathématique, il est choisi d'évaluer aussi dans un cadre moins mathématique (les grilles coloriées). Mais cela pose un problème de formulation : quand, en mathématique, on formule une double quantification de type (EA) ou (AE), chaque « argument » de l'énoncé est « séparé » des autres. Par exemple quand on dit « Il existe un nombre réel x tel que pour tout nombre réel y on a x + y = 1 », on peut facilement inverser les morceaux de l'énoncé sans problème sémantique : « Pour tout nombre réel y il existe un nombre réel x tel que on a x + y = 1 ». Cela peut évidemment faciliter une interprétation inversée. Mais cette séparation n'est pas toujours aussi évidente quand on formule des énoncés exprimant des réalités plus courantes, par exemple, on dit davantage « Pour toute case blanche il existe une case voisine qui est grise » plutôt que « Pour toute case blanche, il existe une case grise qui lui est voisine ». Cependant seule cette dernière formulation sépare les arguments comme on a l'habitude de le faire en mathématique pour mettre en évidence les (in-)dépendances, tandis que pour l'autre formulation l'inversion n'est tout simplement pas possible : on ne peut pas commencer un énoncé par « il existe une case voisine ». Si l'on veut modéliser l'interprétation d'énoncé mathématique dans des contextes qui ne le sont pas il faut prendre en compte ces différences, et en particulier comme nous testons l'hypothèse d'interprétation inversée, fabriquer des énoncés dont l'interprétation inversée est possible. Cela aura souvent pour conséquence de fabriquer des énoncés peu élégants et peu naturels.

- V4 : Registre du langage (usuel ou symbolique)

Les quantificateurs peuvent apparaître dans le registre symbolique (∀, ∃) ou bien dans le langage usuel (« il existe », « pour tout »). Pour cette variable (langage usuel ou symbolique) on fait face au paradoxe habituel pour ce type de choix : si le langage usuel est naturellement plus accessible, il induit cependant naturellement toutes les significations non proprement mathématiques. D'un autre côté, si l'usage des symboles permet d'incarner cette distinction des usages des mêmes mots, on lit « il existe », mais on écrit « ∃ », et ce n'est pas parce que cela va plus vite à écrire mais c'est surtout parce que ce n'est pas le même « il existe » que celui dont on a l'habitude dans la langue habituelle, cet usage des symboles peut aussi créer une sorte d'écran[65] à l'entendement.

Il est choisi d'évaluer l'interprétation de la quantification en langage usuel car pour ce qui est du niveau visé (L1 mais surtout TS), l'emploi des symboles de la quantification n'est pas développé (conformément aux recommandations institutionnelles pour la TS). Nous faisons surtout l'hypothèse que le sens donné est, pour les élèves, plus accessible avec le langage naturel qu'avec les symboles.

- V5 : Vérité des affirmations (Vrai ou Faux)

[65] A ce niveau d'apprentissage, sinon ce peut être aussi un guide à des niveaux plus avancés.

Cette variable est de nature à jouer un rôle dans la difficulté d'interprétation des énoncés doublement quantifiés. Par exemple la signification pour un élève d'un énoncé qui exprime l'existence dans un cas de non existence. Que cela peut-il signifier pour lui ? Le problème soulevé ici est l'image de la difficulté pour un élève de concevoir que « 3+2=4 » est bien une égalité (mais fausse). Il acceptera par contre facilement que « 3+2 est différent de 4 ». Un peu de la même façon, il acceptera que « il n'existe pas un tel nombre » mais pourra renâcler devant l'équivalence de cette dernière affirmation avec la déclaration de la fausseté de « Il existe un tel nombre » ; car ce serait comme pour « 3+2=4 », présentée comme une égalité fausse, envisager la non existence comme une existence fausse. Cette explication est confirmée par la conclusion de Chellougui (2006): « Il s'agit principalement de //.....// et de la pratique courante selon laquelle l'affirmation de l'existence introduit l'objet ». En effet, si l'existence est vue comme introduisant l'objet, que signifie la non existence : que l'objet n'est pas introduit ou bien qu'il ne peut pas être introduit ? Nous pouvons ajouter qu'au problème d'interprétation du quantificateur existentiel se greffe aussi ici celui de la négation que Durand Guerrier (2005, 2006) relie à la non congruence entre la logique en mathématique et les règles linguistiques (grammaire) qui sont mobilisées pour exprimer la négation de propositions mathématiques quantifiées.

Le questionnaire Q2 semble indiquer que cette variable de validité joue effectivement un rôle. Voici pour Q2 la répartition des réponses correctes ou non (correct est ici à entendre seulement du point de vue de la validité de l'affirmation et donc ne tient pas compte de la justification associée) suivant la validité des affirmations (tableau ci-dessous). Nous pouvons remarquer que les réponses non correctes (« Autre » indique que l'élève n'a voté ni Vrai, ni Faux mais « Autre ») sont beaucoup plus nombreuses pour les affirmations fausses que pour les vraies et ce indépendamment de leur type (AE ou EA).

	Correctes	Pas correctes	Autre
Énoncés faux	61%	28%	11%
Énoncés vrais	87%	6%	7%

Tableau 13 : Répartition des réponses correctes ou non correctes suivant la validité des affirmations

Nous vérifierons effectivement ce rôle en donnant à évaluer des énoncés vrais et faux.

Cependant comme nous l'avons déjà expliqué, nous devons proposer des énoncés qui soient discriminants pour notre hypothèse d'interprétation inversée et cela nous impose de choisir des énoncés de type EA faux ayant un « faux jumeau » vrai. Pour ce qui est des énoncés de type AE, nous pourrons proposer des énoncés vrais et faux.

- V6 : Type de langage (naturel ou mathématique)

Nous choisissons principalement d'évaluer la capacité de lire des énoncés mathématiques formalisés, mais nous souhaitons savoir si le langage utilisé joue un rôle dans l'interprétation aussi nous utiliserons des affirmations qui seront proposées sous les deux formes afin de comparer les réussites respectives et mesurer l'impact de cette variable.

- V7 : Justifications (Avec ou sans)

Si pour le questionnaire Q1 nous n'avons pas demandé de justifications, il s'agissait seulement de débroussailler le terrain, nous choisissons de demander des justifications pour tous les autres

questionnaires car nous souhaitons recueillir les informations nécessaires pour comprendre les interprétations correspondantes.

- V8 : Cardinal de l'ensemble des valeurs des variables quantifiées (fini ou infini)

Cette variable a été utilisée dans les pré-questionnaires et semble jouer un rôle. Il semble qu'il n'est pas de même difficulté de statuer sur un énoncé quantifié par des variables ayant des ensembles de définition de cardinal infini ou bien fini. Ce rôle sera précisé par Q5.

- V9 : Domaine familier (oui ou non)

Un domaine familier est de nature à induire des interprétations qui sont liées à la familiarité avec le domaine. Un domaine moins familier peut permettre alors de tester, sans ce biais, la compréhension syntaxique de la double quantification. Néanmoins nous pensons qu'un tel domaine peut induire des difficultés supplémentaires qui compliqueront l'analyse ultérieure : comment distinguer ce qui est propre aux difficultés liées à la nouveauté du domaine et celles de l'interprétation de la double quantification. Aussi choisissons-nous des contextes familiers car l'interprétation de la double quantification est déjà suffisamment difficile en soit pour ne pas ajouter des difficultés supplémentaires.

- V10 : Objet de la demande de la validité

Nous pouvons demander de statuer sur une affirmation (vraie ou fausse) ou bien sur la validité d'un argument pour une affirmation (prouve ou ne prouve pas). Pour Q2 ce deuxième choix a été utilisé mais pour Q5 nous nous contenterons de faire statuer sur des affirmations.

- V11 : Façon de demander les justifications

Nous avons choisi pour Q5 de demander des justifications afin de mieux comprendre la nature des interprétations de ces énoncés. Cependant une question se pose : comment exprimer cette demande de justification ? La question nous semble importante car si nous savons que pour un mathématicien justifier un énoncé c'est le démontrer, nous faisons l'hypothèse qu'il n'en va pas forcément de même pour un élève. Nous choisissons finalement la formule : « justifie tes réponses (vrai ou faux) par un argument qui les prouve ».

- V12 : Présence de variables littérales (oui ou non)

Cette variable didactique sera testée pour savoir si les difficultés d'interprétation proviennent d'une difficulté de prise en compte des variables littérales.

II.4. Les hypothèses sur l'interprétation

Les questionnaires et une pré-expérimentation de la situation didactique Q² (Pour Q² voir chapitre 7 ; il s'agit d'une situation didactique pour la double quantification) nous ont conduits à formuler des hypothèses que nous allons tester dans le questionnaire Q5 :

- HQ1 : Interprétation inversée des énoncés de type EA dépendant du contexte et en particulier des valeurs des variables didactiques suivantes : cardinal des ensembles de quantification, présence de variable littérale, contexte (mathématique ou pas).
- HQ2 : Interprétation correcte des énoncés de type AE indépendamment du contexte.

- HQ3 : L'utilisation d'un critère d'injectivité pour évaluer un énoncé de type AE. (exemple : "Pour tout x appartenant à {1;2;3}, il existe y appartenant à {4;5} tel que x + y est pair" sera déclarée fausse avec l'idée que chaque y doit être associé à un seul x).
- HQ4 : Les difficultés de maniement des variables littérales.
- HQ5 : Une affirmation fausse est moins bien interprétée qu'une affirmation vraie. Cette hypothèse est issue de la pré-expérimentation et de la littérature

Les hypothèses HQ1 et HQ2 sont issues des pré-questionnaires (2012 et 2013) et de la littérature. Par ailleurs, les hypothèses HQ3, HQ4 et HQ5 sont issues de pré-expérimentations (2013) de Q². De plus, HQ3 a été formulée par Barrier (2009)quand il tente de comprendre le dialogue d'un groupe d'étudiants à propos de la validité d'une assertion de type EA :

> L'analyse logique sous-jacente semble être quelque chose qui échappe à la classification des interprétations entre EA et AE. Plus précisément, il semble que les étudiants tiennent compte de l'ordre des quantificateurs mais que leur interprétation des quantificateurs reflète l'usage de règles 'non standards' (du point de vue de la sémantique GTS). Ces règles non standards peuvent se comprendre comme résultant d'une modification des règles structurelles de la sémantique GTS. Au niveau de la sémantique GTS, l'existence d'une stratégie gagnante pour un énoncé du type $\forall x\ \exists y\ (x\ R\ y)$ peut s'exprimer à partir de la formule $\exists f\ \forall x\ (x\ R\ f\ (x))$ où f est une fonction dite de Skolem du domaine d'interprétation dans lui-même. La règle pragmatique de communication selon laquelle une assertion dans un dialogue doit tenir compte des assertions des interlocuteurs peut par exemple s'intégrer parmi les règles structurelles de la sémantique GTS en imposant à la fonction de stratégie f de vérifier la condition $\forall x\ \forall y\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$, c'est-à-dire la condition d'être une fonction injective. (Barrier 2009 p. 223)

Pareillement en ce qui concerne HQ5 qui a été de plus soulignée par Durand-Guerrier (2005, 2006).

II.5 Éléments de conception et d'analyse a priori de Q5

Ci-dessous le questionnaire prévu avec, pour chaque consigne, sa fonction et une analyse a priori succincte.

Consigne 1 : Pour chaque conjecture ci-dessous, dis si elle est vraie ou fausse et justifie tes réponses par un argument qui les prouvent.

- Soit A un ensemble de nombres entiers tel que A={ -5; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
C1 : « Il existe un nombre x de A tel que pour tout nombre y de A on a x + y = 0 »

- Soit B un ensemble de nombres entiers tel que B={ -5; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
C2 : « Pour tout nombre x de B il existe un nombre y de B pour lequel on a x + y = 0 »

- Soit C et D les ensembles de nombres entiers tels que C={ 4 ; 6 ; 8 } et D= { 2 ; 10 ; 12 }
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
C3 : « pour tout nombre x de C, il existe un nombre y de D tel que x + y est un nombre pair. »

- Soit E et F les ensembles de nombres entiers tels que E={ 4 ; 6 ; 8 } et F= { 1 ; 2 ; 10 }
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
C4 : « pour tout nombre x de E, il existe un nombre y de F tel que x + y est un nombre pair. »

- Soit G et H les ensembles de nombres entiers tels que G={ 4 ; 6 ; 9 } et H= { 2 ; 8; 7 }
C5 : « Il existe un nombre x de G tel que pour tout nombre y de H, x + y est un nombre pair. »

- Soit I et J les ensembles de nombres entiers tels que I={ 4 ; 5 ; 9 } et J= { 1 ; 3 ; 11 }

C6 : « Il existe un nombre x de I tel que pour tout nombre y de J, x + y est un nombre pair. »

- Soient K et L des ensembles de nombres entiers tels que K={ 4 ; 5 ; 9; 12 ; 19 ; 24 } et L={2; 4 ; 5}

C7 : « Il existe un nombre entier x de K tel que pour tout nombre y de L, on a x > y. »

- Soient K et L des ensembles de nombres entiers tels que K={ 4 ; 5 ; 9; 12 ; 19 ; 24 } et L={2; 4 ; 5}

C8 : « Pour tout nombre entier y de L, il existe un nombre x de K tel que x > y. »

- Soit M un ensemble de nombres entiers tels que M={2; 4 ; 5; 41} et soit **N** l'ensemble de tous les entiers naturels.

C9 : « Il existe un nombre entier x de M tel que pour tout nombre entier y de **N** , on a x > y. »

- Soit M un ensemble de nombres entiers tels que M={2; 4 ; 5; 41} et soit **N** l'ensemble de tous les entiers naturels.

C10 : « Pour tout nombre entier y de M, il existe un nombre entier x tel que x > y. »

- Soit M un ensemble de nombres entiers tels que M={2; 4 ; 5; 41} et soit **N** l'ensemble de tous les entiers naturels.

C11 :« Pour tout nombre entier y de **N**, il existe un nombre entier x de M tel que x > y. »

- Soit M un ensemble de nombres entiers tels que M={2; 4 ; 5; 41} et soit **N** l'ensemble de tous les entiers naturels.

C12 : « Il existe un nombre entier x de **N** tel que pour tout nombre entier y de M, on a x > y. »

- Soit **N** l'ensemble de tous les entiers naturels.

C 13 : « Il existe un nombre entier x de **N** tel que pour tout nombre entier y de N on a x > y »

- Soit **N** l'ensemble de tous les entiers naturels.

C14 : « Pour tout nombre entier y de **N** il existe un nombre entier x de **N** tel que x > y »

- C15 : « Pour tous nombres réels x et y, il existe un nombre réel z tel que x = z et y = z »

- C16 : « Si x est un nombre réel et x < 6 alors x < 2 »

- C17 : « Si x est un nombre réel et x > 15 alors x > 10 »

- C18 : « Il existe un nombre entier u tel que pour tout nombre entier m on a m + u = 2 »

Dans le cadre de cette consigne, C1 permet de vérifier s'il y a inversion d'interprétation en cas fini (hypothèse HQ1). Deux types de réponses sont attendus : Vrai avec comme justification toutes les sommes de paires d'opposés. Faux avec comme justification des contre-exemples ponctuels pour chacun des x possibles. Il peut apparaître aussi des exemples ponctuels et des contre-exemples ponctuels.

C2 permet de tester la connaissance du maniement des variables (hypothèse HQ4) : deux lettres différentes peuvent être instanciées par le même nombre (ici 0). C2 est vraie et devrait être interprétée correctement puisque c'est un énoncé de type AE, mais elle peut être déclarée fausse si les deux lettres distinctes et x et y sont interprétées à tort comme des variables littérales ayant nécessairement des valeurs distinctes. Dans ce cas si x = 0, il n'y a pas de y tel que x + y = 0.

C3 et C4 permettent de vérifier s'il y a une évaluation utilisant l'injectivité comme condition supplémentaire sur les énoncés de type AE (hypothèse HQ4). C3 devrait être interprétée correctement mais ce critère d'injectivité pourrait apparaître dans le type de justification utilisé où chaque élément de F ne serait associé qu'à un seul élément de E) tandis que C4 peut avoir deux

type de réponses : si le critère d'injectivité est utilisé alors elle sera déclarée fausse, sinon elle devrait être déclarée vraie.

C5 permet de vérifier dans un cas fini l'interprétation d'un énoncé de type EA (hypothèse HQ1). C5 est fausse mais peut être interprétée comme vraie en cas d'interprétation inversée.

C6 permet de vérifier si « il existe un nombre » est interprété comme « il existe un seul nombre ». Si C6 est interprétée comme un seul nombre alors C6 sera déclarée fausse, sinon elle sera déclarée vraie dans les deux types d'interprétation possibles (AE et EA).

C7-8-9-10-11-12-13-14-15 permettent pour un même énoncé de comparer l'interprétation des énoncés EA et AE suivant si x et y sont des variables d'un ensemble fini ou infini (hypothèse HQ1 et HQ2). En particulier, C7 et C8 permettent de vérifier dans le cas où x et y appartiennent à des ensembles finis, les interprétations de EA et AE. A priori C8 correspondant à un type AE devrait être bien lu. C7, lui de type EA, devrait aussi être bien lu dans la mesure où il s'agit d'un ensemble fini.

C9-10-11-12 correspondent à des types AE et EA où une variable est définie sur un ensemble fini tandis que l'autre l'est sur un ensemble infini. On devrait ici pouvoir vérifier si le cardinal de l'ensemble influe en fonction du rôle de la variable (pour tout ou il existe). Les types AE devraient être lus correctement tandis que les EA peuvent être interprétés par inversion. Pour un énoncé de type EA, nous pourrons vérifier si il y a une difficulté supplémentaire à lire l'énoncé lorsque le « pour tout » s'appliquera à une variable définie sur un ensemble infini.

C13 est une conjecture habituellement interprétée comme C14 et C14 est habituellement bien interprétée (voir discussion lors de Q2).

C15 permet de vérifier comment sont instanciées des variables lors d'une évaluation littérale (hypothèse HQ4 sur la difficulté de maniement des variables littérales).

C 16-17 sont des conjectures de Q1 et servent à évaluer l'interprétation de conjectures élémentaires en « si... alors... » (Ces conjectures ne vérifient pas une hypothèse donnée mais servent seulement à vérifier que des conjectures simples sont bien traitées).

C18 est une conjecture de Q3 comme B4 de la consigne 3 ci-dessous et sert à évaluer l'interprétation comparée avec ou sans variable littérale. (Hypothèse HQ1 de dépendance de l'inversion d'interprétation selon certaines variables et hypothèse HQ4)

Consigne 2 : Pour chaque affirmation ci-dessous concernant des grilles colorées, dis si elle est vraie ou fausse et justifie tes réponses avec des arguments qui les prouvent. Dans les carrés ci-dessous il y a neuf cases numérotées de 1 à 9. Deux cases sont voisines si elles ont un coté en commun. Par exemple pour A1, la case 1 et la case 9 sont voisines mais pas la case 1 et la case 7.

- A1 : « Il existe une case blanche telle que toute case grise lui est voisine »

1	9	6
2	7	4
3	5	8

- A2 : « Pour toute case blanche il existe une case grise qui lui est voisine »

7	1	9
3	6	2
8	5	4

- A3 : « Il existe une case grise telle que toute case blanche lui est voisine »

1	5	7
9	2	3
4	6	8

- A4 : « Pour toute case grise il existe une case blanche qui lui est voisine »

1	9	6
2	7	4
3	5	8

A1-2-3-4 (de Q3) permettent de vérifier l'interprétation en cadre non mathématique (hypothèse HQ1 et HQ2 interprétation correcte des énoncés AE indépendamment du contexte).

Consigne 3 : Pour chaque conjecture ci-dessous, dis si elle vraie ou fausse et justifie tes réponses par un argument qui les prouvent.

B1 : « Il existe un nombre entier qui est supérieur ou égal à tous les nombres entiers »

B2 : « Il existe un nombre réel qui est supérieur ou égal à tous les nombres réels »

B3 : « Pour tout nombre entier, il existe un nombre entier qui lui est supérieur »

B4 : « Il existe un nombre entier naturel tel qu'avec tout autre nombre entier naturel, la somme des deux fait cinq »

B1-3-4 permet de vérifier l'interprétation d'énoncés mathématiques sans variable en comparaison des mêmes conjectures avec variables littérales (C13-14-18) (hypothèse HQ1, HQ2 et HQ4). B2 permet de vérifier que le passage aux réels ne modifie pas la difficulté de l'interprétation.

Nous présentons ci-dessous le tableau récapitulatif des conjectures dans les différentes consignes et de certaines variables didactiques associées.

Numéro	Conjecture	Type	Présence de variable littérale	Contexte mathématique	Ensembles de définition
		AE ou EA	Oui ou Non (O/N)	Oui ou Non (O/N)	Fini ou Infini (F/I)
C1	Il existe un nombre x de A tel que pour tout nombre y de A on a x+y=0	EA	O	O	F-F
C2	Pour tout nombre x de B il existe un nombre y de B on a x+y=0	AE	O	O	F-F
C3	pour tout nombre x de C, il existe un nombre y de D tel que x+y est un nombre pair	AE	O	O	F-F
C4	pour tout nombre x de E, il existe un nombre y de F tel que x+y est un nombre pair	AE	O	O	F-F
C5	Il existe un nombre x de G tel que pour tout nombre y de H, x+y est un nombre pair	EA	O	O	F-F
C6	Il existe un nombre x de I tel que pour tout nombre y de J, x+y est un nombre pair	EA	O	O	F-F
C7	Il existe un nombre entier x de K tel que pour tout nombre y de L, on a x > y	EA	O	O	F-F

C8	Pour tout nombre entier y de L, il existe un nombre x de K tel que x > y	AE	O	O	F-F
C9	Il existe un nombre entier x de M tel que pour tout nombre y de N, on a x > y	EA	O	O	F-I
C10	Pour tout nombre entier y de M, il existe un nombre x de N tel que x > y	AE	O	O	F-I
C11	Pour tout nombre y de N, il existe un nombre entier x de M tel que x > y	AE	O	O	I-F
C12	Il existe un nombre x de N tel que pour tout nombre entier y de M, on a x > y	EA	O	O	I-F
C13	Il existe un nombre x de N tel que pour tout nombre entier y on a x > y	EA	O	O	I-I
C14	Pour tout nombre y de N il existe un nombre x de N tel que x > y	AE	O	O	I-I
C15	Pour tous nombres réels x et y, il existe un nombre réel z tel que x = z et y=z	AAE	O	O	I-I-I
C16	Si x est un nombre réel et x<6 alors x<2		O	O	I
C17	Si x est un nombre réel et x>15 alors x>10		O	O	I
C18	Il existe un nombre entier u tel que pour tout nombre entier m on a m+u=2	EA	O	O	I-I
A1	Il existe une case blanche telle que toute case grise lui est voisine	EA	N	N	F-F
A2	Pour toute case blanche il existe une case grise qui lui est voisine	AE	N	N	F-F
A3	Il existe une case grise telle que toute case blanche lui est voisine	EA	N	N	F-F
A4	Pour toute case grise il existe une case blanche qui lui est voisine	AE	N	N	F-F
B1	Il existe un nombre entier qui est supérieur ou égal à tous les nombres entiers	EA	N	O	I-I
B2	Il existe un nombre réel qui est supérieur ou égal à tous les nombres réels	EA	N	O	I-I
B3	Pour tout nombre entier, il existe un nombre entier qui lui est supérieur	AE	N	O	I-I
B4	Il existe un nombre entier naturel tel qu'avec tout autre nombre entier naturel, la somme des deux fait cinq	EA	N	O	I-I

Tableau 14 : Valeurs des principales variables didactiques de chaque conjecture de Q5

II.6 Résultats bruts du questionnaire Q5

Voici les résultats bruts[66], c'est-à-dire sans tenir compte des justifications mais seulement de la validité des réponses en termes de vrai/faux :

Assertion	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13
Type	EA	AE	AE	AE	EA	EA	EA	AE	EA	AE	AE	EA	EA
Validité	F	V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	F
Réussite brute %	45	34	97	59	76	72	79	69	90	83	83	86	86

Assertion	C14	C15	C16	C17	C18	A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4
Type	AE	AE			EA	EA	AE	EA	AE	EA	EA	AE	EA
Validité	V	F	F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F
Réussite brute %	41	34	93	97	55	90	93	93	97	69	66	66	66

Tableau 15 : Résultats bruts au questionnaire Q5 posé aux TS1 novembre 2014

Ces résultats bruts nous indiquent immédiatement que pour cet échantillon l'hypothèse HQ2 (Interprétation correcte des énoncés de type AE) est invalidée. En effet, pour ce qui concerne les énoncés de type AE, on s'attend à avoir un taux brut de réussite élevé selon HQ2 (avant de

[66] Ces résultats correspondant à la classe expérimentale de 29 élèves.

diminuer la réussite en comptant les justifications) et on remarque que de nombreux items correspondants ont des taux de réussite réduits (C2 : 34 %, C14 : 41 %, C15 : 34%).

Pour ce qui est de l'hypothèse HQ1 (concernant les énoncés de type EA), on peut remarquer que la variabilité de réussite (en fonction des variables didactiques) ne recouvre pas les mêmes items que pour les autres questionnaires (Q1 et Q2). Par exemple C13 (qui est discriminante : interprétée comme une AE elle est vraie) dont les taux de réussite pour Q1 et Q2 sont faibles (24 % pour Q1, 42 % pour Q2) connaît ici un taux de réussite brut bien supérieur (86%). Cette assertion de type EA n'est d'ailleurs pas la seule a plutôt être bien réussie et cela en dehors des contextes habituels de réussite de ce type d'énoncés (sur les assertions concernant des grilles par exemple).

Pour les hypothèses HQ3 et HQ4 (injectivité et variables littérales), les taux de réussite brute ne permettent pas de statuer. Une analyse plus fine sera nécessaire.

Pour l'hypothèse HQ5 (rôle de la validité de l'énoncé sur son interprétation), on peut commencer par une remarque globale : le taux de réussite brut moyen des items correspondant à une assertion fausse est de 74 % et 73 % pour les assertions vraies. L'hypothèse HQ5 ne semble pas validée sur cet échantillon par les taux moyens de réussite brute, cependant la prise en compte des justifications (taux de réussite nette) et des types d'énoncés pourraient nuancer ce premier constat.

Les premiers constats, constats contradictoires avec les résultats des questionnaires précédents et avec les études sur le sujet que nous avons produite au chapitre 1, nous invitent à affiner notre analyse afin de pouvoir, sur cet échantillon (la classe expérimentale), statuer sur les différentes hypothèses. Il s'agira en particulier de prendre en compte les justifications données, pour vérifier dans quelle mesure les réponses correctes correspondent effectivement à une interprétation correcte. Nous pourrons alors aussi mieux cerner les raisons des réponses incorrectes. Pour effectuer cette analyse nous allons fabriquer un outil d'analyse : une typologie des réponses.

II.7 Typologie des réponses

Le but de la typologie des réponses que nous présentons ici est double. Il s'agit de trier parmi les réponses correctes celles que nous pouvons identifier comme provenant d'une interprétation correcte et les autres, en analysant les arguments associés aux réponses. De la même façon il s'agit également d'analyser les réponses incorrectes pour comprendre les raisons de ces erreurs d'interprétation.

Comme nous l'avons vu dans les études de Dubinsky et Yiparaki (2000) et celle de Piatek-Jimenez (2010) les justifications de la validité d'énoncés contenant une quantification multiple sont classées selon le type d'énoncé qu'elles démontrent (AE, EA, AA, EE, AAA…) en relation avec la validité annoncée. Nous rappelons ici que ce classement fait l'hypothèse que la justification donnée est correcte mais pas forcément l'interprétation de l'énoncé. Si cette hypothèse semble raisonnable pour un énoncé de type EA et dont la justification fait penser qu'il a été interprété comme son faux jumeau AE, par contre il est discutable de dire que l'utilisation d'un exemple ponctuel de vérité (argument consistant à instancier les deux variables de l'énoncé doublement quantifiée pour vérifier l'énoncé) signe une interprétation d'un énoncé de type EE.

Ce serait, en effet, ignorer les difficultés de démonstration. Aussi, choisissons-nous un autre type d'analyse basée sur la structure logique de la justification.

Commençons par regarder un énoncé de type (EA) c'est-à-dire du type « Il existe a tel que pour tout b, on a R(a;b) » où R est une relation logique entre A et B qui peut prendre les valeurs vrai ou faux. Pour une tel énoncé, une justification (erronée) de la vérité pourra consister, par exemple, à donner une valeur de a et une valeur de b et de montrer que dans ce cas particulier on a bien R(a;b). Nous noterons ce type de réponse (a ;b;R(a;b)). Une justification de la fausseté (erronée) pourrait être de montrer que pour une valeur de a donnée, aucune valeur de b ne vérifie R(a;b) autrement dit toutes les valeurs de b (noté Ab en reprenant la codification précédemment adoptée All / Exists) vérifient non R(a;b), nous noterons une telle justification (a; Ab ; NR(a;b)). Enfin une dernière justification (encore erronée) pourra, par exemple pour montrer que cet énoncé est vrai, consister à montrer que pour toute valeur donnée de b, il existe un a (noté Ea) que nous noterons (Ab, Ea;R(a;b)). Cette notation nous servira surtout à nommer ces différents cas précisément et nous utiliserons ensuite surtout ces dénominations (plutôt que les notations).

Voici les différents cas possibles et observés et les dénominations que nous avons retenues. Remarquons que d'autres cas sont théoriquement possibles mais n'ont pas été observés.

Type de justification	Dénomination	Pour « Il existe a tel que pour tout b on a R(a;b) »
(a;b;R(a;b))	Exemple ponctuel de vérité	Ne démontre pas le vrai (ni le faux)
(a;Ab;R(a;b))	Démonstration	Démontre le vrai
(a;b;NR(a;b))	Exemple ponctuel de fausseté	Ne démontre pas le faux (ni le vrai)
(a;Ab;NR(a;b))	Exemple générique (inversé) de fausseté	Ne démontre pas le faux (ni le vrai)
(Aa;Eb;NR(a;b))	Démonstration	Démontre le faux
(Ab;Ea;R(a;b))	Exemple générique inversé de vérité	Ne démontre pas le vrai (ni le faux)

Tableau 16 : Dénomination des arguments pour un énoncé de type (EA)

Regardons maintenant l'énoncé de type (AE) : « Pour tout a il existe b tel que R(a;b) », nous mettons en gras ce qui change par rapport à l'autre tableau. Notons aussi que d'autres cas sont théoriquement possibles mais n'ont quasiment pas été observés.

Type de justification	Dénomination	Pour « Pour tout a il existe b tel que R(a;b) »

(a;b;R(a;b))	Exemple ponctuel de vérité	Ne démontre pas le vrai (ni le faux)
(Aa;Eb;R(a;b))	Démonstration	Démontre le vrai
(a;b;NR(a;b))	Exemple ponctuel de fausseté	Ne démontre pas le faux (ni le vrai)
(a;Ab;NR(a;b))	**Démonstration**	**Démontre le faux**
(Aa;Eb;NR(a;b))	**Exemple générique (inversé) de fausseté**	Ne démontre pas le faux (ni le vrai)
(b;Aa;R(a;b))	Exemple générique inversé de vérité	Ne démontre pas le vrai (ni le faux)

Tableau 17 : dénomination des arguments pour un énoncé de type (AE)

D'autres cas sont théoriquement possibles mais n'ont quasiment pas été observés.

Nous pouvons constater que si des modifications ont lieu entre les deux tableaux, de nombreuses cases restent identiques. Ainsi l'exemple ponctuel de vérité ou de fausseté est identique dans les deux cadres. Pour les autres cases nous utiliserons les mêmes dénominations pour les mêmes fonctions (exemple : démonstration pour démontrer le vrai ou le faux), ces dénominations renverront donc à des structures logiques différentes suivant le type d'énoncé (EA ou AE) à laquelle ils s'appliquent. Voyons cela sur quelques exemples de réponses d'élèves pour le cas de C1 : « Il existe un nombre x de A tel que pour tout nombre y de A on a x + y = 0 », avec *A={ -5; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }*.

La réponse 1 : « Vrai car si x est l'opposé de y, le somme de x et de y sera nulle » est classée comme exemple générique inversé de vérité. Cette réponse peut être classée comme interprétation inversée.

La réponse 2 : « Non car x varie en fonction de y » est une formulation ambiguë qui peut faire penser à une démonstration : Ce n'est pas possible que x + y = 0 pour toute valeur de y car dans ce cas x ne pourrait plus être fixe mais devrait varier. Comme il s'agit d'une interprétation de notre part, nous avons le choix ici entre coder cette réponse comme « démonstration » ou bien ne pas la coder.

La réponse 3 : « Faux $-5 + 1 \neq 0$ » est classée comme exemple ponctuel de fausseté.

La réponse 4 : « Faux car y n'est pas forcément l'opposé de x » n'est pas codée car ambiguë.

La réponse 16 : « Faux car un tel nombre n'existe pas car il y a plusieurs nombres différents dans A. Or à partir d'un nombre donné (x), on ne peut pas obtenir plusieurs résultats identiques en l'additionnant successivement à des nombres différents » est classé comme démonstration.

Pour la suite de notre analyse nous nous intéresserons prioritairement aux trois catégories suivantes : 1) démonstration 2) exemples ponctuels 3) exemple générique inversé. Pour ces trois catégories cela concerne le vrai ou bien le faux en fonction de la conjecture étudiée (vraie ou fausse). Nous restreignons l'analyse pour plusieurs raisons. En effet, les trois catégories précédentes recouvrent une grande majorité de cas et nous pensons que la recherche d'exhaustivité serait contre-productive. Aussi abandonnons-nous les cas exotiques. D'autre part nous faisons l'hypothèse (à vérifier) que les catégories 2 et 3 ne révèlent pas forcément le même phénomène et voulons tester cette hypothèse. Nous pensons, en effet, que les exemples génériques inversés correspondent à une interprétation erronée tandis que les exemples ponctuels correspondent davantage à une difficulté liée à la démonstration. Ce qui nous incline à penser cela est que l'exemple générique inversé tend à démontrer une affirmation dans sa généralité (le côté générique) : il y a bien, pour ce cas-là, une prise en compte de la quantification universelle, mais pas de l'ordre de la quantification. Pour ce qui est de l'exemple ponctuel, la non prise en compte du caractère universel de la quantification peut a priori provenir soit d'un problème d'interprétation soit d'une difficulté à démontrer un énoncé bien interprété. Le codage spécifique de ces catégories devrait nous renseigner sur leur répartition et sur cette hypothèse.

La question initiale que nous nous sommes posée concerne d'abord la qualité de l'interprétation des énoncés doublement quantifiés. Nous nous intéressons prioritairement aux énoncés de type EA et celles de type AE puisque ce sont ceux qui sont engagés dans les définitions de limites. Il faut ajouter que le sens formel des quantifications de la limite n’est pas le seul sens qui intervient, il y a, au niveau sémantique aussi l’idée d’approximation, par exemple :.

Précisons ici ce que nous entendons par « être capable d'interpréter un énoncé doublement quantifié » sachant que nous appellerons « évaluer un énoncé » le fait de lui attribuer une valeur de vérité ». Nous envisageons plusieurs types de définitions possibles :

- D1 : « Être capable d'interpréter les énoncés doublement quantifiés c'est être capable d'évaluer tout énoncé de ce type ».

L’intérêt de discuter d'une telle définition, pourtant impossible à utiliser (en temps fini), est de mettre en évidence deux aspects contradictoires : la preuve d’un enoncé n'est pas, dans l'absolu, constitutive de l'interprétation, demander une preuve est, dans la réalité, une nécessité puisqu'une telle définition n'est pas utilisable. Dès lors qu'on se situe dans le cadre d'une définition utilisable, il devient nécessaire d'en savoir plus pour statuer sur la qualité de l'interprétation et en particulier d'avoir connaissance des preuves associées.

- D2 : « Être capable d'interpréter un énoncé doublement quantifié donnée c'est être capable de l'évaluer et de le démontrer ».

Cette définition, contrairement à la précédente est utilisable et ses critères sont simples à évaluer. Cependant, cette conception de l'interprétation n'est pas celle que nous voulons évaluer. Nous souhaitons séparer, si possible, l'interprétation (au sens de la première définition) et la capacité à démontrer cette validité car nous pensons qu'en exigeant une démonstration canonique nous serons amenés à éliminer des réponses qui relèvent davantage d'une difficulté à démontrer que d'une difficulté à interpréter. Ceci pose une autre question : est-il vraiment possible de dissocier interprétation et démonstration ? En d'autres termes, n'est-on pas obligé de

démontrer un énoncé pour l'évaluer ? Nous pensons effectivement qu'il y a nécessairement une forme d'acte de validation pour évaluer mais que celui-ci n'est pas forcément conscient ou seulement facile à produire.

Puisque nous cherchons à distinguer séparément ces deux phénomènes, nous sommes amenés à établir une définition qui repose davantage sur les objectifs spécifiques d'un projet que sur une recherche d'adéquation aux seuls critères mathématiques usuels. Il nous faut alors préciser notre projet : nous voulons fabriquer une situation pour la double-quantification qui réponde aux difficultés qui auront été identifiées par le questionnaire. Il s'agit donc de mettre à jour ces difficultés. Nous avons d'ores et déjà certaines hypothèses à ce sujet et voulons, grâce à notre définition, être capable de les mettre à l'épreuve. Les hypothèses principales HQ1 et HQ2 concernent la capacité à distinguer le type d'un tel énoncé (AE/EA). Aussi proposons- nous alors comme définition pour notre analyse la définition D3.

- D3 : « Être capable d'interpréter un énoncé doublement quantifié donnée, c'est être capable de l'évaluer en donnant des arguments valides et cohérents avec la validité annoncée qui permettent de distinguer une interprétation adéquate du type de l'énoncé (AE/EA) »

Cette définition est moins exigeante que la définition D2 dans le sens où elle n'exige pas une démonstration canonique mais laisse la possibilité d'accepter des arguments non véritablement démonstratifs mais qui présentent des éléments qui laissent penser que l'interprétation réalisée est adéquate à la syntaxe de l'énoncé. Évidemment une telle définition est plus délicate à manier puisqu'elle laisse des zones (justement) d'interprétation. Nous pensons qu'elle devrait être adaptée à notre projet.

Ainsi, avec la définition D3, les réponses sous forme d'exemples ponctuels ne sont pas comptées comme interprétation correctes, bien qu'ils puissent provenir seulement d'une difficulté de démonstration. Ce choix s'explique par l'impossibilité de statuer de manière assez sûre à propos du type d'énoncé interprété. Nous aurions pu créer une catégorie supplémentaire pour mettre en évidence cette distinction entre réponse non correcte et réponse à laquelle il n'est pas possible de statuer sur la validité de l'interprétation mais nous utiliserons surtout les taux de réussite (réponses correctes) dans le cadre de notre analyse de l'interprétation, nous n'avons donc pas de nécessité à effectuer cette distinction à ce stade. Nous étudierons dans un deuxième temps (Cf. analyse des réponses non correctes) spécifiquement ce type de réponses sous forme d'exemples ponctuels afin de mieux comprendre les raisons et conditions d'utilisation de telles réponses. Par ailleurs, les réponses sous forme d'exemples génériques inversés sont comptées comme non correctes. Nous étudierons également spécifiquement ensuite ce type de réponse. D'un autre côté, les réponses sous forme de démonstrations (correctes) sont comptées comme correctes. Enfin, les réponses qui ne rentrent pas dans la typologie précédente sont traitées au cas par cas, par exemple, prenons le cas de la conjecture C 13 : « Il existe un nombre entier x de **N** tel que pour tout nombre entier y de **N** on a $x > y$ ». Une démonstration correcte pour cette conjecture consiste, par exemple, à dire qu'en prenant $y = x + 1$ on voit bien qu'aucun x ne réalisera la conclusion. Cet argument nécessite un choix spécifique (mais générique au sens de sa dépendance en x) de y. Or, il se trouve qu'un seul argument de ce style est donné (Réponse 14 à C13 : « non car $x \leq x$ », cet argument laisse supposer que l'élève propose $y = x$) sur l'échantillon testé (classe expérimentale). Pour les autres arguments, il s'agit principalement d'arguments du style :

réponse 5 à C13 : « Faux car il y a une infinité de nombres entiers donc il y aura toujours un nombre y plus grand qu'un nombre x ». Ce type d'argument montre bien une interprétation correcte (au sens de D3) de C13, mais ne constitue pas une démonstration tout à fait correcte (l'infinité des valeurs possibles pour y ne suffit pas assurer la validité de C13). Nous codons comme correcte ce type de réponse dans le sens où l'argument est valide et cohérent avec la validité annoncée et témoigne d'une distinction du type de l'énoncé.

Cette distinction que nous effectuons grâce à D3 entre interprétation et démonstration devrait nous permettre dans un deuxième temps de l'analyse et grâce à l'emploi de la typologie des réponses de chercher à comprendre les raisons des réponses considérées comme incorrectes.

II.8 Résultats nets du questionnaire Q5

a) Les hypothèses HQ1, HQ2, HQ3, HQ4, HQ5

Il s'agit de falsifier ces hypothèses à partir des réponses analysées avec la typologie précédente.

Concernant HQ1 : Interprétation inversée des énoncés de type EA dépendant du contexte, nous remarquons que sur les treize affirmations de type EA, seulement une seule (C1) est massivement interprétée à un peu plus de 40 % sous forme inversée (les autres énoncés le sont toutes à moins de 17%). Par contre, une affirmation (C14) de type AE est massivement interprétée (53%) selon une inversion. En comparaison, cette affirmation C14 avait été posée au questionnaire Q2 et avait eu un taux de réussite brut de 94 %, et un taux d'inversion de 0 %. Pour cet échantillon l'hypothèse HQ1 est infirmée.

Pour ce qui est de l'influence des différentes variables sur le taux de réussite net, aucune variable ne semble déterminante. Cela se voit sur le tableau suivant où l'on range par taux croissant de réussite nette les différentes affirmations accompagnées des valeurs de leurs variables didactiques. On voit que la partie haute du tableau correspondant aux taux de réussite faibles contiennent toutes les valeurs de chaque variable didactique (excepté la variable contexte mathématique ayant pour valeur Oui) et qu'il en est de même pour le bas du tableau contenant les taux de réussite élevés (ici la variable contexte mathématique prend les valeurs Oui et Non). On peut donc seulement conclure que les affirmations traitées dans un cadre non mathématique sont plutôt bien réussies (taux de réussite net supérieur à 59%) indépendamment du type d'énoncé (AE ou EA), cela nous servira pour la construction de la situation didactique ultérieure.

	Type	résence de variable littérale	Contexte mathématique	Ensembles de définition	
N°	AE ou EA	Oui ou Non (O/N)	Oui ou Non (O/N)	Fini ou Infini (F/I)	Réussite nette
C15	AAE	O	O	I-I-I	14%
C1	EA	O	O	F-F	21%
C2	AE	O	O	F-F	28%
C14	AE	O	O	I-I	28%
C18	EA	O	O	I-I	31%
B4	EA	N	O	I-I	34%
C5	EA	O	O	F-F	38%
C4	AE	O	O	F-F	52%
B2	EA	N	O	I-I	59%
C8	AE	O	O	F-F	59%
A3	EA	N	N	F-F	59%
B3	AE	N	O	I-I	59%
A1	EA	N	N	F-F	62%
B1	EA	N	O	I-I	62%
C6	EA	O	O	F-F	66%
C10	AE	O	O	F-I	69%
C12	EA	O	O	I-F	69%
C7	EA	O	O	F-F	79%
C9	EA	O	O	F-I	79%
C13	EA	O	O	I-I	79%
C11	AE	O	O	I-F	86%
A4	AE	N	N	F-F	90%
A2	AE	N	N	F-F	90%
C3	AE	O	O	F-F	97%

Tableau 18 : Réussite nette croissante et variables didactiques associées

Pour ce qui est de l'hypothèse HQ2 : Interprétation correcte des énoncés de type AE, rappelons d'abord que nous venons de voir que l'affirmation C14 de type AE est interprétée selon une inversion et qu'elle ne l'avait pas été pour un autre échantillon (Q2). Nous pouvons voir aussi sur le tableau de résultats suivants que les énoncés de type AE sont loin d'être interprétés tous correctement dans cet échantillon.

Affirmation	C15	C1	C2	C14	C18	B4	C5	C4	C8	A3	B2	B3	B1	A1	C6	C12	C10	C7	C9	C13	C11	A4	A2	C3
Type	AE	EA	AE	AE	EA	EA	EA	AE	AE	EA	EA	AE	EA	EA	EA	EA	AE	EA	EA	EA	AE	AE	AE	AE
Validité	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V
Taux net	14%	21%	28%	28%	31%	34%	38%	52%	59%	59%	59%	59%	62%	62%	66%	69%	69%	79%	79%	79%	86%	90%	90%	97%

Tableau 19 : Affirmations rangées par taux croissant de réussite nette avec type coloriée (EA en gris)

On peut également comparer les taux moyens de réussite nette (justification prise en compte) aux affirmations de type AE et EA : 57 % pour les EA et 61 % pour les AE. La différence n'est pas significative. L'hypothèse HQ2 n'est finalement pas validée non plus par les résultats nets sur cet échantillon.

Deux conjectures C3 et C4 sont fabriquées pour détecter ce type d'usage de la double quantification de type AE dans le cadre de l'hypothèse HQ3 : L'utilisation d'un critère d'injectivité pour évaluer un énoncé de type AE. C3 n'est finalement pas discriminante pour ce critère car les réponses à cette question sont toutes correctes et globales et du type : « deux nombres pairs donnent un nombre pair or E et F ne sont composés que de nombres pairs ». Une seule réponse est compatible avec l'utilisation d'un tel critère (réponse 27 à C3 : « 4 + 2 = 6, 6 + 10 =16, 8 +

12 = 20 »). Par contre C4 fait apparaître une utilisation de ce critère d'injectivité sous la forme d'argument du type la réponse 1 à C4 : « Faux, le nombre 1 de l'ensemble F formera un nombre impair quand il sera additionné à un des autres nombres. »

Par ailleurs, huit réponses sur trente (28%) correspondent à cet usage, ce qui est significatif. On peut dire qu'il existe bien une certaine utilisation de ce critère d'injectivité pour les énoncés de type AE.

Deux conjectures (C2 et C15) sont fabriquées pour détecter une difficulté spécifique du maniement des variables dans le cadre de l'hypothèse HQ4 : Les difficultés de maniement des variables littérales. Il s'agit de deux variables littérales portant un nom différent, et la question concerne la possibilité qu'elles peuvent avoir la même valeur. Pour C2 nous relevons 13 réponses (45%) du type la réponse 1 à C2 : Faux. C'est le cas si x et y sont opposés comme x = 3 et y = -3 alors x + y = 3 – 3 = 0 mais 0 n'a pas son opposé à part lui-même. ». Pour C15, on trouve six réponses (21%) relevant de ce type de réponse de 4 à C15 : « Faux. Un nombre peut être représenté par une seule variable dans une même consigne ».

Évidemment, il y a beaucoup moins de telles réponses dans C15 que dans C2, mais il faut noter que C15 connaît un taux très important de non réponse : 38 % contre, au maximum, 16 % de non réponse pour les autres conjectures. Nous pensons que le fait d'écrire x=z et y=z dans la même conjecture constitue une raison de ce taux élevé de non réponse. Pour qui croit que deux variables dénotent forcément des valeurs distinctes, une telle affirmation a effectivement de quoi rendre perplexe. Il se peut aussi que cette affirmation qui est de type AAE soit plus difficile à interpréter qu'une « simple » double quantification. Cette dernière remarque est conforme aux résultats de (Piatek-Jimenez 2010) déjà évoqués.

Enfin pour HQ5 : Une affirmation fausse est moins bien interprétée qu'une affirmation vraie, le tableau ci-dessous montre les taux de réussite nette en fonction de la validité (Vrai ou Faux avec Faux grisé). On voit[67] alors que la répartition n'est pas décisive pour l'hypothèse HQ5.

Affirmation	C15	C1	C2	C14	C18	B4	C5	C4	C8	A3	B2	B3	B1	A1	C6	C12	C10	C7	C9	C13	C11	A4	A2	C3
Type	AE	EA	AE	AE	EA	EA	EA	AE	AE	EA	EA	AE	EA	EA	EA	EA	AE	EA	EA	EA	AE	AE	AE	AE
Validité	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V
Taux net	14%	21%	28%	28%	31%	34%	38%	52%	59%	59%	59%	59%	62%	62%	66%	69%	69%	79%	79%	79%	86%	90%	90%	97%

Tableau 20 : Taux de réussite nette rangé par ordre croissant en fonction de la validité (Faux grisé)

Si l'on compare les moyennes de ces taux en fonction de la validité, on obtient 55 % de réussite nette pour les affirmation fausses et 63 % de réussite pour les affirmations vraies. Cette différence indique une plus grande réussite nette aux affirmations vraies de 8 %, ce qui n'est pas décisif non plus. Cependant, si on étudie cette moyenne de réussite nette en fonction à la fois du type d'énoncé et de la validité, on obtient des résultats plus contrastés (même s'ils doivent être nuancés par le nombre limité d'affirmations impliquées, seulement 3 affirmations de type EA vraies par exemple).

	VRAI	FAUX
Type EA	71%	52%
Type AE	60%	63%

[67] Nous ne nous lançons pas ici dans une analyse statistique sophistiquée dans la mesure où nous cherchons à établir/réfuter des régularités prégnantes.

Tableau 21 : Réussite nette en fonction du type et de la validité

Les affirmations de type AE sont interprétées et justifiées aussi bien quand elles sont vraies que quand elles sont fausses, celles de type EA sont nettement mieux interprétées et justifiées quand elles sont vraies. Ce constat est aussi vérifié plus spécifiquement par les affirmations ayant un contexte non mathématique : les deux affirmations de type AE (A4 qui est fausse et A2 qui est vraie) ont toute deux un taux de réussite de 90 % tandis que les deux affirmations de type EA (A1 et A3 toutes les deux fausses) ont un taux de réussite nette respectivement de 62 % et 59 %.

Ce phénomène spécifique de l'interprétation erronée des affirmations de type EA fausses que nous observons confirme ce que nous avions anticipé à propos de la variable didactique de la validité : la négation d'un quantificateur existentiel représente une difficulté conceptuelle, difficulté déjà établie par la littérature.

b) Analyse des réponses non correctes

Nous étudions ici les réponses non correctes sous la forme d'exemples ponctuels et d'exemples génériques inversés. Ces deux catégories représentent à elles seules 39 % des réponses non correctes. Nous vérifierons, en particulier, si l'utilisation d'exemples ponctuels correspond davantage à des difficultés en lien avec la démonstration et si l'utilisation d'exemples génériques inversés correspond davantage à une difficulté d'interprétation.

Nous allons commencer d'abord par étudier les exemples ponctuels. Voici la répartition des exemples ponctuels par affirmation (les affirmations ne figurant pas dans le tableau ne sont pas concernées).

N°	C1	C2	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C18	A1	A3	B1	B2	B4
Type	EA	AE	AE	EA	EA	EA	AE	EA	AE	AE	EA	EA	AE	AE	EA	EA	EA	EA	EA	EA
Taux	17%	10%	14%	17%	10%	10%	21%	17%	14%	10%	14%	14%	14%	3%	28%	10%	7%	3%	3%	17%

Tableau 22 : Taux d'utilisation des exemples ponctuels par affirmation

On peut voir sur le tableau 7 que l'utilisation de tels arguments est limitée (28% au maximum pour une moyenne sur toutes les affirmations de 10%) et que l'utilisation de tels arguments ne dépend pas du type de double quantification. En fait, la répartition de l'utilisation des exemples ponctuels peut aussi se lire selon les élèves. On voit là un phénomène remarquable : quatre élèves sur les vingt-neuf (14% des élèves) totalisent à eux seuls 63 % des exemples ponctuels utilisés. Cela pourrait signifier que l'utilisation de tels arguments est plutôt un fait individuel qu'un fait lié à la nature de la conjecture.

On pourra ensuite effectuer le ratio entre les exemples ponctuels qui donnent la bonne validité pour une affirmation et la totalité des exemples ponctuels (de vérité ou de fausseté) donnés pour cette affirmation. La moyenne des ratios correspondant est de 59 %, ce qui signifie que 59 % des exemples ponctuels sont mobilisés pour justifier la bonne validité quand ils sont utilisés. Cet échantillon ne valide pas de manière décisive l'hypothèse « L'exemple ponctuel est d'abord un problème de démonstration », c'est, en fait ici, aussi un problème d'interprétation dans au moins 41 % des cas de cet échantillon.

Pour étudier les exemples génériques inversés et leur répartition rappelons qu'ici c'est une configuration contraire de l'exemple ponctuel : l'utilisation des exemples génériques inversés se concentre sur des conjectures et non plus sur des individus. Deux conjectures (C1 et C14) sur

les vingt-six totalisent à elles seules 56 % des exemples génériques inversés. Regardons pour chaque affirmation concernée le taux d'utilisation de ce type d'argument.

N°	C1	C13	C14	C18	A3	B1	B2	B3	B4
Type	EA	EA	AE	EA	EA	EA	EA	AE	EA
Taux	41%	7%	55%	10%	3%	14%	7%	10%	17%

Tableau 23 : Taux d'utilisation d'exemple générique inversé

Nous pouvons effectivement voir qu'il s'agit d'un phénomène lié, cette fois-ci, à la nature de la conjecture. Aucun élève ne cumule ce type de justification. Nous nous concentrerons sur les deux cas C1 et C14.

Tout d'abord C1 : « Il existe un nombre x de A tel que pour tout nombre y de A on a x + y = 0 » avec A={ -5; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }

Nous pensons ici que l'interprétation inversée est liée à la conjecture qui pousse d'une certaine manière à cette inversion : A est composé de nombres et de leurs opposés. Il apparaît donc, dans ces conditions, qu'on va pouvoir réaliser facilement la relation x + y = 0 (indépendamment de la quantification). Ce « forçage » à l'inversion ressemble à celui de Barrier (2009) lorsqu'il propose aux étudiants de débattre d'une affirmation (de type AE cette fois-là) pour forcer une inversion de ce type d'énoncé : « Pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile autour de laquelle elle tourne. ». La discussion ne fait alors pas vraiment apparaître une inversion au niveau de l'interprétation mais l'utilisation d'un critère d'injectivité qui traduit un doute sur la véracité de l'énoncé. Dans notre cas l'inversion se produit pour C1.

Par ailleurs, la conjecture C14 : « Pour tout nombre entier y de N il existe un nombre entier x de N tel que x > y », connaît un grand nombre d'interprétations retenues comme témoignant d'une inversion dans la mesure où la plupart des réponses sont du type la réponse 23 à C14 : « Faux pour la même raison que C13 » (il a été répondu à C13 « Le plus grand nombre N étant à la fois le meilleur candidat pour x et pour y, l'un ne sera pas strictement supérieur à l'autre ».).

Nous pensons donc que la succession des deux conjectures fausses-jumelles est la raison de l'inversion : la différence entre les deux énoncés n'est pas toujours perçue. Il se trouve, en outre, que C13 et C14 se trouvent de part et d'autre du recto-verso du questionnaire, ce qui ne facilite également pas la comparaison.

Pour ces deux cas (C1 et C14) nous pouvons observer que l'interprétation semble davantage reposer sur le contexte que sur la syntaxe stricte.

c) Comparaison des résultats Q1, Q2, Q3, Q5

Certaines questions de ce questionnaire Q5 ont été reprises de questionnaires précédents, les résultats sont donc comparables. Afin de comparer ce qui peut l'être, seuls les résultats bruts sont utilisés (la validité est prise en compte, vrai ou faux, mais pas la justification).

L'affirmation 4 de Q1 : « Pour tout nombre réel a, il existe un nombre réel c tel que a < c » testée en novembre 2013 sur 66 élèves de TS donne 92 % de réussite tandis que C14 de Q5 : « Pour tout nombre entier naturel y de **N** il existe un nombre entier naturel x de **N** tel que x > y » testé en septembre 2014 sur 29 autres élèves recueille 41 % de réponses correctes.

L'affirmation 5 de Q1 : « Il existe un nombre c tel que pour tout nombre réel b, on a c > b » testée préalablement sur 66 élèves de TS donne 24 % de réussite tandis que C 13 de Q5 : « Il existe un nombre entier naturel x de **N** tel que pour tout nombre entier naturel y de **N** on a x > y » testé sur la classe expérimentale sur 29 autres élèves recueille 86 % de réponses correctes pour C13.

Ces résultats contradictoires nous obligent à nous interroger : quelles variables peuvent expliquer de telles variations ? Nous voyons plusieurs variables dans ces questionnaires :

- La cohorte testée (taille, qualité)

En 2013 il s'agit de deux classes tandis qu'en 2014 il s'agit d'une seule classe d'une trentaine d'élève. Les 66 élèves de 2013 ont bien réussi au bac (97 % de réussite et plus de 50 % de mentions). Pour ce qui est des élèves de 2014 (la classe expérimentale), les résultats au bac en 2015 sont un peu moins bons.

- La date de passation du questionnaire

En 2013 il s'agit de novembre et de septembre en 2014. Les élèves de 2013 ont donc trois mois supplémentaires de cours de terminale.

- L'ordre des questions

On voit dans les deux cas que la première question sur les deux est nettement mieux répondue : on peut alors faire l'hypothèse que la première est systématiquement bien étudiée et que la seconde, d'apparence identique, est classée comme identique et on lui attribue les mêmes valeurs de validité et de justifications. Cela est conforme aux réponses nombreuses qui sont faites à la deuxième énoncé (C14), réponses de la forme : « Comme la précédente ».

On remarquera que pour l'étude Dubinsky et Yiparaki (2000) cette remarque sur l'ordre des questions est valable : l'ordre est celui du questionnaire Q1 : affirmation 4 en premier et affirmation 5 en deuxième avec une bonne interprétation de la première et beaucoup moins bonne de la deuxième et des justifications associées de la deuxième qui renvoient à la première.

- Le nombre trop faible de ces cohortes (66 élèves en 2013 et 29 élèves en 2014)

La fluctuation d'échantillonnage n'est a priori pas suffisante pour rendre crédible une telle explication pour des écarts aussi importants, y compris sur des échantillons d'effectifs aussi modeste.

L'affirmation 7 de Q2 : « Il existe un nombre réel a supérieur à n'importe quel autre nombre b » testée en janvier 2014 sur trente-trois élèves de TS donne 55 % de réussite tandis que B2 de Q5 : « Il existe un nombre réel qui est supérieur ou égal à tous les nombres réels » testé en septembre 2014 sur vingt-neuf autres élèves recueille 66 % de réponses correctes, c'est-à-dire des résultats plutôt équivalents.

Les questions A1, A2, A3, A4 ont été testées en février 2014 sur trente-quatre élèves de TS et en septembre 2014 sur vingt-neuf élèves de TS et ont obtenu des résultats similaires :

	Janv 2014	Sept 2014
A1	91%	90%
A2	91%	93%
A3	84%	93%
A4	100%	97%

Tableau 24 : Taux de réussite aux questions A1, A2, A3, A4 en janvier 2014 et septembre 2014

L'affirmation A5 de Q4 : « Il existe un nombre x de A tel que pour tout nombre y de A on a » avec A= { -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 } testée sur trente-trois élèves en avril 2014 (notée C1) recueille 63 % de réponses correctes tandis que la même conjecture testée en septembre 2014 sur vingt-neuf élèves recueille 45 % de réponses correctes.

Nous remarquons finalement que les résultats de 2013 et 2014 sont sensiblement équivalents pour certaines affirmations, par contre un très gros écart peut être observé concernant les affirmations C13 et C14. Ces dernières affirmations correspondent aux énoncés testés dans la littérature et constituent un exemple paradigmatique de la différenciation EA/AE, différentiation qui a guidé notre étude. Ce constat, qui est à mettre en parallèle des hypothèses non validées (HQ1 et HQ2), nous questionne : l'échantillon testé en 2014 est-il représentatif ou non ?

d) Analyse selon la variable « langage utilisé »

Concernant la variable didactique du langage utilisé dans l'affirmation, nous pouvons constater que l'effet est divers. Comparons les résultats obtenus aux énoncés en langage courant et à leurs homologues en langage formalisé :

Réussite nette	Langage	
	Courant	Formalisé
B1 et C13	62%	79%
B3 et C14	59%	28%
B4 et C18	34%	31%

Tableau 25 : Réussite nette en fonction du type de langage utilisé

Pour B1« Il existe un nombre entier qui est supérieur ou égal à tous les nombres entiers » et C13, finalement c'est l'énoncé en langage formalisé qui obtient la meilleure réussite nette. En fait, pour B1 (langage courant) trois élèves qui avaient donné une bonne réponse à C13 pensent que B1 est vraie à cause du « égal ». L'un d'entre eux s'explique davantage : « Vrai car ce nombre qui est le plus grand qui existe peut être égal à lui-même et donc supérieur à tous les nombres ». Cette explication qui justifie la vérité de B1 par l'élimination d'une raison de sa fausseté (C13 peut être déclarée fausse pour la raison de l'absence du « égal ») peut être une hypothèse plausible pour les deux autres élèves. Il existe cependant une autre hypothèse pour cette question du « égal » qui consiste en une interprétation inversée correspondant au raisonnement suivant : « Puisqu' il y a le « égal », à tout y je peux prendre un x égal au y et donc l'énoncé est vrai. » Pour B1 il y a aussi trois autres élèves qui avait répondu correctement à C13 et qui là ne répondent pas. Ces seuls six élèves expliquent la différence car pour l'essentiel les autres réponses sont identiques d'une conjecture à l'autre, y compris les justifications.

Comme pour la question précédente (B1), ce qui va nous intéresser pour B3 « Pour tout nombre entier, il existe un nombre entier qui lui est supérieur », c'est la comparaison avec l'énoncé équivalent mais formalisé (C14). Il se trouve que C14 a été très mal réussie : 28 % de réussite. Il y a donc là, contrairement à l'énoncé précédent, une grande différence entre les réussites selon la formulation de l'énoncé. On constate ainsi que le langage formalisé avait donné lieu à de nombreuses inversions, inversions qui se produisent beaucoup moins dans le langage familier (cinq contre quinze), alors que comme C14, B3 apparaît juste après sa fausse-jumelle (B1 et B2).

Enfin, la comparaison de B4 « Il existe un nombre entier tel qu'avec tout autre nombre entier, la somme des deux fait cinq », avec le même énoncé formalisé C18 montre que les deux formes donnent lieu à des taux de réussite comparables et faibles (31 % pour C18 et 34 % pour B4). Ce qui est aussi remarquable c'est que onze élèves ne portent pas le même avis sur les deux énoncés. Parmi ces onze élèves six pensent que C18 est vraie mais pas B4, ils semblent mieux comprendre donc le langage familier, mais pour cinq autres c'est le contraire !

Nous pensons que l'échantillon ici est trop faible pour tirer des conclusions générales sur la variable didactique « type de langage ». Nous serons finalement amenés à réaliser cette étude sur un échantillon plus important puisque l'occasion (falsifier HQ1 et HQ2) le permettra.

II.9 Conclusion sur Q5 sur la classe expérimentale

Les résultats au questionnaire Q5 de la classe expérimentale sont de nature à remettre en cause l'hypothèse d'interprétation inversée habituellement admise dans la littérature que l'échantillon initial semblait confirmer. L'inversion non seulement ne se produit pas systématiquement pour un énoncé EA (pour certaines énoncés EA, y compris mathématiques, il y a très peu d'inversion), mais elle se produit massivement pour certains énoncés de type AE, énoncés qui étaient pour l'ancien échantillon très bien interprétés.

Ce qui par contre est invariant, c'est l'écart dans les taux de réussite qu'il peut y avoir entre les énoncés de type mathématique (présence de variable littérale) et les énoncés non mathématiques (coloration de cases par exemple). Les énoncés non mathématiques sont non seulement très bien interprétés mais aussi très systématiquement justifiés de manière pertinente, tandis que les énoncés mathématiques sont, eux, à la fois mal interprétés et souvent aussi mal justifiés, ceci étant valable pour les deux échantillons (échantillon initial et classe expérimentale). Le questionnaire Q5 permet de mettre en évidence justement que le domaine mathématique concerné par les énoncés moins bien réussis concerne les nombres, les inégalités littérales, les variables. Or, on sait que la maîtrise des nombres est limitée (cf questionnaire sur les nombres) et que la maîtrise des variables est très incomplète (Cf. analyse de C2 et C15 du questionnaire Q5).

Ce type de constat tendrait à établir une sorte de lien fort, au niveau de l'interprétation, entre l'aspect syntaxique et sémantique de tels énoncés. Autrement dit, quand l'énoncé a du sens, c'est-à-dire quand les objets en question et la relation qui les concernent sont signifiants pour l'élève, l'aspect syntaxique est pris en charge, tandis que lorsque l'énoncé n'a pas ce sens-là, la syntaxe, en particulier l'ordre des quantificateurs, est beaucoup moins pris en compte pour déterminer le type d'interprétation. L'utilisation massive d'inversions pour l'interprétation de C14

du questionnaire Q5 (classe expérimentale), inversions qui disparaissent pour l'interprétation de l'équivalent en langage courant (B3 de Q5) va dans le sens de ce constat.

De plus, si l'interprétation est sensible au contexte, il semble qu'en contexte moins signifiant pour l'élève, le critère de choix AE/EA n'est plus dicté par l'ordre des quantificateurs mais par les objets en jeu et leurs relations. Ainsi, dans notre échantillon, l'ensemble A = { -5; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 } et la relation concernée est x + y = 0 induisent une interprétation de type AE à un énoncé de type EA. Cela est compréhensible puisque chaque nombre a un opposé. De même dans Barrier (2009) lorsque la conjecture « Pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile autour de laquelle elle tourne. » est posée, Barrier observe une discussion d'étudiants autour de la possibilité de lire l'énoncé avec un type EA, type qui effectivement est beaucoup plus « naturel » dans ce contexte.

Les résultats de ce questionnaire, pour cet échantillon (classe expérimentale), nous l'avons vu, réfutent l'hypothèse d'inversion des seuls énoncés de type EA. Or cette hypothèse, issue de la littérature, avait été confirmée par nos questionnaires précédents. Il nous semble indispensable de confirmer ou non ce résultat (pas d'inversion spécifique) par l'étude d'un échantillon plus large. Pour cela nous utiliserons un questionnaire Q5 allégé.

II.10 Enquête sur un échantillon plus large

Certains résultats inattendus de Q5 pour la classe expérimentale méritent d'être confirmés (ou infirmés) sur un échantillon plus large, car au-delà de concevoir une situation didactique adaptée à cette classe, nous visons à établir des résultats de nature à éclairer le débat sur l'interprétation des énoncés doublement quantifiés. Nous souhaitons garder une homogénéité de niveau et filière afin de pouvoir comparer les résultats, nous choisissons donc de questionner des élèves de terminale S. Au total, 152 élèves supplémentaires (cinq classes) seront interrogés. Le questionnaire utilisé sera une version allégée de Q5 afin de répondre aux questions suivantes :

1) Y a-t-il véritablement un phénomène spécifique d'inversion des EA ou non ? Il s'agit de vérifier les hypothèses HQ1 et HQ2.

2) Quelle est l'influence sur la réussite du type de langage utilisé : énoncé en langage courant ou en langage mathématiques (C13 et B1, C14 et B3, C18 et B4) ? Que cela nous apprend-t-il sur l'interprétation des énoncés doublement quantifiés ?

3) Le bon niveau de réussite aux questions portant sur les grilles (A1, A2, A3, A4) se confirme-t-il ? Il s'agit de vérifier s'il existe des valeurs des variables didactiques qui concourent à une bonne interprétation.

Pour constituer le questionnaire allégé Q5 nous conservons les questions selon deux critères : celles qui sont susceptibles de nous aider à répondre aux questions précédentes et celles qui sont le moins bien réussies par l'échantillon de la classe de TS1 de 2014-2015. Cela nous conduit au questionnaire Q5 allégé avec les conjectures C1, C2, C4, C13, C14, C15, C18, A1, A2, A3, A4, B1, B3et B4.

Nous allons dans ce qui suit analyser les résultats en fonction des questions que nous nous sommes fixées.

a) Question de l'inversion (HQ1 et HQ2)

On peut voir sur le tableau de résultats bruts ci-dessous que l'hypothèse d'inversion spécifique des énoncés de type EA n'est sûrement pas solide. En effet, les énoncés de type EA (coloriés en gris) sont plutôt réparties en termes de niveau de réussite (par rapport aux énoncés de type AE) sachant que ces énoncés ont été choisis pour avoir des « faux jumeaux » n'ayant pas la même valeur de vérité, si bien qu'une interprétation inversée diminuerait automatiquement leur niveau de réussite nette.

Q5 allégé	C15	C18	C14	C2	C1	C13	B4	C4	B1	A3	B3	A1	A2	A4
Type	(A)AE	EA	AE	AE	EA	EA	EA	AE	EA	EA	AE	EA	AE	AE
Réussite brute	36%	45%	49%	54%	57%	59%	62%	67%	69%	75%	76%	79%	82%	87%

Tableau 26 : Réussite brute croissante par type EA ou AE

Le tableau de la réussite nette invalide lui aussi les hypothèses HQ1 et HQ2 dans la mesure où la réussite des énoncés de type EA n'est pas uniformément inférieure à celle des énoncés de type AE, loin de là.

Q5 allégé	C18	B4	C1	C15	C14	C2	C13	A3	C4	A1	B1	B3	A2	A4
Type	EA	EA	EA	AE	AE	AE	EA	EA	AE	EA	EA	AE	AE	AE
Validité	F	F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F
Réussite nette	14%	17%	19%	21%	28%	33%	38%	43%	52%	54%	55%	59%	68%	81%

Tableau 27 : Réussite nette croissante par type EA ou AE

A cette première approche de type globale, on peut ajouter une analyse plus précise reposant sur une classification argument par argument des réponses des élèves afin de déterminer les taux de réponses relevant d'une interprétation inversée que ce soit pour les énoncés de type EA ou bien celles de type AE. Nous choisissons d'effectuer cette analyse sur les énoncés C13 et C14 pour plusieurs raisons. La première raison est que ces questions sont celles qui sont initialement posées par Dubinsky & yiparaki (2000) dans son questionnaire à l'origine de l'hypothèse d'inversion spécifique. Les résultats seront ainsi comparables. La deuxième raison est que nous souhaitons effectuer cette étude sur un contexte (le choix des variables didactiques) a priori le plus difficile (ensembles infinis, variables littérales, contexte mathématique). La troisième raison est que les autres conjectures seront étudiées autrement dans les autres aspects de l'étude.

Les inversions représentent, sur l'échantillon de 181 élèves, 9 % des réponses à C13 « Il existe un nombre entier x de **N** tel que pour tout nombre entier y de **N** on a x > y », et 16 % des réponses à C14 « Pour tout nombre entier y de **N** il existe un nombre entier x de **N** qui lui est supérieur » et pour C14 ce sont essentiellement des réponses du style : « Comme C13 »).

Pour ce qui est de ces deux conjectures « fausses-jumelles », on peut dire que le nombre relatif d'inversions est limité et que celles-ci concernent bien davantage l'énoncé de type AE que celle de type EA, ce qui confirme l'observation effectuée pour la classe expérimentale.

Nous ajouterons ici que pour certains questionnaires l'ordre des questions 13 et 14 a été inversé afin de tester l'influence de leur ordre d'apparition sur l'interprétation. Il s'avère que l'influence de l'ordre est significative, en effet le taux d'inversion de C13 (en deuxième position) est de

16 % (contre 5 % lorsque C13 est en première position) et celui de C14, en première position de 3% (contre 24% lorsque C14 est en deuxième position) pour les 64 réponses correspondant à ce changement d'ordre des questions. Cette influence de l'ordre est confirmée par les résultats des questions A2 (équivalent C14) et A4 (équivalent C13) du pré-questionnaire Q2 où les questions sont posées dans leur ordre de numérotation (A2 en premier) et obtiennent des taux d'inversion respectivement de 0 % et 18 %. Ceci peut laisser penser que quand deux énoncés faux-jumeaux sont présents l'un après l'autre, le premièr est peu l'objet d'inversion d'interprétation, indépendamment de son type, tandis que le second est assimilé au premièr donnant lieu à beaucoup plus d'inversions. N'y a-t-il pas une sorte d'interprétation opportuniste ?

L'hypothèse HQ1 d'interprétation inversée des énoncés de type EA en TS ne s'avère finalement pas fondée pour cet échantillon. Pour accréditer cette affirmation, nous ajoutons que pour la conjecture C1 qui est précisément fabriquée pour provoquer des interprétations inversées nous ne dénombrons que 22 % d'inversions, cela étant bien peu si la tendance « naturelle » était effectivement d'interpréter les énoncés de type EA selon une inversion.

Profitons de cette analyse sur le type d'argument « exemple générique inversé » pour confirmer, sur le grand échantillon, l'observation concernant un autre type d'argument : « les exemples ponctuels ». Nous avons, comme pour l'échantillon de la classe expérimentale, une concentration (plus nuancée) de ce type d'argument sur certains élèves : ici 48 % des exemples ponctuels sont le fait de seulement 18 % des élèves.

Enfin, l'hypothèse HQ2 d'interprétation correcte des énoncés de type AE en TS s'avère non confirmée puisque ce type d'énoncé génère aussi des interprétations inversées, d'ailleurs plus nombreuses pour C14 de type AE que pour C13 de type EA, mais surtout que les taux de réussite nette (arguments valides) de ces énoncés restent faibles (28 % à C14 contre 38 % à C13 sur l'échantillon total et 20 % à C14 contre 19 % à C13 pour l 'échantillon de l'ordre des questions modifié).

Ces résultats (globaux et locaux) accréditent la remise en cause des hypothèses initiales HQ1 et HQ2, à savoir une inversion pour les énoncés de type EA et une interprétation correcte pour les énoncés de type AE.

b) Question langage mathématique/courant

Reprenons ici, sur un échantillon de plus grande taille[68] que le précédent, l'étude de la variable du type de langage avec les coules de conjectures C13 et B1, C14 et B3, C18 et B4. Comparons les niveaux respectifs de réussite de ces conjectures selon le type de langage utilisé et selon le type de réussite (brute ou nette).

Notons qu'en grisé la colonne de l'énoncé en langage courant correspondant à l'énoncé voisin de gauche en langage mathématique.

	C13 (EA)	B1 (EA)	C14 (AE)	B3 (AE)	C18 (EA)	B4 (EA)
Réussite brute	59%	69%	49%	76%	45%	62%
Réussite nette	38%	55%	28%	59%	14%	17%

[68] Les 152 élèves supplémentaires

Tableau 28 : Comparaison des réussites selon la variable type de langage

Ce tableau montre que dans tous les cas l'énoncé en langage courant est toujours mieux interprété qu'en langage mathématique, ce qui n'est pas surprenant. On peut constater aussi que les conjectures en langage courant n'ont finalement pas des taux de réussite aussi élevés que ne le laisserait penser leur apparente facilité (en particulier B4).

Nous allons maintenant comparer pour chacun de ces couples de conjectures la répartition des réponses erronées selon leur nature. Cette étude devrait nous renseigner sur les raisons des taux d'échec en utilisant ces comparaisons.

- C13 et B1 (Type EA)

C 13 : « Il existe un nombre entier x de **N** tel que pour tout nombre entier y de **N** on a x > y »

B1 : « Il existe un nombre entier qui est supérieur ou égal à tous les nombres entiers »

De nombreuses réponses de la fausseté de C13 reposent sur des exemples ponctuels de fausseté (18 % des réponses), par exemple : réponse de D13 à C13 : « Faux. x=2 et y=4 2<4 donc x<y », réponse non classée parmi les réponse adéquates. Tandis que pour B1, ce type de réponse représente seulement 2 %. Au contraire pour B1 de très nombreuses réponses reposent sur des énoncés, réponses qui même si elles ne constituent pas, à proprement parler, des démonstrations, ne peuvent pas être rejetées pour autant. Par exemple : réponse de D5 à B1 : « Faux car infinité de nombres entiers ». Il y a là une confusion entre cardinalité et valeur des nombres mais il se trouve que pour les entiers naturels la valeur donne le compte, on acceptera cette réponse comme adéquate, réponse dont on peut penser qu'elle pointe l'impossibilité de trouver un plus grand élément puisque précisément les valeurs deviennent « infinies ». On rencontre aussi de nombreuses réponses de la forme : réponse de D3 à B1 :« Faux, il y a toujours un nombre entier supérieur à un autre entier ».

Pour falsifier C13 ou B1, il faut faire l'hypothèse qu'un tel nombre existe, puis trouver un nombre qui lui est supérieur, c'est-à-dire faire un raisonnement par l'absurde. Ce raisonnement devrait s'exprimer d'autant plus facilement que l'énoncé (C13) lui-même introduit la variable x qui désigne ce soi-disant plus grand élément. Il suffit alors de dire que x+1 lui est supérieur et donc qu'il n'y a finalement pas de plus grand élément. Mais ce type de raisonnement (x+1>x) ne représente que 5 % des réponses pour C13. Pour B1, ce type de réponse correspond à 5 % aussi mais sous deux formes : les réponses du style « x+1>x » (4 %) et « il faut rajouter 1 » (1 %.).

Voici la répartition des différents types d'arguments incorrects :

	C13	B1
Inversions (EA lue comme AE)	9 %	3 %
Exemples ponctuels (de vérité ou de fausseté)	26 % (dont 8 % de vérité et 18 % de fausseté)	3 % (dont 1 % de vérité et 2 % de fausseté)

Tableau 29 : répartition des types d'arguments pour C13 et B1

Nous pouvons constater que les inversions ainsi que les exemples ponctuels ont tendance à disparaître en langage courant. Nous vérifierons ensuite si cette observation se confirme pour les autres couples de conjectures.

- C14 et B3 (Type AE)

C14 : « Pour tout nombre entier y de N il existe un nombre entier x de N tel que x > y »

B3 : « Pour tout nombre entier, il existe un nombre entier qui lui est supérieur »

Pour ces deux conjectures, le même constat de disparition des inversions et des exemples ponctuels en langage courant peut être fait.

Les pourcentages sont présentés dans le tableau ci-dessous.

	C14	B3
Inversions (AE lue comme EA)	16 %	4 %
Exemples ponctuels (de vérité ou de fausseté)	15 % (dont 11 % de vérité et 4 % de fausseté)	4 % (dont 4 % de vérité)

Tableau 30 : répartition des types d'arguments pour C14 et B3

Pour ces deux conjectures une démonstration « évidente » peut être : soit x un nombre, y = x + 1 est un nombre qui lui est supérieur, pourtant peu d'élèves utilisent un tel argument. Pour C14 ces réponses représentent 8 % (sous la seule forme « x + 1 > x ») et pour B3, 14 % des réponses (sous la forme « il faut rajouter 1 » : 4 %, et sous la forme « x + 1 > x » : 10%).

La majorité des réponses acceptées comme adéquates (relevant davantage d'une interprétation adaptée que d'une « véritable » démonstration) pour C14 comme pour B3 sont du style : « Vrai car il n'y a pas de nombre supérieur à tous les autres » ou bien « Oui car N est infini ».

Remarquons la réponse de E5 à B3 : il entoure « pour tout entier » et écrit que c'est N et qu'on ne peut pas trouver de nombre plus grand. Autrement dit-il globalise le « pour tout nombre entier » : « pour tout » n'est plus « pour chacun ». Cette façon d'envisager l'énoncé conduit à interpréter l'énoncé de type AE comme celle de type EA sans modifier l'ordre d'interprétation puisque les quantificateurs n'expriment plus une dépendance des variables. Ceci pourrait être une raison de l'inversion des énoncés de type AE.

- C18 et B4 (Type EA)

C18 : « Il existe un nombre entier u tel que pour tout nombre entier m on a m + u = 2 »

B4 : « Il existe un nombre entier tel qu'avec tout autre nombre entier, la somme des deux fait cinq »

Si pour ces deux conjectures C18 et B4, le taux brut de réussite est faible (45 % et 62%), le taux net de réussite chute de manière saisissante (de 14 % et 17%). Pour comprendre cela, examinons les différents types d'arguments incorrects utilisés :

	C18	B4
Inversions (EA lue comme AE)	14 %	6 %
Exemples ponctuels de fausseté	20 %	26 %
Exemples ponctuels de vérité	8 %	5 %
Sans justification (Vrai-Faux)	14 % (5 % - 9%)	20 % (1 % - 19%)
Sans réponse	25 %	23 %

Tableau 31 : Taux de réussite en comparaison de C18 et B4

On remarquera d'abord, à nouveau, beaucoup plus d'inversions faites pour la conjecture en langage mathématique C18 que pour celle en langage courant B4. Ces inversions sont souvent sous la forme : réponse de L6 à C18 : « Vrai car u peut être associé à chaque entier donc u peut être associé à – m + 2. ». Cette réponse semble signifier que si on prend u égal à – m + 2 on aura u + m = 2. Ce qui voudrait dire que cela est une réponse à la conjecture C18' : « Pour tout nombre entier m, il existe un nombre entier u tel que on a m + u = 2 » qui est le « faux jumeau » de C18.

Ayant 14 % de réponse de ce style, on s'attendrait à avoir aussi des réponses démontrant la fausseté de C18 sous la forme : « Prenons m = 3 - u. Puisque u + m doit être égal à 2 pour tout m et que pour ce m là, cela ne marche pas, alors C18 est fausse ». Mais aucun argument de ce style ne figure sur les 181 réponses.

Nous ne constatons pas la quasi-disparition des exemples ponctuels comme pour les deux cas précédents, ici il y a même davantage de réponses de ce type en langage courant (31 % contre 28%). C'est leur répartition entre exemple ponctuel de vérité et de fausseté qui nous permet d'expliquer ce phénomène. En langage formalisé les exemples ponctuels se répartissent entre ceux de vérité (8%) et ceux de fausseté (20%) tandis qu'en langage courant le taux des exemples ponctuels de vérité diminuent au profit des exemples ponctuels de fausseté (26%), témoignant ainsi d'une meilleure évaluation de l'assertion. Ce phénomène est encore plus net sur les réponses sans justification où le taux de Vrai passe 5 % à 1 %, et le taux de Faux de 9 % à 19 %. Nous faisons l'hypothèse que, comme pour les deux conjectures précédentes, l'interprétation de l'énoncé est bien meilleure en langage courant (d'où la disparition des exemples ponctuels pour B1 et B3 et la disparition des exemples ponctuels de vérité pour B4). Par contre pour B4, la complexité de l'argumentation correcte de la fausseté (en particulier l'introduction nécessaire d'une dépendance non triviale des deux variables) conduit les élèves à se rabattre sur un exemple ponctuel de fausseté (ou de non justification) à défaut de pouvoir produire une démonstration.

Si la comparaison des taux de réussite des conjectures équivalentes met en évidence que le langage courant donne lieu à une meilleure interprétation que le langage formalisé, ce qui semble plutôt naturel, nous pouvons aussi constater que l'analyse des réponses non correctes

confirme ce constat et pointe la difficulté rencontrée : celle de démontrer correctement une assertion y compris quand on réussit à l'interpréter et, en particulier ici, celle d'introduire et de manipuler des variables correctement.

c) *Question de la « réussite aux grilles »*

La question est de savoir si les conjectures concernant ces grilles sont mieux interprétées ou pas que celles qui sont davantage mathématiques, mais aussi de vérifier si dans ce cadre on peut percevoir des différences de réussite sur les énoncés AE et EA. Voici les résultats bruts et nets de réussite à chacune de ces quatre conjectures :

	A1 (EA)	A2(AE)	A3(EA)	A4(AE)
Réussite brute	79%	82%	75%	87%
Réussite nette	54%	68%	43%	81%

Tableau 32 : Réussite brute et nette aux questions de grilles

On peut constater premièrement que les taux de réussite à ces conjectures dépassent nettement tous les taux de réussite des autres conjectures. On peut constater aussi que les énoncés de type EA sont moins réussis que celle de type AE, en particulier pour la réussite nette : quand on prend en compte la validité des arguments, les énoncés de type AE perdent beaucoup moins en réussite que les énoncés de type EA. Ceci est conforme à ce que nous avions observé sur l'échantillon de la classe expérimentale à propos de l'influence de la validité sur la réussite, en particulier la difficulté de prouver des énoncés de type EA fausses (ce qui est le cas de A1 et A3). Essayons de comprendre ces phénomènes en analysant la répartition des types d'arguments incorrects donnés à chacune de ces conjectures.

	A1 (EA)	A2(AE)	A3(EA)	A4(AE)
Inversions	0%	1%	2%	1%
Exemples ponctuels de fausseté	10%	0%	17%	0%
Exemples ponctuels de vérité	3%	2%	2%	1%
Sans justification *(Vrai-Faux)*	10% *(1-9)*	11% *(8-3)*	12%*(2-10)*	4%*(1-3)*
Sans réponse	8%	7%	10%	9%

Tableau 33 : Répartition (en % du total des réponses) des réponses incorrectes aux questions de grille

Ce sont manifestement les exemples ponctuels (de vérité et de fausseté) qui font ici la différence : 13 % et 19 % pour les énoncés de type EA et seulement 1 % et 2 % pour les énoncés de type AE. Ceci conforte bien la remarque précédente puisque l'utilisation des exemples ponctuels de fausseté pour les énoncés de type EA faux signe ici une difficulté à prouver la négation d'un quantificateur existentiel.

Nous remarquons pour ces questions sur les grilles des inversions spécifiques : certaines réponses semblent correspondre plutôt à l'énoncé : A3' : « Il existe une case grise telle que toute voisine est blanche » qu'à l'énoncé originale A3 : « Il existe une case grise telle que toute case blanche lui est voisine ». Par exemple, voici la réponse T20 à A3 : « Vrai car toutes les cases grises ont pour voisines des cases blanches ». Cette inversion particulière est possible ici car le mot « voisine » peut correspondre sous forme d'adjectif à une relation entre deux cases et sous forme de substantif à un élément de l'ensemble relativement à une case, il en est de même pour « blanche » qui peut désigner un attribut d'une case ou bien un élément de l'ensemble quantifié.

Si cette inversion spécifique n'est pas véritablement possible dans les autres contextes, elle n'est pas anecdotique ici puisqu'elle représente 7 % des réponses à A3 et 5 % à A1 et quasiment aucune pour A2 et A4.

Enfin la différence de réussite nette entre A1 et A3 est de 11 % alors qu'il s'agit d'énoncés de même type et de même validité. Ceci laisse penser que le contexte, ici la configuration de la coloration, joue également un rôle dans l'interprétation. En effet ce contexte modifie la nature des arguments possibles. Par exemple, pour A1 (« Il existe une case blanche telle que toute case grise lui est voisine »), nous trouvons de nombreuses réponses sous la forme « Faux car la case grise 4 n'a pas de voisine blanche ». Il s'agit d'une démonstration, très spécifique au contexte, d'une assertion de type EA puisqu'elle utilise une particularité de la situation : l'énoncé AE correspondante (« Pour toute case grise il existe une blanche qui lui est voisine ») est fausse (puisqu'il existe une case grise sans voisine blanche) et comme un énoncé de type EA implique son « faux jumeau » AE, par contraposée, on peut conclure que A1 est fausse. On peut penser que le raisonnement tenu s'exprime davantage dans des termes plus courants : « Puisqu'il existe une case grise sans voisine blanche, aucune case blanche ne peut être voisine avec toutes les cases grises ». Ce qui sur le plan de la logique revient au même. Cet argument mobilisable ici pour A1, dans ce contexte particulier, ne peut plus l'être pour l'assertion A3 puisque la configuration ne l'autorise plus. Cela nous amène à penser que la variable didactique « type d'argument mobilisable » pourrait s'avérer pertinente.

Bien que les taux de réussite nette varient quasiment du simple au double pour les questions sur les grilles, globalement les assertions correspondantes sont plutôt bien interprétées en comparaison des autres assertions, phénomène encore beaucoup plus visible sur les taux de réussite brute (ces quatre questions figurent parmi les cinq meilleurs taux de réussite brutes). Cette stabilité de la réussite sur l'échantillon initial s'avérera utile pour la fabrication d'une situation didactique pour la double quantification.

II.11 Conclusion sur le questionnaire Q5

Il y avait deux objectifs associés au questionnaire Q5 : le premier était de faire un état des lieux sur la quantification pour la classe expérimentale, l'autre était de prolonger notre tentative de mieux comprendre l'interprétation des énoncés doublement quantifiés, tout cela dans le but de fabriquer une situation didactique de la quantification qui réponde aux difficultés révélées par cette étude.

Le premier résultat est sous forme négative : une hypothèse reprise souvent dans la littérature concernant la double quantification, à savoir que spécifiquement les énoncés de type EA sont souvent interprétés selon une inversion, hypothèse que les pré-questionnaires semblaient initialement confirmer, n'est validée ni pour la classe expérimentale ni pour un échantillon significatif pour le niveau de TS. Il apparaît que les énoncés de type AE ne sont pas particulièrement mieux interprétés que les énoncés de type EA. Il existe cependant une difficulté spécifique de démonstration des énoncés de type EA faux que l'on associe à la difficulté d'envisager « la négation d'une existence ». Ce premier résultat a pour conséquence de ne pas focaliser la situation didactique à venir sur les seuls énoncés de type EA.

Le deuxième résultat est qu'il existe un domaine de réussite qui semble stable pour l'interprétation des énoncés doublement quantifiées, il s'agit d'un contexte non mathématique, ayant des ensembles de définition des variables fini de faible cardinal, ayant une représentation familière et n'utilisant pas de variable littérale (les grilles). Ce résultat peut être très utile pour la fabrication d'une situation didactique puisqu'il met en évidence une rupture franche dans l'adéquation de l'interprétation suivant le contexte.

Nous remarquons aussi que l'interprétation des énoncés doublement quantifiés est très dépendante du contexte, il y a une forme d'interprétation opportuniste : les spécificités du contexte auquel s'applique l'énoncé doublement quantifiée semblent jouer un rôle qui prédomine à la syntaxe dans l'interprétation.

Il est apparu aussi clairement, dans l'analyse des réponses, la difficulté de démontrer des énoncés, pourtant bien interprétés, en exprimant des relations simples sur les variables, difficulté révélée par l'emploi d'exemples ponctuels beaucoup plus de la bonne validité que de la validité contraire de l'assertion.

Pour ce qui est de la variable didactique « langage utilisé », les énoncés en langage courant sont bien mieux interprétés que celles en langage formalisé, ce qui se voit dans leur taux de réussite mais également dans la quasi-disparition des inversions et des exemples ponctuels de validité contraire.

Enfin nous ajouterons que notre étude qui avait comme but initial de repérer les difficultés d'interprétation des énoncés doublement quantifiés, pourrait être prolongée par une analyse du rôle de la démonstration dans l'interprétation. Aussi notre étude nous permet-elle de formuler une hypothèse : « la difficulté d'interpréter un énoncé doublement quantifié est liée au type de démonstration disponible pour cette énoncé ». Ceci pourrait expliquer le rôle conjoint de toutes les variables didactiques liées au contexte : cardinal de l'ensemble de quantification, nature du contexte, présence de variables littérales...

Enfin, nous avons identifié grâce à ce questionnaire Q5, les éléments nécessaires pour concevoir, une situation didactique pour la double quantification, à savoir :

- La difficulté non spécialement asymétrique d'interprétation des énoncés de type EA et AE.
- Certains domaines de valeurs des variables didactiques sont associés à une interprétation correcte (en particulier le domaine non mathématique sur un ensemble fini).

A partir de ces éléments, le chapitre 7 a pour objectif de présenter la situation de la double quantification.

Chapitre 7 Double quantification : Deuxième situation d'entrée

Un pour tous et tous pour un (Alexandre Dumas)

I Présentation et analyse a priori de la situation Q^2 de la double quantification

Nous avons constaté dans les questionnaires et dans la littérature des difficultés d'interprétation des énoncés doublement quantifiés : des phénomènes d'interprétation inversée des énoncés de type EA et AE, des interprétations plus induites par le contexte que par la syntaxe, des difficultés pour démontrer les assertions doublement quantifiées (particulièrement celle de type EA fausses) ... En conséquence, une situation didactique pour la double quantification peut avoir deux objectifs distincts. Le premier est justement de permettre de mieux comprendre le mécanisme d'interprétation et pouvoir avancer sur l'établissement d'une hypothèse concernant les principales difficultés. Le deuxième est à visée d'enseignement : la situation devrait conduire les élèves/étudiants à mieux interpréter les énoncés doublement quantifiés et les démontrer. En effet, comme notre objectif est de permettre aux élèves d'entrer dans une problématique de la définition usuelle de la limite, il s'avère essentiel de pouvoir leur dévoluer des situations dans lesquelles interviennent des assertions sous forme de double quantification, autrement dit de leur confier des clefs d'interprétation de ce formalisme. En outre, et toujours dans la même optique de permettre aux élèves d'entrer dans cette problématique de la limite, il s'agira de proposer une situation qui renforce les capacités d'analyse et capacités à soutenir un questionnement scientifique autonome, c'est-à-dire non piloté par le professeur. Ce dernier point constituera un des axes d'analyse a posteriori des résultats de la situation.

En outre, l'interprétation de la double quantification nous parait le nœud de l'interprétation des énoncés multi-quantifiés dont le formalisme de l'analyse fait grand usage. Aussi, nous tenons pour cette interprétation comme une signification fondamentale de l'interprétation de ces énoncés, nous concevons alors un jeu, nommée « jeu Q^2 », qui aura un caractère fondamental et générique. Nous pourrons alors, par un choix adapté de valeurs de variables didactiques, construire une série de situations, nommée « situation Q^2 », qui a pour but de faire émerger le besoin d'une convention d'interprétation.

Enfin, en nous focalisant sur l'interprétation de la double quantification, nous faisons l'hypothèse que la quantification simple a déjà un sens. Une telle hypothèse est réaliste au niveau considéré (terminale S) et pour les cas simples (nous ne parlons pas ici d'existence de solutions d'équations différentielle, par exemple). De plus, en cas de difficulté sur le sens des quantificateurs simples, nous faisons une hypothèse supplémentaire : une situation sur la double quantification peut significativement renforcer le sens de la quantification simple. Cela nous parait crédible dans le sens où d'éventuelle difficultés conduiraient assez rapidement à des conflits d'interprétations réclamant une clarification dans les échanges.

I.1 Remarques préliminaires

Si le questionnaire Q5 remet en cause l'hypothèse d'inversion spécifique des assertions de type EA, nous remarquons aussi des inversions de celles de type AE (parfois plus nombreuses), il met cependant en évidence l'instabilité de l'interprétation de ce type d'énoncés et en particulier la prise en compte très relative de la syntaxe. En cela nos analyses rejoignent celles d'une des conclusions de Dubinsky et Yiparaki (2000) :

> This behavior suggests to us that for the most part the student were not conscious of the fact that in one way or another they were interpreting statements, and that they were apparently unaware of any conventions they might have used to make their interpretations. (Dubinsky et Yiparaki 2000 p. 53)

Aussi, la fabrication d'une situation didactique dans le cadre de notre projet global de thèse devra respecter la dynamique propre de deux objectifs éventuellement antagonistes. Le premier objectif est un objectif d'enseignement : nous souhaitons amener les élèves à percevoir la signification des doubles quantifications et à les distinguer, ceci sera nécessaire lorsque nous aborderons la définition classique de la limite en epsilon/alpha. En particulier, notre situation sur la limite reposera sur une permutation de quantification, nous le verrons au chapitre 8. Cet objectif peut se traduire de la manière suivante : il s'agit, au terme de la situation, de réduire l'écart entre l'interprétation « naïve » de la double quantification et l'interprétation experte. Plus précisément, nous visons une prise de conscience de la distinction de type d'énoncés doublement quantifiés (celles de type EA et AE puisque nous ne nous intéressons pas ici aux énoncés de type AA ou EE) et la prise de conscience que cette distinction se fonde sur la syntaxe et des règles conventionnelles d'interprétation. Cette prise de conscience correspond au passage d'une rationalité pragmatique, où les conventions d'interprétation sont inutiles puisque les cas de désaccords sont réglés par des précisions supplémentaires au cours des échanges, à une rationalité bien plus théorique où l'objet de l'échange n'est plus soutenu, précisé au fur et à mesure par les interlocuteurs, mais d'abord défini par des énoncés associés à des conventions d'interprétation. Le deuxième objectif est celui de mieux comprendre les mécanismes d'interprétation des élèves/étudiants. Cet objectif peut se traduire de la manière suivante : la situation doit faire apparaître l'écart interprétation naïve/experte avec le maximum de contraste, afin de pouvoir identifier sa logique propre. Nous voyons là, évidemment, une tension évidente entre les deux objectifs (réduire/augmenter l'écart). Nous pourrions nous résoudre à traiter chacun d'eux séparément. Nous souhaitons mener ces deux projets de front car nous pensons qu'ils sont plus compatibles qu'ils ne le paraissent. La raison principale est liée à la prise de conscience de l'élève de cet écart : si nous voulons que l'élève l'aperçoive et le conçoive, il faut qu'il soit le plus visible possible. Augmenter l'écart d'interprétation pour le réduire peut alors se comprendre.

I.2 Une adaptation de la logique dialogique

Les quantificateurs sont des objets mathématiques un peu particuliers dans le mesure où ils constituent d'une certaine manière les atomes de la cuisine moléculaire des mathématiques. En ce qui concerne la logique, on place habituellement la logique des propositions en deçà de la logique des prédicats car cette dernière fait intervenir les quantificateurs alors que le calcul des

propositions s'effectue sur des objets non quantifiés. Une question peut se poser : un objet mathématique, n'est-il pas forcément défini par une forme de déclaration d'existence ? N'est-il pas défini très souvent comme représentant d'une classe d'équivalence ? Et si cela est bien le cas, sa nature intrinsèque n'est-elle pas liée à une forme de quantification au minimum implicite ? Ces questions mettent en évidence qu'il peut être difficile de décrire l'objet quantificateur hors-sol quand seuls des exemples sont susceptibles initialement d'installer un premier rapport conforme à ces objets. En conséquence la difficulté inévitable sera de séparer ce qui est propre à la signification des quantificateurs et le contexte mathématique qui les supporte. C'est pour cette raison probablement que la quantification finalement n'est jamais vraiment enseignée pour elle-même dans le secondaire et qu'elle fait l'objet d'une forme de pari pédagogique : à force de la rencontrer dans de multiples situations, l'élève, l'étudiant va finir par lui donner une signification conforme. Cependant certaines études ont montré que les enseignants ne sont pas toujours clairs vis-à-vis de ces objets dans leurs pratiques, ni les manuels dans leurs textes (Durand-Guerrier et Arsac 2014, Chellougui 2003). Mais nous nous intéressons d'abord à la double quantification. Aussi faisons-nous l'hypothèse, pour des élèves de fin de lycée et premières années d'université que la quantification simple fait partie d'un domaine connu pour eux. Cela ne signifie pas qu'ils disposent d'une maîtrise parfaite de ce premier niveau mais qu'ils en ont déjà une représentation qu'ils pourront mobiliser lors de la situation que nous voulons fabriquer. Les éventuelles conceptions pourront alors être étudiées.

En faisant cette hypothèse, niveau atomique « connu », nous pouvons aborder le niveau moléculaire et associer des quantifications simples pour fabriquer des énoncés doublement quantifiés. La difficulté évidente c'est qu'une double quantification installe une possibilité de dépendance des deux variables quantifiées, notion qui n'était pas présente dans la quantification simple. Si nous « laissons faire la nature », on voit apparaître des interprétations erronées de cette dépendance (Cf Q5 chapitre 7). Il faut donc outiller l'interprétation de ces énoncés par un modèle de référence. C'est la logique dialogique, que nous choisirons pour cela car elle se prête intrinsèquement au débat. Des adaptations seront évidemment nécessaires pour utiliser cette théorie à des fins didactiques. En effet, il y a un gouffre entre un modèle qui entend fonder une théorie de la logique sur des dialogues virtuels et des débats réels entre élèves réels. Regardons, a priori, quels effets structurants peut avoir cet outil théorique sur un débat réel entre élèves au sujet de l'évaluation d'un énoncé doublement quantifié.

a) Énoncés AE et EA dans le modèle et dans le réel

Dans le modèle de Lorenzen, pour évaluer un énoncé de type AE du type P1 :« Pour tout *a* de A, il existe *b* de B, tel que R(*a*;*b*) » (où A et B sont des ensembles et R une fonction logique de *a* et *b*), se joue un jeu entre un défenseur[69] (celui qui veut prouver l'énoncé) et un attaquant (qui veut montrer qu'elle est fausse). Dans le cas de P1 : l'attaquant donne une valeur *a* de A et le défenseur doit trouver une valeur *b* de B tel que R(a;b) est vérifié. Dans cette modélisation, les joueurs de ce jeu sont omniscients, ce qui signifie ici que si l'attaquant ne trouve pas de valeur

69 Nous utiliserons ici les dénominations « défenseur » et « attaquant » à la place des mots « proposant » et « opposant » usuellement utilisés en logique. Il s'agit pour nous d'utiliser un vocabulaire plus représentatif des rôles respectifs dans le dialogue qui va s'instaurer.

b, c'est qu'il n'y en a pas et donc l'énoncé est déclaré faux. Cela signifie aussi que l'attaquant choisit forcément le meilleur *a* possible pour attaquer, c'est-à-dire un *a* (s'il existe) pour lequel le défenseur ne pourra pas trouver de *b*, et si le défenseur trouve un *b* l'énoncé est vrai.

Dans un dialogue réel, l'élève qui attaque pourra ne pas choisir le meilleur *a*, et l'élève qui défend pourra très bien ne pas trouver le *b* correspondant au *a* alors que ce *b* existe. Dans ces deux cas rien ne pourra être conclu sur P1.

Nous pouvons résumer cela dans un tableau : Pour un énoncé de type AE du type P1 :« Pour tout *a* de A, il existe *b* de B, tel que R(*a*;*b*) », lorsque l'attaquant propose *a* le tableau indique les différentes possibilités du défenseur et des conséquences sur la validité de P1 en fonction de la nature du discours théorique ou « réel ».

Joueurs omniscients	Le défenseur trouve b	Le défenseur ne trouve pas b
Théorie dialogique	P1 est vraie	P1 est fausse

Joueurs non omniscients	Défenseur trouve b	Défenseur ne trouve pas b
Réalité d'un dialogue d'élève	P1 est vraie si a est général et on ne peut rien conclure si *a* est un objet particulier de A	On ne peut rien conclure sur P1

Tableaux 34 : comparaison théorie/réalité d'une évaluation dialogique d'un énoncé de type AE

Ce que nous entendons par « a général ». Par exemple, l'énoncé P1 est « Pour tout entier *n*, il existe un entier *p* tel que $p > n$ ». L'attaquant peut fournir un nombre, par exemple 7, et le défenseur peut alors répondre 8. Mais l'attaquant peut aussi proposer une lettre, par exemple *n*, et l'attaquant peut alors répondre aussi par une <u>réponse générale</u> : $n+1$.

Nous pouvons voir ici des différences importantes entre un discours réel et un discours théorique. Tout d'abord, dans la logique dialogique seules les lettres sont proposées, ce qui explique la validité de P1 dans le cas où le défenseur trouve un *b* correspondant (le *a* proposé n'est pas un cas particulier). Dans un débat réel, l'attaquant peut proposer un objet *a*, c'est-à-dire un cas particulier. Dans le cas où le défenseur trouve un objet *b* correspondant, on ne pourra rien conclure. Cependant, cet essai aura éventuellement permis de mieux comprendre la situation et les relations en jeu. Cette limitation dans la théorie, faire que le premier coup soit forcément décisif, semble peu adaptée à notre objectif didactique dans la mesure où elle empêche les essais qui, s'ils ne sont pas décisifs pour la validité, le sont souvent pour la compréhension.

Ensuite, dans le cas où le défenseur ne trouve pas le *b* correspondant, nous voyons que dans le cas de la théorie on peut conclure que P1 est vrai tandis que dans la réalité d'un débat entre élèves, rien ne nous assure que ne pas trouver *b* signifie qu'il n'y pas de *b* adéquat.

Pour évaluer un énoncé de type EA du type P2 :« Il existe *a* de A, tel que pour tout *b* de B, on a R(*a*;*b*) ». Dans le cas de P2 : le défenseur donne une valeur *a* de A et l'attaquant doit trouver

une valeur *b* de B tel que R(*a*;*b*) n'est pas vérifié. Si l'attaquant ne trouve pas de valeur *b* alors l'énoncé est déclaré vrai (puisqu'il est omniscient) et s'il en trouve une elle sera déclarée fausse. Cela signifie aussi que le défenseur choisit forcément le meilleur *a* possible pour défendre l'énoncé, c'est-à-dire un *a* (s'il existe) pour lequel l'attaquant ne pourra pas trouver de *b* qui ne vérifie pas R(*a*;*b*).

Dans un dialogue réel, l'élève qui défend pourra ne pas choisir le meilleur *a*, et l'élève qui attaque pourra très bien ne pas trouver le *b* qui rendrait fausse l'assertion alors que ce *b* existe. Dans ces deux cas rien ne pourra être conclu sur P2.

Nous pouvons résumer cela dans un tableau : Pour un énoncé de type EA du type P2 :« Il existe *a* de A, tel que pour tout *b* de B, on a R(*a*;*b*) », le défenseur propose un a et le tableau indique les différentes possibilités de l'attaquant et des conséquences sur la validité de P1 en fonction de la nature du discours théorique ou « réel ».

Joueurs omniscients	L'attaquant trouve *b* tel que non R(*a*;*b*)	L'attaquant ne trouve pas *b* tel que non R(*a*;*b*)
Théorie	P2 est fausse	P2 est vraie

Joueurs non omniscients	L'attaquant trouve *b* tel que non R(*a*;*b*)	L'attaquant ne trouve pas *b* tel que non R(*a*;*b*)
Réalité	P2 est fausse si *a* est général et on ne peut rien conclure si *a* est un objet de A	On ne peut rien conclure sur P2

Tableaux 35 : comparaison théorie/réalité d'une évaluation dialogique d'un énoncé de type EA

Pour les énoncés de type EA, les mêmes remarques que pour les énoncés de type AE peuvent être faites.

b) Adaptation du modèle dialogique

On pouvait se douter qu'une théorie qui cherche à définir la vérité d'un énoncé logique dans l'absolu et la recherche de la vérité par des élèves qui débattent, c'est-à-dire qui inclut une part d'ignorance (en logique : jeu à information incomplète), ne peuvent pas facilement coïncider. En réalité, nous nous trouvons en présence d'un paradoxe assez classique de l'enseignement : pour comprendre le concept d'énoncé doublement quantifié, il faut disposer d'un modèle d'interprétation, par exemple la logique dialogique. Cependant pour utiliser la logique dialogique comme modèle d'interprétation il faut nécessairement avoir compris le sens de la double quantification puisqu'il faut être « omniscient » et faire des choix qui demandent une certaine expertise. Pour sortir de ce cercle vicieux nous allons proposer une variante qui s'inspire de cette logique dialogique, variante qui ne prétend pas servir de fondation à une théorie logique mais tente de donner un modèle de construction de l'interprétation d'un énoncé doublement quantifié

sous forme d'une méthode pour débattre de la vérité de ces énoncés dans les cas de désaccord. De tels énoncés devraient prendre sens. **Le sens que nous visons a minima est : savoir que l'ordre des quantificateurs change la signification d'un énoncé doublement quantifié et que cette signification repose sur des conventions d'interprétation précises.**

Nous proposons de travailler, dans un premier temps, sur des ensembles quantifiés finis **de cardinal réduit** (inférieur à 10) et sur des relations simples. Cette limitation initiale va permettre dans la réalité du jeu de considérer les élèves comme omniscients puisque leur seront accessibles toutes les instances du jeu et leur valeur de vérité. Ils pourront alors se concentrer sur la structure du dialogue. Évidemment, il s'agira dans un deuxième temps de tester cette interprétation dans des cas où l'hypothèse d'omniscience sera plus discutable : cas d'ensembles quantifiés infinis, par exemple. Dans ces cas, l'interprétation plus difficiles devrait être meilleure avec cet outil à disposition. Nous le vérifierons.

Nous proposons maintenant notre adaptation du modèle de Lorenzen pour la classe pour les deux types d'énoncés AE et EA. De même que pour la logique dialogique, l'interprétation/la démonstration d'énoncés doublement quantifiés résulte d'un dialogue entre un attaquant et un défenseur.

Pour un énoncé de type AE du type P1 :« Pour tout *a* de A, il existe *b* de B, tel que R(*a*;*b*) », l'attaquant propose un objet *a* particulier (pas forcément le « meilleur » *a*) :

- Le défenseur peut répondre par un *b* particulier qui vérifie R(*a*;*b*). On ne peut pas conclure alors que P1 est vraie mais on commence à avoir une idée de pourquoi P1 pourrait s'avérer vraie. Cette distinction fondamentale avec la théorie de la logique dialogique va permettre de faire des essais et donc mener des jeux d'extérieurs qui viendront enrichir les jeux d'intérieur. Ensuite l'attaquant va proposer à nouveau un objet *a* particulier.
- Le défenseur ne trouve pas un *b* qui vérifie R(*a*;*b*), dans ce cas le défenseur répond par : « il n'y a pas de *b* » ce qui signifie que l'énoncé est faux. Ceci est possible seulement parce que l'ensemble des instances est faible et facilement évaluable : on peut alors confondre sans risque : « il n'y en a pas » et « je n'en trouve pas ».

Au final si toutes les valeurs auront été testées et défendues par le défenseur alors P1 sera déclarée vraie (cela est possible car le cardinal de l'ensemble quantifié est faible).

Pour un énoncé de type EA du type P2 : « Il existe *a* de A, tel que pour tout *b* de B, on a R(*a*;*b*) », le défenseur propose un objet particulier a de A (pas forcément le « meilleur » a) :

- L'attaquant peut répondre par un objet *b* particulier ne vérifiant pas R(*a*;*b*). Dans ce cas on ne peut pas conclure sur P2 mais on peut commencer à comprendre la raison pour laquelle P2 pourrait s'avérer fausse. Même remarque que pour P1 et les jeux d'extérieurs rendus ainsi possibles. Le défenseur propose alors un autre *a*.
- L'attaquant peut ne pas trouver d'objet *b* ne vérifiant pas R(*a*;*b*), il dit alors : « Il n'y a pas de *b* » et on conclut que P2 est vraie. Même remarque que pour AE, ici cette déclaration est valide dans la mesure où l'élève est en « situation d'omniscience ».

Au final, si pour toutes les propositions du défenseur, l'attaquant a pu répliquer, alors on conclut que l'énoncé est faux.

La différence entre la logique dialogique et cette évaluation-là de la vérité pour ce type d'énoncés est :

- Qu'on ne cherche pas à fonder une théorie logique mais seulement une forme d'interprétation de certains énoncés.
- Que l'omniscience postulée ici ne suppose pas de celui qui propose un élément une forme d'expertise qui l'obligerait à donner du premier coup un objet décisif, c'est-à-dire en fait supposerait de lui une interprétation déjà confirmée de ce type d'énoncé. Par contre celui qui répond doit pouvoir dire « il n'y a pas de b » si tel est le cas. L'omniscience est donc seulement du côté de celui qui répond, mais il n'a, lui, plus qu'une seule variable à considérer puisque l'autre variable a déjà été fixée.
- Ce débat étant collectif, les erreurs (la non omniscience) seront plus facilement mises à jour par les autres participants, le travail collectif renforce ici l'hypothèse d'omniscience.
- L'évaluation par la logique dialogique est un jeu à un seul coup tandis que ce nous proposons s'avère un jeu à plusieurs coups. Si le premier intérêt est de ne pas nécessiter l'hypothèse d'omniscience pour fonctionner (ou bien de manière très atténuée), le deuxième intérêt réside dans les échanges successifs que suppose cette variante, succession qui permet progressivement de prendre conscience du sens de la relation qui se construit en direct. Nous pensons qu'avec un peu de pratique, par anticipation la validité devrait se faire jour avant l'exécution de tous les coups a priori nécessaires et cela constituerait un excellent indicateur de maîtrise de la méthode.

c) Effets escomptés par rapport à l'objectif initial

Comment ce dispositif peut-il répondre aux principales erreurs d'interprétation détectées dans les questionnaires réalisés ?

- Pour ce qui est de l'interprétation inversée des deux types d'énoncés, nous pensons que la structure d'interprétation de notre adaptation de la logique dialogique met en évidence le rôle dissymétrique des deux énoncés et en incarnant le jeu défenseur/attaquant donne les moyens d'une meilleure appréhension de la signification de ces différents énoncés.
- Pour ce qui est des exemples ponctuels de vérité et de fausseté, le fait que la règle d'interprétation remette en jeu la vérité devrait permettre de faire prendre conscience qu'on ne peut pas statuer à partir de ces cas-là. Cela devrait aussi redonner un intérêt à ces cas qui, s'ils ne déterminent pas la vérité d'un énoncé, l'éclairent. Remarquons que dans la logique dialogique, l'hypothèse d'omniscience des joueurs permet de conclure dans ces circonstances. Transposée sans précaution cette règle renforcerait une mauvaise interprétation des énoncés, en particulier donner aux exemples ponctuels de vérité ou de fausseté la fonction de déterminer la vérité de telles assertions.

Que pouvons-nous attendre de ce dispositif pour le cas d'ensembles quantifiés infinis ?

Nous pouvons faire l'hypothèse qu'une fois installée, ce dialogue va permettre de faire apparaître assez naturellement le besoin de statuer sur des objets génériques par l'intermédiaire de variables. En effet, ayant la possibilité de recourir dans un premier temps à des objets particuliers, dans le cas d'un ensemble infini, on voit vite que cela va être sans fin, mais on voit aussi

vite, avec ces tests, les raisons qui rendent vraie ou fausse une assertion simple, raisons qui vont nécessiter l'emploi des variables pour être exprimées de manière générique.

Nous avons déterminé l'outil que nous comptons proposer aux élèves. Il s'agit maintenant de fabriquer une situation qui rendra cet outil nécessaire, utile et accessible.

I.3 Un jeu fondé sur l'interprétation de la double quantification : Q^2

a) Introduction : objectifs globaux sur la quantification

Rappelons que deux objectifs sont assignés à la situation didactique que nous voulons fabriquer : d'une part permettre la prise de conscience de la distinction de deux types d'énoncés doublement quantifiées (AE/EA) fondée sur la syntaxe (ordre des quantificateurs) et sur des conventions d'interprétation spécifique, d'autre mieux comprendre les phénomènes « naïfs » d'interprétation.

L'analyse plus fine des réponses a permis de montrer que la pertinence de l'interprétation des énoncés doublement quantifiés dépend de certains facteurs. Les facteurs identifiés sont le contexte (Mathématique ou Non mathématique), la cardinalité de l'ensemble des variables en jeu (Fini ou Infini), la validité de l'assertion (Vraie ou Fausse) et la présence de variables littérales (Oui présence ou Non présence) et nature du langage (Courant ou Mathématique). L'analyse des réponses du questionnaire Q5 montre moins un effet spécifique de chaque variable qu'un effet lié à une conjonction de valeurs de ces variables.

Les deux tableaux ci-dessous résument les effets « extrêmes » de certaines de ces conjonctions de valeurs des variables sur l'interprétation des énoncés doublement quantifiés (grand échantillon 181 élèves de TS).

Variables	Valeur	Interprétation
Contexte mathématique (Oui/Non)	Oui	Les interprétations sont plutôt moins bien réussies (Réussite nette comprise entre 14 % et 38%)
Cardinalité de l'ensemble quantifié (Fini/Infini)	Infini	
Présence de variables littérales (Oui/Non)	Oui	
Nature du langage (Courant/Mathématique)	Mathématique	

Variables	Valeur	Interprétation
Contexte mathématique (Oui/Non)	Non	Les interprétations sont plutôt bien réussies
Cardinalité de l'ensemble quantifié (Fini/Infini)	Fini	

Présence de variables littérales (Oui/Non)	Non	(Réussite nette comprise entre 43 % et 81%)
Nature du langage (Courant/Mathématique)	Courant	

Tableau 36 : comparaison des réussites d'évaluation des énoncés doublement quantifiés selon les valeurs des variables didactiques

Les deux objectifs précédents peuvent être alors reformulés : d'une part, il s'agit de construire une situation didactique qui améliore la compréhension des énoncés doublement quantifiés dans les cas défavorables du premier tableau en prenant appui sur les cas favorables du deuxième tableau. D'autre part, nous pensons qu'en proposant une situation didactique mettant en évidence la rupture dans l'interprétation entre les contextes des deux tableaux, nous constituerons un corpus susceptible d'améliorer, après analyse, notre compréhension du phénomène d'interprétation.

Étudions maintenant ce qui deviendra le cœur de notre situation didactique de la double quantification : le jeu Q^2.

b) Le jeu Q^2

Nous avons vu que Dubinsky (2000) met en évidence dans ses travaux qu'il n'est pas possible de s'appuyer sur une compréhension de la double quantification dans le contexte familier car d'une part elle n'est finalement pas si solide et d'autre part cette compréhension ne se transpose manifestement pas du tout au contexte mathématique. Ce constat nous amène à penser, comme Dubinsky & al. (2000), que l'utilisation de métaphore ou d'analogie pour éveiller une forme de compréhension sur la double quantification pour le contexte mathématique est d'avance vouée à l'échec. Dubinsky & al. (2000) se tourne alors vers « the game », jeu qui consiste en un dialogue opposant-défenseur sur la quantification, jeu qui s'apparente à une transposition didactique de la logique dialogique de Lorenzen décrite par Barrier (2009).

Selon Dubinsky & al. (2000), ce jeu connaît diverses réussites dans son expérimentation. Il rencontre deux types de difficultés : la compréhension des règles du jeu et la variabilité des effets du jeu lorsque les règles semblent comprises en ce qui concerne la capacité de l'étudiant de s'en servir afin d'évaluer la validité de l'énoncé proposé et de transposer cette technique d'évaluation à d'autres énoncés. Lorsque nous avons étudié cette expérimentation nous avons défini de nouvelles conditions didactiques et épistémologiques de nature à améliorer l'efficacité d'un tel jeu :

- Trouver un moyen de faire comprendre les règles du jeu.
- Utiliser ce jeu dans un contexte modélisé (interdisant les jeux d'opinion)
- Les règles données font lien avec la syntaxe.
- Faire en sorte que le lien entre la syntaxe et la vérité soit l'enjeu du jeu.

En outre, nous avons montré, avec le questionnaire Q5, qu'il existe un domaine où la capacité d'interprétation de la double quantification par les élèves est assez solide : le cas des grilles. Nous pensons utiliser ce fort point d'appui comme milieu adidactique afin d'installer les règles

adaptées du jeu dialogique sur la double quantification de manière à fournir les moyens de validation pour les contextes plus difficiles.

La difficulté de cette entreprise réside dans le paradoxe suivant : le contexte simple fournit un milieu consistant puisque les élèves peuvent y exprimer des certitudes, mais cette simplicité fait alors disparaître le besoin de moyens de validation formalisés puisque les outils empiriques, c'est-à-dire non formalisés, suffisent déjà. Nous verrons que nous pouvons résoudre ce paradoxe en « retournant » (deux fois) la situation didactique « habituelle ». (Bloch, 2005)

« Le jeu de la double quantification »

Voici le jeu qui va servir de milieu matériel.

On donne un jeu de cartes aux joueurs, le jeu se joue à deux (pour commencer). Chaque carte correspond à une partie. Sur chaque carte figure une grille de trois par trois dont chaque case contient un symbole et une règle du jeu de la carte. Cette règle du jeu fixe trois paramètres : l'énoncé doublement quantifié qui sera l'objet de cette partie, celui qui commence à jouer et pour quelle validité de l'énoncé il joue. Voici des exemples de cartes :

Figure 20 : cartes du jeu Q²

Le principe du jeu est le suivant : un joueur a un crayon de couleur rouge et l'autre un crayon de couleur noire. Celui qui est désigné par la carte commence la partie et entoure une case avec sa couleur. L'autre alors réplique en entourant une case avec sa propre couleur. Ceci continue alternativement jusqu'à épuisement des cases. Si la configuration obtenue respecte l'énoncé joué alors celui qui joue pour vrai gagne, sinon il perd. Voici une partie possible :

Figure 21 : Partie du jeu Q²

Dans ce cas, Rouge gagne la partie car l'énoncé de la carte est vrai pour le coloriage obtenu.

c) Les variables didactiques associées à ce jeu

Ce jeu comporte plusieurs variables didactiques que nous présentons (i), et auxquelles nous associons les différents scénarios relatifs à leur rôles possibles dans la situation. Nous parlons alors de scénarisation des variables, scénarisation qui généralise l'idée de situation retournée (Bloch, 2005).

i. Variables didactiques

Les Variables didactiques sont au nombre de quatre.

1. Nature de l'ensemble de définition des variables quantifiées

Plusieurs sous-variables sont associées à cette variable.

- *Nature des symboles utilisés*. Il peut s'agir de lettres de l'alphabet pris comme symboles à l'instar de l'exemple proposé ci-dessus ou bien des formes géométriques. Mais il peut s'agir aussi d'éléments d'ensembles numériques pris comme symboles ou bien comme nombres. Ce peut être l'ensemble ou un sous-ensemble des entiers ou des réels par exemple.
- *Cardinal de l'ensemble donné :* essentiellement il peut être fini ou infini. Dans le cas fini, il faudra différencier le cas où le cardinal est petit et le cas où il est grand car il peut ne plus être possible de jouer de la même manière dans le cas de grands cardinaux finis.
- *Représentation de l'ensemble.* Du point de vue mathématique la représentation de l'ensemble ne change rien à la solution mathématique du problème. Cependant cela peut être déterminant du point de vue ergonomique. Par exemple, il peut être beaucoup plus facile de jouer sur une grille pour un élève que sur un ensemble sous une autre forme. Cela peut aussi avoir, en contrepartie, des conséquences sur la résolution du problème et induire des fausses pistes, la représentation devenant prégnante alors qu'elle ne joue pas de rôle sur la solution. Nous appellerons « grille » désormais les ensembles de quantification des variables quand ils sont finis et représentés sous forme de grille.

Nous avons déjà vu que cette variable joue un rôle dans la compréhension des énoncés doublement quantifiés. Nous pensons que dans la première étape l'ensemble peut être le plus simple, c'est-à-dire de faible cardinal, composé de symboles et ayant une représentation accessible, par exemple sous forme de grille comme dans l'exemple donné ci-dessus. Dans une deuxième étape, l'ensemble sera complexifié afin de mettre en jeu les valeurs de cette variable visée par la situation : un ensemble numérique infini en particulier.

2. Type d'énoncé

Dans le cadre de cette étude ne sont envisagés que des énoncés de type AE ou EA.

Le questionnaire Q5 allégé montre des difficultés pour l'interprétation des deux types d'assertion, les deux types seront donc utilisés par la situation didactique.

3. Nature de la condition donnée

Un énoncé doublement quantifié comporte une relation qui peut porter sur les deux variables, conjointement ou séparément, ou bien sur une seule variable. Pour l'exemple proposé ci-dessus, la condition porte sur les deux variables conjointement : les cases coloriées portent ou non la même lettre. D'autres relations sont possibles en fonction de la nature de l'ensemble de définition des variables. Par exemple, si l'on choisit des variables numériques, la condition peut être une relation d'ordre, d'égalité, ...

De même que la variable précédente, ici la relation de type similarité (même lettre) peut être utilisée pour amorcer le jeu mais au final ce qui est visé est davantage une relation générique concernant les ensembles numériques.

4. Significations de la logique dialogique

Cette variable didactique peut se décrire selon plusieurs paramètres qui précisent la compatibilité avec les règles de la logique dialogique.

<u>Règle du commencement</u>

Comment définit-on celui qui commence ? Ce peut être de plusieurs manières. Soit celui qui commence est mentionné sur la carte comme sur l'exemple proposé, soit il est convenu à l'avance de celui qui commencera chaque fois ou bien encore il est convenu à l'avance d'une règle de commencement qui dépend à la fois de l'énoncé et pour quelle validité il joue.

Cette variable est déterminante dans le sens où elle détermine la stratégie des joueurs. Dans l'absolu toute valeur de cette variable est jouable, mais toute valeur n'est pas conforme à la signification dialogique du jeu des quantificateurs. Si nous voulons garder une proximité dans ce jeu avec la logique dialogique de Lorenzen, il faut alors choisir les valeurs de cette variable en conséquent. Nous préciserons cela lors de l'étude de la variable « qui joue quelle validité ».

<u>Nombre de coups de chaque joueur par tour</u>

Soit n le nombre de coups joués par A à chaque tour et n' le nombre de coups joués par B à chaque tour. On distingue plusieurs cas, d'autres variantes sont par ailleurs possibles :

- soit $n = n'$, c'est le cas de l'exemple donné ci-dessus avec $n=n'=1$; soit
- Soit $n \neq n'$
- Soit on décide d'imposer seulement à A de jouer n coups à chaque tour avec $0 < n \leq N$, N un nombre entier non nul déterminé à l'avance (N étant strictement inférieur au nombre total de coups à jouer) et de même pour B avec $0 < n' \leq N'$, avec N' un nombre entier non nul déterminé à l'avance.

Cette variable est de nature à changer les stratégies. Nous garderons des valeurs qui sont facilement interprétables dans la logique dialogique de Lorenzen, c'est-à-dire le cas $n = n' = 1$.

<u>Nombre de joueurs</u>

Si pour le jeu il faut au minimum deux joueurs, le jeu est jouable à plus de joueurs. L'objectif étant qu'il puisse être joué seul (dans la version jeu classique d'interprétation)

Dans un premier temps, afin d'installer le jeu, celui-ci se joue à deux, puis dans un deuxième temps pour affronter des énoncés dans les contextes d'interprétation plus difficiles, on peut envisager de traiter cela en classe entière. Cette variable a une conséquence sur la possibilité (ou non) de faire apparaître des contradictions dans les interprétations.

Qui joue quelle validité

Premier critère : sur l'exemple de la carte ci-dessus, il est écrit qui joue pour vrai. Il est possible d'alterner à chaque partie celui qui joue vrai ou bien de laisser pour plusieurs parties le même joueur jouer pour vrai.

Deuxième critère : pour que ce jeu, d'une certaine manière, modélise les règles de la logique dialogique de Lorezen, celui qui commence doit être défini en fonction de l'énoncé donné. Par exemple, si on joue l'énoncé : « Pour toute case rouge, il existe une case noire ayant même symbole », pour reprendre l'exemple proposé, il faut que ce soit Noir qui joue pour vrai et Rouge qui commence. En effet, celui qui attaque l'assertion (Rouge), attaque en fait la quantification universelle. Il donne ainsi un élément pour lequel l'autre va devoir montrer que l'énoncé est vrai, c'est-à-dire ici choisir un élément qui vérifie la condition donnée. Évidemment l'autre choix, Rouge joue pour vrai, est jouable mais dans ce cas le jeu ne peut plus s'interpréter simplement à travers les règles de la logique dialogique. Dans l'autre cas, pour un énoncé du type « Il existe une case rouge telle que toute case noire a le même symbole », d'après les règles de la logique dialogique, le défenseur du « il existe » doit donner une valeur pour laquelle il prétend que l'affirmation est vraie. Donc celui qui affirme que l'assertion est vraie doit être celui qui propose les valeurs du « il existe » et doit commencer, ici c'est Rouge.

Donc celui qui commence, est très contraint par le type d'énoncé EA ou AE et son rôle par rapport à la validité, si l'on cherche une certaine conformité avec les règles du jeu dialogique.

Afin que chacun se rende compte des différentes facettes du jeu, c'est-à-dire envisage à la fois la vérité mais aussi la fausseté de ces énoncés, il peut être intéressant d'alterner celui qui joue pour vrai. Cette variable doit être fixée en fonction de l'énoncé donné afin de « modéliser » les règles de la logique dialogique.

Jeu coopératif ou partisan

Le jeu est partisan quand les deux jouent pour une validité différente et coopératif quand les deux jouent pour la même validité.

Le jeu partisan est plus conforme au jeu de la quantification au sens des règles de la logique dialogique de Lorenzen puisqu'il s'agit d'un jeu défenseur-opposant, mais le jeu coopératif peut être utile aussi pour montrer, par exemple, certaines impossibilités : même en coopérant on ne peut pas rendre vraies (ou fausses) certaines assertions.

Grille (ou ensemble) gagnante ou perdante (pour celui qui joue vrai)

Suivant la configuration de l'ensemble, l'énoncé donné (type EA/AE et nature de la relation), une grille peut être qualifiée de gagnante ou perdante (pour celui qui joue vrai) c'est-à-dire qu'il

existe ou non une stratégie qui lui permet de gagner systématiquement (nous détaillerons ceci ultérieurement).

Le joueur inexpérimenté peut avoir l'impression que gagner ou perdre dépend uniquement de son habileté à jouer. Il se trouve que pour une grille perdante « bien jouer » ne suffit pas, on ne gagne dans ce cas que si l'autre joueur joue mal. Alterner les grilles gagnantes et perdantes pour un joueur va permettre aux deux joueurs de se rendre compte progressivement de cette réalité sous-jacente : le jeu, pour l'expert, est déterminé en fait à l'avance. Cette prise de conscience peut être reliée à celle qui correspond à la possibilité d'attribuer une unique valeur de vérité à un énoncé quantifié : une fois qu'on a des conventions d'interprétation, « les jeux sont faits ».

ii. Scénarisation des variable didactique ou variantes du jeu

La scénarisation des variables didactique est l'étude des choix possibles qui forment les variantes de scénarios possibles dans la structure du jeu proposé en faisant de certaines de ses variables l'objet du nouveau jeu. Par exemple, une fois les règles du « jeu de la double quantification » installées, on peut demander de fabriquer des (toutes les) grilles gagnantes (ou perdantes) pour un énoncé donné. Ainsi ce qui était une variable du jeu précédent devient une finalité du nouveau jeu. Cette manière de fabriquer, à partir d'une situation donnée, une collection d'autres situations, va générer des situations dont nous pouvons penser que chacune aura un intérêt épistémologique spécifique. On pourra alors choisir celle qui s'adapte le mieux à l'objectif visé.

Cette idée de scénarisation variable ainsi définie nous paraît prolonger le concept de « situation retournée » défini par Bloch (2005) à propos du jeu des envahisseurs :

> Le jeu direct est là pour familiariser le joueur avec la stratégie que requiert le jeu et avec les objets mathématiques manipulés ; ce jeu ne contient pas la connaissance comme nécessaire, elle est seulement contingente (rien n'empêche le joueur de dire : " Envahir tous les nombres, je sais faire ça, on le fait avec les bases ", mais bien sûr rien non plus ne l'y contraint);
>
> Le jeu est alors retourné pour que le joueur ne puisse plus jouer sans la connaissance visée qu'il va rencontrer en action ; en effet les consignes (contraintes) l'obligent, pour gagner, à utiliser cette connaissance (en acte). (Bloch 2005 p. 94)

Notons d'abord que le « jeu de la double quantification » est une situation retournée, au sens de Bloch. En effet, le jeu direct habituel, « évaluer un énoncé doublement quantifié » pour un ensemble donné, ici n'a plus à être joué initialement (il est, d'après les analyses et dans ce cas particulier favorable (Cf Q5), déjà assimilé). Dans le « jeu de la double quantification » il s'agit, au contraire, de construire l'ensemble sur lequel porte les quantificateurs pour que l'énoncé ait une validité choisie à l'avance (vraie ou fausse).

Évidemment, comme le souligne Bloch (2005), l'intérêt de considérer de telles variantes, ici de manière encore plus générale, est de déterminer le scénario qui oblige l'utilisation des connaissances (en actes) pour résoudre la situation proposée. Dans le cas du « jeu de la double quantification », il s'agit de conduire, in fine, à la nécessité de distinguer deux types (EA/AE) de double quantification en fonction de la syntaxe (ordre de quantification) et à la formulation des conventions d'interprétation de la double quantification. Le retournement de la situation d'évaluation directe d'énoncés doublement quantifiés va permettre de requestionner naturellement

les règles d'interprétations sur un domaine où, a priori, leur relative réussite empêchait qu'elles soient véritablement discutées.

Voici les différentes scénarisations possibles des variables didactiques que nous recensons (sans toutefois prétendre à l'exhaustivité) :

- Jeu de « la double quantification »

C'est le jeu décrit plus haut avec la carte. Quand on joue à ce jeu, on joue évidement pour gagner mais le jeu lui-même n'engage pas forcément une recherche de stratégie gagnante, en tout cas pas, a priori, de recherche rationalisée et formalisée.

- Jeu de « fabrication de grille »

Dans ce jeu, on demande de fabriquer des types (ou tous les types de) de grilles gagnantes ou perdantes (pour le joueur qui joue vrai). Une grille gagnante pour le joueur qui joue pour vrai est une grille pour laquelle « il est certain de gagner » (nous préciserons plus tard). Ce jeu-là a deux intérêts : il oblige d'abord à définir ce que signifie grille gagnante. Et cela est directement lié à la double quantification puisque la définition formelle correspond à une succession d'alternance de quantificateurs existentiels et universels (autant que de coups à jouer en fait). Un autre intérêt est de faire entrer le questionnement dans une autre dimension. Il ne s'agit plus de jouer à un jeu contingent, je peux gagner ou perdre selon les coups de l'adversaire, mais d'entrer dans un jeu de nécessité : il y a des grilles qui sont gagnantes et d'autres perdantes et des raisons pour lesquelles elles le sont.

Ce jeu est indissociable du jeu suivant puisque lorsqu'une grille est proposée, il s'agit de l'évaluer.

- Jeu « d'évaluation de grilles »

On se demande si tel type de grille est gagnante ou pas. Une fois qu'est installé le concept de grille gagnante, ce jeu peut faire travailler sur les stratégies à employer suivant le type d'énoncé EA ou AE. Il se trouve que justement certaines des stratégies gagnantes correspondent quasiment aux règles de la logique dialogique (nous verrons cela juste après la scénarisation des variables).

- Jeu « d'énoncé »

Dans ce jeu, on se demande quel énoncé rend gagnante une grille donnée. L'intérêt est de questionner le type d'énoncé à choisir et de montrer qu'une même grille peut changer de valeur (gagnante ou perdante) en fonction de l'énoncé. Ce jeu ne semble pas prometteur ici dans la mesure où il fait travailler les mêmes connaissances que le « jeu de la double quantification » qui lui est beaucoup plus naturel.

- Le jeu « classique »

C'est le jeu qui consiste à interpréter correctement un énoncé doublement quantifié quand l'ensemble de définition des variables est donné. C'est l'habileté à ce jeu-là que constitue l'objectif de la situation de la double quantification.

d) Grilles gagnantes et logique dialogique

i. Grilles gagnantes

Le jeu Q² est un jeu partisan fini à deux joueurs. Dans la théorie des jeux, pour un tel jeu, on a coutume d'appeler « position gagnante » pour un joueur une position telle qu'il existe une option (un coup à jouer) qui conduit à une position perdante. Et on appelle « position perdante » une position telle que toute option mène à une configuration gagnante. Cette définition utilise une double récurrence croisée, ce qui la rend difficile à établir et dévoluer au niveau TS. De plus, cette définition symétrise complètement les deux joueurs, il y en a un qui joue pour vérifier l'énoncé et l'autre pour le rendre faux mais ils peuvent tous les deux commencer le jeu. Or, nous l'avons déjà observé, si nous voulons établir un lien entre le jeu Q² et la logique dialogique nous sommes obligés de fixer celui qui commence par la règle donnée précédemment. Ceci empêche donc d'utiliser cette définition générale car on restreint ainsi le sens de position gagnante, et nous parlons alors de « grille gagnante » D1 : « une grille est gagnante pour celui qui joue pour vrai si il existe une stratégie qui lui permet de gagner quels que soient les coups de l'autre joueur et elle est perdante sinon et dans ce cas elle est gagnante pour l'autre joueur ». Mais cette pseudo-définition fabriquée sur une double quantification, qui permet de comprendre intuitivement le sens de position gagnante, est impropre pour ce que nous voulons définir. Une définition « propre » D2 qui respecte la règle de commencement consiste « seulement » à déployer la double récurrence précédente sous forme d'un arbre gigantesque alternant quantification existentielle et universelle. Prenons un exemple avec le jeu de carte précédent : « Pour tout rouge, il existe un noir qui a même symbole » où Noir joue vrai et Rouge commence. La grille est alors gagnante pour Noir si « pour toute option de Rouge, il existe une option de Noir telle que pour toute option de Rouge il existe une option de Noir…telle que l'énoncé soit vrai ». Ces deux définitions (D1 et D2) ne sont pas équivalentes précisément parce que les quantificateurs ne sont pas commutatifs, ce qui est l'objet de notre étude. Nous serons finalement amenés à minorer cette complexité de D2 afin de rendre accessible un concept finalement assez bien compris avec le seul énoncé : D3 :« une grille est gagnante si on la gagne forcément quand on joue bien. ». On peut remarquer ici que ce concept de « grille gagnante » a une formalisation qui, du point de vue de la complexité, est sans commune mesure avec son apparente accessibilité. Il y a là un saut épistémologique qui nous semble plus important que l'obstacle lui-même auquel la situation didactique se donne de s'attaquer. Aussi, pour ces raisons, la situation didactique ne s'attardera pas sur une formalisation idoine du concept de « grille gagnante » et ce, bien qu'une partie de notre problématique s'attache à la formalisation des concepts. Par contre, nous en avons besoin pour notre analyse du jeu. Aussi prendrons-nous comme définition de « grille gagnante » celle qui correspond à l'arborescence de quantificateurs (D2), cette définition dépend donc du type de l'énoncé (pour AE elle commence par « pour tout » et pour EA par « il existe »). Remarquons enfin que cette définition de grille gagnante est bien définie puisqu'il s'agit d'un énoncé logique construit comme une succession finie de quantificateurs : elle est donc vraie et dans ce cas la grille est gagnante ou bien elle est fausse et dans ce cas la grille est perdante.

Nous allons maintenant définir les grilles gagnantes pour le jeu Q² dans un cas particulier qui correspond à jouer une grille trois par trois contenant des symboles (des lettres de l'alphabet par exemple) éventuellement en plusieurs exemplaires.

- *Dans le cas de la convention AE*

Il s'agit alors de l'énoncé : « Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole » où Rouge commence et joue pour faux.

Dans cette convention, dès qu'un symbole se trouve en un seul exemplaire, la grille est gagnante pour rouge puisque Rouge qui commence le choisit et l'énoncé ne sera pas satisfaite. Réciproquement si tous les symboles sont en au moins deux exemplaires, Noir est certain de gagner. En effet, il peut choisir au moins un exemplaire de chaque symbole puisqu'il y en a au maximum quatre et qu'il joue quatre fois, il lui suffit pour cela de choisir le même symbole que Rouge s'il l'a pas déjà choisi et de choisir un autre symbole qu'il n'a pas encore choisi, sinon. Cette manière de jouer implique que Rouge ne pourra jamais choisir à lui seul tous les exemplaires d'un symbole et donc que Noir gagne.

Autrement dit, pour la convention AE, les grilles avec au moins un singleton sont gagnantes pour Rouge, et les autres gagnantes pour Noir.

- *Dans le cas de la convention EA*

Il s'agit de l'énoncé : « Il existe une case Rouge telle que toute case Noire a le même symbole » où Rouge commence et joue pour vrai.

Dans cette convention, si Noir peut prendre deux symboles différents alors il gagne et Rouge perd. Et Noir ne peut prendre deux symboles différents que si la deuxième fois qu'il joue il en a la possibilité, c'est-à-dire qu'il reste un symbole différent de son premier choix à ce moment-là. Nous regarderons donc les configurations où Noir ne peut plus prendre un symbole différent de son premier choix à son deuxième tour de jeu, c'est-à-dire les seules configurations de jeu où Rouge peut gagner. Cela signifie, pour ces configurations, que tous les symboles restant à Noir sont identiques à son premier choix, autrement dit la grille contient au moins sept exemplaires du même symbole que nous noterons S. Il y a donc seulement trois configurations à explorer, les autres sont toutes perdantes pour Rouge, où éventuellement Rouge peut gagner : celle où il n'y a que des S qui est évidemment gagnante pour Rouge, celle qui contient seulement un seul symbole R différent de S qui est gagnante pour Rouge puisque Rouge le choisit au premier tour et qu'il ne restera que des S pour Noir et enfin celle qui contient seulement deux symboles différents de S qui est perdante pour Rouge puisque Noir a la possibilité d'en choisir un à son premier tour de jeu et choisira S ensuite.

Autrement dit pour la convention EA, seules la grille uniforme et la grille uniforme sauf un singleton sont gagnantes pour Rouge, les autres sont gagnantes pour Noir.

ii. Stratégies

Maintenant que nous avons défini les grilles gagnantes pour les deux conventions et les deux joueurs, examinons les stratégies qui permettent de gagner. Nous utiliserons le mot stratégie comme « une description préalable d'une manière de jouer ». Ainsi, celui qui a une stratégie sait à chaque instant ce qu'il doit jouer en fonctions des options prises par l'autre joueur.

Parmi les stratégies, nous pouvons noter les stratégies S1 : « Jouer n'importe quelle option » et S2 : « Jouer la même option que le joueur précédent quand c'est possible, sinon jouer n'importe quelle option ».

Une stratégie peut conduire à perdre ou bien à gagner suivant la stratégie et la grille jouée. Nous allons nous intéresser aux stratégies ici qui conduisent à gagner quand la grille est gagnante : nous les appellerons stratégies gagnantes.

- *Dans le cas de la convention AE*

Il s'agit alors de l'énoncé : « Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole » où Rouge commence et joue pour faux.

Une stratégie gagnante pour Noir consiste à copier chaque option de Rouge quand il le peut et sinon jouer n'importe quelle option. Nous affirmons ici qu'une telle stratégie conduit à gagner si la grille est gagnante pour Noir. En effet, avec cette stratégie, si Noir perd, cela signifie que Rouge a joué un symbole en un seul exemplaire puisque quand le symbole est en plusieurs exemplaires c'est qu'il est joué pour la première fois (Noir choisit alors le même) ou bien qu"il a été déjà joué par Noir. Or s'il existait un symbole en un seul exemplaire, la grille serait gagnante pour Rouge.

Une stratégie gagnante pour Rouge consiste à jouer, dès le premier coup, un singleton. Cela est possible quand la grille est gagnante pour Rouge et en faisant ce choix Rouge Gagne.

- *Dans le cas de la convention EA*

Il s'agit de l'énoncé : « Il existe une case Rouge telle que toute case Noire a le même symbole » où Rouge commence et joue pour vrai.

Pour définir une stratégie gagnante pour Rouge, il s'agit de déterminer comment gagner les grilles gagnantes pour Rouge. Il y en a deux : l'uniforme où Rouge n'a que le choix de prendre toujours le même symbole et Noir aussi, ainsi Rouge gagne, et l'uniforme sauf un singleton où Rouge choisit au premier tour le singleton et Noir va être obligé de choisir systématiquement le même symbole que Rouge aura aussi choisi à son deuxième choix, ainsi Rouge Gagne.

Comme on l'a vu au moment des grilles gagnantes, quand on est dans une configuration différente de l'uniforme et de l'uniforme sauf un singleton, Noir a toujours la possibilité de choisir deux symboles distincts lors de ses deux premiers choix et donc gagne. Pour cela, il doit choisir la première fois le symbole qui a le moins d'exemplaires (pour éviter que Rouge ne le prenne) et ensuite un autre symbole : cela est toujours possible dans ces configurations.

iii. Stratégies et logique dialogique

Ce jeu Q^2 a été choisi pour sa proximité avec la démonstration d'un énoncé doublement quantifiée par la logique dialogique et d'une certaine manière il sert à installer le dialogue attaquant-défenseur de la logique dialogique, plus précisément de notre adaptation de la logique dialogique puisque plusieurs tours sont possibles. Nous cherchons ici à explorer les similitudes/différences entre stratégies gagnantes définies ci-dessus et la démonstration par notre adaptation de la logique dialogique. Mais avant de commencer, remarquons que si les stratégies gagnantes établies précédemment pour chaque cas nous semblent les plus naturelles, elles ne sont pas exclusives. Aussi, les comparaisons que nous établirons sont seulement relatives à ces stratégies particulières.

- *Dans le cas de la convention AE*

P1 : « Pour tout $a \in$ A, il existe $b \in$ B tel que R(a;b) » où R est une fonction logique de a et b.

La démonstration d'un tel énoncé dans notre adaptation de la logique dialogique correspond en des propositions successives de l'attaquant (celui qui joue A) et des réponses successives du défenseur (celui qui joue B). Le défenseur va tenter, chaque fois que c'est possible, de répondre par un élément b de B qui vérifie R(a;b) où b est la proposition de l'attaquant. S'il y parvient systématiquement alors l'énoncé est déclarée vrai.

Dans le jeu Q^2 : « Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole » où Rouge commence et joue pour faux, la stratégie gagnante pour Noir que nous avons vue plus haut consiste à copier chaque option de Rouge quand il le peut et sinon jouer n'importe quelle option.

Nous pouvons remarquer la parenté forte entre la démonstration de l'énoncé quantifié de type AE et la stratégie gagnante pour Noir (le défenseur). La différence essentielle tient au fait que dans le jeu Q^2 on ne peut pas colorier deux fois la même case. Cela implique que lorsque Noir (le défenseur) ne peut plus répondre à une proposition, on ne considérera pas cela forcément comme un coup décisif (puisque le coup permettant de répondre a éventuellement déjà été joué par Noir) alors que dans notre adaptation de la logique dialogique, pour un énoncé de type AE, lorsque le défenseur ne peut pas répondre, il s'agit d'un coup décisif.

Pour ce qui est de démontrer que l'énoncé P1 est faux, dans la logique dialogique, cela consiste pour l'attaquant à proposer un b de B tel que A ne puisse pas trouver de a de A tel que R(a;b) soit vrai. Ceci correspond exactement dans Q^2 à la stratégie gagnante pour Rouge (l'attaquant) de jouer directement un singleton (quand il y en a un).

- *Dans le cas de la convention EA*

P2 : « Il existe $a \in$ A, tel que pour tout $b \in$ B on a R(a;b) » où R est une fonction logique de a et b.

La démonstration d'un tel énoncé dans notre adaptation de la logique dialogique correspond pour le défenseur de finir par proposer un a de A pour lequel l'attaquant est obligé de répondre par un b de B qui vérifie R(a;b). Dans le jeu Q^2 : « Il existe une case rouge telle que toute case noire a le même symbole » où Rouge commence et joue pour faux, la stratégie gagnante pour Rouge consiste dans le cas de la grille uniforme à prendre un symbole et Noir est obligé de répondre par le même et dans le cas de la grille uniforme sauf un singleton, à faire deux propositions : le singleton d'abord, que Noir peut invalider, et ensuite le symbole majoritaire que Noir ne pourra pas invalider. Là encore, le lien entre démonstration par notre adaptation de la logique dialogique et le jeu Q^2 semble évident.

Pour ce qui est de démontrer que l'énoncé P2 est faux, il suffit pour l'attaquant de trouver, pour toutes les propositions a de A, un b de B tel que R(a;b) n'est pas vérifié. Pour ce qui est du jeu Q^2, une stratégie gagnante pour Noir (pour une grille gagnante pour lui), consiste à choisir la première fois le symbole qui est le moins représenté, puis la deuxième fois un autre type de symbole. Cette stratégie est complètement indépendante du jeu de Rouge (le défenseur) et donc ne correspond pas du tout à démontrer que P2 est fausse dans notre adaptation de la logique dialogique où les coups de l'attaquant (Noir), pour un énoncé EA, doivent contrer chacun des coups du défenseur (Rouge). Il s'agit d'une différence très significative entre notre adaptation

de la logique dialogique et une stratégie gagnante du jeu Q². Nous remarquons ici que cette différence est le pendant de celle que nous avons remarquée pour la démonstration d'un énoncé de type AE vraie, ce qui semble naturel puisqu'un énoncé de type EA fausse est équivalente à un énoncé de type AE vraie.

Nous avons vu que s'il existe une certaine proximité entre la démonstration par notre adaptation de la logique dialogique et les stratégies gagnantes du jeu Q² dans le cas des énoncés de type AE fausses et EA vrais, il existe des différences notables pour les énoncés de type AE vraies et EA faux. Ceci tient au fait qu'une même case ne peut pas être coloriée deux fois pour répondre au coup de l'adversaire. Les stratégies gagnantes du jeu Q² correspondent en fait aux règles de l'adaptation de la logique dialogique auxquelles on aurait adjoint une règle d'injectivité (celle qui empêche de prendre deux fois le même élément pour répondre). Néanmoins, ce jeu est adapté pour poser la question de l'interprétation de la double quantification pour plusieurs raisons :

- Il modélise bien un dialogue attaquant-défenseur, cœur de la logique dialogique.
- Il repose sur l'interprétation d'une double quantification et donc permet de la questionner.
- Il oblige à anticiper les options en vue de valider une double quantification et donc oblige à mobiliser la double quantification comme un outil pour fabriquer une stratégie.

Nous allons voir maintenant comment on utilise ce jeu pour une situation de la double quantification.

I.4 Définition de la situation de la double quantification Q^2

La situation de la double quantification Q² a pour finalité de conduire l'élève à interpréter correctement des assertions doublement quantifiées (jeu classique) dans des contextes qui lui étaient auparavant difficiles et en particulier, pour ces contextes, de prendre conscience que deux types (au moins) de doubles quantifications distinctes existent (AE/EA), qu'elles se différencient à la fois par l'ordre des quantificateurs et des conventions d'interprétation associées. La situation de la double quantification sera donc fabriquée pour faire apparaître la nécessité de partager collectivement des conventions d'interprétations comme réponse aux désaccords concernant les interprétations contradictoires, désaccords qui restent naturellement irréductibles en l'absence de convention. Or le jeu Q², s'il permet la dévolution de l'évaluation d'énoncés doublement quantifié, ne rend pas nécessaire, à lui seul, l'expression de conventions d'interprétation. C'est pourquoi nous fabriquons une série de situations didactiques dont il est le cœur, série de situations que nous nommerons « situation pour la double quantification » ou bien « situation Q² » (à ne pas confondre avec le « jeu Q² » lui-même, qui en est seulement une composante) qui a précisément pour fonction de fabriquer cette nécessité. Cette série de situations didactiques correspondra en fait à différents choix successifs des valeurs des variables didactiques et du choix de leur scénarisation.

a) Principe général de la situation didactique Q^2

La situation Q² fonctionne sur le principe suivant : une fois comprise, la règle du jeu Q² on va chercher à déterminer les grilles gagnantes (pour le défenseur) du jeu. Cette étape fait basculer

un simple jeu dans une recherche de nécessité : il ne s'agit plus de jouer mais de savoir si on est certain de gagner ou de perdre par anticipation. Ceci fait apparaître naturellement la question suivante : « Que signifie être certain de gagner ? » ou bien encore « Que signifie grille gagnante ». Pour les raisons que nous avons déjà exposées nous renonçons ici à dévoluer la construction de telles définitions, bien que le contexte fasse naturellement émerger la question et nous nous contentons de proposer nous-même une définition de grille gagnante sous la double forme formalisée (D2) et en langage accessible (D3). Ensuite, les propositions effectuées de grilles gagnantes sont mises en questionnement ce qui débouche sur leur (in)validation, c'est-à-dire sur une discussion portant sur les stratégies. C'est précisément pendant cette phase que devraient émerger les conflits d'interprétations que nous voulons faire advenir afin de faire prendre conscience du besoin de conventions. Nous comptons en réalité ici sur un phénomène de rupture épistémologique provoquée par la situation proposée. Nous savons que le contexte initialement choisi est un domaine maîtrisé de l'interprétation d'énoncés doublement quantifié (Q5). Nous pensons que les élèves ont individuellement conscience de maîtriser ce contexte, ceci étant renforcé par la première partie de la situation où ils devraient avoir réussi à s'accorder systématiquement pour décider correctement du gagnant à chaque partie (nous vérifierons cela en étudiant ces décisions ultérieurement). Nous avons donc des élèves qui se pensent à l'aise sur un domaine et le sont réellement mais ceci repose sur des aptitudes spontanées d'interprétation non formalisées donc fragiles. Un retournement de situation est alors proposé : il s'agit de déterminer des stratégies de constitution d'ensemble quantifiés qui rendent vrais ou faux des énoncés doublement quantifiés. Cette opération, très contextualisée pour le jeu Q^2, est assez naturelle : on comprend facilement qu'il s'agit de gagner et de déterminer les conditions qui le permettent, le retournement en soit ne posant pas de difficulté conceptuelle. Cependant, dans cette apparente continuité, ce retournement induit une transformation radicale de niveau de complexité : il ne s'agit plus de statuer sur un énoncé quantifié sur des ensembles donnés mais sur des familles d'ensembles possibles constitués à partir des propres choix du joueur mais aussi de tous les choix possibles de son adversaire ayant un but antagoniste. Cela impose une reformulation de ce qu'est l'interprétation/la démonstration d'un énoncé doublement quantifié en termes de vérifications élémentaires puisque la stratégie qu'on cherche à mettre au point oblige à définir le type de coup à jouer pour obtenir le résultat final souhaité. Cette reformulation incontournable est de nature à faire apparaître les fragilités liées au manque de formalisation de l'interprétation usuelle sous la forme de conflits d'interprétation car comme nous l'avons montré, tous les autres éléments qui constituent la situation sont concrets et indiscutables. Il est cependant possible que cette rupture ne se manifeste pas forcément sur le contexte initial le plus simple, aussi est-il prévu de faire varier le contexte jusqu'à trouver ce point de rupture. C'est à ce moment-là que l'adaptation de la logique dialogique sera proposée comme modèle d'interprétation et de démonstration d'un énoncé doublement quantifié. La structure même du jeu Q^2, jeu qui simule un dialogue, aura alors préparé l'élève à comprendre/accepter la structure du dialogue qui fonde les règles de notre adaptation de la logique dialogique.

Enfin des assertions doublement quantifiées dans les contextes plus difficiles seront proposées et discutées.

b) Scénario global de la situation didactique Q^2

Le scénario global retenu pour la situation Q² et les raisons didactiques et épistémologiques de ces choix s'articule sur les trois parties.

- Première partie

D'abord on joue au jeu Q² pour s'approprier les règles du jeu. Les variables didactiques sont choisies pour constituer un contexte simple. A priori (d'après Q5) les joueurs devraient jouer correctement, c'est-à-dire bien interpréter l'énoncé du jeu en fonction du coloriage réalisé.

Ce jeu-là favorise naturellement une forme d'anticipation et d'élaboration d'une stratégie pour tenter de gagner, mais ne fait pas entrer nécessairement l'élève dans le monde des mathématiques : celui des nécessités. C'est l'objet de la suite de la situation.

- Deuxième partie **:** fabriquer l'idée de grille gagnante

D'abord dans un contexte simple (énoncé de type EA en particulier) on joue le jeu de *« fabrication de grille »* : on demande de fabriquer une grille gagnante pour ce jeu, des propositions sont faites et mises au débat.

Le but est alors d'installer la notion de grille gagnante. Il y a effectivement une distinction à établir entre « grille pour laquelle on peut gagner », « grille gagnante » et « grille que l'on a gagnée ». C'est ici que la situation invite l'élève à commencer à entrer dans la recherche de nécessité : pour établir qu'une grille est gagnante il faut déterminer une manière de jouer qui assure la victoire, autrement dit établir une stratégie qui assure que l'énoncé sera vérifié (ou non vérifié) par les ensembles de quantifications constitués des choix successifs. Le cas simple proposé (énoncé de type EA) permet d'éviter de cumuler les difficultés : notion de grille gagnante à élaborer et en même temps stratégie à imaginer. En effet, les stratégies correspondantes aux grilles gagnantes pour les énoncés de type EA sont simples, comme on l'a déjà vu, mais posent déjà la question de la définition de « grille gagnante » puisque ces grilles peuvent conduire à perdre dans le cas où le joueur joue mal.

Avec la définition de grille gagnante, les grilles proposées sont ensuite discutées. Il s'agit de vérifier comment opère la définition et si des malentendus subsistent.

- Troisième partie

Il s'agit de faire varier des contextes pour rechercher les points de désaccords à propos de l'interprétation et faire apparaître la nécessité de convention d'interprétation des énoncés doublement quantifiés. Les contextes ci-dessous sont codés par le quadruplet des valeurs des variables didactiques : Cardinal de l'ensemble de quantification/type d'énoncé/type d'élément/type de relation. Ces contextes successifs sont rangés par ordre croissant de difficulté.

<u>Contexte 1 :</u> Fini/AE/symbole/égalité

Ensuite, on demande si une certaine grille de type AE (choisie comme non évidente) est gagnante ou pas. Il s'agit de faire exprimer la stratégie gagnante pour les énoncés de type AE dans un cas particulier à caractère paradigmatique.

Si apparaît à ce moment-là un désaccord irréductible, alors les conventions d'interprétations de la logique dialogique sont données et appliquées au cas litigieux. Puis on passe directement au contexte 3 car les contextes suivants ne servent plus alors à faire émerger un besoin qui s'est déjà exprimé.

Contexte 2 : Fini/EA/nombres/inégalité

Ensuite, on rejoue au « jeu de grille » (fabrication et évaluation de grille) pour un énoncé de type EA sur un exemple numérique cette fois.

Même remarque ici sur l'apparition d'un désaccord irréductible.

Contexte3 : Infini/EA et AE/nombres/inégalités

Enfin, on joue au « jeu habituel », c'est-à-dire d'évaluation d'énoncés, sur des énoncés doublement quantifiés en contexte difficile. Cette phase-là donne lieu à des débats.

Au final, l'opportunité de proposer les conventions d'interprétation de la logique dialogique devrait être apparue bien avant ce dernier cas de contexte plus difficile qui devrait plutôt constituer une mise à l'épreuve ces conventions.

Voici sous forme de tableau l'état des variables associées à cette succession de jeux.

	Scénarisation des variables			
Variables didactiques	Jeu Q²	Jeu de grille		Jeu habituel
Nature de l'ensemble de quantification				
- Nature des symboles utilisés	Lettres	Lettres	Nombres réels	Nombres réels
- Taille de l'ensemble	Fini	Fini	Fini	Infini
- Représentation de l'ensemble	Grille 3 par 3	Grille 3 par 3	Grille 3 par 3	R
Type d'énoncé	AE ou EA	AE ou EA	AE ou EA	AE ou EA
Nature de la relation donnée	Egalité	Egalité	Inégalité	Inégalité
Signification de la logique dialogique				
- Règle de commencement	Suivant EA ou AE	Suivant EA ou AE	Suivant EA ou AE	
- Nombre de coup de chaque joueur par tour	1	1	1	
- Nombre de joueurs	2	Toute la classe	Toute la classe	Toute la classe
- Qui joue quelle validité	Alternatif			
- Jeu coopératif ou partisan	Partisan			

Tableau 36 : Variables didactiques, scénarisations et phases de jeu

c) Analyse des différents types de grille

Pour préciser les différentes phases du jeu dans le détail (quelle grille pour quel type d'énoncé...) et mener une analyse a priori outillée, il faut trier les différents types de cas possibles en fonction de l'énoncé et du type de grille joués. Nous différencions six types de grilles possibles, nous allons les nommer sur le modèle suivant : Type (AE ou EA) et Nombre de singletons (0, 1, +).

Convention AE : le joueur B gagne si et seulement si pour tout élément x choisi par A, il existe un élément y choisi par B tel que x=y, où A commence à choisir.

Type de grille	Nom	Pour A la grille est
Aucun singleton	AE0	Perdante
Un seul singleton	AE1	Gagnante
Plus de un singleton	AE+	Gagnante

Tableau 37 : Types de grilles et issues du jeu pour la convention AE

Convention EA : le joueur A gagne si et seulement s'il existe un élément x choisi par A tel que pour tout élément y choisi par B on a x=y, où A commence à choisir.

Type de grille	Nom	Pour A la grille est
Tous les éléments égaux	EA0	Gagnante
Un seul singleton et tous les autres éléments égaux	EA1	Gagnante
Tous les autres cas	EA+	Perdante

Tableau 38 : Types de grilles et issues du jeu pour la convention EA

Il est temps maintenant de s'intéresser à la différence que peut avoir pour l'élève le fait de gagner avec une grille et le fait d'avoir une grille gagnante. En effet, pour le novice, le fait de gagner avec une grille donnée va lui paraître non une propriété de la grille mais plutôt une propriété personnelle : il aura une impression de bien jouer. Il a sans doute raison mais une des premières différences qu'il faudra mettre à jour est cette différence entre une grille gagnante, ce qui signifie que si on joue « bien » on est certain de gagner, et une grille sur laquelle on a gagné mais qui pouvait être une grille perdante (au sens de la définition donnée précédemment) et mal jouée par l'adversaire. Comme nous l'avons déjà expliqué, cette différence est liée à la dialectique nécessité/contingence.

Il se trouve que dans les différents types de grilles, il en est certaines qui jouent un rôle particulier par rapport à cette problématique. Par exemple, il est clair que les grilles EA0 sont des grilles gagnantes (pour A). En effet, pour ce type de grilles, le jeu apparaît comme gagnant quasiment instantanément. Ainsi, le joueur (A ou B) comprend vite que l'issue de la partie ne

dépend pas de son habileté. Pour EA0, en fait, il n'existe pas de choix possible puisque tous les éléments sont identiques, nous les appellerons grilles faciles (au sens où aucune stratégie n'est à mettre en œuvre pour gagner et donc la nature gagnante ou perdante est facile à déterminer). Pour ce qui est de la distinction grille gagnante/ grille où on peut gagner, il n'y a pour ces grilles aucune différence. Elles ne peuvent donc pas jouer de rôle sur la prise de conscience de cette distinction.

Ensuite, il existe des grilles intermédiaires dans le sens où l'on peut imaginer assez vite une stratégie pour A ou pour B. C'est le cas de EA1 qui est une grille gagnante (pour A). Elle est gagnante mais le joueur A doit quand même jouer intelligemment pour gagner, au sens où l'issue du jeu dépend des coups de A, à contrario de EA0. Cependant ces coups sont faciles à anticiper. Les grilles de type EA1, EA+ et AE+ peuvent aussi être classées parmi celles que nous appellerons intermédiaires. Pour ces grilles-là, la distinction « grille gagnante/grille où on peut gagner » est non seulement possible mais facilitée par leur caractère d'évidence : on peut aisément voir que si l'on joue bien on est certain de gagner, mais on peut quand même envisager aussi le cas où l'on joue mal.

Enfin, il existe des grilles pour lesquelles il n'est pas du tout évident de voir si elles sont gagnantes ou perdantes au premier coup d'œil, c'est le cas de la grille AE0, grille pour laquelle la stratégie gagnante est non instantanément apparente. Elle sera appelée grille difficile, bien que pour la convention AE choisie cela reste cependant accessible (surtout pour des étudiants de fin de secondaire, début supérieur). Cette grille-là ne sera pas adaptée pour faire prendre conscience de la distinction « grille gagnante/grille où l'on peut gagner » dans la mesure où son caractère gagnant est beaucoup moins facilement assuré que pour les grilles intermédiaires. Cependant ce type de grilles pourra s'avérer utile pour une autre problématique : celle de la recherche de stratégies gagnantes générales, car justement elle oblige à fabriquer un algorithme de jeu, compte tenu de sa difficulté.

On remarquera aussi que cette classification est simplifiée : elle ne fait pas la différence entre certaines grilles classées identiquement et qui pourtant ne relèvent pas véritablement du même niveau de difficulté (Grilles EA+ et AE+ par exemple). Voici le tableau récapitulatif de cette classification.

Grilles faciles	Grilles intermédiaires	Grilles difficiles
EA0	AE1 EA1 EA+ AE+	AE0

Tableau 39 : classification de la difficulté du jeu Q^2 en fonction du type de grille

Cette seconde classification des grilles (faciles, intermédiaires, difficiles) va permettre de construire l'ingénierie des différentes parties de la situation.

d) Choix des valeurs des variables didactiques de la situation

i. Quels choix pour la première partie ?

Cette première partie commence par une explication des règles du jeu et un exemple est montré pour en assurer la dévolution. Ensuite des grilles à jouer en binôme sont données, mais non discutées collectivement par la suite. Il s'agit seulement d'habituer au jeu et amorcer une phase heuristique.

Nous avons déjà déterminé un certain nombre de variables didactiques, reste maintenant à déterminer exactement quels types de grilles (niveaux de difficulté / types d'énoncés) donner et dans quel ordre. Il est judicieux de donner dans cette partie du jeu, des grilles difficiles ou intermédiaires afin de laisser le suspense sur celui qui va gagner. On gardera les grilles de type faciles pour la deuxième partie. Il s'agira cependant d'alterner les grilles gagnantes et les grilles perdantes de manière à conforter, dans un premier temps, l'idée de contingence. Il faudra aussi alterner les joueurs qui commencent. Voici les grilles données dans l'ordre :

« Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

Jeu 1				
	Y	V	L	Noir joue Vrai
	V	L	K	Rouge commence
	K	Y	H	

« Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

Jeu 5				
	P	M	N	Noir joue Vrai
	O	P	O	Rouge commence
	N	O	M	

« Pour toute case noire il existe une case rouge ayant même symbole »

Jeu 2				
	U	M	M	Rouge joue vrai
	G	J	G	Noir commence
	J	U	M	

« Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

Jeu 6				
	U	U	H	Noir joue Vrai
	N	H	U	Rouge commence
	N	H	N	

« Il existe une case rouge telle que toute case noire a même symbole »

Jeu 3				
	H	V	L	Rouge joue vrai
	V	L	K	Rouge commence
	K	T	T	

« Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

Jeu 7				
	W	Q	J	Noir joue Vrai
	Q	J	K	Rouge commence
	K	T	G	

« Il existe une case noire telle que toute case rouge a même symbole »

Jeu 4				
	P	M	M	Noir joue Vrai
	M	M	M	Noir commence
	P	M	M	

« Il existe une case noire telle que toute case rouge a même symbole »

Jeu 8				
	M	M	M	Noir joue Vrai
	M	M	U	Noir commence
	M	M	M	

Figure 22 : les grilles données dans la première partie de la situation Q²

ii. Deuxième partie

L'objectif de cette deuxième partie est d'installer la notion de grille gagnante/perdante qui est fondamentale pour la validité de la démarche des élèves. Elle sera donnée sous deux formes : la forme formalisée de l'arbre de quantificateurs (D2) et la forme simplifiée « une grille est gagnante pour A s'il existe une manière de jouer pour A telle que quels que soient les coups de

B, A gagne » de manière à rendre accessible l'idée de grille gagnante. La forme simplifiée donnée permet se faire une idée suffisamment précise de ce qu'est une grille gagnante pour pouvoir en produire et les questionner. Cependant, sur un plan purement mathématique, supposer l'équivalence de ces deux définitions revient à supposer les quantificateurs commutatifs. Or précisément cette commutativité est celle que la situation veut réfuter. Nous faisons cependant le choix d'ignorer ce niveau de subtilité car nous faisons l'hypothèse qu'aucun malentendu peut srvenir du fait de cette simplification du concept de grille gagnante. Cette notion de « grille gagnante » est introduite sans vraiment la définir là où elle ne pose pas de problème puis en la faisant questionner là où elle fait problème. On commence par un appel à conjecture en classe entière : pour « Il existe une case rouge telle que toute case noire a le même symbole » avec rouge qui commence et joue pour vrai, Question : pouvez-vous trouver une grille gagnante, c'est-à-dire une grille où celui qui joue vrai est certain de gagner ? Ici l'ambiguïté entre grille gagnante et grille où l'on gagne est délibérément laissée dans l'ombre car elle sera discutée dans un deuxième temps. Il est d'autant plus facile de ne pas l'évoquer ici car le cas EA0 qui est très probable (quasi certain) ne requiert pas cette distinction. En fait plusieurs types de grilles peuvent être proposés, on choisira prioritairement de discuter le type EA0. On met au débat la grille de type EA0 proposée. Ce débat devrait être court. Puis on demande s'il n'existe pas une autre grille gagnante pour ce même énoncé (si elle n'a pas déjà été proposée) en attendant une proposition de type EA1. Si aucune grille n'est proposée, alors le professeur propose lui-même une grille de type EA1 et la met au débat. Le débat ici peut être vif et conduire à opposer deux types d'arguments selon comment est conçu la notion de « grille gagnante ». Il est possible que le débat amorce des éléments de définition de grille gagnante. Le professeur statuera alors sur l'impossibilité de se mettre d'accord par défaut de définition. C'est à ce moment-là, l'objet de la situation n'étant pas le concept de grille gagnante, qu'il proposera lui-même une définition de « grille gagnante » sous une forme formalisée et sous la forme simplifiée en langage courant. Puis il soumettra alors la grille EA1 au débat pour éprouver cette nouvelle définition.

iii. Troisième partie

Rappelons que cette partie est celle qui va permettre de prendre conscience que sans convention d'interprétation, il n'est pas possible de résoudre les conflits d'interprétation d'un énoncé doublement quantifié. Quatre contextes de questionnement sont prévus pour faire émerger ce genre de désaccords irréductibles. Dès qu'un tel conflit apparaîtra comme insoluble, les règles de notre adaptation de la logique dialogique seront données puis appliquées directement au cas litigieux pour vérifier collectivement l'efficience de telles conventions. Ces conventions seront ensuite mises à l'épreuve sur le contexte 4 qui constitue l'objectif de la situation.

Contexte 1 :

A	Y	C
C	P	Y
P	A	C

Figure 23 : gille donnée au contexte 1

La grille AE0 ci-dessus est mise au débat : est-elle gagnante ou pas pour Noir avec le jeu « Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole » où Rouge commence et joue pour faux ? Cette grille est en fait gagnante pour Noir mais il faut pour gagner qu'il utilise une stratégie gagnante car le moindre faux pas peut être exploité par Rouge. Nous avons choisi ici, pour un premier questionnement sur un énoncé de type AE, un cas particulier de type AE0 qui à la fois permet de concrétiser le questionnement (contrairement à l'étude d'une question plus générale) mais aussi préserve une certaine complexité : la stratégie gagnante pour Noir n'a rien d'évident pour le non initié. L'objectif principal de ce contexte, comme des suivants, est de provoquer une prise conscience de l'absence de conventions d'interprétation mise en évidence par les conflits d'interprétation qui pourraient survenir. L'objectif secondaire sera l'expression d'une stratégie gagnante pour cette grille gagnante pour le défenseur. Si d'aventure un désaccord apparaissait, alors les règles de l'adaptation de la logique dialogique pour une assertion doublement quantifiée de type AE ou EA serait donnée sous la forme d'une institutionnalisation[70] répondant au malaise perçu où il s'agit de préciser les différents points suivants :

- Notion de quantificateur simple universel et existentiel.
- Au moins deux types d'énoncés doublement quantifiées existent, EA et AE, que l'on reconnaît à l'ordre dans lequel les quantificateurs sont écrits.
- Deux règles différentes d'interprétations distinctes existent suivant le type EA ou AE.

  Ces règles sont fondées sur un dialogue entre un défenseur de l'énoncé et un attaquant et sont illustrées par des exemples simples.

Contexte 2 : Si le besoin de conventions d'interprétation n'est pas apparu dans le contexte 1, alors on joue, dans cette partie, au « jeu de la grille » (fabrication et évaluation) sur un contexte numérique et avec une relation l'inégalité. L'objectif de cette partie est de commencer à travailler sur des énoncés mathématiques tout en restant dans un cadre fini, cadre dans lequel ce besoin est plus susceptible d'émerger.

Le professeur demande de déterminer quelles sont toutes les grilles trois par trois gagnantes dont les cases contiennent des nombres différents ou non pour l'énoncé « Il existe un nombre rouge x tel que pour tout nombre noir y, on a x > y ». Les grilles gagnantes pour le défenseur ici sont les grilles qui ont un seul plus grand élément. Dès qu'il y a plusieurs plus grands éléments, la grille est perdante pour lui. En demandant toutes les grilles ici on oblige à étudier la stratégie gagnante pour les deux joueurs. Des propositions sont effectuées et un débat est mené. Si un désaccord apparaît alors le professeur procède à l'institutionnalisation décrite au contexte 1, sinon il poursuit au contexte 3.

Contexte 3

A priori, à ce point-là de la situation, une institutionnalisation à propos des règles de notre adaptation de la logique dialogique a déjà été réalisée car les occasions d'interprétations différentes du même énoncé ont été assez nombreuses. Dans ce cas le contexte 3 sert à mettre à

[70] L'institutionnalisation prévue sous forme de diaporama est en annexe.

l'épreuve ces règles pour les cas de contextes mathématiques et ensembles de variables quantifiées de cardinal infini, contextes qui constituent l'objectif de la situation Q^2 en termes de capacité d'interprétation. Sinon (si l'institutionnalisation n'a pas été encore réalisée) ces cas devraient en donner l'occasion.

Voici les conjectures que nous proposons au débat :

C1 : « Pour tout x réel, il existe un réel y tel que $x = y$ »

C2 : « Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y^2 < x$ »

C3 :« Il existe un réel u tel que pour tout réel m on a $m + u = 2$ »

C4 : « Il existe un réel x tel que pour tout réel y on a $y^2 - 1 \geq x$ »

I.5 Analyse a priori de la situation Q^2

Nous proposons ici une analyse a priori des trois parties de la situation. L'analyse a priori selon les niveaux de milieux régulés et de rationalités sera effectuée au I.5.b) i. (début de la deuxième partie) et servira de référence au I.5.b) et I.5.c) (deuxième partie et troisième partie).

a) Analyse a priori de la première partie

La première partie consiste à jouer « le jeu de la double quantification » sur les 8 grilles qui sont données. De manière générale que l'habileté des joueurs devrait s'améliorer de parties en parties et que le jeu des joueurs conduira progressivement à faire gagner systématiquement les grilles gagnantes et faire perdre les grilles perdantes. Car une fois les règles du jeu assimilées les élèves peuvent anticiper les coups. Etant donnés les résultats des questionnaires, la décision de qui gagne ne devrait pas poser de problème dans la mesure où, le jeu Q^2 agissant sur un domaine maîtrisé des variables didactiques de la double quantification (Q5), les énoncé AE et EA du jeu sont assez bien interprétés. Nous vérifierons cette hypothèse. Regardons grille par grille ce qui est attendu.

<u>Jeu 1</u>

« Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

Jeu 1				
	Y	V	L	Noir joue Vrai
	V	L	K	Rouge commence
	K	Y	H	

Figure 23 : Règle et grille jeu 1

Pour cette grille de type AE1 gagnante pour Rouge, Noir est obligatoirement perdant quels que soient ses coups puisque Noir a seulement quatre coups et qu'il y a cinq lettres différentes. Rouge peut cependant gagner plus ou moins vite : dès le premier coup en jouant H ou bien au cinquième coup en prenant H en dernier. Le moment où rouge prendra le dernier exemplaire d'une lettre non déjà choisie par Noir peut constituer un indicateur d'anticipation pour le jeu de Rouge, nous appellerons ce moment, le coup décisif. Le jeu de Noir peut être de répondre par la même lettre à tous les coups de Rouge, cela témoignerait d'une certaine stratégie.

Jeu 2

« Pour toute case noire il existe une case rouge ayant même symbole »

Jeu 2				
	U	M	M	Rouge joue vrai
	G	J	G	Noir commence
	J	U	M	

Figure 24 : Règle et grille jeu 2

Pour cette grille de type AE0 gagnante pour Rouge, si Rouge répond systématiquement par la même lettre que Noir choisit avant lui et n'importe quelle autre lettre quand il ne le peut pas, alors Rouge gagne. Nous pourrons repérer si Rouge adopte cette stratégie, que nous nommerons « stratégie de copie » et sinon si Noir profite du premier faux pas de Rouge. Dans les deux cas ce peut être des critères d'appropriation du jeu et d'anticipation des deux joueurs.

Jeu 3

« Il existe une case rouge telle que toute case noire a même symbole »

Jeu 3				
	H	V	L	Rouge joue vrai
	V	L	K	Rouge commence
	K	T	T	

Figure 25 : Règle et grille jeu 3

Il s'agit du premier jeu avec un énoncé de type EA+ gagnante pour Noir. Noir gagne forcément puisqu'il a quatre coups ce qui implique qu'il joue au moins deux lettres distinctes (il n'existe aucune lettre en plus de deux exemplaires). Ce jeu n'est, a priori, pas utile en termes d'analyse sauf à vérifier la bonne interprétation de qui est gagnant. Il est utile cependant pour préparer les joueurs à jouer la grille suivante où réside un véritable enjeu.

Jeu 4

« Il existe une case noire telle que toute case rouge a même symbole »

Jeu 4				
	P	M	M	Noir joue Vrai
	M	M	M	Noir commence
	P	M	M	

Figure 26 : Règle et grille jeu 4

Cette grille est du même type que la précédente (EA+) et gagnante pour Rouge, avec un changement des rôle attaquant-défenseur. Cependant, ici, Noir a la possibilité de gagner, en effet s'il prend les deux P, alors il ne restera que des M pour Rouge et Noir gagnera. Ainsi , la grille est gagnante pour Rouge mais Rouge, doit absolument prendre un P pour gagner.

Jeu 5

« Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

Jeu 5				
	P	M	N	Noir joue Vrai
	O	P	O	Rouge commence
	N	O	M	

Figure 27 : Règle et grille jeu 5

Il s'agit là d'une grille difficile de type AE0 et gagnante pour Noir. Contrairement aux autres grilles, l'issue n'est pas instantanément évidente à moins d'avoir une vision stratégique. Ainsi, pour cette grille, Rouge a intérêt, pour tenter de gagner, d'essayer de prendre tous les exemplaires d'une lettre et ce sera a priori plus facile si elle est peu fréquente (N et P), tandis que Noir doit l'en empêcher pour gagner. On devrait pouvoir observer ce jeu de « contre » si Noir réussit à anticiper le jeu, c'est-à-dire utilise une « stratégie de copie ».

Jeu 6

« Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

Jeu 6				
	U	U	H	Noir joue Vrai
	N	H	U	Rouge commence
	N	H	N	

Figure 28 : Règle et grille jeu 6

Même remarque que pour la grille précédente qui est de même nature (AE0) gagnante pour Noir. Par contre, on devrait observer une meilleure stratégie du défenseur (Noir), compte tenu de l'expérience acquise, et cela serait le signe d'un début d'heuristique pour une stratégie gagnante. En particulier nous vérifierons l'utilisation d'une stratégie de copie par noir.

Jeu 7

« Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

Jeu 7				
	W	Q	J	Noir joue Vrai
	Q	J	K	Rouge commence
	K	T	G	

Figure 29 : Règle et grille jeu 7

Cette grille est du type AE+ et gagnante pour Rouge. Ici Rouge gagne quelle que soit sa manière de jouer puisque Noir a quatre coups et il faudrait, à Noir, pour gagner prendre au minimum toutes les lettres en un seul exemplaire (W, G et T) et un exemplaire au moins de chacune des autres lettres (Q, J et K), soit six lettres. Cependant, ce raisonnement est vraisemblablement hors de portée si bien qu'on pourra vérifier si Rouge se saisit immédiatement ou pas d'un singleton, et ainsi estimer le moment du coup décisif.

Jeu 8

« Il existe une case noire telle que toute case rouge a même symbole »

Jeu 8				
	M	M	M	Noir joue Vrai
	M	M	U	Noir commence
	M	M	M	

Figure 30 : Règle et grille jeu 8

Il s'agit d'un énoncé de type EA1 gagnant pour Noir. Noir doit absolument prendre le U pour gagner. Nous mesurerons l'anticipation du jeu au moment du coup où l'on joue U (Noir ou Rouge). Ce cas constitue un intérêt particulier par rapport au type d'énoncé EA. En effet, dans ce cas, Noir doit choisir une case (U) qui lui sert moins à valider l'énoncé qu'à empêcher Rouge de l'invalider en choisissant cette case. Cette anticipation pourrait constituer le signe d'une compréhension avancée du jeu et de l'interprétation des énoncés dans ce cas fini.

Voici le tableau résumant les différentes grilles de Q^2 et les critères d'évaluation associés.

N°	Type	Gagnante pour	Particularité	Critères d'évaluation de l'anticipation
1	AE1	Rouge	Rouge gagne forcément	Moment du coup décisif de Rouge
2	AE0	Rouge	Rouge peut perdre	La stratégie de copie est-elle utilisée par le défenseur ?
3	EA+	Noir	Noir Gagne forcément	
4	EA+	Rouge	Rouge peut perdre	Moment du coup décisif de Rouge
5	AE0	Noir	Noir peut perdre	La stratégie de copie est-elle utilisée par le défenseur ?
6	AE0	Noir	Noir peut perdre	La stratégie de copie est-elle utilisée par le défenseur ?
7	AE+	Rouge	Rouge gagne forcément	Moment du coup décisif de Rouge
8	EA1	Noir	Noir peut perdre	Numéro du coup où la lettre U est jouée.

Tableau 40 : Grilles de Q^2 et critères d'évaluation d'anticipation.

Puisque nous tablons sur l'hypothèse d'une interprétation correcte de l'énoncé de jeu, nous nous attendons à observer une amélioration en termes de stratégie au fil du jeu. Cette amélioration pourra être mesurée par les critères mis en évidence dans cette analyse a priori, en particulier l'évolution de la précocité des coups décisifs pour les énoncés dont l'issue peut se décider avant la fin du jeu (1,7 et 8), et l'étude des stratégies gagnantes (2,5,6). Cette étude devrait nous permettre de conclure sur l'hypothèse d'interprétation correcte dans ce contexte, d'appropriation du jeu Q^2, mais aussi une entrée des joueurs dans une pensée heuristique. Ces trois aspects seront déterminants pour la deuxième partie.

b) Analyse a priori de la deuxième partie

i. Premier temps : la notion de grille gagnante

Rappel du scénario : On commence par un appel à conjecture en classe entière : « Pour la situation : « il existe une case rouge telle que toute case noire a le même symbole » avec rouge

qui commence et joue pour vrai, Question : pouvez-vous trouver une grille gagnante, c'est-à-dire une grille où celui qui joue vrai est certain de gagner ? ». Débat sur une grille proposée notée P1 de type EA0 (grille uniforme) : la conjecture « P1 est une grille gagnante » est mise au débat. Débat sur une grille proposée P2 de type EA1 (grille uniforme sauf une case) : la conjecture « P2 est une grille gagnante » est mise au débat. Puis institutionnalisation de notion de grille gagnante.

Nous pensons que deux types de grilles seront proposés : des grilles de type EA0 et EA1. Si aucune grille de type EA1 est proposée alors le professeur en proposera lui-même. Ensuite en ce qui concerne le premier débat sur la grille P1 (« P1 est une grille gagnante »), il devrait y avoir unanimité sur le fait qu'elle est gagnante. Cette unanimité attendue vient du fait qu'il apparaît évident que l'issue de ce jeu ne peut être que la victoire du défenseur. Cela est évident à anticiper puisque la grille étant uniforme, on connaît à l'avance la configuration de la coloration finale. Pour le deuxième débat (« P2 est une grille gagnante »), voici les arguments possibles.

- Pour Vrai :

- Le joueur qui commence joue pour Vrai et donc va prendre le singleton, ensuite toutes les lettres sont identiques dont il est certain de gagner.
- Le joueur joue pour Vrai et la stratégie gagnante est élémentaire.
- Il existe une manière de gagner donc c'est vrai.

Pour Faux :

- Il y a une manière de perdre donc c'est un contre-exemple donc c'est faux.

Pour Autre :

- On n’a pas de définition de grille gagnante donc je ne peux pas répondre.
- Je ne sais pas s’il faut compter ou pas que le joueur peut mal jouer.

Globalement, trois cas peuvent se présenter :

1) Tout le monde pense que la grille est gagnante (a priori peu probable).

2) Tout le monde pense que la grille n'est pas gagnante (a priori peu probable).

3) Les avis sont partagés (probable).

Dans le cas 1) tout le monde pense que la grille P2 est gagnante, cela signifie qu'une certaine notion de grille gagnante est déjà installée. Cela ne présume pas, par contre, du degré d'intériorisation de la notion. Dans ce cas, il est inutile de faire durer le débat, passer à la suite.

Dans le cas 2), tout le monde partage une autre conception de grille gagnante (La grille est gagnante si A gagne quels que soient ses coups) et pense que la grille P2 n'est pas gagnante. Dans ce cas, passer à la suite.

Dans le cas 3), le plus probable, le débat devrait déboucher sur l'expression de deux thèses contradictoires : l'une expliquant que la grille P2 est gagnante car lorsqu'on connaît la stratégie, on gagne à tous les coups, l'autre expliquant que l'on peut perdre si l'on joue mal. Dans ce cas,

le débat ne peut se conclure seul. Le professeur prend acte du désaccord manifestement irréductible et passe à la suite.

Pour les trois cas, nous n'attendons pas a priori que des propositions formalisées (avec quantificateurs) soient faites pour définir la notion de grille gagnante. Nous pourrons cependant observer les indices et les traces d'une forme de quantification issue du langage familier : à tous les coups, chaque fois, il y a, tout le temps, ... Nous regarderons de près les formulations utilisées pour défendre chaque thèse, car ces formulations constituent la manière de décrire des situations familières pour lesquelles la formalisation mathématique fait appel à des quantificateurs.

Nous ressortons donc des trois cas précédents de deux manières : avec un accord des élèves sur une manière de qualifier la grille P2 mais pas de définition pour établir cet accord ou bien avec un désaccord des élèves (le cas le plus probable) mettant à jour le besoin de définition pour clarifier la situation. Dans tous les cas, le professeur propose alors une définition sous la forme formalisée et en langage courant.

Nous proposons sous forme de tableau les différents objets impliqués dans cette situation en fonction des niveaux de milieux régulés et de rationalités :

<table>
<tr><td>Milieux</td><td>Matériel</td><td>Subjectif</td><td>Référence</td><td>Institutionnel</td></tr>
<tr><td>Rationalité</td><td></td><td>Pragmatique</td><td>Empirique</td><td>Théorique</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Connaissances ou objets annexes</td><td>O1 : Notion de grille gagnante</td><td>Une grille est gagnante si je gagne</td><td>Une grille est gagnante si j'ai souvent gagné avec cette grille</td><td>Une grille est gagnante si je suis certain de gagner « si je joue bien »</td></tr>
<tr><td>O2 : stratégies à partir des parties jouées</td><td>Je sais comment on gagne ou on perd</td><td></td><td>Stratégies gagnantes</td></tr>
<tr><td>O3 : Notion de définition</td><td colspan="2">L'évidence sert de guide</td><td>Il faut une convention partagée pour interpréter de la même manière</td></tr>
<tr><td>Objet visé par la situation : Convention d'interprétation des énoncés EA et AE</td><td></td><td>Interprétation dépendant de nombreux paramètres (cardinal, nature des objets, EA, AE…)</td><td>Justification des interprétations sans se référer à une convention mais plutôt à des évidences</td><td>Logique dialogique</td></tr>
</table>

Tableau 41 : Analyse a priori de la situation Q²

Nous rappelons que la situation Q² a pour but essentiel de faire apparaître le besoin d'une convention d'interprétation partagée et que le principe qui le réalise ici est de faire produire des grilles gagnantes et de se mettre d'accord sur leur caractère gagnant. Ces grilles gagnantes dépendent évidemment de l'interprétation qu'ont les élèves de l'énoncé doublement quantifié qui est la règle du jeu. Il s'ensuit que des interprétations différentes induiront des désaccords sur les grilles. La discussion au sujet de ces grilles devrait faire apparaître l'origine du problème : des interprétations différentes des énoncés doublement quantifiés.

Un autre mécanisme est ici aussi à l'œuvre. Comme nous l'avons vu dans les questionnaires, les interprétations d'énoncés doublement quantifiés des élèves ne sont pas toujours conformes, mais surtout ils ne semblent pas stables : le même élève n'interprète pas toujours de la même manière le même type d'énoncé doublement quantifié (en tout cas nous n'avons pas trouvé d'unité dans cette interprétation). Or, il n'a pas conscience de sa propre variabilité d'interprétation. En faisant apparaître le besoin de convention comme résultant de l'impossibilité de se mettre d'accord avec autrui sans une convention partagée, c'est finalement aussi à lui-même qu'il impose une convention stable.

Dans le milieu subjectif, la notion de grille gagnante peut conduire à des conflits de choix de grille gagnante. La transition repose alors sur un besoin de convention partagée au sujet de l'expression « grille gagnante ». L'autre conflit qui peut avoir lieu est celui de l'interprétation des énoncés de type EA ou AE, et qui apparait à travers la nature de la grille (gagnante ou pas). La transition de rationalité repose encore sur l'identification d'un manque de convention partagée à partir de la prise de conscience d'autres méthodes d'interprétations possibles, et de manière concomitante apparition d'un doute. Une fois les conventions données, la rationalité théorique peut être mobilisée.

ii. Deuxième temps : première mise à l'épreuve de cette nouvelle définition.

La grille P2 est, à nouveau, mise rapidement au débat afin de vérifier que la nouvelle définition lève bien l'ambiguïté pour tous. Nous pensons que l'unanimité devrait être rapide dans la mesure où les discussions précédentes ont largement déblayé le terrain et que la seule variabilité de la situation pour P2 est le premier coup joué.

c) Analyse a priori de la troisième partie

i. Contexte1 : Stratégie gagnante pour AE dans un contexte non mathématique.

A	Y	C
C	P	Y
P	A	C

Figure 31 : Grille jeu Q² troisième partie

Rappel du scénario : La grille AE0 ci-dessus est mise au débat : est-elle gagnante ou pas pour Noir avec le jeu : « Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole » où Rouge commence et joue pour faux ? Un débat a alors lieu. Puis une institutionnalisation est faite sur la stratégie gagnante pour cette grille de type AE0.

Si nous sommes ici dans un domaine a priori de maîtrise de l'interprétation des énoncés doublement quantifiés (Cf. Q5), la difficulté qui consiste à imaginer une stratégie gagnante réside, comme nous l'avons déjà décrit, dans la nécessité de concevoir une interprétation qui ne porte plus sur une seule grille déjà coloriée mais sur une famille de grilles constituées des coups d'un joueur et de tous les coups possibles de l'adversaire. Dès lors, des conflits d'interprétation de la double quantification peuvent voir le jour.

ii. Contexte 2 : Stratégie gagnante pour EA dans un contexte mathématique.

Rappel du scénario : « Il existe un nombre rouge x tel que pour tout nombre noir y, on a x>y ». Rouge commence et joue pour vrai. Le professeur demande de déterminer quelles sont toutes les grilles trois par trois gagnantes pour Rouge dont les cases contiennent des nombres différents ou non pour la situation 3. Un débat a alors lieu sur les différentes propositions. Une institutionnalisation est faite sur la notion de stratégie gagnante pour un énoncé AE et le rapport à la preuve de cet énoncé, de même pour la stratégie perdante.

Une remarque préliminaire : Si nous demandons toutes les grilles gagnantes pour Rouge ce n'est pas pour questionner l'équivalence ainsi exprimée, nous voulons en effet éviter de cumuler les difficultés, mais nous cherchons à motiver des grilles génériques. Aussi scinderons-nous en deux énoncés les réponses proposées : « si la grille est du type de la réponse donnée alors elle est gagnante pour Rouge » et « si la grille n'est pas du type des réponses données alors elle est gagnante pour Noir ».

En demandant toutes les grilles, on oblige à étudier à la fois la stratégie gagnante pour le défenseur et à la fois la stratégie gagnante pour l'attaquant. Mais surtout grâce à cette demande on peut faire apparaître toutes les grilles qui se fondent sur une interprétation erronée de l'énoncé de type EA. En débattant de ces grilles ensuite, la divergence d'interprétation devrait devenir évidente.

Les grilles gagnantes pour Rouge ici sont les grilles qui ont un seul plus grand élément. Il apparaît effectivement clairement qu'en cas de présence d'au moins deux plus grands éléments la grille est perdante puisque le défenseur doit prendre un plus grand élément et l'attaquant va répondre en prenant l'autre. Les grilles gagnantes n'ont donc qu'un seul plus grand élément. Le défenseur (Rouge) le choisit alors et gagne puisque aucun coup suivant de l'attaquant ne pourra répondre à ce coup-là.

Nous pensons que le changement de registre proposé (passer à un contexte mathématique) va renouveler l'intérêt et pour un moment la difficulté du jeu ce qui devrait favoriser les conflits d'interprétation s'ils ne sont pas survenus pour les contextes précédents.

iii. Contexte 3 : mise à l'épreuve des conventions d'interprétation dans un contexte mathématique plus difficile.

Rappel du scénario : On fait débattre des conjectures suivantes :

C1 : « Pour tout x réel, il existe un réel y tel que $x = y$ »

C2 : « Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y^2 < x$ »

C3 :« Il existe un réel u tel que pour tout réel m on a $m + u = 2$ »

C4 : « Il existe un réel x tel que pour tout réel y on a $y^2 - 1 \geq x$ »

A priori les règles de notre adaptation de la logique dialogique ont déjà été instituées à ce moment-là de la situation Q^2.

Quatre types d'arguments peuvent être proposés pour **C1 : « Pour tout *x* réel, il existe un réel *y* tel que *x* = *y* »**

Pour le vrai :

- Une démonstration : en disant qu'on prend pour y le même nombre que x, encore $y = x$
- Un exemple ponctuel de vérité : par exemple vrai car pour $x = 4$ et $y = 4$ on a bien $x = y$

Pour le Faux :

- Un exemple générique inversé : un seul nombre y ne peut pas être égal à tous les nombres x.
- Un exemple ponctuel de fausseté : Faux car pour $x = 2$ et $y = 3$ on a $x \neq y$.

Nous pensons que la discussion devrait être rapide pour s'accorder sur la bonne réponse. Nous pensons ici qu'il ne sera pas fait recours à la logique dialogique dans la mesure où il ne devrait pas apparaître de désaccord.

Pour C2 : « Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y^2 < x$ »

L'exemple générique inversé ici n'est pas distinguable car en interprétant C2 comme son faux-jumeau C2' :« Il existe un réel y tel que pour tout réel x, on a $y^2 < x$ », on peut conclure qu'en prenant pour x un nombre négatif il ne sera jamais supérieur à y^2 qui est un nombre positif. Ce raisonnement valide pour C2' est aussi valide pour C2.

Pour le vrai :

- Un exemple ponctuel de vérité : par exemple vrai car pour $x = 3$ et $y = 0$ on a bien $0^2 < 3$

Pour le Faux :

- Un exemple ponctuel de fausseté : Faux car pour $x= 0$ et $y = 3$ on n'a pas $y^2 < x$.
- Une démonstration : en prenant si on prend $x = - 1$ il n'existe pas de y tel que $y^2 < x$.

La logique dialogique n'est ici utile que pour évacuer un exemple ponctuel présenté comme argument.

Pour C3 : « Il existe un réel x tel que pour tout réel y on a $x + y = 2$ »

Les mêmes quatre types d'arguments que pour C1 peuvent être proposés mais aussi la logique dialogique pour essayer de résoudre les conflits d'interprétation :

Pour le vrai :

- Un exemple générique inversé : en prenant $x = 2 - y$ on a $x + y = 2$.
- Un exemple ponctuel de vérité : par exemple vrai car pour $x = 0$ et $y = 2$ on a bien $x + y = 2$

Pour le Faux :

- Un exemple ponctuel de fausseté : Faux car pour $x = 2$ et $y = 3$ on a $x + y \neq 2$.
- Une démonstration : en prenant $y = 4 - x$ on a $x + y = 4 \neq 2$.

La logique dialogique peut être utilisée de deux manières : d'une part pour essayer de prouver que C2 est fausse mais aussi pour montrer qu'elle est vraie en déformant sa règle d'utilisation.

Le débat qui aura lieu sera alors comparé aux 31 % de réussite nette (et 55 % de réussite brute) pour cette classe à la réussite de la même conjecture C18 dans Q5.

Une institutionnalisation sera réalisée pour appliquer la logique dialogique à ce cas et montrer comment on peut résoudre un conflit d'interprétation éventuel.

Pour C4 : « Il existe un réel x tel que pour tout réel y on a $y^2 - 1 \geq x$ »

C4 est vrai mais comme pour C2 on ne peut pas distinguer la démonstration qui correspond à C4 et celle qui correspond à son faux jumeau C4' puisque c'est la même. Donc aucun exemple générique inversé n'est possible.

Pour le vrai :

- Un exemple ponctuel de vérité : par exemple vrai car pour $x = 0$ et $y = 2$ on a bien $y^2 - 1 \geq x$.

Pour le Faux :

- Un seul nombre y ne peut pas être égal à tous les nombre x.
- Un exemple ponctuel de fausseté : Faux car pour $x = 4$ et $y = 2$ on n'a pas $y^2 - 1 \geq x$.
- Une démonstration : en prenant $x = - 5$ on a bien $y^2 - 1 \geq x$ pour tout y puisque le minimum $y^2 - 1$ est -1.

La logique dialogique n'est ici utile que pour évacuer un exemple ponctuel présenté comme argument.

II Expérimentation et analyse a posteriori

II.1 Enjeux et conditions expérimentales

Rappelons que si cette situation didactique a pour but (projet local) de permettre aux élèves de mieux comprendre/utiliser la double quantification en vue de la situation sur la limite, pour nous d'analyser l'évolution de cette compréhension, elle s'insère aussi dans un projet plus global d'analyse de la démarche rationnelle selon le modèle des apprentissages que nous avons adopté (Cf. du chapitre 4 III 1.). Nous étudierons les scripts de cette expérimentation selon ces deux aspects. Plus précisément voilà les questions auxquelles nous tenterons d'apporter des réponses lors de cette étude :

1) La question des quantificateurs :

Que nous apprend cette expérimentation sur l'interprétation d'un énoncé doublement quantifié ?

La situation conduit-elle à la une meilleure prise en compte des conventions ?

Comment la logique dialogique est-elle utilisée ?

2) La question de la rationalité :

Comme nous l'avions annoncé, le modèle de rationalités peut être utilisé non seulement à l'échelle locale pour suivre la rationalité dans une situation mais aussi à long terme pour évaluer l'évolution de la mobilisation de la rationalité. Par exemple, cette situation didactique fait apparaître à deux moments la nécessité de définir (pour grille gagnante et interprétation de la quantification). Y-a-t-il une perception du manque de définition ? La nécessité de définir est-elle exprimée ? Si oui, comment ? Y-a-t-il une évolution de cette perception par rapport à celle

des nombres ? Plus généralement, quelle évolution dans l'appropriation d'une démarche rationnelle peut-on constater depuis la dernière « photographie », c'est-à-dire sur la question des nombres ?

Nous réalisons notre expérimentation de la situation Q² avec notre classe expérimentale de TS. Nous analyserons les résultats de cette classe également dans la perspective de suivre la trajectoire de cette classe tout au long des différentes expérimentations des situations didactiques successives de notre étude et de vérifier l'appropriation d'une situation sur l'autre.

II.2 Résultats de la première partie

Les analyses effectuées dans cette partie sont réalisées à partir des fiches récupérées dans les deux groupes. Ci-dessous un exemple d'énoncé du jeu Q².

Jeu 6 « Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

U	U	H
N	H	U
N	H	N

Noir joue Vrai

Rouge commence

Qui gagne Rouge ou noir ?

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Coups joués									

Figure 32 : Exemple d'énoncé du jeu Q²

Nous pouvons reconstituer la partie à partir du tableau des coups joués complété par les élèves et nous pouvons savoir quelle décision a été prise concernant le gagnant puisque les élèves le désignent sur le document en entourant la couleur de celui qui gagne le jeu.

Nous analyserons les réponses des élèves afin de répondre à trois questions :

1) La qualité de l'interprétation de l'énoncé doublement quantifié dans ce contexte est-elle conforme aux résultats du questionnaire Q5 ?
2) Y-a-t-il une appropriation du jeu Q² ?
3) Que peut-on prévoir à partir de ces résultats sur la suite de la situation Q² ?

a) Description du déroulement

Ce sont les joueurs eux-mêmes qui décident du vainqueur de chaque partie. Et cette décision se base sur l'interprétation de la règle du jeu qui est un énoncé doublement quantifié AE ou EA. Sur 120 décisions de gagnants seules 4 sont incorrectes (soit 3%). Nous pouvons en déduire qu'il y a effectivement une bonne interprétation de la double quantification dans ce contexte.

Nous évaluons l'appropriation du jeu sur un indice global : quel est le pourcentage de grilles gagnantes effectivement gagnées ? Nous nous restreindrons aux grilles gagnantes qui peuvent être perdues (2, 4, 5, 6, 8) car certaines grilles (1,3,7) sont non seulement gagnantes mais sont gagnées indépendamment des coups du joueur gagnant et de son adversaire. Seules douze parties sur soixante-quinze parties concernées (soit 16%) sont gagnées par celui qui aurait dû perdre compte tenu de la nature de la grille.

Pour les énoncés de type AE où un singleton est présent (jeu1 de type AE1 et jeu 7 de type AE+) l'attaquant qui commence gagne s'il prend un singleton. Nous nommons ce coup, le coup décisif. Une manière de vérifier l'amélioration de la manière de jouer est d'étudier l'évolution

de la précocité du coup décisif dans ces cas. Seuls les jeux 1 et 7 sont concernés. Dans le jeu 1, on constate que neuf joueurs (sur quinze) jouent leur coup décisif au premier coup. Dans le jeu 7, ils sont treize. Si cette évolution plaide en la faveur d'une amélioration de la manière de jouer, nous faisons cependant remarquer que le jeu 1 contient un seul singleton et le jeu 7 en contient trois, ce qui ce qui rend plus facile de jouer un singleton y compris sans intention particulière. Pour une expérimentation ultérieure, il serait plus judicieux de placer le jeu 7 en premier et le jeu 1 en deuxième.

Pour les énoncés de type AE sans singleton (AE0) qui sont les jeux 2, 5 et 6 et qui sont des grilles gagnantes pour le défenseur, nous pouvons étudier l'utilisation d'une stratégie. En particulier, nous pouvons vérifier l'utilisation de la stratégie que nous avons déjà évoquée pour ce type de grille et que nous appelons, « stratégie de copie ». Cette stratégie consiste pour le défenseur de copier tous les coups du l'attaquant quand il le peut, et jouer n'importe quelle lettre sinon. Nous avons déjà vu que cette stratégie est gagnante, et que, si elle n'est pas la seule à permettre au défenseur de gagner, elle paraît la plus naturelle.

Pour le jeu 2 : treize parties sur quinze sont compatibles avec la stratégie de copie.

Pour le jeu 5 : treize parties sur quinze sont compatibles avec la stratégie de copie.

Pour le jeu 6 : Onze parties sur quinze des parties sont compatibles avec la stratégie de copie.

Globalement, cela signifie que cette stratégie est utilisée, ou plus précisément une manière de jouer compatible avec une telle stratégie est utilisée, dans environ 82 % des cas pour les grilles AE0 de ce questionnaire. Ceci est à comparer aux énoncés de type EA (jeu 3 et 7) pour les quelles une stratégie de copie pourrait être mises en œuvre (à tort évidement), où l'on dénombre cinq parties compatibles avec une telle stratégie, c'est-à-dire environ 17 % des parties du jeu 3 et 7.

Pour les énoncés de type EA nous allons regarder les jeux 4 et 8.

Pour le jeu 4, qui est une grille de type EA+, c'est-à-dire gagnante pour l'attaquant, nous pouvons vérifier la stratégie de l'attaquant en repérant son premier coup décisif : quand il joue « P » pour la première fois. Dans onze cas sur quinze, l'attaquant joue un coup décisif dès son premier tour. Quand il ne le joue pas (quatre cas), dans les trois cas où le défenseur a déjà joué « P » en premier, le défenseur s'empare du deuxième « P » au tour suivant dans deux cas et donc gagne.

Pour le jeu 8 de type EA, celui qui prend la lettre U en premier a gagné. Cela n'est pas évident à concevoir pour le premier joueur, le défenseur, comme nous l'avons vu dans l'analyse a priori, car prendre la lettre U pour le défenseur représente vraiment une appréhension globale du jeu : en effet il faut qu'il prenne la lettre U beaucoup moins pour valider l'énoncé du jeu, une fois prise cette lettre ne servira pas, que pour empêcher l'autre de l'invalider. Et l'on voit que sur les quinze parties, dix défenseurs choisissent la lettre U dès le premier tour. Et quand elle n'est pas choisie au premier tour (cinq cas), l'attaquant s'en empare dans trois cas immédiatement après.

Il y a donc une proportion importante des joueurs qui adoptent des stratégies gagnantes dans les cas des énoncés de type EA.

b) Eléments potentiels d'apprentissage

L'analyse des résultats de l'expérimentation (pourcentage de décisions correcte de gagnants mais aussi la capacité à bien jouer) montrent d'abord que l'interprétation des énoncés doublement quantifiés dans ce contexte est très correcte et met en évidence une identification de la distinction entre les énoncés de type AE et celles de type EA conformément aux résultats du questionnaire Q5. En outre, l'analyse des résultats (précocité du coup décisif, utilisation de stratégie gagnante) montre surtout que ce confort cognitif permet beaucoup plus qu'une appropriation du jeu, il conduit à une capacité d'anticiper : les réponses témoignent de stratégies adaptées et efficaces dans une proportion très importante des cas pour tous les types d'énoncés (EA comme AE). Les hypothèses qui ont présidé à l'élaboration du jeu se vérifient. Nous dirons en conclusion que cette première partie semble jouer son rôle : installer le jeu Q^2 comme référence et initier un début de capacité d'anticipation dans le cadre de ce jeu que la suite de la situation Q^2 pourra exploiter. A partir de cette première analyse, nous pouvons dire que cette partie de la situation remplit son rôle : introduire à un jeu qui va servir de référence pour la suite.

II.3 Résultats de la deuxième partie

Pour cette deuxième partie nous allons étudier la réalisation de la situation sous deux aspects : le premier, local, concerne les quantificateurs et leur interprétation, et le second, global, concerne la démarche au sens de notre modèle des apprentissages.

a) Les quantificateurs

Notre projet initial avait pour but à la fois de fabriquer une situation qui permette une meilleure interprétation de la double quantification par les élèves mais aussi de mieux comprendre l'interprétation naturelle des élèves, aussi nous analyserons les résultats de la situation selon cette double perspective.

i. Description de résultats liés à la quantification

Nous commençons par un bref résumé de la situation, car celle-ci ne s'est pas exactement passée comme prévu. En effet, le principe général de la situation consistait, après avoir joué au jeu pour s'approprier ses règles (première partie) à définir le concept de grille gagnante (début deuxième partie) puis sur des contextes gradués en difficulté tester cette définition jusqu'à voir apparaître un conflit d'interprétation qui justifie que le professeur donne des conventions d'interprétation. Et enfin (troisième partie) de tester ces conventions en contextes difficiles. La deuxième partie ne s'est pas vraiment passée ainsi : les conflits d'interprétation sont survenus bien avant ce qui était prévu. Ces conflits sont apparus juste après la définition de grille gagnante et ce avant même les débats des différents contextes qui devaient servir justement à les provoquer. Nous allons tenter d'analyser ce qui explique ce phénomène inattendu. Nous étudions maintenant la succession des événements de ce début de deuxième partie de la situation qui conduit à cette accélération du temps didactique de la situation. Pour cela, nous découpons cette analyse en trois moments : Le moment où le conflit apparait sur la validation et non la validité, le moment où le jeu Q^2 masque l'enjeu d'interprétation, le moment où le jeu Q^2 provoque le conflit attendu.

- Le moment où le conflit apparaît sur la validation et non sur la validité

Le professeur demande, comme prévu, toutes les grilles gagnantes pour le jeu : " Il existe une case rouge tel que toute case noire a le même symbole". Avec Rouge qui commence et joue pour vrai. Après 5 minutes de réflexion, six grilles sont proposées :

Figure 33 : Grilles gagnantes proposées pour la deuxième partie de Q²

L'étude de la grille P1 ne peut pas mettre en évidence la question de la définition de grille gagnante puisqu'il n'y a pas moyen de perdre sur cette grille. Par contre l'étude de la grille P2 conduit les élèves à la question de la définition de grille gagnante. Le professeur donne la définition puis propose de statuer sur la grille P2 avec la nouvelle définition. La conjecture (P2 est gagnante pour rouge) est remise au vote avec cette nouvelle définition, il a vingt-huit vrais et un Autre. Loïc qui a voté Autre change aussitôt d'avis en réalisant qu'il s'est trompé de grille puis explique pourquoi il pense que la conjecture est vraie :

> [>Loïc] : Parce que Rouge commence et comme il joue pour gagner il joue la case A et le...
>
> [>Le professeur] : Attends, tu dis "Rouge joue A en premier", d'accord ? Oui, ensuite ?
>
> [>Loïc] : Ensuite Noir il va que cocher des cases B.
>
> [>Le professeur] : Noir prend que des cases B. Et donc au final, pourquoi c'est gagnant pour Rouge ?
>
> [>Loïc] : Parce que ... ?
>
> [>Hadrien] : Parce que Noir a que des B.

Mais Quentin n'est pas d'accord avec cette explication, il rajoute :

> [>Quentin] : Et que Rouge l'a aussi.

Auquel Hadrien et Louis opposent leur désaccord :

> [>Hadrien] : Ben non, il a A et B.
>
> [>Le professeur] : Quentin, toi tu penses que c'est important de rajouter que Rouge a aussi même symbole que noir ? (Plusieurs élèves :" ben non")
>
> [>Quentin] : ben Oui.
>
> [>Louis] : Moi je pense qu'il faudrait juste rajouter qu'il existe une case rouge.

Nous voyons ici apparaître deux étranges interprétations : l'une (Loïc et Hadrien) qui expliquent qu'il suffit que les noirs aient tous même symbole pour valider l'énoncé et ce faisant éclipsent la partie de l'énoncé concernant les rouges, l'autre (Louis) qui ajoute à cette première condition,

une seconde qui est qu'il faut qu'il existe une case rouge, et ce faisant rend indépendant les deux parties de l'énoncé. Nous voyons dans cet échange deux interprétations qui n'avait pas été envisagées, ni d'ailleurs révélées dans l'étude des différents questionnaires du chapitre 6 et pas non plus identifiées dans la première partie de la situation Q^2. L'une correspond à l'élimination d'une partie de la double quantification pour son interprétation qui devient de fait une simple quantification. L'autre correspond à traiter la double quantification comme la conjonction de deux simples quantifications. Ces deux interprétations sont très inattendues dans la mesure où la première consiste à faire comme si une partie de la phrase ne servait à rien, et où la deuxième consiste à interpréter le « tel que » comme un « et ».

A ce moment-là, Maxime explique à Louis que « il existe une rouge » n'est pas suffisant, il faut dire que cette case rouge au même symbole que les noirs. Mais Fabio n'est pas d'accord et l'exprime avec conviction :

> [>Fabio] : Moi je pense que ce qu'a rajouté Quentin, et bien en fait on s'en fout.

Tout cet épisode se déroule autrement que le scénario l'avait anticipé. D'abord il était prévu, compte tenu de la nature de la règle jouée (énoncé EA) que le sujet de discussion porterait seulement sur la nature de la notion de grille gagnante (cette discussion a bien eu lieu). Or une fois cette question élucidée apparait immédiatement un autre sujet de discussion au sujet de l'interprétation de la règle de ce jeu. Mais ce qui n'avait pas été prévu, c'est surtout que le conflit d'interprétation apparaisse au sujet de la validation de la conjecture. En effet, il était prévu que les différentes interprétations génèrent, sur des énoncés plus complexes, des propositions de grilles gagnantes qui n'auraient pas fait l'unanimité, ce qui aurait obligé les élèves à s'interroger sur les conventions d'interprétation contradictoires mobilisées des énoncés doublement quantifiés. Or ce ne sont pas les désaccords sur la validité des grilles gagnantes qui sont l'origine ici de l'identification de conventions d'interprétation contradictoires par les élèves, ils pensent tous P2 gagnante, mais la manière de valider ce fait. Nous voyons là les indices de la modification du niveau de rationalité exercé : les contradictions sont immédiatement identifiées, même lorsqu'elles portent sur la manière de valider une conjecture. Plus précisément, il commence à apparaître l'idée que la validation d'un résultat est aussi importante que la validité du résultat lui-même. Ceci est caractéristique de l'expression d'une rationalité théorique.

- Le moment où le jeu Q^2 masque l'enjeu des conventions d'interprétation

Dans l'épisode suivant nous voyons comment le fait de mobiliser un jeu peut détourner l'attention du véritable enjeu poursuivi : discuter des conventions d'interprétation.

A la suite de l'expression par les élèves d'un conflit portant sur la validation de la conjecture concernant P2, le professeur essaie alors de centrer le débat sur le point de désaccord identifié en proposant d'étudier la conjecture : C2 :« Il suffit que Noir n'ait que le symbole B » (pour que l'énoncé du jeu soit validé). Pour cette conjecture voici le résultat du vote sur C2 : 20 pensent que ça suffit, 4 pensent que ça ne suffit pas, et 4 dans Autre. Mais la discussion fait apparaître que ceux qui pensent vraie cette conjecture, considèrent que, puisque le jeu oblige Rouge à prendre un case (et même un B), il n'est pas nécessaire de vérifier les cases rouges, et que la seule condition porte bien sur les noirs. Le professeur reformule alors le problème de l'interprétation soulevé initialement par Quentin en proposant la grille qui contient huit A noir et un B

rouge. Et en demande si pour cette grille l'énoncé A1 : « il existe une case rouge telle que toute case noire a même symbole » est vraie pour cette grille.

Mais Caroline explique que ce type de grille là n'est conforme à la règle du jeu car Rouge n'a joué qu'une seule case. Quentin alors propose lui-même une nouvelle grille qui est conforme au jeu et où tous les B sont en rouges et les A en noir :

Figure 34 : Grille proposée au débat par Quentin pour expliquer ses réticences

A nouveau, Caroline demande pourquoi proposer une configuration qui n'est pas celle du jeu où rouge ne joue manifestement pas pour gagner. Le professeur propose d'étudier, indépendamment du jeu, une conjecture qui porte sur la grille proposée par Quentin : « Avec cette grille, l'énoncé A1 est faux. ». Le vote donne douze Vrais, dix Faux et six Autres. La discussion qui suit aboutit à une conclusion de Fabio :

> [>Fabio] : Ben il y a des personnes comme moi, qui peuvent penser que "toutes les cases noires aient le même symbole" et d'autres comme Sébastien qui pense qu'il faut qu'une case rouge qui ait le même symbole que toutes les cases noires. (Plusieurs élèves acquiescent).

Ce à quoi répond Mickaël :

> [>Mickaël] : Moi je suis dans Faux, mais pour ceux qui pensent que toutes les cases noires doivent avoir le même symbole, c'est quoi la case rouge qui existe pour toute les cases noires ont même symbole ?

Hadrien déclare alors changer d'avis avec la question de Mickaël et explique que l'énoncé aurait été écrite autrement si on ne s'intéressait qu'aux noires. Louis qui n'est pas d'accord répond :

> [>Louis] : Ben je pense que Fabio il a raison, et que Mickaël il a juste compris la question comme la première proposition de Fabio et les Autres, ceux qui sont dans vrai, comme moi, ils ont compris la proposition comme la proposition de Fabio. Et du coup il y a deux camps, les vrais et les faux. Et on est juste pas d'accord parce qu'on ne pense pas la même chose.
>
> [>Le professeur] : Ok, vous ne lisez pas de la même manière...ce que Fabio a dit tout à l'heure.
>
> [>Louis] : Voilà, tout à fait.
>
> [>Le professeur] : Maxime tu voulais rajouter quelque chose ?
>
> [>Maxime] : C'est exactement pour ça que depuis le début je suis dans Autre.
>
> [>Juliette] : Moi aussi.

A ce moment-là, le professeur prend la parole et explique que la différente repose sur une convention mathématique et que :

> [>Le professeur] : Eh bien, en mathématiques, on lit une phrase comme ça, on dit "il existe une case rouge telle toute case noire a le même symbole", il faut que toutes les cases noires aient le même symbole que la rouge. C'est comme cela que l'on lit ça. D'accord ? Donc quand on dit noir a le même symbole partout ça ne suffit pas.

Il statue sur P2 et propose de discuter de P3 avec la conjecture « La grille P3 est gagnante pour rouge ». Le vote donne trois dans Vrai, vingt-quatre dans Faux et un dans Autre. La discussion qui a lieu met assez rapidement tout le monde d'accord. Le professeur statue sur P4, P5, et P6

Nous pouvons remarquer que les propos de Quentin sur le fait qu'il faut aussi vérifier les rouges pour valider l'énoncé ne sont pas pris immédiatement en compte par ses camarades. Il s'avère, en fait, qu'un malentendu s'installe : quand Quentin ajoute cette condition, il fait référence à une règle générale d'interprétation, tandis que ceux qui pensent que cette condition n'est pas nécessaire font référence au jeu Q^2 : comme Rouge doit prendre cinq cases, il prendra nécessairement un B, alors que Noir peut prendre autre chose que seulement des symboles identiques. Les deux positions sont légitimes mais ne permettent pas d'élucider le désaccord. En fait, en proposant une grille pour élucider le désaccord, le professeur, puis Quentin ont changé la nature de l'activité. Là où il s'agissait d'évaluer si une grille est gagnante, il faut maintenant vérifier si elle est gagnée. Là où il s'agissait d'évaluer une grille jouée (avec les règles de Q^2), il faut maintenant évaluer une phrase doublement quantifiée à partir d'une grille coloriée (sans suivre forcément les règles de Q^2). Les deux premières tentatives du professeur pour permettre aux élèves d'identifier l'origine de ce désaccord sur la validation sont disqualifiées par ceux qui étudient l'interprétation seulement dans le cadre du jeu. C'est finalement la proposition de grille de Quentin qui permettra enfin de discuter de l'interprétation au sens de la règle d'interprétation. Le conflit d'interprétation devient alors évident et est exprimé par Fabio puis Louis sous la forme des deux conventions d'interprétation utilisées dans le débat. Dans toute cette séquence nous observons que si le but est finalement atteint ; identifier des conventions d'interprétations distinctes ; le jeu Q^2 fait obstacle à cet enjeu de deux manières : il impose d'étudier des grilles aux colorations conformes au jeu (cinq rouges et quatre noires), il impose d'étudier des grilles « coloriées intelligemment » (i.e. pour gagner, du fait de la problématique des grilles gagnantes). Ce faisant, il complique considérablement la production spontanée de grilles susceptibles de provoquer les désaccords, comme nous l'avons vu. Cependant les grilles suivantes P3, P4, P5 et P6 proposées peuvent plus facilement mettre en évidence les différentes interprétations dans la mesure où ces grilles sont plus complexes. Mais c'est une nouvelle grille (P7) proposée par Quentin qui va conduire à l'établissement des conventions d'interprétation.

- Le moment où le jeu Q^2 provoque le conflit attendu

A la suite de la discussion précédente, Quentin propose une nouvelle grille gagnante P7 :

Figure 35 : Nouvelle grille gagnante (P7) proposée par Quentin

Suite à la demande de Loïc, Quentin explique :

> [>Quentin] : Au départ rouge va jouer A pour pas que Noir la prenne (C'est le seul singleton). Et après il va jouer tout le temps en fonction de ce que va jouer Noir. Quand Noir va jouer une couleur il va prendre la même.

Puis, c'est Maxime qui explique pourquoi il pense que P7 est gagnante :

> [>Maxime] : Parce qu'en fait si Noir il prend A alors ce sera directement faux, donc Rouge il a intérêt à jouer A, vu qu'il commence il joue A. Ensuite Noir va jouer n'importe quel truc, par exemple C. Et pour que Rouge, pour que Noir ne prenne pas une autre lettre du coup Rouge serait coincé. En gros si Noir reprend C alors Rouge serait coincé, donc il va forcément reprendre C. Prendre le C opposé. Donc après le noir il prend un truc aléatoire, c'est pareil (Il entoure le E en noir). Et après c'est toujours pareil jusqu'au bout.
>
> [>Le professeur] : Vas-y, fais-le jusqu'au bout s'il te plaît.
>
> [>Maxime] : Après le E rouge qui est là. Après tu as le D noir et après le D rouge. Après il y a le B noir. Et après le B rouge. Et du coup...A chaque fois que Noir choisit une couleur, enfin une lettre, Rouge va toujours choisir la même en fait la paire.

Le professeur organise alors un vote sur « La grille P7 est gagnante » : il y a quatre Vrais, vingt-quatre Faux et personne dans Autre. Mais dès qu'Hadrien commence à expliquer pourquoi il vote Vrai, certains qui avaient voté Faux (Six élèves) déclarent vouloir passer dans Autre parce qu'ils ne savent plus quelle interprétation est la bonne. Une discussion a lieu alors entre les tenants de chaque interprétation sans qu'aucun ne parvienne à convaincre, et est finalement interrompue par le professeur afin de donner les conventions d'interprétation. Finalement la multiplicité des désaccords, non résolus à plusieurs reprises, permet, comme prévu, au professeur d'institutionnaliser des conventions d'interprétation qui répondent à un problème clairement identifié par les élèves : sans elles, il n'est pas possible de se mettre d'accord.

Nous remarquons dans l'interprétation qui est réalisée par Quentin et Maxime, un nouveau type d'interprétation qui ne correspond ni à une interprétation de type EA, ni à celle de type AE. De la même façon que pour Louis et Loïc, ce type d'interprétation n'a pas été identifié dans les études précédentes (Q5 et première partie de la situation Q²). Il faut aussi remarquer que ces les types d'interprétation de Louis et Loïc sont très spécifiques au contexte choisi puisqu'ils supposent une possibilité de donner du sens à la seconde partie de l'énoncé pris isolément (le « pour tout noir a même symbole »). Ici le « a le même symbole » le permet, mais le « lui est voisine » de Q5 le rendait impossible. Une étude supplémentaire pourrait être menée pour mesurer l'impact de différentes expressions de l'énoncé du jeu sur l'interprétation réalisée.

ii. Transitions de rationalité via le travail sur la quantification

Il n'était pas prévu qu'en ce début de deuxième partie survienne immédiatement la question des conventions comme c'est le cas. Nous analysons ce phénomène comme liés d'une part à la situation, mais surtout lié à des transitions de rationalité précoces. La situation favorise la prise de conscience de désaccords car les grilles gagnantes permettent de les concrétiser immédiatement. Une grille sera gagnante pour l'un et perdante pour l'autre. La nécessité de se mettre d'accord met alors immédiatement en évidence que ce sont les interprétations des énoncés doublement quantifiés qui sont à l'origine de ce désaccord. Mais nous avons vu que ce sont aussi les arguments mobilisés pour valider une grille gagnante qui peuvent être à l'origine de ces désaccords. Pour ce qui est de la rationalité, les désaccords générés par la situation, une grille est gagnante pour une raison qui n'est pas reconnue comme valide par d'autres, va initier une transition de rationalité vers le théorique : les interprétations pragmatiques qui reposent sur

l'évidence ; il n'y a qu'une façon d'interpréter qui est la mienne ; sont mises en cause par la multiplicité des interprétations exprimées. L'évidence alors s'écroule et laisse place au doute.

> [>Loïc] : On a compris que toutes les cases noires aient le même symbole que une seule case rouge.
>
> [>Le professeur] : Oui ça c'est ta première compréhension ou la deuxième ?
>
> [>Loïc] : La première. Et la deuxième c'est celle que Hadrien pense. C'est pour cela que...
>
> [>Le professeur] : Vous mettez dans Autre parce que vous ne savez plus. Ah. Erika que je n'entends pas souvent.
>
> [>Erika] : Moi c'est pareil que Loïc, je pensais pareil et maintenant je ne sais plus.
>
> [>Le professeur] : Ah il y en a d'autres qui suivent comme Erika. Qui suit Loïc et Fabio ? Un deux trois...Ah...trois quatre. Donc il y en a six qui passent de Faux à Autre pour la raison qui a été donnée par Loïc.

Nous voyons dans cet épisode un conlit intra-rationalité qui n'est pas résolu par les élèves, il faudrait pour cela une transition de rationalité vers le théorique : les élèves ne vont pas jusqu'à demander l'adoption d'une convention partagée. Mais le fait d'abandonner la certitude de l'évidence liée à une rationalité pragmatique déstabilise cette rationalité et cette transition. Ainsi lors de l'institutionnalisation sur cette partie de la situation, c'est le professeur qui réalise cette transition. Quand sont donnés les deux conventions d'interprétation, elles sont immédiatement testées sur des exemples. Les conjectures en question sont bien interprétées (vingt-sept correct contre un dans les deux cas AE comme EA). Cela signifie que lorsque les conventions d'interprétation sont adoptées dans ces conditions, elles permettent effectivement des interprétations valides. Autrement le renoncement à la rationalité pragmatique que crée la situation a préparé l'adoption d'une rationalité théorique pour ce qui est l'interprétation des énoncés doublement quantifiés.

b) La question de la définition

Après avoir analysé certains éléments de la composante logique de la rationalité, nous étudions maintenant les résultats de la deuxième partie selon la composante de la définition. Cette étude se fera essentiellement du point de vue de la qualité des interactions.

i. Grille gagnante et convention d'interprétation

Dans cette partie de la situation, à deux reprises, on rencontre un problème de définition. On pourrait s'attendre à ce que soit identifié le manque de définition, que ce soit immédiatement ou bien au terme d'une discussion menant à des désaccords produits par ce manque. Ce serait alors une avancée significative par rapport à la notion de définition. Qu'en est-t-il ?

<u>D'abord la définition de grille gagnante :</u>

Lors de l'introduction de la problématique de recherche des grilles gagnantes, le professeur ne définit pas du tout le terme de grille gagnante, y compris sous une forme élémentaire (Mais il est évidemment prévu qu'il le fasse plus tard). Il compte sur le sens générique et habituellement partagé du mot « gagnant » et il s'agit de vérifier si le manque va être perçu :

> [>Le professeur] : Bon, on laisse les deux dernières tables qui ont à finir leur jeu et nous pendant ce temps je vous pose une question. Normalement, a priori, ce ne devrait pas être très dur. Donc pour le jeu, je vous propose la phrase :" Il existe une case rouge telle que toute case noire a le

même symbole". Avec Rouge qui commence et joue pour vrai. Et je vous demande quelles sont TOUTES les grilles gagnantes pour Rouge ? Donc vous essayez de trouver toutes les grilles gagnantes pour Rouge possibles…Vous comprenez la phrase ? Je vous laisse réfléchir, vous avez le temps.

/…/

[>Juliette] : Mais gagnante ça veut dire quoi ?

[>Le professeur] : C'est comme vous voulez. Il y a cette question qui est posée. Vous pouvez très bien dire : on ne peut pas répondre à cette question. Moi ça ne me dérange pas, Vous le savez très bien. Par exemple, si celle-là est gagnante pour ce jeu-là, alors il faudrait la compter comme une grille gagnante. Une grille c'est une grille trois par trois.

On peut constater que Juliette a besoin d'en savoir plus sur l'idée de grille gagnante mais la réponse très évasive du professeur ne créé pas spécialement de trouble. Par contre, lors du vote sur la grille P2, il y a seize Vrais, un Faux et neuf Autres. Pour six élèves dans Autre, les raisons données correspondent justement à une précision qui leur manque :

[>Hadrien] : Non mais c'est juste pour demander. Quand vous dites gagnantes, c'est gagnante à tous les coups ou pas ? Ou juste quelle peut être gagnante ?

Pour ceux qui sont dans Vrai, une hypothèse sur « l'intelligence » des joueurs est faite :

[>Juliette] : On dit que c'est Rouge qui commence, et il joue pour vrai. Donc s'il est un minimum intelligent il est sûr de gagner puisque s'il coche A, il est sûr que sa grille est gagnante.

Hypothèse qui est immédiatement contestée :

[>Orlane] : Oui mais s'il est bête ?

Le professeur déclare alors :

[>Le professeur] : Il y en a qui ont changé d'avis dans ce petit débat là ? Non, Ok. Ici on a un problème de…

Et Loïc répond :

[>Loïc] : Définition.

Pour la définition de grille gagnante on peut conclure que tous les éléments matérialisant le doute et le besoin d'une définition sont présents mais que la demande explicite d'une définition n'apparaît pas véritablement.

<u>La définition de la convention d'interprétation :</u>

Nous dirons qu'il y a nécessité d'adopter une convention collective d'interprétation des énoncés doublement quantifiés dans la mesure où survient des conflits d'interprétation non résolubles par la seule analyse sémantique naïve des énoncés. Les discussions aboutissent effectivement à l'expression d'un différend irréductible sauf à définir une convention collective mais aucune demande n'est faite dans ce sens :

[>Fabio] : Ben il y a des personnes comme moi, qui peuvent penser que "toutes les cases noires aient le même symbole" et d'autres comme Sébastien qui pense qu'il faut qu'une case rouge qui ait le même symbole que toutes les cases noires. (Plusieurs élèves acquiescent).

Et puis un peu après :

[>Louis] : Vrai. Ben je pense que Fabio il a raison, et que Mickaël il a juste compris la question comme la première proposition de Fabio et les Autres, ceux qui sont dans vrai, comme moi, ils

ont compris la proposition comme la proposition de Fabio. Et du coup il y a deux camps, les vrais et les faux. Et on n'est juste pas d'accord parce qu'on ne pense pas la même chose.

Dans le cas de la grille gagnante comme celui de la convention d'interprétation, le débat qui a lieu permet d'identifier de manière précise ce qui fait le désaccord mais aucune demande de convention collective spontanée n'a lieu, et c'est le professeur qui est amené à conclure sous la forme : « il nous manque une définition ». Autrement dit, en termes de rationalité pour ces deux épisodes vus comme ayant pour objectif la notion de définition, il n'y a pas transition vers le théorique, transition qui suppose avant même de définir (rationalité pleinement théorique) de ressentir le besoin d'une définition au point de déclarer ce manque explicitement (transition). Il n'y a donc pas d'évolution significative sur la question de la transition de rationalité pour ce qui concerne la définition entre cette situation et celle des nombres.

ii. Emergence du besoin de définition dans les interactions

Le moteur essentiel de l'activité mathématique de cette deuxième partie est l'absence de définition, que ce soit celle de grille gagnante ou bien de conventions d'interprétation. Cette absence provoque des conflits qui conduisent à partager les raisons qui fondent ces avis/positions divergents et de chercher justement l'origine des points de divergence. Par exemple dans le cas des conventions d'interprétation : quand Quentin rajoute à l'explication initiale de Loïc et Hadrien le complément (« Et que Rouge l'a aussi. ») sans lequel, pour lui, les raisons données sont insuffisantes. Cette intervention est ensuite décisive puisqu'elle permet au professeur de focaliser le débat sur cette différence d'interprétation. Notre hypothèse est que cette intervention de Quentin provient du fait que l'absence de définition de ces conventions conduit à ce que les indices qui laissent penser qu'on ne parle pas exactement du même objet deviennent cruciaux.

On peut observer le même phénomène, interactions guidées par le besoin de comprendre le véritable objet de la discussion, quand Maxime interpelle Louis pour comprendre ce qu'il signifie par « il existe une case rouge » :

[>Maxime] : Je ne comprends pas pourquoi tu dis qu'il y a une case rouge, qu'il existe une case rouge.

[>Louis] : C'est parce que en fait je veux juste vérifier pour qu'une proposition soit juste : il existe une case rouge telle toute case noire a le même symbole. Il faut que la proposition, et l'hypothèse soient vérifiées et je précise juste que la proposition est vérifiée, c'est-à-dire qu'il existe une case rouge.

[>Maxime] : Oui mais ça peut mal être interprété. Moi je dirais plus il y a une case B qui est entourée en rouge.

[>Louis] : Oui mais là tu précises mais...

[>Maxime] : Oui mais dans l'exemple c'est ça.

[>Louis] : Si tu veux je peux dire : il existe BIEN une case rouge.

[>Maxime] : C'est pareil ! (Rires)

[>Le professeur] : Ah oui je comprends en fait votre différent. Toi Maxime tu es en train de dire qu'il faut absolument dire la case rouge en question c'est une case B et toi Louis, tu dis: peu importe ce que c'est, il y a bien une case rouge qui est coloriée.

[>Louis] : Oui.

[>Maxime] : Oui mais si la case rouge c'est le A ça ne marchera pas.

Dans cet extrait Maxime dit à Louis qu'il ne comprend pas son intervention, lui demandant implicitement une explication. Louis lui répond en précisant sa manière d'interpréter. Si ce que raconte Louis est contestable on peut néanmoins remarquer qu'il essaie d'être le plus précis possible afin de partager ce qu'il croit comprendre. Maxime, qui pense avoir compris Louis et imagine manifestement que Louis a seulement manqué de précision, propose un complément dont l'absence pourrait devenir source de malentendu à ses yeux. Louis affirme alors qu'il n'y a rien à préciser. La fin de cet échange met en évidence finalement la raison profonde du désaccord : il faut (ou pas) s'occuper aussi du symbole rouge. On peut voir dans cette discussion une véritable intention de part et d'autre de se comprendre mutuellement malgré la difficulté d'identifier et de concrétiser l'endroit exact du désaccord : « si la case rouge c'est le A ça ne marchera pas ».

Cette recherche collective des vrais points d'accords et de désaccord va permettre de faire apparaître un doute. L'expression de ce doute, par exemple dans l'épisode où Loïc explique pourquoi il est passé de Faux à Autre, qui est tout à fait fondée et explicitée à partir de l'impossibilité de choisir entre une interprétation et l'autre, constitue beaucoup plus qu'un simple aveu d'ignorance. Elle est la manifestation d'une prise de conscience de cette ignorance, c'est-à-dire de la possibilité d'une autre interprétation que celle qu'on croyait initialement unique, autre interprétation qu'aucun élément rationnel ne permet de rejeter en l'absence de définition.

Ainsi Orlane qui avait voté Faux a compris que deux interprétations étaient possibles et explique à Caroline qui pense que seul Faux est envisageable :

> [>Caroline] : Oui mais de toute façon ça ne marche pas. (Grand rire collectif dans la classe) .
>
> [>Le professeur] : Miss Orlane.
>
> [>Orlane] : Ben si ...en fait on prend à partir des cases noires donc on regarde d'abord les cases noires et on cherche un identique en rouge. Et vu qu'on a pas de A noir, on s'en fiche qu'il n'y ait pas de A rouge. C'est comme ça que ça va être vrai.
>
> [>Le professeur] : Oui, toi tu es passée carrément de Faux à vrai ? (En fait elle était déjà passée de Faux à Autre)
>
> [>Orlane] : Ben non je ne sais pas, vu qu'il y a deux interprétations justement…

Les échanges étudiés manifestent une grande qualité du point de vue de l'expression de la volonté des élèves de se comprendre rationnellement, c'est-à-dire de chercher les raisons qui motivent les approches différentes. L'absence de définition joue un rôle important dans la qualité de ces échanges puisqu'elle laisse le champ libre aux conceptions personnelles et antagonistes qui vont conduire à se demander si on parle vraiment tous du même objet. C'est ce questionnement qui provoque l'expression de définitions personnelles et qui aboutit à l'identification de définitions distinctes. Il devient alors évident, même si les élèves ne la demandent pas explicitement, qu'une convention collective est de nature à résoudre l'impasse identifiée.

II.4 Résultats de la Troisième partie

Nous analyserons le script de cette partie pour savoir si le travail réalisé sur la double quantification est réinvesti en contexte difficile, en particulier les énoncés EA et AE sont-ils différenciés et l'adaptation de la logique dialogique est-elle mobilisée pour lever les conflits d'interprétation. Rappelons qu'il s'agit ici d'étudier les quatre conjectures suivantes :

C1 : « Pour tout x réel, il existe un réel y tel que $x = y$ »

C2 : « Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y^2 < x$ »

C3 :« Il existe un réel u tel que pour tout réel m on a $m + u = 2$ »

C4 : « Il existe un réel x tel que pour tout réel y on a $y^2 - 1 \geq x$ »

a) Déroulement et étude de la composante « validation »

Dans cette partie nous étudions particulièrement la composante validation car si pour l'essentiel les interprétations, maintenant outillées de conventions, ne provoquent plus de conflits, ce sont les validations qui génèrent des discussions.

Pour C1 (« Pour tout x réel, il existe un réel y tel que $x = y$ ») le vote donne vingt-six dans Vrai, aucun dans Faux et deux dans Autre. Les deux Autres correspondent à une interprétation inversée : ils pensaient qu'il fallait qu'un seul y pour tous les x. Mais une explication rapide d'un élève les convainc de leur erreur : on peut prendre plusieurs y différents. Ici la logique dialogique n'est pas utilisée pour régler ce différend.

Pour C2 (« Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y^2 < x$ ») le vote donne sept Vrais, vingt Faux et un Autre. Dès que le contre-exemple du x qui vaut -1 est proposé, ceux qui étaient dans Vrai (7) passent dans Faux. Nous ne pouvons pas savoir, à partir de ce script les raisons de ce vote initial en faveur du Faux. D'ailleurs ceci restera un mystère puisque l'interprétation inversée n'explique pas ce vote non plus.

Pour C3 (« Il existe un réel u tel que pour tout réel m on a $m + u = 2$ ») le vote donne un Vrai, vingt-cinq Faux et deux Autres.

Rappelons que la même conjecture que C3, C18 dans Q5, avait donné 31 % de réussite nette et 55 % de réussite brute. Cette fois-ci la réussite brute de C3 est bien meilleure, mais regardons les justifications qui sont nombreuses.

D'abord celle de Marine :

> [>Marine] : Pour moi ça dépend si on peut considérer que u est égal à m. Si on peut considérer que u est égal à m, alors c'est vrai.

Marine pense que dès que ça doit être vrai quel que soit la valeur d'une des deux variables cela oblige que les deux variables puissent avoir la même valeur, possibilité qui n'est pas assurée pour Marine : deux variables littérales distinctes peuvent-elles dénoter la même valeur ?

Ensuite Juliette explique pourquoi elle pense que C3 est fausse :

> [>Juliette] : Il existe un réel u, par exemple on choisit quatre, pour que tout réel m, si on prend deux ou quatre c'est le même, enfin il faut que ça vérifie pour tous les réels. Donc par exemple si on prend un autre réel, par exemple un. Donc quatre plus un ça va faire cinq.

Juliette interprète correctement la conjecture mais par défaut d'autre type d'argument, elle ne peut que justifier sa position par des exemples ponctuels.

Puis, Louis explique pourquoi il pense que C3 est fausse :

> [>Louis] : Je vais essayer d'expliquer pourquoi je suis dans Faux. Pour que cette phrase soit vrai, il faut trouver un réel u, donc on en prend un, pour lequel pour tous les autres réels en fait m+u marcherait pour tous les réels, c'est-à-dire on en prend un, et après m+u=2 ça marche à chaque

fois. Et on ne change pas ce u mais m on le change. parce qu'en fait à chaque fois il y en a un qu'on prend et un qu'on teste en fait. Et là celui qu'on prend c'est u et celui qu'on teste c'est m et on ne peut pas en trouver qui fonctionne pour tous les même.

On voit bien que Louis, comme Juliette, ne dispose pas non plus de la variable comme moyen de démonstration. Il suffirait qu'il dise que ce u choisi fixe alors le m, en donnant m=2-u. Par contre, il explicite ce qui bouge (le m) et ce qui est fixe (le u), ainsi il parvient à préciser la raison de la fausseté de C3. Il y a, par rapport à l'argument de Juliette, une meilleure prise en compte des quantificateurs.

Puis, Sébastien va essayer de proposer un contre-exemple :

[>Sébastien] : Ouais, je suis dans faux et je peux donner un contre-exemple en fait.

[>Le professeur] : Vas-y!

[>Sébastien] : Si on prend m=1 et u=1 ça va faire deux.

[>Le professeur] : Attends j'écris : contre-exemple. m=1 u=1 m+u=2 ça fait deux.

[>Sébastien] : On peut avoir deux seulement avec u égal un.

[>Hadrien] : Non u=2 et u= - 8 et u = 25

[>Sébastien] : Si m égal à un, pour faire deux, il faut forcément que u soit égal à un. Donc on garde u on change m. On prend m =2 par exemple.

[>Le professeur] : m=2.

[>Sébastien] : et u=1 et ce sera égal à trois. Donc avec ça on voit que pour m=1, il n'y a que u=1 qui marche mais u=1 ne marchera pas pour un autre m. Donc ça ne marche pas.

Sébastien se passe de la variable pour prouver que C3 est fausse, mais pour cela il est obligé de mener un raisonnement qui peut paraître sophistiqué : il dit que comme m + u = 2 doit être vrai pour tout m, cela doit être vrai pour m = 1. Et si m = 1 alors forcément u = 1. Mais ça doit être vrai aussi pour m=2, malheureusement 2 + 1 =3, donc le seul u qui marche pour pour m = 1 ne marche pas pour m = 2. On ne peut donc pas trouver de u pour tous les m. Comme ce raisonnement semble complexe dans la mesure où il instancie les variable dans l'ordre contraire de leur apparition. Mais surtout il ressemble à l'utilisation d'un exemple ponctuel de fausseté, il sera attaqué, ce qui finira par faire douter Sébastien.

Maxime qui doute donne deux exemples ponctuels l'un de vérité et l'autre de fausseté et explique qu'il ne sait plus trop :

[>Maxime] : Non je passe de Faux à Autre.

[>Le professeur] : De Faux à Autre. Alors tu nous expliques pourquoi.

[>Maxime] : Parce qu'en fait j'ai des arguments vrais et j'ai des arguments Faux. Et je ne sais pas trop...

[>Le professeur] : Vas y donne les arguments vrais puisque c'est les arguments qui n'existent pas trop dans la salle, les arguments Faux ils vont être d'accord avec toi.

[>Maxime] : Les arguments vrais, il y a, ben comme il a mis m=1 et u=1, ça pourrait être vrai. Mais si on prend u=1 et m=500000, ça ne marchera pas.

[>Le professeur] : D'accord. Marine veut répondre.

[>Marine] : On a vu en maths que si c'est vrai deux fois mais c'est faux une fois alors c'est faux.

Marine lui propose une manière de sortir de son dilemme : en maths si c'est faux une fois alors c'est faux. Ainsi, Maxime et Marine exposent à eux deux les difficultés d'interprétation concernant les exemples ponctuels : cela prouve-t-il le vrai ? Le faux ? Louis va tenter de répondre mais ses arguments ne sont pas convaincants.

> [>Louis] : Marine, ça ça marche c'est vrai que pour les conjectures, c'est-à-dire que pour les questions ...ça ce n'est pas une conjecture. En fait ce qu'il a fait Sébastien c'est un contre-exemple.
>
> [>Sébastien] : C'est marqué "quelques conjectures".
>
> [>Louis] : Ah ben (Rires dans la classe).

On voit que Louis a classé le raisonnement de Sébastien dans la catégorie exemple ponctuel et le rejette donc, ce qui finit par faire douter Sébastien qui pense qu'il s'est trompé de sens. En effet, son raisonnement part de l'instanciation de m qui est la deuxième lettre dans l'énoncé.

> [>Le professeur] : Oui mais elles n'ont pas toutes la même forme.
>
> [>Louis] : Oui voilà. Elles n'ont pas toutes la même forme et dans ce cas-là, ce qu'il a fait Sébastien ça ne prouve rien du tout. Ça prouve juste que ça ne fonctionne pas pour u=1 mais peut-être qu'il n'a pas trouvé le bon contre-exemple.
>
> [>Sébastien] : Oui c'est dans l'autre sens qu'il faut le dire.
>
> [>Louis] : Il n'a peut-être pas trouvé le bon exemple, le bon réel u.
>
> [>Sébastien] : Non mais je l'ai dit dans le mauvais sens en fait.

On peut remarquer que la logique dialogique n'est pas utilisée ici. On peut aussi voir une amélioration sensible par rapport à l'état initial de la classe dans le début de la deuxième partie. Ce qui est discuté dans C3 à ce sujet est le cœur du problème d'interprétation : peut-on utiliser un exemple ponctuel pour prouver (le vrai ou le faux). Est-ce qu'un énoncé doublement quantifié est une conjecture ? Pourquoi cela n'est-il pas la même chose du point de vue de l'utilisation du contre-exemple ?

On peut remarquer que ces opportunités essentielles sur la double quantification aurait pu être l'occasion d'obliger la classe à statuer collectivement sur ces affirmations successives à propos de l'usage de l'exemple ponctuel, ou pour installer in fine la notion de variable qui fait défaut manifestement pour traduire l'interprétation correcte en démonstration valide, ne sont pas exploitées. Mais ces alternatives n'avaient pas été prévues dans la situation initialement. Il serait donc souhaitable d'intégrer cette dimension des variables pour démontrer ces assertions dans les scénarios. Il reste néanmoins que l'on peut observer, comme dans la troisième partie, des échanges de qualité c'est-à-dire mus par la volonté de se faire comprendre mutuellement, de résoudre les désaccords et de comprendre les raisons profondes. Ceci est flagrant lorsque pour la discussion sur C3, un débat de quasiment dix minutes a lieu et que celui-ci ne porte pas du tout sur la validité de C3 (presque tout le monde la pense fausse) mais sur la manière de la démontrer. Cet épisode montre une évolution certaine du point de vue de la rationalité. Il montre en particulier que les élèves n'ont plus besoin d'incitation externe pour évoluer dans un questionnement théorique, et sentent la nécessité non plus seulement de s'accorder sur l'interprétation mais aussi sur les raisons qui la fonde. Nous rappelons que le même type d'épisode est survenu déjà au début de la deuxième partie en faisant émerger précocement le besoin de convention par une exigence épistémologique forte.

Pour C4 (« Il existe un réel x tel que pour tout réel y on a $y^2 - 1 \geq x$ ») le vote donne zéro Vrai, vingt-quatre Faux et quatre Autres.

Hadrien donne immédiatement un bon argument :

> [>Hadrien] : Si on prend x = - 2 et bien le plus petit carré c'est 0 et moins un ça fera moins un et x sera plus petit.

Cette conjecture est traitée très rapidement (moins de deux minutes entre le moment où elle est donnée et le moment où elle est résolue par Hadrien). Enfin, nous constatons que les conjectures C2 et C4 ne sont pas de nature à créer les difficultés habituellement rencontrées, comme nous l'avions analysé a priori, et gagneraient à être changée par d'autres conjectures plus problématiques.

b) La quantification en mathématiques : sur des indicateurs d'apprentissage

Globalement, les débats qui ont lieu dans la troisième partie semblent montrer une meilleure interprétation des énoncés doublement quantifiés mais butent sur la question de la démonstration, et en particulier de l'emploi de variables pour effectuer des démonstrations. Pour ce qui de la rationalité, on voit qu'il demeure des interprétations naïves (contre-exemple ponctuel) et d'autres moins naïves mais pas outillées par les variables pour constituer des démonstrations convaincantes. Il y a une amélioration notable des interprétations, celles-ci s'effectuant beaucoup plus conformément aux conventions, ce qui est le signe d'un travail de la rationalité théorique du point de vue de la définition. Mais la technicité de la démonstration pour ce qui est des domaines de quantification infinis, passer des conventions de la logique dialogique où chaque valeur est étudiée, à la généralisation par l'intermédiaire de la mobilisation de variables, empêche la transition de rationalité du point de vue de la validation.

Il faut dire ici que le but de cette situation était de faire prendre conscience du besoin d'une convention et d'améliorer l'interprétation des énoncés doublement quantifiés. Nous pouvons dire que malgré certaines difficultés qui demeurent, des progrès ont été réalisés. Mais surtout la prise de conscience du rôle de la convention d'interprétation, on n'interprète pas comme on le sent, mais en suivant une règle, est fondamentale pour la suite de la situation en particulier la situation des limites. En effet lors des prochains conflits d'interprétations qui surviendront, le travail réalisé ici devrait permettre aux élèves d'exiger de se soumettre à la référence de la convention adoptée. Ils ne chercheront plus dès lors à essayer de se convaincre sur le seul plan sémantique mais réclameront l'usage de la règle.

III Conclusions

La situation didactique Q² a pour objectif de faire émerger chez les élèves le besoin de conventions d'interprétation des énoncés contenant une double quantification. Ces élèves devraient pouvoir ensuite mobiliser, de manière efficiente, ces conventions dans une problématique concernant la définition de la limite d'une fonction. Le principe fondamental de cette situation est de matérialiser les conséquences concrètes des différentes interprétations possibles de tels énoncés dans un jeu Q² où le fait de gagner ou de perdre dépend de cette interprétation. Ce principe est classique dans la TSD, par exemple la fameuse course à vingt. Mis en œuvre dans la situation Q², on peut observer qu'il agit vraiment comme un catalyseur pour questionner les diverses interprétations adoptées : en effet après avoir joué au jeu, il est naturel de se demander si la

grille jouée va nous faire gagner ou pas. Ainsi on ne discute pas d'abord d'interprétation mais de gagner ou pas à un jeu. C'est en voulant élucider les désaccords que la discussion sur les interprétations se déclenche.

Trois parties ayant des objectifs spécifiques constituent la situation. La première partie de la situation consiste à faire jouer aux élèves huit jeux de Q^2 les prépare à la suite de la situation, comme prévu. Tous les indicateurs (taux de validité de décisions du gagnant, taux de grilles gagnante gagnées, niveau de précocité du coup décisif…) montrent, en effet, une appropriation du jeu Q^2 et même au-delà d'un début de de pensée heuristique : certaines stratégies différentiées (en fonction du type de règle AE ou EA) peuvent être identifiées dans les partie jouées. La deuxième partie de la situation consiste à identifier la notion de grille gagnante que celle-ci puisse être utilisée pour générer des conflits d'interprétation des énoncés doublement quantifiés et faire prendre conscience de l'absence de convention d'interprétation. Cet enjeu apparait très vite dans la situation, dans la mesure où les élèves pourtant d'accord sur la validité de la grille gagnante en discutent la validation : les arguments proposés par certains sont mis en question par d'autres. Cela conduit assez directement les élèves à identifier des interprétations distinctes. Des conventions d'interprétation sont alors proposées par le professeur sous la forme des règles de la logique dialogique, conformément au scénario prévu. La troisième partie sert alors à mettre en œuvre ces conventions dans un contexte, cette fois-ci, purement mathématique. L'interprétation de ces énoncés doublement quantifiés, identifiés comme difficiles pour les élèves par le questionnaire Q5, sont quasiment systématiquement valide. Demeurent alors des discussions au sujet de la validation, en particulier pour les énoncés où l'usage de variables pourraient s'avérer utile. Cette troisième partie valide l'efficience de l'interprétation de ces énoncés par les élèves. Elle met aussi en évidence le fait que la validation de ces énoncés est tributaire du type de manipulation de la relation existante entre les deux variables quantifiées.

A côté des objectifs spécifiques au savoir en jeu, à la suite de celle sur les nombres, cette situation poursuit l'objectif global de travailler sur les trois composantes de la rationalité : logique, définition et validation.

Plusieurs résultats sont apparus dans la situation du point de vue de la logique. Le premier résultat concerne la fragilité de l'interprétation des énoncés doublement quantifiés dans le domaine de réussite identifié avec le questionnaire Q5 : au moindre doute exprimé par les uns sur cette interprétation, les certitudes disparaissent chez les autres. Ceci est en grande partie dû au fait que le manque de convention conduit à fragiliser une interprétation fondée sur la conviction. Le deuxième résultat concerne l'identification, dans les échanges entre élèves, de trois nouveaux types d'interprétation. En effet, ces interprétations n'ont pas été identifiés dans les modèles que nous avions utilisés pour le questionnaire Q5. Le dernier résultat concerne la conséquence de la situation Q^2 : elle améliore considérablement l'interprétation des énoncés doublement quantifiés dans des contextes purement mathématiques et étiquetés difficiles par l'étude de Q5.

L'enjeu de définition se manifeste dans la situation Q^2 : la définition de grille gagnante et la définition des conventions d'interprétation. Dans les deux cas l'absence de définition devait conduire à des conflits qui devait déboucher sur l'émergence d'un besoin de définition. Nous

pouvons dire que dans les deux cas, les conflits se produisent effectivement, mais la référence explicite à la définition n'apparait pas. Néanmoins, on peut constater que lorsque le professeur propose ces définitions, elles sont adoptées immédiatement, et en cela la situation a bien mené à l'émergence d'un besoin auquel peut répondre le professeur. Nous remarquons que l'absence de ces définitions provoque des discussions très animées et très riches du point de vue des éléments de conceptions ainsi mis à jour. Ces échanges sont tels qu'ils permettent non seulement l'émergence du besoin de ces définitions, mais dessinent aussi remarquablement les contours des objets qui seront définis par le professeur. Cela pourrait expliquer l'aisance de la manipulation des conventions d'interprétation une fois que celles-ci sont données par le professeur et appliquées dans des contextes réputés difficiles. Les discussions en ont créé le besoin mais aussi une partie du sens.

Pour ce qui est de la validation, on peut dire que celle-ci joue un rôle fondamental dans la situation. Tout d'abord les conventions d'interprétations sont des règles de validation de ces énoncés doublement quantifiés. Faire émerger le besoin de ces règles c'est d'abord immerger les élèves dans un questionnement où la validation est un enjeu naturel. Dans l'expérimentation, c'est justement immédiatement au sujet de la validation que se cristallisent les conflits qui vont mener au besoin de conventions. On peut expliquer ce phénomène par une exigence des élèves de plus en plus évidente concernant les assertions : leur validité s'établit par une validation collectivement acceptée, autrement dit une preuve. Cette exigence se traduit par de très longs échanges (jusqu'à dix minutes) sur les moyens de valider des énoncés pour lesquels la validité n'est plus en question. Cependant, la situation n'a pas travaillé sur la manipulation de la relation entre les variables quantifiées dans le cadre de la démonstration car ce n'était pas prévu initialement. Cet élément contingent pourrait être pris en compte dans une situation visant davantage la démonstration. Comme nous l'avons déjà dit, les débats avaient pourtant établi le milieu parfait pour un tel travail, travail qui aurait donné du sens à notre adaptation de la logique dialogique. Cette dernière n'a finalement que peu été utilisée. Cependant d'autres occasions, précisément lors de la situation didactique de la limite, nous permettront ultérieurement à la fois d'évaluer les effets de cette situation à plus long terme mais aussi, éventuellement, de réutiliser la logique dialogique comme moyen pour trancher les conflits d'interprétation. Le chapitre n'est, en effet, de ce point de vue, pas clos.

Dans cette situation, l'exigence de non contradiction a été constamment à l'œuvre et a permis de mobiliser toutes les composantes de la rationalité jusqu'au niveau théorique. La situation Q^2 a permis non seulement de mettre en place un référent pour ce qui est de l'interprétation des énoncés doublement quantifiés mais surtout la nécessité de s'y référer en cas de conflit d'interprétation. La situation de la limite, qui repose en partie sur la distinction des énoncés EA et AE, donnera l'occasion de vérifier les résultats de cette situation Q^2. Pour ce qui est de la définition, nous constatons qu'on se réfère plus facilement à une définition dont la nécessité a été un enjeu de la situation mais nous ne pouvons pas compter, au terme de la situation Q^2, sur la possibilité de transition de rationalité-sur un enjeu de définition. En effet, en termes de rationalité, dans les deux cas (grille gagnante et convention d'interprétation), les élèves mobilisent des définitions en actes, donc du point de vue de la définition, ils mobilisent une rationalité pragmatique. Puis les conflits que ces définitions engendrent les font douter mais ils ne vont pas jusqu'à identifier

la raison de ces conflits (l'absence de définition). Ce doute qu'ils expriment n'est seulement que le signe d'un début de transition vers la rationalité théorique. Enfin, les exigences fortes des élèves que nous avons observées lorsqu'il fallait justifier des résultats montrent que la nécessité de validation est mobilisable pour les besoins de la situation de la limite.

Chapitre 8 - Situations de la limite

Nous avons présenté les situations précédentes de l'ingénierie (situation des nombres et situation de la double quantification) qui avaient pour objectif de préparer les connaissances pour cette situation de la limite. Nous allons maintenant présenter la situation de la limite et voir comment elle s'articule par rapport aux précédentes. Nous vérifierons dans l'expérimentation que les connaissances issues des situations précédentes sont mobilisées ou non. Notre modèle des apprentissages devrait être ici particulièrement utile pour analyser a priori et a posteriori la situation de la limite, dans la mesure où les connaissances engagées sont particulièrement abstraites : formalisme de limite, notion d'infini…

I Présentation

La situation présentée ici est susceptible, sans transformation majeure, d'être utilisée en terminale S ou bien en L1 de mathématiques. L'analyse a priori proposée ci-dessous correspond à celle de TS.

I.1 Métaphore fondamentale et enjeux épistémologiques

La notion de limite est riche de significations en tant que fondement de l'analyse standard. Parmi ces significations, celle associée à l'approximation est fondamentale en mathématiques comme dans les autres disciplines scientifiques avec les notions de dérivée et d'intégrale par exemple. Ce raisonnement à epsilon près est constitutif de la notion de limite. Le formalisme de la limite est lui aussi une signification fondamentale de la notion de limite. Il permet de passer des approximations aux égalités, et de fonder l'édifice nécessaire pour aller dans le sens d'une rationalité théorique en analyse. Ce formalisme traduit en inégalités quantifiées de multiples notions : infini, voisinage… et permet de construire une théorie de l'analyse qui repose sur la recherche des égalités à partir d'une collection d'inégalités. C'est effectivement une spécificité de l'analyse, qui se démarque ainsi des raisonnements de l'algèbre, de fonder ses résultats dans la manipulation systématique des inégalités :

> Par conséquent, avoir un niveau de signification suffisant des objets de base de l'analyse réelle suppose que l'on a acquis le sens de l'adage "approcher, majorer, minorer" (Dieudonné, 1980), et on en a établi le lien avec le formalisme que requiert l'existence des nombres réels. (Ghedamsi 2016 p. 64)

Parmi les significations fondamentales nombreuses de la notion de limite, nous retenons en tant que métaphore fondamentale pour la notion, une structuration de significations que nous avons déjà commencé à étudier dans les autres situations didactiques et qu'il faut maintenant associer en un tout correspondant à l'objet finalement visé :

- l'idée de voisinage de l'infini ;
- l'idée de voisinage d'un nombre ;
- le principe fondamental de l'analyse ;

- la quantification de la définition (la dépendance entre epsilon et A et la dépendance entre le A et la fonction) ;

- le rôle de la définition pour discriminer les limites et pour démontrer.

Nous pouvons ici résumer notre projet comme celui de faire apparaître le rôle et la fonction de ces significations à travers le formalisme qui les traduit, en faisant apparaitre ce formalisme comme nécessaire pour exprimer des idées fortes mais intraduisibles par les méthodes habituelles dès lors que l'on cherche à se placer dans une perspective de construction théorique. Il est clair que le besoin d'un modèle de rationalités et d'un modèle des apprentissages qui s'en nourrit devient évidence pour la réalisation d'un tel projet. Voici la situation appelée à concrétiser ces exigences.

I.2 Cinq phases pour organiser la situation

a) Phase I : Dessin et limites naïves

Durant cette phase, il s'agit d'abord de faire passer les élèves des connaissances pragmatiques sur la limite des suites (issues de première et du début de cours de terminale sur les suites) aux connaissances pragmatiques sur les limites des fonctions. Il s'agit aussi de légitimer le recours au dessin en mathématiques et le faire apparaître comme un argument recevable pour s'exprimer en mathématiques, et ceci afin de donner les moyens de matérialiser des idées abstraites via la mobilisation d'ostensifs immédiatement accessibles et partageables et donc réfutables (Bloch, 2000). Il s'agit enfin de faire apparaître les formes prototypiques de la limite d'une fonction en l'infini : la « limite monotone » (fonction monotone ayant une limite finie) et la fonction cosinus comme archétype du : « ça n'a pas de limite ». Ces formes prototypiques ont pour but de représenter le premier niveau de connaissance lié à la notion de limite et de servir de référence provisoire pour enrichir ce premier niveau en faisant apparaître plus tard dans la situation ses insuffisances.

b) Phase II : « du côté de l'infini »

Le sens de cette phase est de commencer à entrer dans la nécessité de formaliser pour exprimer des idées fortes, ici le fait que lorsque deux fonctions ont à l'infini des limites rangées dans un certain ordre alors ces fonctions elle-même sont nécessairement rangées dans ce même ordre à partir d'un moment. Une telle idée peut apparaitre comme une évidence mais dès lors qu'on l'a soumet à la dureté des exigences mathématiques, alors le besoin de formalisme se fait sentir, en particulier le formalisme de voisinage de l'infini. Pratiquement, on demande aux élèves de réparer la conjecture qu'ils auront préalablement déclarée fausse : C1 : « Si la limite de f en + l'infini est strictement inférieure à celle de g en + l'infini alors $f(x) < g(x)$ pour tout x de R ». Réparer signifiant ici transformer la conclusion afin que la conjecture devienne vraie. Ils vont ainsi tenter d'exprimer la notion de voisinage de l'infini avec le langage naturel et ainsi proposer une ou des conjectures C2. Et cela devrait les conduire à prendre conscience de la difficulté de trouver un formalisme adéquat et collectivement reconnu pour exprimer une idée initialement perçue comme simple. Le formalisme en « il existe A tel que pour tout x>A... » sera alors proposé par le professeur s'il n'est pas proposé par les élèves eux-même.

c) Phase III : « Mais alors c'est quoi la limite ? »

L'objectif de cette phase est de provoquer un doute concernant la notion de limite, doute qui devrait amener à prendre conscience de l'insuffisance de la conception naïve de la notion de limite et rendre nécessaire qu'on la définisse. Le formalisme sera ultérieurement donné comme répondant à ce besoin apparu dans cette phase.

Pratiquement cette phase exploite la conjecture réparée avec le formalisme du voisinage de l'infini, conjecture issue de la phase précédente C3 : « Si la limite de f en l'infini est strictement inférieure à celle de g en l'infini alors il existe un nombre A tel que pour tout $x > A$ on a $f(x) < g(x)$ ». Compte tenu de leurs conceptions naïves, cette conjecture devrait être perçue comme correcte par les élèves, à juste titre d'ailleurs. Un coup de théâtre est alors organisé en proposant une fonction qui ressemble beaucoup à un contre-exemple de C3 pour qui n'a pas les moyens de distinguer, dans les cas complexes, ce qui est limite et ce qui ne l'est pas. A la suite de l'étude de cette fonction, « est-elle un contre-exemple ou pas de C3 ? », question qui devrait se transformer en « cette fonction a-t-elle une limite en l'infini ou pas ?», d'autres fonctions sont proposées avec le même questionnement. Ces études successives devraient faire prendre conscience progressivement que l'ancienne conception de limite (formée essentiellement de l'idée de « tend vers » et de limites prototypiques) ne suffit plus pour obtenir des certitudes sur des fonctions inhabituelles. La nécessité de définir la notion de limite devrait alors apparaître.

d) Phase IV : Vers un formalisme de la limite

Si le besoin de définir la limite est nécessaire pour pouvoir proposer un formalisme qui n'apparaisse pas comme issu d'une nécessité seulement didactique (phase III), le formalisme de la limite en epsilon/alpha ne peut pas constituer abruptement une réponse satisfaisante et éclairante pour répondre à ce besoin tant il est abscons au premier abord. Il s'agit dans cette phase de donner un sens à ce formalisme de manière à ce qu'il apparaisse bien comme une réponse au besoin créé en phase II car à la fois il est conforme à l'idée initiale de limite mais surtout il permet de réaliser ce qu'on ne savait pas faire avant. Pratiquement on exploite la parenté entre le principe fondamental de l'analyse appliqué aux fonctions et la définition de limite. Dans un premier temps il s'agit d'étudier une conjecture liée à ce principe fondamental de l'analyse afin de donner un sens aux variables epsilon et A de la définition de limite, comme représentant des grandeurs dessinables. Dans un deuxième temps, par un retournement de la quantification présente dans la proposition correspondante au principe fondamental de l'analyse, il s'agit d'essayer d'appréhender le sens de la nouvelle proposition, à travers un questionnement sur les fonctions qui le respectent. Il s'avère enfin que cette proposition est justement la définition standard de limite en epsilon/alpha. Ces manipulations et recherche de sens sur ces énoncés quantifiés très proches de la limite devraient éclairer le rôle et la fonction des différents éléments constituant la définition de la limite (notamment quantificateur et ordre, variables).

e) Phase V : Utilisation de la définition pour des démonstrations élémentaires

Cette dernière partie est destinée à éprouver la limite dans un contexte démonstratif et justement mettre en évidence la force démonstrative de la nouvelle définition : on peut fabriquer des certitudes grâce à ce formalisme. Ces certitudes auparavant inaccessibles deviennent constructibles dans des cas élémentaires mais qui traduisent déjà la prise en main du formalisme comme outil. Pratiquement les conjectures démontrées dans ce cadre correspondent à des cas particuliers de la conjecture initiale C3, en fixant une des deux fonctions et ou les valeurs numériques des

limites afin de pas tomber sur le problème de découpage des epsilons mais seulement celui du découpage des nombres. Dans l'une de ces conjectures la démonstration fait apparaitre que pour un epsilon donné les deux fonctions ne respectent pas la condition forcément à partir du même nombre. Il faudra donc prendre en compte cette double dépendance pour préciser le nombre à partir duquel la condition démontrée sera vraie. Cette subtilité pourra constituer un critère de compréhension avancé du formalisme.

II Analyse a priori de la situation

Dans l'analyse a priori ci-dessous, pour chaque phase sera détaillé :

- Les variables didactiques et les raisons des choix effectués.
- Analyse en termes de structuration des niveaux de milieux et de rationalités.
- L'institutionnalisation du professeur. On distingue là deux types d'institutionnalisations, celles qui sont destinées à laisser une trace et constituent le cours de mathématiques et vont servir de référence pour la suite de la situation, et les institutionnalisations intermédiaires qui permettent de faire le point à la fin de l'étude d'une conjecture afin localement de stabiliser certaines connaissances. L'alternance de ces deux types d'institutionnalisation est réglée par essentiellement deux critères : garder une dynamique dans l'étude d'une problématique locale, alterner les moments de forts questionnements (exigeants sur le plan de la concentration) et les moments d'écoute de la parole magistrale (un peu plus reposant).

II.1 Phase I : Premières connaissances – Rendre licite le dessin –

Il s'agit du tout début de la situation de limite, de la mise en place de la possibilité d'avoir recours au dessin comme ostensif licite, et de la mise en place de quelques limites prototypiques sous forme de dessin pour servir de connaissances minimales (présentes dans le milieu compte tenu de l'approche proposée par les programme en première S pour la notion de suite) pour pouvoir affronter la suite de la situation. Il s'agit également de vérifier l'état des connaissances sur la notion de limite pour les fonctions, en tout cas son adaptation à partir de la notion de limite et de convergence d'une suite. Cette série de conjectures servira donc à la fois à identifier les difficultés de cette adaptation, mais aussi à réguler ces difficultés par l'intermédiaire de débat qui devraient les faire émerger au travers des ostensifs graphiques utilisés lors de ces débats.

a) Variables didactiques

Grâce à l'étude de conjectures simples dont l'enjeu consiste d'abord à se donner les règles sur les arguments licites, on vise d'abord à libérer la possibilité des élèves de proposer des contre-exemples sous forme de dessin pour ce qui est des limites. Ceci a pour but d'ouvrir le vivier des fonctions possibles pour toute la suite de la situation, vivier qui est passablement restreint quand on se borne à définir les fonctions par les seules expressions algébriques. Le dessin permet, en effet, beaucoup plus facilement de produire des fonctions répondant aux contraintes spécifiques qu'on assigne en essayant de fabriquer un contre-exemple, par exemple. Certains des contre-exemples attendus prévus devraient servir de rappels au sujet de quelques formes prototypiques

de graphe de fonction ayant ou pas une limite en l'infini. Il s'agit de pouvoir compter sur ces connaissances adoptées collectivement dès le début de la situation, en particulier sur l'expression « tend vers » associée au dessin illustrant le sens de « tendre vers ».

Les conjectures suivantes seront mises à l'épreuve successivement tout au long du déroulement de cette première phase.

- C0 : « Si *f* est une fonction définie sur R et $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$ alors elle a une limite quand *x* tend vers + infini »

La première conjecture rappelle, si besoin, la possibilité d'une fonction de ne pas avoir de limite en l'infini. Les élèves peuvent proposer à la fois un contre-exemple sous forme de fonction explicite et sous forme de graphe. Il s'agit de rendre public que le dessin de graphe de fonction est un argument licite comme les expressions algébrique littérales au moins pour les contre-exemples.

- C0' : « Si une fonction *f* est strictement croissante sur R alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ »

La seconde conjecture établit le (non) rapport entre monotonie et limite en l'infini et rappelle la limite prototypique en l'infini d'une fonction monotone (surtout du point de vue graphique : l'asymptote). Là encore le choix est possible entre fonction explicite et dessin. Nous attirons l'attention sur le fait que nous ne souhaitons justement pas travailler sur les limites infinies, mais que dans le cadre de C0', il s'agit juste de savoir qu'une fonction bornée ne peut pas avoir une limite infinie, ce qui nous parait raisonnable et tout à fait intuitif, puisque nous travaillons sur cette phase I à ce seul niveau.

- C0'' : « Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors *f* est une fonction croissante sur R »

La dernière conjecture C0'' est presque la réciproque de C0' ; son intérêt est de vérifier l'adoption du dessin.

Les deux premières conjectures (C0 et C0') ont pour but d'enrichir le milieu subjectif en autorisant les fonctions « définies » par des dessins et en validant deux types de dessin de limites prototypiques qui seront utiles dans la phase III. Ces conjectures traitent donc des fonctions et de leurs comportements. Les variables didactiques sont, par conséquent, définies en fonction de la nature du travail sur ces objets :

- VD1 : Type d'objets (fonctions ou suites)

Le critère de choix retenu est de faciliter pour les élèves le dessin pour les conjectures et pour le professeur de permettre l'étude d'objet « insolites » sous forme de dessin, ce sont donc les fonctions qui ont été retenues car leur représentation graphique est plus simple à mettre en œuvre. Ce choix pour le niveau TS est délicat dans la mesure où la limite n'apparaît avec le programme 2011 de 1ère S (Programme de première S applicable à la rentrée 2011 - BO n°9 du 30/09/2010) que pour les suites. Mais grâce à ces premières conjectures, on devrait pouvoir installer le milieu des limites pour les fonctions sans difficulté car pour l'essentiel, la limite des suites et la limite en l'infini des fonctions sont la même chose. Évidement pour les L1 cela pose moins de problème.

- VD2 : Type de comportement (signe, monotonie, comportement asymptotique (limite))

Le choix est de mettre en question monotonie et comportement asymptotique car cela permet à la fois de faire utiliser le dessin pour la fabrication de contre-exemple et de mettre en œuvre les formes prototypiques de limites. L'intérêt de ce choix réside aussi dans le fait que le comportement asymptotique d'une fonction semble naturellement associé à sa monotonie alors qu'en fait ces deux types de comportement sont, à l'étude, très indépendants l'un de l'autre.

Enfin, il s'agit d'obliger aussi le contre-exemple sous forme de cosinus ou bien une fonction voisine dans le cadre des objectifs de cette partie de la situation : installer les formes prototypiques de limite et de non limite.

- VD3 : Type de voisinage (sur R, sur un intervalle)

Ici c'est R qui est choisi dans les deux cas, afin de faire apparaître le débat sur les voisinages ultérieurement. Le but ici est d'éviter les difficultés simultanées. Une possibilité que nous n'avons pas retenue finalement mais qui pourrait s'avérer intéressante pour initier un travail sur le voisinage de l'infini serait de proposer une réparation de la conjecture fausse C0'' sous la forme : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors il existe un réel A tel que f est croissante sur [A ; +∞ [». Cette conjecture est fausse évidemment mais elle oblige à donner un sens au « il existe un réel A », plus exactement à la négation de « il existe un réel A ». Ce travail permettrait de donner un sens à ce formalisme avant qu'il intervienne comme formalisme à mobiliser pour traduire l'idée de voisinage de l'infini comme c'est prévu pour la suite avec C3. Cependant, le défaut principal de ce scénario réside dans la difficulté de donner un sens à une limite infinie en l'infini pour une fonction non strictement monotone sur R, sens qui nécessairement doit se passer de formalisme et reposer sur une approche seulement naïve de la limite à ce stade de la situation.

b) Scénarios possibles, connaissances et niveaux de rationalités

Pour cette première phase, à défaut de définition, les trois conjectures ne sont théoriquement pas résolubles. Il s'agit donc, de ce point de vue, d'une phase un peu particulière où les connaissances disponibles pour les résoudre sont minimalistes. On dira que sous hypothèses de ces connaissances minimales requises issues de la première approche de la limite en première S tenue pour valide, ces conjectures peuvent être résolues. Le professeur, à ce stade, se contentera de valider les propositions correctes sans donner plus d'explication que celles que permet cette première approche : « la limite c'est quand ça tend vers ». Voici pourquoi nous ne nous attarderons pas à analyser cette phase avec notre modèle d'apprentissage car un seul niveau de rationalité est concerné par l'ensemble de cette phase : le niveau de rationalité pragmatique. Par contre, nous décrivons brièvement les réponses possibles et l'institutionnalisation attendue à l'issu du débat.

C0 : « Si *f* est une fonction définie sur R et $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$[71] alors elle a une limite quand *x* tend vers + infini »

Pour la conjecture C0, on peut voir des réponses pour le Vrai appuyée par des graphes (celui de $1/x$ par exemple) ou des fonctions données par une formule (idem). On peut voir également des réponses pour le Faux avec de contre-exemples sous forme de graphe (le graphe de cos(x) par

71 Ici « $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$ » est entendu comme « non ($\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) »

exemple) ou de fonctions données par formule (idem). Enfin on peut voir des réponses Autre exprimant que ça dépend des fonctions utilisées. La conjecture C0 est simple a priori pour ce niveau, il ne devrait pas y avoir de difficulté pour les élèves/étudiants de TS (et de L1) pour s'accorder sur la fausseté de cette conjecture avec ou sans formule. Le professeur valide la réponse cos (x) ou un simple dessin en zig zag en rappelant qu'il s'agit d'un résultat du cours sans autre forme d'explication. Il rappelle aussi les règles du vrai et du faux si besoin.

C0' : « Si une fonction *f* est strictement croissante sur R alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ »

Pour la conjecture C0', on peut voir des réponses pour le Vrai appuyée par des graphes (celui de $2x$ par exemple) ou des fonctions données par une formule ($3x + 5$). On peut voir également des réponses pour le Faux avec des contre-exemples sous forme de graphe (cf en dessous du paragraphe par exemple) ou de fonctions données par formule ($-1 / x$). Enfin, on peut voir des réponses Autre exprimant que cela dépend des fonctions utilisées.

Figure 36 : Contre-exemple pour C0'

La conjecture C0' est simple pour ce niveau, il ne devrait pas y avoir de difficulté pour les élèves/étudiants de TS (et de L1) pour s'accorder sur la fausseté de cette conjecture avec ou sans formule. Le professeur conclut sur la fausseté de la conjecture et surtout donne la légitimité au dessin : on peut utiliser le dessin pour fabriquer facilement des contre-exemples. Il valide le dessin de la limite monotone.

C0'' : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors f est une fonction croissante sur R »

Pour la conjecture C0'', on peut voir des réponses pour le Vrai appuyées par des exemples sous forme de graphes ou des fonctions données par une formule ou encore par l'argument suivant : « Si elle n'est pas croissante alors elle est décroissante et donc ne peut pas tendre vers plus infini. ». On peut voir également des réponses pour le Faux avec de contre-exemples sous forme de graphe de fonctions. Enfin, on peut voir des réponses Autre exprimant que cela dépend des fonctions utilisées. La conjecture C0'' elle aussi est simple pour ce niveau, mais elle force les élèves à dessiner pour trouver un contre-exemple.

Le professeur conclut sur la fausseté et explique que dans certain cas les seuls contre-exemples vraiment accessibles sont sous forme de dessin.

II.2 Phase II : Question du voisinage de l'infini

Remarque importante : afin de fermer la situation pour garder le contrôle sur l'explosion possible des variantes, la totalité de la situation est soumise aux hypothèses restrictives suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq \infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) \neq \infty$. Ces hypothèses sont clairement exprimées à partir de la phase II.

a) *Description*

Cette phase II a pour objectif de conduire à la formalisation de voisinage de l'infini. On commence par donner à l'étude une conjecture C1: « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors f(x)<g(x) pour tout x de R » qui n'est vraie que si on limite la conclusion à un voisinage de l'infini. Elle est donc déclarée rapidement fausse par les élèves avec un contre-exemple graphique par exemple. Puis on demande aux élèves ensuite de réparer la conjecture car il est peut-être possible de sauver l'idée forte que cette conjecture exprime « l'ordre des limites devrait donner l'ordre des fonctions », idée forte qui doit être adaptée à travers une formulation plus résistante aux contre-exemples. C'est-à-dire, dans notre cas, modifier seulement la conclusion pour fabriquer la conjecture C2, comme réparation de C1. Cette réparation suppose qu'on exprime l'idée de voisinage à l'infini, mais aucune traduction naïve proposée par les élèves (du style « du côté de l'infini ») ne devrait résister à l'épreuve du débat collectif. Lorsque l'une de ces propositions naïves est effectuée, elle est mise au débat jusqu'à épuiser les propositions naïves ou bien obtenir une formulation utilisant la formalisation classique avec un quantificateur existentiel. Si cette formulation n'est pas donnée alors c'est le professeur qui le fait. La conjecture C3 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors il existe un nombre A tel que pour tout x > A on a f(x) < g(x) » est alors mise au débat, ce qui devrait provoquer des questionnements sur le sens du « il existe ». Une institutionnalisation sera ensuite réalisée sur l'ensemble de l'étude des trois conjectures, avec en particulier les règles d'usage du « il existe ». Une fois cette institutionnalisation réalisée, la conjecture C3 sera resoumise au débat, avec cette fois-ci les règles d'usage du « il existe ».

b) *Variables didactiques*

Voici les variables didactiques correspondantes à cette phase II :

Variables didactiques pour la conjecture C1 :

- VD1(1) : Nature de la conjecture (directe ou pas) : « ordre des limites implique ordre des fonctions » ou la réciproque.

C'est le choix de la situation retournée (ordre des limites implique ordre des fonctions) qui est réalisé, car cet ordre non naturel (le « mal connu » implique du « bien connu » plutôt que le contraire en partant de ce qu'on connaît bien, l'ordre sur les fonctions) devrait permettre une remise en question de la notion de limite dans la suite de la situation.

- VD2(1) : Nombres de fonctions dans la conjecture (1 ou 2)

On aurait effectivement pu proposer comme conjecture « Si $3 < \lim_{x\to+\infty} f(x)$ alors $3 < f(x)$ pour tout x de R »).

Le choix réalisé ici est d'utiliser deux fonctions afin de permettre, dans une sorte de continuité naturelle, de traiter, en fin de situation, de la dépendance entre le A et la fonction f (ou g), en proposant : C5: « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$ alors il existe A tel que pour tout f(x) < g(x) ». (Cf analyse a priori de C5 dans la phase V.2).

- VD3 (1) : Limite en point ou en l'infini

Il est choisi d'étudier la limite finie de f en +∞ pour améliorer la prise en main de la dialectique A/epsilon en dis-symétrisant leur rôle : A sera un « grand nombre » tandis que epsilon sera un nombre positif « proche de 0 ». En effet, cette dissymétrie n'existe pas dans le cas d'une limite finie en un point. En outre le programme de TS (Programme Terminale S enseignement spécifique et spécialité maths, en vigueur à la rentrée 2012 B.O. spécial du 8 oct 2011) exclut ce type de définition de limite.

- VD4 (1) : Qui formule C1, les élèves ou le professeur ?

On peut imaginer deux scénarios, l'un où l'on demande préalablement ce qu'il est raisonnable de conclure sur f et g quand on connaît l'ordre des limites de f et g en +∞, en espérant que les élèves proposent la conjecture prévue (et raisonnable), et l'autre où on leur propose la conjecture directement complète. La possibilité que les élèves donnent eux même la version attendue a l'avantage de donner immédiatement des responsabilités aux élèves dans la situation didactique, mais l'inconvénient de démarrer sur une conjecture imprévisible qui risque d'être déjà un peu trop raffinée. Une conjecture trop raffinée est une conjecture qui contient déjà des éléments qui la protège de motifs de fausseté assez évidents, or ces motifs lorsqu'ils sont présents donnent l'opportunité d'avoir une marche moins haute pour l'entrée dans le problème. En outre, il est important que les élèves puissent discuter de la conjecture naïve (C1) car elle appelle des commentaires sur des notions fondamentales pour la suite (cf prochaine institutionnalisation).

Pour être certain d'aborder la situation dans de bonnes conditions, le choix est fait que C1 soit fournie complète par le professeur.

- VD5 (1) : Inégalités stricte ou pas

Dans cette C1, il y a deux inégalités qui pourraient être strictes ou pas, donnant lieu à 4 conjectures distinctes. Si l'inégalité de l'hypothèse est large ($\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq \lim_{x\to+\infty} g(x)$) cela donne une conjecture fausse pour une raison supplémentaire (au cas où elle est stricte). La conjecture ainsi fabriquée nous détourne de l'objectif fixé (commencer à entrer dans la problématique de la formalisation de voisinage de l'infini) et ne nous permet pas non plus de questionner la notion de limite puisque de simples limites monotones suffisent à la démontrer fausse.

L'inégalité de la conclusion, qu'elle soit stricte ou pas ne change pas la nature des contre-exemples de la conjecture. Cependant, une inégalité large pourrait induire un questionnement sur le « OU » dans la mesure où l'on peut se demander si le cas de l'égalité est possible ou non, et l'on préfère ne pas induire un tel questionnement, qui ne manque pas d'intérêt mais ne fait pas partie des objectifs de la situation. Enfin, la conjecture avec l'inégalité stricte est plus « forte » que celle de l'inégalité large et une fois la définition de limite donnée, elle ne sera pas plus difficile à démontrer. Pour toutes ces raisons on adopte donc deux inégalités strictes ici.

Variables didactiques pour la conjecture C2

- VD1(2) : Le professeur répare lui-même C1 ou le demande aux élèves

Ici il est choisi de confier cette réparation aux élèves car l'objectif est qu'ils se rendent compte eux même de la limitation de leurs propres formulations pour rendre compte de l'idée de voisinage. Même en utilisant une formulation experte ils ne devraient pas arriver à se mettre d'accord.

- VD2(2) : Nature de la réparation demandée

On peut demander de réparer la conjecture, en précisant qu'il s'agit de modifier telle partie de la conjecture ou sans le préciser.

Si on ne précise pas, alors, par exemple, la réciproque de C1 peut être proposée : « Si f(x)<g(x) pour tout x de R alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ ». Cette conjecture est fausse et elle-même peut être réparée en « Si f(x)<g(x) pour tout x de R alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq \lim_{x\to+\infty} g(x)$ ». Son intérêt serait de mettre en évidence le rôle subtil joué par les inégalités strictes ou pas en analyse, mais ici détournerait de l'objectif fixé : mettre en évidence le besoin de formaliser la notion de voisinage en l'infini.

On choisit alors de préciser qu'il s'agit de modifier la conclusion afin de réparer la conjecture.

Variables didactiques pour la conjecture C3

- VD1 (3) : Les conventions d'utilisation du « il existe » sont données ou pas

Il est choisi de ne pas donner les conventions d'utilisation du « il existe » pour provoquer les conflits justement liés à ces conventions absentes et permettre de justifier qu'on se donne des règles d'utilisation. Notre hypothèse est qu'un formalisme acquiert sa solidité dans une situation qui fait apparaître sa nécessité et dans une situation qui permet d'en questionner l'usage. Au contraire, l'autre option, donner ces règles avant l'étude de C3, empêche l'élève de se poser la question de la signification du « il existe », ce qui diminue la « solidité » du il existe pour la suite de la situation.

- VD2 (3) : Les inégalités strictes ou pas

Une nouvelle inégalité intervient dans C3 le « x > A » ou bien « x ≥ A » (les deux autres inégalités ont déjà été analysées dans les variables didactiques de C1). Ce choix doit être coordonné avec le but cherché : montrer que f(x) < g(x). Cela signifie qu'il faut utiliser x>A car sinon (en choisissant x ≥ A) on n'obtiendra plus directement A en résolvant une équation ou une inéquation puisqu'il faudrait alors que l'inéquation stricte soit vraie pour x = A, ce qui compliquerait inutilement le problème.

c) Formalisme attendu et niveau de rationalité requise

i. La situation du voisinage prise comme paradigmatique de notre modèle d'apprentissage

Nous proposons ici le tableau récapitulatif des connaissances en jeu dans la deuxième phase, c'est-à-dire pour les trois conjecture C1, C2, C3, sachant que pour ces trois-là, l'objet visé par la situation est le formalisme de la notion de voisinage de l'infini :

Milieux	Matériel	Subjectif	Référence	Institutionnel

Rationalité		Pragmatique	Empirique	Théorique
Connaissances ou objets annexes	O1 : Quantificateur existentiel	- Il existe un seul - Il existe un qui ne marche pas - Il existe car il est concrétisable		Logique dialogique
	O2 : Quantificateur universel	Une valeur est vérifiée	Plusieurs valeurs sont vérifiées pour déclarer que c'est vrai pour tous.	Logique dialogique
	O3 : double quantification	- interprétations naïves et ponctuelles	- Cf quantificateur universel - - Confusion AE/EA	Logique dialogique
	O4 : Limite	Des exemples de limites données : 1/x a pour limite 0 en l'infini et cos (x) n'a pas de limite en l'infini	- Tend vers - Se rapproche de - Formes prototypiques	Définition de limite en epsilon/alpha
	O5 : Fonction	- Graphe vu comme une courbe - Formule vu comme un calcul		- Définition de la fonction
	O6 : Inégalité	Les connaissances concernant les inégalités sont supposées disponibles		
Objet visé par la situation : **notion de voisinage de l'infini**		- OP1 : du côté de l'infini - OP2 : à partir de 100 - OP3 En l'infini	- On vérifie que c'est vrai pour plusieurs nombres de plus en plus grands	OT : il existe A tel que pour tout $x > A$

Tableau 41 : Objets et connaissances en fonction du niveau de milieu et de rationalité phase II de la situation de la limite

Nous allons détailler cette phase II de la situation de la limite en pointant les éléments génériques car nous utiliserons systématiquement ce type d'analyse pour le reste de l'ingénierie. Cela signifie que nous utiliserons l'analyse de la phase II au sujet de la notion de voisinage pour avoir un discours plus général sur ce type de situation dans le cadre de notre modèle d'apprentissage. Commençons par remarquer que nous avons deux types d'objets, les objets annexes et l'objet visé. Les deux types d'objets peuvent être explicites dans la situation, c'est-à-dire désignés explicitement par l'énoncé, ou bien implicites, ils vont intervenir naturellement compte tenu du contexte mais ne sont pas désignés explicitement. L'objet visé par la situation peut effectivement être explicite mais dans ce cas ne relève pas initialement de connaissances théoriques (ou alors seulement fragiles). Ce caractère implicite/explicite est important car lorsque l'objet est désigné explicitement, on peut se référer à cet objet directement, il est nommé. Or, ce n'est pas parce qu'un objet est nommé par tous de la même façon qu'il ne va pas dénoter de

sens différents et de conceptions éventuellement contradictoires. Nous pourrons avoir pour cet objet des conflits inter-rationalités : les différentes acceptions de l'objet à des niveaux de rationalités différentes étant contradictoires dans le contexte donné. Pour le cas du voisinage, nous avons l'exemple du quantificateur existentiel. Certains élèves peuvent penser pragmatiquement que « il existe un » doit être pris comme « il existe un seul », tandis que d'autres envisageant « il existe » au niveau de rationalité théorique et ne pas avoir la même appréhension du même objet. En principe, chaque objet de la situation peut être sujet à ce type de conflit inter-rationalités. Donc pour notre cas : les quantificateurs existentiels et universels, la double quantification, la limite, les fonctions et les inégalités, la notion de voisinage. Dans le cas des objets implicites, la situation est un peu différente puisque non désignés par la situation, ils devraient naturellement moins donner lieu à des conflits de rationalité dans la mesure où n'étant pas désignés, ils ne constituent pas des incontournables de la situation. Tout conflit à leur sujet peut donner lieu à des tentatives d'évitement, évitements a priori possibles puisque ces objets peuvent apparaître comme de second plan. Nous pouvons voir que le scénario de la situation est de faire passer un objet implicite, la notion de voisinage de l'infini, de ce second plan, son idée est seulement initialement en germe comme domaine de validité de la conjecture, au premier plan, par des tentatives pour lui donner consistance. Ainsi, du point de vue de la recherche du domaine de validité de la conjecture, domaine qui s'avérera un voisinage de l'infini, C1 donne la première concrétisation de ce domaine avec **R**. Cette proposition initiale C1 est fondamentale car elle est grossièrement fausse mais permet de comprendre la nature des relations entre les différents objets en présence dans cette conjecture. Ensuite, il sera plus simple de tenter de réparer une conjecture dont on a compris pourquoi elle pouvait être fausse. Il y a donc des conflits inter-rationalités sur des objets, objets le plus souvent explicites. C'est là qu'intervient la différence entre objets annexes et objet visé. En principe, les objets annexes de la situation sont des objets pour lesquels les connaissances présentes sont suffisantes pour résoudre les conflits qui apparaissent. Ce peut évidemment ne pas être le cas, ces connaissances faisant défaut, et le professeur sera obligé in fine de faire le point à ce sujet, délaissant provisoirement l'objet visé. D'ailleurs ces objets deviendraient ainsi provisoirement eux même les objets visés. Mais de manière générale on ne peut pas espérer obtenir de développements significatifs quand les objets annexes sont aussi évasifs que l'objet visé lui-même. Ce type de situation doit être évité. Il faut une certaine solidité de ces objets annexes pour pouvoir attaquer le cœur du problème : l'objet visé. Nous pensons qu'essentiellement c'est le cas pour notre situation pour le voisinage de l'infini. Le seul objet ayant une existence précaire dans cette phase II, la limite, ne devrait pas générer de troubles significatifs dans la mesure où les formes prototypiques se substituent à la notion formalisée de limite sans, a priori, de conséquence pour l'avancement du questionnement. Les conflits inter-rationalité ont vocation à être résolus dans le débat lorsque les objets impliqués sont explicites et que les connaissances présentes sont suffisantes. Cette résolution implique des changements de rationalités pour les objets en question. Il en est de même avec les conflit inter-rationalité sur des objets distincts, en fait sur les conséquences contradictoires des rationalités appliquées à ces objets, conflit qui supposent souvent eux aussi des transitions de rationalités pour au moins l'un des objets concernés. Il en est de même encore pour les conflits intra-rationalités qui appellent eux aussi des transitions de rationalités. Ces changements de rationalité eux même provoquent une meilleure appréhension collective du problème, ce qui conduit à des conflits de rationalité plus subtils, et souvent qui concernent davantage l'objet

visé. Ainsi, ces nouveaux conflits de rationalité peuvent appeler des transitions de rationalités pour l'objet visé. Ici, lorsque les conflits de rationalités à propos de la limite et de l'interprétation des quantificateurs est levée, la question de la formalisation du voisinage ne peut plus être esquivée. La conjecture C1 ou bien C2 ou bien C3 peut être déclarée fausse ou vraie collectivement, avec la nuance que pour C3, les moyens de validations manquent (la définition formelle de limite) ce qui peut entrainer une nouvelle transition de rationalité avec l'expression d'une demande de démonstration pour s'assurer de la vérité de cette conjecture.

Après ce cadrage général du fonctionnement de la phase II, nous pouvons détailler pour chaque conjecture certains devenirs a priori de la situation.

ii. Conjecture initiale C1

La conjecture C1 ne nécessite pas d'analyse a priori approfondie dans la mesure où, compte tenu des connaissances supposées et travaillées avec C0, C0' et C0'', la seule difficulté que nous pouvons prévoir peut provenir de l'interprétation du quantificateur universel et de sa négation en quantification existentielle. On peut néanmoins faire l'hypothèse que la conjecture C1 sera résolue sans difficulté : le dessin du contre-exemple décisif devrait être proposé rapidement.

iii. C2 comme « réparation » de C1

La conjecture C1est fausse, mais elle exprime cependant une idée qui paraît pourtant séduisante : « si je sais quelque chose sur l'ordre des limites, alors je devrais pouvoir en déduire quelque chose sur l'ordre des fonctions ». La question de la réparer, c'est à dire d'exprimer cette idée initiale sous une forme qui résiste à la nécessité de la logique mathématique, question qui est naturelle dans les pratiques de la recherche en mathématique, ici devrait conduire à questionner le formalisme de voisinage de l'infini puisque c'est ce formalisme qui résout ce problème.

De manière générale ce scénario de « réparation de conjecture » permet de passer de la question de la vérité d'une idée naïve et accessible exprimée sous forme d'une conjecture initiale dont on convient collectivement assez vite qu'elle est à la fois pleine de sens et formellement fausse, à une question sur le formalisme nécessaire pour exprimer cette idée. Ce scénario permet naturellement de motiver la recherche du formalisme en question et justifie éventuellement ; quand les formulations disponibles apparaissent finalement comme insuffisantes ; qu'on adopte un nouveau formalisme plus adapté, c'est-à-dire plus résistant aux contre-exemples. Le professeur propose donc : « Peut-on réparer cette conjecture ? C'est à dire ici garder la même hypothèse mais changer la conclusion pour que la conjecture devienne vraie ». Voici les propositions possibles de conjectures C2 des élèves regroupées par type :

Proposition du type 1 générique : l'infini pris comme une valeur

$C2_{1\text{-}1}$: « si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$alors f(x)<g(x) en +∞ »

$C2_{1\text{-}2}$: « si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors f(x)<g(x) du côté de l'infini » (sur cette conjecture le « du côté » peut faire penser à un voisinage mais en même temps l'infini est réifié ; en effet on y dit « du côté de l'infini » comme on dit du côté de Bordeaux, c'est à dire comme si l'infini était bien défini)

Proposition du type 2 générique : la réponse experte

$C2_{2\text{-}1}$: « si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors il existe A tel que pour tout x>A on a f(x)<g(x) »

$C2_{2\text{-}2}$: « si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors f(x)<g(x) à partir d'un certain *moment*»

Proposition du type 3 générique : à partir de la (dernière) intersection

$C2_{3\text{-}1}$: « si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors f(x)<g(x) pour x>K où K est l'abscisse de l'intersection des courbes de f et g » (où équivalent au niveau mathématique : où f(K)=g(K))

$C2_{3\text{-}2}$: La conjecture précédente $C2_4$ avec la mention supplémentaire : « de la dernière intersection »

Proposition du type 4 générique : à partir d'un nombre donné explicitement

$C2_{4\text{-}1}$: « si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors f(x)<g(x) Pour tout x>1 » ici 1 pouvant être remplacé par n'importe quel nombre donné explicitement. »

Le professeur propose ensuite d'étudier la conjecture proposée sans la transformer. Voici des questions d'élèves qui peuvent alors générer des conflits si des réponses contradictoires sont données et conduire à réviser la caractérisation ou les différentes conceptions de la notion de voisinage en l'infini.

Numéro conjecture	Domaine de validité	Questions dont les réponses peuvent générer des conflits de rationalités possibles
$C2_{1\text{-}1}$	En +∞	Qu'est-ce que ça veut dire ? N'est-ce pas une tautologie ?
$C2_{1\text{-}2}$	Du côté de l'infini	Qu'est-ce que ça veut dire ? Il faut aller jusqu'où pour être du côté de l'infini ?
$C2_{2\text{-}1}$	Il existe A tel que pour tout x>A	- Il existe des valeurs pour lesquels la condition est vérifiée et d'autres non. Est-ce vrai ou faux ? ou - Il existe plusieurs valeurs pour lesquels la condition est vérifiée et d'autres non. Est-ce vrai ou faux ?
$C2_{2\text{-}2}$	A partir d'un certain *moment*	Idem $C2_{2\text{-}1}$ et idem $C2_{1\text{-}2}$

$C2_{3\text{-}1}$	Pour x>K où K est l'abscisse de l'intersection des courbes de f et g	Et s'il y a plusieurs intersections[72] ? Si ce n'est pas la bonne intersection ?
$C2_{3\text{-}2}$	Idem $C2_{3\text{-}1}$ avec la mention supplémentaire : « la dernière intersection »	Y-a-t-il toujours une dernière intersection ?
$C2_{4\text{-}1}$	Pour tout x>1 (ici 1 pouvant être remplacé par n'importe quel nombre)	Si ça ne marche pas pour 1, ça peut marcher pour 10 ? pour 1000 ?

Tableau 42 : Différentes expressions de la notion de voisinage en l'infini et les conflits correspondants

iv. Conjecture C3

Comme pour la conjecture C1, il est inutile ici de mener une analyse a priori approfondie. Avec cette nouvelle formulation (« il existe »), les élèves devraient plutôt s'accorder sur C3 vraie. Il devrait aussi cependant rester un certain doute correspondant au manque de convention sur le « il existe » qui rend légitime la proposition du faux contre-exemple graphique ci-dessus (Cf. tableau $C2_{2\text{-}1}$). On peut aussi attendre que des élèves manifestent leur doute en l'absence de démonstration de C3, démonstration qui n'est pas encore réalisable à ce stade par manque de définition formalisée de la notion de limite. Le professeur s'engage alors dans une institutionnalisation qui va mettre en évidence deux aspects : la question local / global (M. Rogalski, 2008) et la question du voisinage de l'infini.

d) Institutionnalisation prévue : un voisinage de l'infini

- Rapport local/global

C1 est une conjecture qui, d'une certaine manière, affirme que l'information locale $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ (locale puisque du « coté de l'infini ») permet d'en tirer une information globale : « f(x)<g(x) pour tout x de R ». En général, ce type de raisonnement n'a pas beaucoup de chance d'être valable puisque ce qui se passe ici peut n'avoir aucune influence sur ce qui se passe ailleurs, et c'est bien ce qu'on s'aperçoit avec les contre-exemples proposés pour C1. La réciproque elle, tirer du global (« f(x)<g(x) pour tout x de R ») une information locale ($\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$) est elle plus crédible, car ce qui se passe de manière générale (information globale) peut avoir des conséquences sur des cas particuliers (information locale). Mais, ici, on n'étudie pas la réciproque, on essaie de rendre vraie la conjecture C1 en la réparant. Il s'agit donc de trouver un formalisme qui permette de dire en quelque sorte : « du côté de l'infini ». Nous avons vu que les formulations utilisées avec C2, ne nous permettent pas de nous mettre d'accord facilement.

[72] On suppose dans cette analyse qu'il n'y a pas de recours aux fonctions discontinues, ce qui est vraisemblable pour des élèves de Terminale S n'ayant pas abordé encore la continuité mais nécessite des adaptations de l'analyse a priori pour des niveaux plus élevés (L1 par exemple).

Le problème de l'infini c'est que ce n'est pas un nombre ordinaire, en effet qui est le plus grand $+\infty$, ou bien $+\infty+1$. Pour parler de ce qui se passe « du côté de l'infini », le mathématicien parle de « voisinage de l'infini »

- Notion de voisinage de l'infini

Un « voisinage de l'infini » c'est tous les nombres qui sont « proches de l'infini » et cela se traduit par « il existe un nombre A à partir duquel pour tous les nombres ordinaires plus grands que A on a la propriété voulue ».

Malheureusement, sans conventions d'usage, ce nouveau formalisme conduit aussi à des problèmes d'interprétation. En particulier, l'interprétation du « il existe A » (« Il existe A tel que pour tout $x > A$ on a $f(x) < g(x)$ » Signifie qu'une fois f et g choisis, on doit pouvoir trouver un nombre A tel que pour tous les nombres $x > A$, la propriété $f(x) < g(x)$ est vraie.). Or, il y a plusieurs types de A :

1) Ceux qui respectent la propriété (ils peuvent être nombreux)

2) Ceux qui ne la respectent pas

Figure 37 : Différentes possibilités du A pour la conjecture C3

A1 ne respecte pas la propriété $f(x) < g(x)$ pour tout $x > A$, A2 par contre semble la respecter et..... A3 aussi. Pour que « il existe A tel que... » soit vrai, il suffit donc de trouver un A qui respecte la propriété et donc trouver un A qui ne la respecte pas ne signifie donc rien en termes de vérité pour notre conjecture.

Retour sur C3 après cette institutionnalisation :

La conjecture C3 est à nouveau proposée, cette fois ci les élèves disposent du formalisme « il existe » ainsi que de ses règles d'usage. Compte tenu du travail précédemment réalisé sur C3 et du fait que les règles du « il existe » sont claires, il devrait y avoir une unanimité pour déclarer C3 vrai. Cependant il est possible que certains élèves émettent des doutes dans la mesure où le manque de démonstration laisse un doute. Une institutionnalisation alors pourra être faite pour légitimer ce doute : en mathématiques on construit la plausibilité avec des arguments (ici l'apparente impossibilité de construire des contre-exemples), les certitudes avec des démonstrations. Il s'agit de distinguer les différents types de rationalités à l'œuvre dans les raisonnements qui sous-tendent les positions.

La phase II aura ainsi pu jouer un rôle de de préparation de la phase III en déconnectant l'étude de la notion de voisinage de l'infini afin d'introduire les connaissances nécessaires pour le reste de la situation.

II.3 Phase III : Déstabilisation de la conception naïve de la limite

a) Description

Le but de cette phase est de faire prendre conscience des insuffisances des conceptions de la notion de limite en proposant des fonctions inhabituelles dont on se demande si elles ont une limite ou non et si oui laquelle. Une série de fonctions est proposée les unes après les autres jusqu'à ce qu'un doute fort apparaisse. Cela commence par le coup de théâtre du « monstre ». On qualifie de « monstre » la fonction f donnée par le dessin ci-dessous :

Figure 38 : Le « monstre »

La limite de la fonction g est 3 en plus l'infini et la fonction f est assez rapidement égale à 2,99 tout le temps sauf en des pics réguliers (1 tous les millions d'unités). Ces pics font 0,01 de large et 0,02 de haut. Le professeur propose alors d'étudier la question suivante : pour la conjecture C3 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors il existe un nombre A tel que pour tout x > A on a f(x)<g(x) », que pensez-vous du statut de cette situation (situation du monstre) ? Est-ce un exemple, un contre-exemple, un hors sujet pour C3 ?

Cette question devrait conduire à étudier la conjecture suivante au sujet du « monstre » : (Cf) : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2{,}99$. La deuxième fonction prévue f_1 est une fonction qui ressemble au « monstre » sauf que la hauteur des pics est décroissante et $f_1(x) \geq 2{,}99$, donne lieu à la conjecture (Cf_1) : $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 2{,}99$. La troisième et dernière fonction est la fonction f_2 qui ressemble à la précédente f_1, la hauteur des pics est décroissante et $f_2(x) \geq 2{,}99$ mais en plus la hauteur des pics a pour limite 0, donne lieu à la conjecture (Cf_2) : $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 2{,}99$.

b) Variables didactiques

Voici les différentes variables didactiques de cette situation :

- VD1 : La limite 2,99 est donnée ou pas

Nous détaillons cette variable didactique pour le « monstre »[73] f qui est un peu plus spécifique mais l'argument essentiel concernant les choix de valeur de cette variable conviennent aussi à f_1 et f_2.

[73] Lakatos utilise lui-même cette terminologie de « monstre » pour certains contre-exemples (Lakatos 1984). Mais ici s'il ne s'agit pas d'un contre-exemple, la fonction proposée a un côté « monstrueux ».

Deux possibilités de conjectures sont présentes ici : « f a une limite » ou bien « $\lim_{n\to+\infty} f(x) = 2{,}99$ ». Initialement la question qui se pose sur f est de savoir si f a une limite ou pas afin de trancher si c'est un hors sujet ou un contre-exemple pour C3. Il est cependant choisi ici de donner la limite (2,99) afin de resserrer le questionnement sur la seule limite plausible d'une part et de permettre, une fois la définition en epsilon/A donnée, de revenir sur cette question pour permettre de tester l'efficacité de cette définition. La conjecture « f a une limite » est une conjecture beaucoup plus difficile à résoudre, même avec le formalisme (y compris avec une bonne maîtrise du formalisme) car il faut alors procéder en deux temps : montrer d'abord que seule 2,99 est une limite possible pour f, et ensuite montrer que 2,99 n'est pas une limite de f. Ce niveau de maîtrise là n'est pas celui qui est visé par cette situation.

- VD2 : Choix de la fonction f_1 et f_2

Plusieurs fonctions f_1 peuvent être envisagées ici. Le choix de cette fonction « cousine de f » est effectué pour plusieurs raisons. La première concerne le fait de préserver une continuité dans le questionnement : il n'y a pas de rupture entre f et f_1. La deuxième est liée au fait de montrer que des petites variations peuvent modifier la réponse sur la limite d'une fonction, car si une certitude pouvait être possible sur la fonction f (elle n'a pas de limite) pour des mauvaises raisons (elle s'éloigne autant qu'elle se rapproche au niveau des petits pics), ici la hauteur des pics commence à se rapprocher de la limite, ce qui peut commencer à faire douter. En fait apparaît ainsi implicitement la question de l'epsilon.

En outre, l'intérêt de cette fonction f_1 est qu'elle peut avoir une limite de 2,99 ou pas suivant que les pics ont une hauteur de limite nulle ou pas. Cela signifie évidemment que la conjecture est fausse. Mais surtout cela permet en cas de majorité d'élèves pensant que la conjecture est vraie, c'est à dire que f_1 a une limite de 2,99, de les déstabiliser en leur faisant réaliser que la hauteur des pics peut être minorée par un réel strictement positif (ce qui revient globalement à la situation de f avec des pics plus petits). Le but étant ici toujours de faire sentir, sans le dire, qu'on n'a pas de moyen de décider sans critère objectif (la définition de limite).

Plusieurs fonctions f_2 peuvent être envisagées ici. Le choix de cette fonction « cousine de f_1 » est effectué pour les même raisons que celui de f_1 : continuité dans le questionnement, effet des petites variations sur la réponse sur la limite d'une fonction. Si une certitude pouvait être possible sur la fonction f_1 (elle n'a pas de limite) pour des mauvaises raisons (elle s'éloigne autant qu'elle se rapproche au niveau des petits pics), ici la hauteur des pics a pour limite 0 (le même raisonnement conduit donc ici à une erreur sur la limite de f_2), ce qui « rapproche de plus en plus » le graphe de f_2 de celle de l'image prototypique d'une fonction ayant une limite. Pour ce qui est de ceux qui ont exclu la limite de f_1 pour la raison de la minoration de la hauteur des pics (peu nombreux a priori), ici ils ne peuvent plus utiliser cet argument et échapper à un nouveau questionnement.

c) Déroulement prévu

Nous rappelons la question : C3 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors il existe un nombre A tel que pour tout x > A on a f(x) < g(x) », que pensez-vous du statut de cette situation (situation du monstre) ? Est-ce un exemple, un contre-exemple, un hors sujet pour C3 ?

On peut prévoir a priori trois types de réponses : ceux qui pensent que la fonction a une limite et puisqu'elle ne vérifie pas la conclusion alors c'est un contre-exemple, et ceux qui pensent qu'elle n'a pas de limite et donc que c'est un hors-sujet, et enfin ceux qui ne savent pas si la fonction a une limite ou pas qui devrait voter Autre. Le débat devrait faire apparaître ainsi un questionnement sur la limite de f : certains seront certains que f a une limite, certains auront un doute à ce sujet. Le professeur, afin d'éclaircir la situation, propose de reformuler le questionnement qui apparaît comme le nœud du problème en centrant le débat sur la limite de f avec la conjecture suivante : C(f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2{,}99$.

Le but de toute cette phase III est de recentrer le problème sur la question de la limite et de faire prendre conscience du manque de certitude que donne la conception intuitive de la limite sur les cas auxquels cette intuition ne répond pas. On va donc examiner plusieurs fonctions et le doute devrait être croissant. Le choix de cette série de fonctions proposées est de passer « continument » d'une situation où la fonction correspond à une image prototypique d'une fonction n'ayant pas de limite (la fonction cos(x) vue en C0) à une fonction extrêmement proche d'une fonction qui correspond à l'image prototypique de la limite (vue en C0').

Figure 39 : de la sinusoïde à l'asymptote

La fonction f initiale qui peut recueillir facilement une majorité de « il n'y a pas de limite ». La fonction f_1 (non tracée ci-dessus) qui a les mêmes caractéristiques que f mais les hauteurs de pics sont décroissantes, ce qui devient moins intuitif. Cette limite-là devrait provoquer un début de doute (au cas où le doute n'était pas déjà présent dans le cas précédent) et poser la question « y-a-t-il limite ou pas ? ». La fonction f_2 qui a les mêmes caractéristiques que f mais avec une hauteur de pics ayant pour limite 0 en + infini, devrait finir d'emporter une majorité de doute.

Cette progression d'une fonction périodique à une fonction avec oscillations amorties devrait faire apparaître les failles des conceptions naïves sur les limites : conceptions liées à la fois aux formes prototypiques et à la fois à l'idée de limite comme « ce qui tend vers », ce « qui se rapproche de ». Pour les deux cas, ces conceptions vont être mises en défaut par la situation. Cela va se traduire par de l'incertitude et du doute. C'est la prise de conscience que ces conceptions naïves ne permettent pas de certitudes qui va faire apparaître le besoin d'un nouveau formalisme. Les conjectures C(f), C(f_1), et C(f_2) devraient donc conduire à l'émergence de conceptions contradictoires et donc à des conflits de rationalité. Le doute devrait finir par devenir important.

Si le doute est installé, alors naturellement l'institutionnalisation intermédiaire en faisant état de l'impasse sera réalisée. Sinon il s'agit de faire apparaître les incohérences inévitables (puisqu'il

n'y a pas de définition de la limite collective mais seulement des représentations individuelles) des raisons qui ont permis de trancher sur les différentes limites : la proximité de telle ou telle image prototypique permet éventuellement d'avoir une bonne intuition sur la réponse mais le passage « continu » de ces fonctions de l'une à l'autre fait que les arguments utilisés pour trancher un cas ne sont plus utilisés pour trancher le cas suivant. Par exemple, on peut utiliser pour f que les pics éloignent f par moment de sa limite, mais pour f_2 cet argument ne sera plus utilisé et au contraire on déclarera que f_2 a bien une limite alors que selon les arguments utilisés pour f, elle ne devrait pas en avoir non plus.

Tout cela devrait être suffisant pour passer à l'institutionnalisation intermédiaire qui concerne la nécessité d'une définition. En effet la conception intuitive donne des idées dans de multiples situations mais dans le cas d'une fonction un peu pathologique comme f ou les autres fonctions f_1 et f_2, elle ne peut pas répondre à la complexité de la situation. Or, il apparait non seulement difficile de se mettre d'accord avec des conceptions intuitives, mais de plus compliqué de rester cohérent quand certains arguments nous conduisent à des conclusions contradictoires avec les conceptions. Ce constat est le témoignage fort d'un manque, celui d'une définition de limite en plus l'infini. La phase IV est sensée répondre à ce manque de définition.

II.4 Phase IV : Définition de limite

a) Organisation sur trois étapes

Les 3 étapes suivantes doivent permettre d'installer le rôle d'epsilon (induire une égalité), la dépendance de A par rapport à epsilon (quand celui-ci est écrit en premier) et introduire le formalisme de la définition de la limite dans un milieu suffisamment riche pour qu'il puisse commencer à prendre sens. Ci-dessous, nous décrivons l'objectif et les conjectures en jeu pour chaque étape.

- **Étape 1**

Il s'agit d'étudier les conséquences du principe fondamental de l'analyse non plus pour les nombres mais pour les fonctions. Ce travail a pour but de donner un sens au epsilon, et au rôle de la double quantification. La question est ici « que peut-on conclure sur une fonction f définie sur R si elle vérifie « Si $x > 50$ on a pour tout $\varepsilon > 0$ la distance entre 2 et f(x) est inférieure à ε » qui s'écrit aussi avec des inégalités « Si $x > 50$ on a pour tout $\varepsilon > 0$, $2- \varepsilon < f(x) < 2+ \varepsilon$ ». Un dessin peut être proposé pour imager cette condition, par exemple en prenant $\varepsilon = 0{,}01 > 0$, dans le cas ci-dessous, la distance entre f(75) et 2 est bien inférieure à epsilon.

Figure 40 : Représentation du rôle des variables epsilon et x

Au moins deux réponses peuvent apparaître, « $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ » et « pour tout x > 50, f(x) = 2 », elles seront étudiées sous la forme de conjectures proposées par le professeur :

Conjecture ε_1 : « Si f vérifie que pour x > 50 et si on a pour tout ε > 0, 2 - ε < f(x) < 2 + ε alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ». La fonction f(x) = 2 + 1 / x est-elle un exemple, un contre-exemple, ou un hors sujet pour la Conjecture ε_1.

Conjecture ε_2 : « Si f vérifie que pour x>50 on a pour tout ε > 0, 2 - ε < f(x) < 2 + ε, alors f(x) = 2 pour x > 50 »

- **Étape 2**

Cette étape consiste en une première approche de la dialectique A/epsilon qui sera questionnée à l'étape suivante. Il s'agit de demander ce qu'on peut conclure sur une fonction f définie sur R si elle vérifie « Il existe un nombre réel A tel que pour tout x>A et pour tout ε > 0, la distance entre 2 et f(x) est inférieure à ε » qui s'écrit aussi avec des inégalités « Il existe A tel que pour tout x>A on a pour tout ε > 0 on a 2 - ε < f(x) < 2 + ε ». Au moins deux réponses peuvent apparaître, « $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ » et « pour tout x > 50, f(x) = 2 », elles seront étudiées sous la forme de conjectures :

Conjecture ε_3 : « Si f est une fonction telle qu'il existe A tel que pour tout x>A on a pour tout ε > 0, 2 - ε < f(x) < 2 + ε alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ »

Conjecture ε_4 : « Si *f* est une fonction telle qu'il existe A tel que pour tout *x* > A on a pour tout ε > 0, 2 - ε < *f* (*x*) < 2 + ε alors f(x)=2 pour tout x>A »

- **Étape 3**

Cette étape a pour but de donner du sens au formalisme de la définition de limite. Elle se passe plus précisément, en deux temps, avec l'étude de deux conjectures. On s'intéresse aux fonctions f définies sur R qui vérifient « Pour tout ε > 0, il existe un réel A tel que pour tout x > A on a : la distance entre 2 et f(x) est inférieure à ε ». Ce qui s'écrit aussi « Pour tout ε > 0, il existe un réel A tel que pour tout x>A on a 2 - ε < f(x) < 2 + ε ». Ceci peut s'illustrer avec l'exemple suivant :

Figure 41 : dessin pour représenter le rôle de A

Vient alors l'étude de la **conjecture ε_5** : « Si f vérifie que pour tout ε > 0, il existe un réel A tel que pour tout x > A on a 2 - ε < f(x) < 2 + ε alors f(x) = 2 pour tout x > A » sous la forme d'une

question : La fonction f(x)=2+1/x est-elle un exemple, un contre-exemple, ou un hors sujet pour cette conjecture ?

L'étude de la conjecture précédente conduit à généraliser en étudiant la **conjecture ε_6** : « Si f vérifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A tel que pour tout $x > A$ on a $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ». Pour cette conjecture il n'est pas attendu de démonstration évidement, puisque la notion de limite n'est pas définie. Mais l'étude de cette conjecture a pour but de se questionner sur le rapport entre le formalisme de la définition de limite et la notion naïve de limite non formalisée. Dans la mesure où après le travail sur les conjectures précédentes on peut s'attendre à avoir donné un sens au formalisme, il devrait ressortir de cette étude le sentiment que ce rapport est étroit et que la conjecture ε_6 est vraie sans pouvoir la démontrer. Il n'est pas prévu de discuter longtemps de cette conjecture, mais il s'agit surtout de vérifier si l'association de ce formalisme à la notion de limite a bien été réalisé à travers la succession de conjectures précédentes. C'est le professeur qui institutionnalisera ce formalisme comme définition de la limite.

b) Variables didactiques

- VD1 : Généralisation/Instantiation

Il s'agit de soit proposer de la résoudre (est-elle vraie ou fausse ?) ou bien proposer une fonction dont on demande la nature par rapport aux conjectures.

Il est choisi, pour les conjectures ε_1 de donner une fonction dont on doit déterminer la nature (ici un hors sujet) car la conjecture est vraie (la limite de la fonction constante et égale à 2 est bien 2) mais on ne peut pas la démontrer (absence de définition de limite à ce stade) et de plus cette première conjecture est difficile d'accès : donner une fonction va enrichir le milieu heuristique pour l'élève. On pense de plus que l'étude de cette fonction va avoir pour effet d'abord de détacher la conjecture de l'idée de limite (puisqu'une fonction ayant bien pour limite 2 est un hors-sujet), et conduire à penser qu'en fait il faut que f soit constante et égale à 2 pour vérifier l'hypothèse (cela se voit sur $f(x) = 2 + 1 / x$. En effet, en prenant n'importe quel epsilon on réussit à éliminer cette fonction comme vérifiant les hypothèses et donc pour ne pas être éliminé ainsi, il faut être égal à 2). Il est choisi pour la conjecture ε_2 de la laisser résoudre car le travail précédent devrait le permettre.

Le choix pour les conjectures ε_3 et ε_4 est celui de les laisser résoudre directement car l'étude des conjectures précédentes a préparé le terrain.

Le choix pour la conjecture ε_5 est celui de la deuxième option, soit de proposer d'étudier un cas particulier, pour simplifier l'étude d'une conjecture compliquée. En donnant explicitement la fonction f, les élèves ont la possibilité de se faire une idée plus facilement.

- VD2 : L'appel à conjecture ou pas

On peut demander aux élèves ce qu'on peut conclure sur f sous l'hypothèse proposée, ou alors donner directement la conjecture complète.

Pour les conjectures ε_1 et ε_2, le choix réalisé ici est de faire un appel à conjecture pour leur donner la possibilité de transposer seuls les résultats précédents.

Pour les conjectures ε_3 et ε_4, le choix réalisé ici est de faire un appel à conjecture pour permettre aux élèves d'essayer d'imaginer eux même les conséquences de l'hypothèse, leur donnant ainsi la possibilité de faire seuls le lien avec le travail précédent.

Pour la conjecture ε_5, le choix réalisé ici est de donner la conjecture ε_5 directement aux élèves car celle-ci prépare l'étude de la conjecture suivante. Il est donc essentiel d'étudier cette conjecture fausse ε_5.

- VD3 : Le degré de généralité de la conjecture

On peut choisir comme limite n'importe quel nombre fixé ou alors utiliser une variable L. On peut choisir aussi n'importe quel nombre pour le rang à partir duquel l'hypothèse est vérifiée ou bien même utiliser une variable A.

Pour les conjectures ε_1 et ε_2, pour limiter la difficulté d'étude on choisit de fixer la limite. On perd en généralité mais on gagne en possibilités pour l'élève de se représenter le formalisme de la conjecture. Ici 2 est choisi comme limite, on évite de prendre 0 comme limite pour dissocier les valeurs de la limite de celles de epsilon. De même, pour l'étape 1, on choisit de limiter la généralité en fixant le rang initial pour simplifier, dans un premier temps, le problème, en ne laissant que epsilon, x et f comme variables dans la conjecture (plus précisément f est fixé pour la conjecture ε_1 mais pas pour ε_2). Il est choisi ici 50 comme rang initial pour se positionner plutôt du côté de l'infini et aussi différencier les x de epsilon et la limite. On aurait pu prendre un plus grand nombre mais il est choisi de rester dans des nombres raisonnables pour faciliter les représentations mentales.

Pour les conjectures ε3 et ε4, pour limiter la difficulté d'étude on choisit de fixer la limite à 2 pour les mêmes raisons que précédemment. Ce qui fait la spécificité de l'étape 2 par rapport à l'étape 1, c'est qu'on monte d'un niveau de généralité en introduisant le nombre à partir duquel l'hypothèse est vérifiée sous la forme d'une variable A. Il est en effet important de statuer sur une conjecture avec à la fois epsilon et A afin de pouvoir étudier la même conjecture (cf conjecture ε_5) en échangeant les l'ordre d'écriture de ces deux variables quantifiées, c'est à dire en modifiant leur dépendance, dépendance qui fondera la définition de limite.

Pour la conjecture ε_5, le niveau de généralité est celui des conjectures ε_3 et ε_4 (la limite est fixée à 2) pour ne pas ajouter de ce point de vue de complexité supplémentaire.

- VD4 : Utilisation ou pas du dessin dans la consigne

Pour les conjectures ε_1 et ε_2, le choix est fait d'utiliser le dessin pour représenter un exemple, afin de donner la possibilité de comprendre cet énoncé abstrait pour pouvoir dévoluer les manipulations de quantificateurs.

Pour les conjectures ε_3 et ε_4, le choix est fait de ne plus utiliser le dessin pour permettre à l'élève de le fabriquer lui-même.

Pour la conjecture ε_5, le choix est fait de proposer un exemple sous forme de dessin afin de simplifier la prise en main de l'énoncé et de laisser à charge la quantification.

- VD5 : Utilisation ou pas de plusieurs registres dans la consigne

Pour les conjectures ε_1 et ε_2, le choix est fait de faciliter l'accès à cet énoncé abstrait en utilisant le registre naturel « la distance » et le registre symbolique ($2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$), l'un faisant appel davantage à l'intuition et l'autre au formalisme.

Pour les conjectures ε_3 et ε_4, le choix est fait de faciliter l'accès à cet énoncé abstrait en utilisant le registre naturel « la distance » et le registre symbolique ($2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$), l'un faisant appel davantage à l'intuition et l'autre au formalisme.

Pour la conjecture ε_5, le choix est fait de faciliter l'accès à cet énoncé abstrait en utilisant le registre naturel « la distance » et le registre symbolique ($2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$) , l'un faisant appel davantage à l'intuition et l'autre au formalisme.

- VD6 : Inégalité strictes ou pas

Une nouvelle inégalité apparaît $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$. On peut la choisir stricte ou pas. Il est choisi ici de rester cohérent avec les choix précédents et de la garder stricte.

- VD7 : Le choix de la fonction contre-exemple

N'importe quelle fonction ayant 2 comme limite en l'infini. Le choix réalisé ($2 + 1 / x$) permet surtout de faciliter les calculs ici.

c) Déroulement prévu

Voici le tableau récapitulatif des connaissances et objets annexes relatives aux conjectures ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

Milieux	Matériel	Subjectif	Référence	Institutionnel
Rationalité		Pragmatique	Empirique	Théorique
Connaissances ou objets annexes	O1 : démonstration par l'absurde	Si on fait l'hypothèse que le résultat est faux on démontre le contraire de ce qu'on veut		Pour démontrer que A implique B, on démontre que (A et non B) est faux
	O2 : double quantification AA	Non prise en compte d'une condition quantifiée		Logique dialogique
		Négation de la quantification universelle comme quantification universelle		Logique dialogique
		Quantification AA prise comme quantification AE		Logique dialogique
		Quantification universelle démontrée par un exemple	Quantification universelle prise pour plusieurs exemples	Logique dialogique
	O3 : double quantification EE	Non prise en compte de la dépendance du « il		Logique dialogique

		existe » avec d'autres objets		
		Non prise en compte d'une condition quantifiée		Logique dialogique
	O4 : Limite	Des exemples de limites données : 1/x a pour limite 0 en l'infini et cos (x) n'a pas de limite en l'infini	- Tend vers - Se rapproche de - Formes prototypiques	Définition de limite en epsilon/alpha
	O5 : principe fondamental de l'analyse	- 1,999…≠2 - égalité algébrique		Egalité en l'analyse
Objet visé par la situation : **principe fondamental de l'analyse**		Egalité algébrique		Principe fondamental de l'analyse

Tableau 43 : Connaissances et objets annexes pour les conjectures ε_1, ε_2, ε_3, ε_4

Etape 1

La question posée est « que peut-on conclure sur une fonction f définie sur R si elle vérifie « Si $x > 50$ on a pour tout $\varepsilon > 0$ la distance entre 2 et $f(x)$ est inférieure à ε ». On peut s'attendre au moins à trois réponses : « $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ » ou « $f(x) = 2$ » ou « $f(x) = 2$ pour tout $x > 50$ ».

Dans le cas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ on donnera à étudier la conjecture ε_1 : « Si f vérifie que pour $x > 50$ et si on a pour tout $\varepsilon > 0$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ » en demandant si la fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ est un exemple, un contre-exemple, ou un hors sujet pour la Conjecture ε_1. Toutes les confusions listées dans le tableau concernant la double quantification AA peuvent être réalisée, dont certaines conduisant à évaluer cette fonction comme un exemple. Par exemple : « La fonction f vérifie bien l'hypothèse puisque si on prend epsilon = 0,1 alors on peut trouver un x tel que $1{,}9 < f(x) < 2{,}1$ il suffit de prendre $x = 100$. Et pour tous les epsilons on peut faire comme ça. ». Mais elle peut être aussi évaluée comme un hors-sujet, ce qui est d'ailleurs le cas en prenant une valeur de x et epsilon pour lesquels la fonction ne vérifie pas $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$. Le débat sur cette conjecture devrait aboutir à déclarer f comme hors-sujet mais également à pressentir que la seule fonction apte à vérifier l'hypothèse doit être une fonction constante et égale à deux (à partir de cinquante si la condition sur x est prise en compte). D'où la conjecture suivante ε_2 :

La conjecture ε_2 peut avoir deux variantes correspondant aux réponses « $f(x) = 2$ » ou « $f(x) = 2$ pour tout $x > 50$ ». Nous traitons la variante $C\varepsilon_2$' : « Si f vérifie que pour $x > 50$ on a pour tout $\varepsilon > 0$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$, alors $f(x) = 2$ ». Cette conjecture peut donner lieu a de multiples interprétations suivant les interprétations de la double quantification, mais devrait puisqu'elle est fausse de manière évidente (la condition porte seulement pour x supérieur cinquante) être déclarée fausse avec un contre-exemple. Cette conjecture doit être étudiée avant la suivante afin de commencer à donner un rôle aux différentes variables quantifiées.

La variante $C\varepsilon_2$: « Si f vérifie que pour $x > 50$ on a pour tout $\varepsilon > 0$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$, alors $f(x) = 2$ pour $x > 50$ ». Cette conjecture est vraie et peut se démontrer par l'absurde[74] en supposant qu'il existe une valeur de x_0 supérieure à cinquante telle que $f(x_0)$ n'est pas égale à deux. En prenant epsilon comme la moitié de la distance entre $f(x_0)$ et deux, on montre que f ne vérifie pas l'hypothèse $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$. Mais comme pour les deux autres conjectures, les interprétations naïves de la quantification et la prise en compte partielle des conditions peut conduire à des conflits de rationalités et provoquer les transitions de rationalités nécessaires pour parvenir à cette démonstration. On peut s'attendre aussi à voir émerger un pseudo-contrexemple avec une fonction constante telle que $f(x) = 1{,}999\ldots$

Vient ensuite l'institutionnalisation intermédiaire sur les deux conjectures ε_1 et ε_2, à propos du « principe fondamental de l'analyse » appliqué aux fonctions et les conséquences sur cette conjecture qui peuvent être illustrées par un dessin. Les images de tous les nombres supérieurs à cinquante sont compris dans la bande $y = 2 - \varepsilon$ et $y = 2 + \varepsilon$ cela quel que soit $\varepsilon > 0$, donc finalement $f(x) = 2$ pour tout $x > 50$.

Figure 42 : Dessin illustrant la démonstration de la conjecture ε_2

L'ordre des quantificateurs importe dans l'interprétation (ceci est important à mettre en évidence en cas d'argument d'inversion des quantificateurs pour la conjecture ε_1) : on choisit d'abord un nombre $x_0 > 50$, puis on peut choisir n'importe quel epsilon strictement positif et alors on est certain que $2 - \varepsilon < f(x_0) < 2 + \varepsilon$. En appliquant le principe fondamental de l'analyse on en déduit que $f(x_0) = 2$. Ce résultat, comme déjà évoqué, peut se démontrer aussi par l'absurde.

Étape 2

On demande ce qu'on peut conclure sur une fonction f définie sur R si elle vérifie « Il existe un nombre réel A tel que pour tout $x > A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, la distance entre 2 et $f(x)$ est inférieure à ε ». Cela conduit à étudier possiblement deux conjectures :

Conjecture ε_3 : « Si f est une fonction telle qu'il existe A tel que pour tout $x > A$ on a pour tout $\varepsilon > 0$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ »

Conjecture ε_4 : « Si f est une fonction telle qu'il existe A tel que pour tout $x > A$ on a pour tout $\varepsilon > 0$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ alors pour tout $x > A$, $f(x) = 2$ »

[74] On peut, dans ce cas, parler aussi de démonstration par contraposée.

Par rapport aux deux précédentes, la spécificité de ces deux conjectures est de rajouter la variable A avec sa quantification existentielle. Seule la conjecture ε_4 parait vraisemblable compte tenu du travail réalisé à l'étape 1, mais la conjecture ε_3 est vraie aussi et plus faible que ε_4. On peut penser que dans le cas où ε_3 serait proposée, alors la validation de cette conjecture passera certainement par la validation de ε_4. Ici joue le rôle du 50 des conjectures précédentes. Par analogie avec l'étape 1, il devrait être aisé de résoudre cette conjecture ε_4.

Étape 3

Voici le tableau récapitulatif des connaissances et objets annexes relatives aux conjectures ε_5 et ε_6.

Milieux	Matériel	Subjectif	Référence	Institutionnel
Rationalité		Pragmatique	Empirique	Théorique
Connaissances ou objets annexes	O1 : démonstration par l'absurde	Pour démontrer un résultat on ne part de l'hypothèse qu'il est faux.		Démonstration par l'absurde
	O2 : double quantification AE	Non prise en compte d'une condition quantifiée		Logique dialogique
		Confusion EA/AE		Logique dialogique
		Non prise en compte de la dépendance du « il existe » avec les autres objets		Logique dialogique
Objet visé par la situation : **définition de la limite en epsilon/alpha**		Des exemples de limites données : 1/x a pour limite 0 en l'infini et cos (x) n'a pas de limite en l'infini	- Tend vers - Se rapproche de - Formes prototypiques	Définition de la limite en epsilon/alpha

Tableau 44 : Connaissances et objets annexes pour les conjectures ε_5 et ε_6

La troisième étape consiste à renverser la quantification et proposer l'étude de la conjecture ε_5 : « Si f vérifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A tel que pour tout $x > A$ on a $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ alors $f(x) = 2$ pour tout $x > A$» sous la forme d'une question : La fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ est-elle un exemple, un contre-exemple, ou un hors sujet pour cette conjecture ?

Compte tenu du travail précédent on peut s'attendre à une éventuelle confusion entre ε_4 et ε_5, et que la fonction f soit déclarée hors-sujet car si elle vérifiait l'hypothèse, et comme elle ne vérifie pas la conclusion de manière évidente, alors ce serait un contre-exemple de ε_5 et cela signifierait que ε_4 est fausse. Mais cette confusion repose sur une non prise en compte de l'ordre de quantification. Or, on peut aussi, compte tenu du travail réalisé, compter sur des positions lucides à ce sujet. Il y aurait alors conflit de rationalités. Les règles de la logique dialogique permettent de départager, dans une transition de rationalité, ces deux positions. Pour conclure que f est bien un contre-exemple, il faut cependant non seulement interpréter correctement la double

quantification, mais également procéder à un petit calcul algébrique. Pour avoir $2 - \varepsilon < 2 + 1 / x < 2 + \varepsilon$, il faut que $- \varepsilon < 1 / x < \varepsilon$, or, $1 / x$ est ici positif (limite en + infini), donc il faut surtout que $1 / x < \varepsilon$ et donc que $x > 1 / \varepsilon$. Il suffit donc de prendre $A = 1 / \varepsilon$ pour avoir la conclusion $2 - \varepsilon < 2 + 1 / x < 2 + \varepsilon$ pour tout $x > A$. Cela signifie que f vérifie l'hypothèse mais pas la conclusion et donc que f est un contre-exemple et donc que ε_5 est fausse.

Vient ensuite l'institutionnalisation sur $C\varepsilon_5$ où il s'agit de démontrer que la conjecture ε_5 est fausse, d'expliquer la différence entre la conjecture ε_4 et la conjecture ε_5 : l'ordre d'interprétation des quantificateurs. Dans l'une (conjecture ε_4) il existe un nombre A après lequel pour tous les epsilons on a $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$, ce qui force $f(x)$ à être égal à 2. Dans l'autre, pour chaque epsilon qu'on prend on doit pouvoir trouver un nombre A après lequel on aura $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$. Cela signifie que pour chaque epsilon différent, il peut y avoir un A différent : on choisit un epsilon et ensuite on prend le A correspondant (s'il existe). On dira que A dépend de epsilon. Dans ce cas $f(x)$ n'est pas nécessairement égal à 2 pour tout $x > A$.

Il est alors naturel de se demander : « Si f vérifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A tel que pour tout $x > A$ on a $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ » est-elle vraie ou fausse ?

Il est prévu alors de demander l'avis sur $C\varepsilon_6$ mais de peu en débattre, (sauf s'il y a des positions pour Faux qu'il faudrait alors faire s'exprimer) car on devrait avoir ici une majorité de Vrai et de Autre (position Autre : plutôt Vrai mais sans certitude, ou bien sans démonstration).

Vient alors l'institutionnalisation sur la nécessaire définition de limite. Cette institutionnalisation commence par rappeler le questionnement initial. Quand on a une fonction « simple » on peut facilement dire, seulement avec son intuition, quelle est sa limite en l'infini. Il suffit d'avoir quelques repères, comme « ça tend vers », ça se « rapproche de », il suffit de savoir que la fonction cosinus n'a pas de limite en l'infini et que $1 / x$ en a une et on peut traiter tous les cas standards. Mais quand on tombe sur des cas pathologiques (exemple f, f_1 , et f_2 fonctions rencontrée à la phase II), l'intuition et les critères précédents ne suffisent plus, il faut donc une définition. Le Principe fondamentale de l'analyse : « Lorsque deux nombres a et b sont fixes, si on arrive à montrer que leur distance est arbitrairement petite, alors ils sont égaux ! », qui s'écrit aussi : « si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|a - b| < \varepsilon$ alors $a = b$ » peut être appliqué aux fonctions pour les déclarer constante à partir d'une certaine valeur. Plus précisément, si pour tout $x > A$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|f(x) - L| < \varepsilon$ alors pour $x>A$, $f(x) = L$. Mais ce principe ne doit pas être confondu avec la proposition faussement similaire suivante : « Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe A tel que pour $x > A$ on a $|f(x) - L| < \varepsilon$ alors pour $x > A$, $f(x) = L$ » qui, elle, est fausse car la fonction $f(x) = L + 1 / x$ est un contre-exemple. En effet, on peut montrer que f vérifie bien l'hypothèse mais pas la conclusion. Autrement dit, l'ordre d'apparition des variables quantifiées est important puisqu'en changeant l'ordre on obtient des conclusions différentes. Le « si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe A tel que pour $x > A$ on a $|f(x) - L| < \varepsilon$ » va représenter la définition de la limite. Cette convention va permettre de montrer, à partir du principe fondamental de l'analyse, que la limite, si elle existe, est unique.

Voici donc la définition de la limite d'une fonction : « f admet une limite L quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim_{n \to +\infty} f(x) = L$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre A tel que pour tout $x > A$, $f(x)$ est comprise entre $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$ »

Avec cette définition, on demande pour avoir une limite que pour tout epsilon on soit capable de trouver un A correspondant. Ce qui signifie que le A change éventuellement pour chaque epsilon. Ainsi, par exemple, on a vu que pour la fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ la limite L est 2 car pour chaque epsilon on peut trouver un A (tel que si $x > A$ alors $2 - \varepsilon < 2 + 1 / x < 2 + \varepsilon$). Pour epsilon=0,1 il suffit de prendre A=10, pour epsilon=0,01 il suffit de prendre A = 100, et pour n'importe quel epsilon, il suffit de prendre A = 1 / epsilon.

Munis de cette définition de la limite, on peut maintenant passer à la phase v où ce formalisme va être éprouvé dans des situations de démonstrations, et pour commencer, à déterminer si une fonction donnée a une limite donnée ou pas.

II.5 Phase V.1 : Définition de limite pour discriminer

a) Description

Cette phase s'organise sur deux étapes. La première consiste à éliminer ce qui avait été présenté comme le « monstre » pour la conjecture C3. Avec la définition de limite en epsilon/alpha, on peut maintenant savoir si cette fonction a ou non une limite de 2,9 d'où la question : « Avec cette nouvelle définition de la limite, que pensez-vous de la fonction f (celle du dessin initial) ? $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2{,}9$ **(conjecture CA) ? ».** La conjecture CA va faire l'objet d'un débat.

Figure 43 : Fonction dite le « monstre »

La même question est posée ensuite pour une limite non monotone, c'est-à-dire une fonction *f* ayant des pics de hauteur 2 / *n* (n entier non nul) espacés toutes les unités et de largeur 0,01.

Figure 44 : Fonction aux oscillations amorties

Conjecture CB : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$? Vrai, Faux ou autre ? La conjecture CB va faire l'objet d'un débat.

b) Variables didactiques

Variables didactiques de CA

- VD1 : Limite donnée ou pas

Même choix que pour la conjecture C*f* (phase II).

- VD2 : La fonction étudiée

Il est naturel ici de trancher le débat sur la fonction f (le « monstre ») qui a commencé à faire douter sur la question de ce qu'est une limite.

Variable didactique de CB

- VD : La fonction étudiée

On a choisi une fonction dont la limite n'est pas une évidence si l'on utilise les conceptions naïves de la limite. Ainsi, on peut montrer que la nouvelle définition permet de discriminer de nouvelles fonctions au sujet de la limite. Cette fonction est un type de fonction f_2 (fonction ayant des pics de hauteur qui tend vers 0), et donc dans la suite naturelle de la situation. Ce qui a posé question un moment peut maintenant être résolu. On a cependant davantage spécifié la fonction (hauteur de pics en $2 / n$) pour faciliter la démonstration. D'ailleurs, la fonction hauteur des pics est proche de la fonction $1 / n$ étudiée à la conjecture ε_5 pour permettre de réaliser la démonstration sans aide.

c) Déroulement prévu

Voici le tableau récapitulatif des connaissances et objets annexes relatives aux conjectures CA et CB.

Milieux	Matériel	Subjectif	Référence	Institutionnel
Rationalité		Pragmatique	Empirique	Théorique
Connaissances ou objets annexes	O1 : double quantification AE	Non prise en compte du domaine sur lequel l'objet est quantifié		Logique dialogique
		Confusion EA/AE		Logique dialogique
		Non prise en compte de la dépendance du « il existe »		Logique dialogique
		Négation d'une AE est AE		Logique dialogique
	O2 : double quantification EA	Confusion AE/EA		Logique dialogique
		Exemple ponctuel pris pour prouver	Plusieurs exemples ponctuels pris pour prouver	Logique dialogique
	O3 : conditions suffisantes, conditions nécessaires	Raisonner par équivalence		Logique mathématique
Objet visé par la situation : **définition de la limite**		Des exemples de limites données : 1/x a pour limite 0 en l'infini et cos	- Tend vers - Se rapproche de - Forme prototypiques	Définition de la limite en epsilon/alpha

		(x) n'a pas de limite en l'infini		

Tableau 45 : Connaissances et objets annexes pour conjecture CA et CB

Pour la conjecture CA, les conflits de rationalités peuvent intervenir au niveau de l'interprétation de la double quantification et de sa négation. Les éléments sont a priori disponibles pour effectuer cette transition. Au final, on peut penser que cette situation ne devrait pas poser de problème sauf l'oubli éventuel de la prise en charge du A que le professeur rappellera dans l'institutionnalisation.

L'institutionnalisation consiste à expliquer que la limite ne peut pas être 2,9 car la condition n'est pas respectée pour tous les epsilons. Il existe en effet un epsilon pour lequel aucun A ne convient. Il s'agit de montrer que parmi les epsilons, il en existe qui vérifient la condition imposée, et d'autres pas. Par exemple, si on prend $\varepsilon = 0{,}5$ on a bien f entre $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$, mais si on prend $\varepsilon = 0{,}01$ alors on voit bien que pour ce « bon » epsilon qu'il n'existe aucun A qui fera l'affaire, c'est à dire qu'il n'existe aucun A tel que pour tout x>A on a f comprise entre 2,91 et 2,89 (« Bon » signifie « qui nous arrange »). On peut conclure que la fonction f n'a pas de limite en +infini dans la mesure où aucun autre nombre que 2,9 ne convient davantage pour les mêmes raisons.

Pour la conjecture CB, les conflits de rationalité ont la même origine sauf qu'ici il n'y a plus de négation à étudier. On peut rencontrer la difficulté de prouver avec des variables, difficulté rencontrée lors de la situation de la double quantification. En particulier, pour prouver en utilisant des inégalités.

Vient alors l'institutionnalisation où est expliqué que cette fois la définition de la limite semble vérifiée, c'est-à-dire que pour tout epsilon il existe bien un A. Il faut, pour montrer qu'il y a une limite, prouver que ça marche pour tous les epsilon (contrairement à la conjecture précédente où on voulait montrer qu'il n'y en avait pas et il suffisait de montrer que pour un epsilon donné ça ne marchait pas). En particulier, pour epsilon = 0,1 il suffit de prendre A = 20, pour epsilon=0,01 il suffit de prendre A = 200.

De manière générale, on veut que pout tout $x > A$, on a $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$, or on sait que pour tout n entier et tout x réel avec $x > n$, on a $3 < f(x) < 3 + 2 / n$ (les pics sont décroissants)

Donc pour $x > n$, on a si $3 + 2 / n < 3 + \varepsilon$ alors f vérifie bien la condition $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$,

Or $3 + 2 / n < 3 + \varepsilon$ équivaut à $n > 2 / \varepsilon$,

En prenant $A = 2 / \varepsilon$ on a donc bien pour tout $x > A$, $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$.

On remarque que ce travail n'est pas le travail algébrique habituel sur une fonction dont on connait l'expression algébrique dont on tire x par une méthode algébrique. Du fait de la construction de la fonction f, il y a de plus une variable supplémentaire qui complique la résolution. Nous n'attendons pas des élèves une résolution idoine, comme nous l'avons effectuée mais plutôt un raisonnement direct sur la hauteur des pics où l'on trouve A en résolvant $3 + 2 / A < 3 + \varepsilon$. Le but n'est pas la virtuosité mais la compréhension du processus d'obtention du A, notamment dans sa dépendance à epsilon.

De manière générale, pour n'importe quel ε > 0, il suffit de prendre A= 2/ε, et donc pout tout x > A, on a 3 – ε < f (x) < 3 + ε et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

Dans l'institutionnalisation de ces différents cas (CA et CB), accompagner les calculs et les choix de variables d'un discours méta sur le sens de ces gestes devrait permettre de mettre du sens sur les gestes réalisés pour démontrer ou réfuter. En particulier montrer que dans le cas d'une réfutation, le choix d'un bon epsilon peut simplifier les calculs, dans le cas de la détermination du A une fois le epsilon choisi, le choix du A, lui aussi, n'est pas complètement contraint : on peut choisir un A qui simplifie les calculs.

II.6 Phase V.2 : Définition de limite pour démontrer

a) Description

Cette phase consiste à éprouver la force démonstrative de la définition de limite dans les cas simple d'énoncés contenant une limite, et s'organise sur trois étapes. La première étape consiste à étudier la conjecture C4 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ alors il existe A tel que pour tout x > A, $f(x)$ > 0,6 », puis la conjecture C4' : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ alors f (x)>0,6 » dans le cas où la démonstration de C4 est réalisée sans tenir compte du A. Déclarer fausse C4' revient alors à invalider une démonstration de C4 ne prenant pas en compte le A. Enfin, il s'agit d'étudier et démontrer la conjecture initiale C3 dans un cas simplifié C5 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$ alors il existe A tel que pour tout x > A, $f(x) < g(x)$ ».

b) Variables didactiques

Variables didactiques pour les conjectures C4 et C4'

- VD1 : Présence ou pas du A

On a le choix entre proposer C4' (cf ci-dessus) ou C4. Le choix ici est de proposer C4 directement car proposer C4' en premier c'est mettre l'erreur de l'absence du A sous le nez des élèves les empêchant ainsi de la commettre, alors qu'en donnant C4, cette erreur peut apparaître dans la démonstration, donnant ainsi la possibilité de prendre conscience de l'importance du A par la suite (cf scénario avec C4').

- VD2 : Faire conjecturer aux élèves ou pas

On peut demander aux élèves si le fait de savoir que la limite de f en +∞ est 1 permet de conclure que f est plus grand qu'un certain nombre, et si oui le quel, ou bien proposer la conjecture complète. Le choix dans la situation présente est celui de donner la conjecture toute faite mais l'autre choix paraît aussi intéressant car il permet éventuellement d'amener les élèves à fabriquer une conjecture comme C4' qui sera étudiée et déclarée fausse puis sera réparée ensuite en C4 qui elle-même sera démontrée.

- VD3 : Le degré de généralité de la conjecture

On peut proposer comme limite et minorant des nombres ou des variables, par exemple L > 0 et L / 2. Ce dernier choix obligera à prendre epsilon égal à L / 2 ce qui préparera la démonstration du cas général initial C3. Ce choix peut être pertinent pour les L1 à qui on voudrait faire

démontrer le cas général C, et plus généralement l'unicité de la limite. Ici il est choisi de donner des valeurs pour faciliter la première démonstration avec la définition de limite (pour les TS). Une variante possible serait donc de donner C4 comme elle est choisie ici, puis de donner C4* : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L > 0$ alors il existe A tel que pour tout x > A, f(x) > L /2 ».

Variable didactique pour la conjecture C5

- VD : Les limites de f et g

Ces limites peuvent être données ou non données, et quelles valeurs ?

On peut ne pas donner les valeurs de f et g. Dans ce cas la conjecture C5 est la conjecture C3.

On peut donner aussi des valeurs aux fonctions f et g qui facilitent ou pas la démonstration. En effet si on prend $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1{,}1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1{,}23$ le choix de l'epsilon est plus compliqué que si on choisit $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$.

Le choix ici est de donner des limites simples (1 et 4) pour faciliter le travail au niveau de l'epsilon et concentrer l'attention sur la dépendance du A à la fonction : comment gérer deux fonctions avec la définition de limite ?

c) Déroulement prévu

Le tableau de connaissances et d'objets est le même que pour la phase précédente V.1 . Ici les connaissances vont être abordées sous l'angle de la démonstration de conjectures plutôt que celui de la discrimination des limites, afin de donner sens et efficience au formalisme de la notion de limite.

Pour la conjecture C4, la réponse experte est « Pour epsilon = 0,4 on sait (comme la limite de f est 1) qu'il existe un nombre A tel que pour tout x > A on a 1 – 0,4 < f(x) < 1 + 0,4, c'est à dire que 0,6 < f(x) < 1,4, cette conclusion permet donc d'affirmer que pour ce A on a : f(x) > 0,6 pour x > A. ». Une difficulté consiste à prendre l'initiative de choisir un epsilon, et d'en prendre un qui soit adapté. L'autre difficulté est de prendre en compte la variable A, dans la démonstration, elle ne constitue pas directement un élément de construction de l'inégalité mais « seulement » son domaine de validité. Si la démonstration est correcte il est prévu de passer à l'institutionnalisation. Si la gestion du A manque dans la démonstration alors on remarquera que l'on est parvenu à démontrer la conjecture C4 sans même utiliser l'information sur A, ce qui signifie que l'on a finalement démontré bien mieux que C4, en fait on a démontré la conjecture C4' : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ alors f (x) > 0,6 ». On met alors C4' au vote pour s'apercevoir que C4' est fausse, ce qui permet de revenir sur la démonstration de C4.

Voici l'institutionnalisation sur C4 où l'on va insister sur le fait que connaissant la limite de f on a pu choisir parmi tous les epsilons, celui qui nous « arrange ». En effet, certains ne nous arrangent pas, tandis que d'autres si. Avec ce epsilon, on peut construire l'inégalité qui va être vraie à partir d'un certain A qui dépend du epsilon choisi.

Pour la conjecture C5, il s'agit de la conjecture C4 appliquée à deux fonctions distinctes. De ce point de vue, il devrait y avoir une certaine facilité à établir C5. La seule difficulté est de différencier le rôle du A et du epsilon. Comme le epsilon est choisi, on peut prendre le même pour

les deux fonctions. Tandis que pour le A, comme A dépend à la fois du epsilon et de la fonction, pour un même epsilon, les deux A correspondant à chaque fonction sont certainement différents. Cette distinction entre les deux A pourrait être pris comme un critère de prise en main du formalisme. En effet, cette dépendance de A à la fonction n'a pas été évoqué jusqu'à la conjecture C5, et si elle est « naturellement » (et collectivement) prise en compte on peut faire raisonnablement l'hypothèse que le formalisme en A/epsilon a commencé à prendre du sens.

L'institutionnalisation sur C5 va consister à donner la démonstration de C5 intégrant la prise en compte des deux A : il se peut que le A de f et celui de g ne soient pas les même, on doit donc les distinguer, par exemple en appelant celui de f, A', et celui de g, A. On peut alors se retrouver dans un cas où l'inégalité « pour tout $x > A'$, $f(x) < g(x)$ » est fausse. L'inégalité va être vraie, en fait, à partir du plus grand des deux A et A'.

Figure 45 : la dépendance du A à la fonction

Cette longue analyse clôture la situation sur la limite. Reste maintenant à expérimenter pour étudier la situation dans la contingence, pour vérifier les écarts avec cette analyse et chercher à expliquer ces écarts : voit-on comme prévu par l'ingénierie la mobilisation des connaissances rencontrées lors des situation d'entrée (nombres, quantification) ? Peut-on pointer des progrès dans la dynamique de la rationalité (définition, démonstration, logique) ? Le formalisme de la limite semble-t-il commencer à prendre un sens ?

III Expérimentation et analyse a posteriori

Dans cette partie, nous commençons par faire le point sur les résultats obtenus dans les situations du début de l'ingénierie, celles sur les nombres et les quantificateurs. Puis nous décrivons phase par phase les résultats de l'expérimentation[75] de la situation de la limite. Cette description est accompagnée d'analyses détaillées, grâce à notre modèle d'apprentissage, pour les parties les plus significatives de la situation. Nous pouvons enfin dresser un constat global sur les résultats de l'ingénierie.

III.1. Mise au point des apprentissages sur nombres et quantificateurs

Comme nous l'avons mis en évidence dans l'analyse a priori de la situation sur la limite, les notions de principe fondamental de l'analyse et d'interprétation de la quantification jouent un rôle essentiel. Nous reprenons ici les résultats principaux que nous avons obtenus sur ces deux plans et les mettons en correspondance avec les connaissances spécifiques nécessaires à la situation de la limite.

Nous faisons le point d'abord sur la notion de principe fondamental de l'analyse. Cet outil, nous l'avons vu dans l'analyse a priori de la situation de la limite est déterminant. Il constitue un des

[75] Les conditions expérimentales sont détaillée au chapitre 4-III-3.

objectifs clefs pour donner du sens au formalisme de la limite. Ce sens sera appréhendé dans un cadre beaucoup plus complexe de celui des seuls nombres : celui de son application aux fonctions. Or, il s'avère que l'expérimentation que nous avons réalisée a connu quelques difficultés pour distinguer la notion d'égalité algébrique avec celle d'égalité de l'analyse. En effet, nous l'avons vu, l'égalité algébrique fait obstacle à l'égalité de l'analyse. Or le conflit prévu entre les deux a eu lieu sommairement, aussi sommes-nous réservés, a priori, sur la disponibilité de cette connaissance pour la situation de la limite. Cependant, nous rappelons que le travail initial sur ce principe a reposé essentiellement sur la propriété de densité. Or cette propriété a manifestement été intégrée comme connaissance dans la mesure où elle a été mobilisée plusieurs fois à la seule initiative des élèves. Il se pourrait que cette propriété qui est le soubassement épistémologique du principe fondamental de l'analyse occupe la place du principe lui-même. Pour ce qui est du principe fondamental, ou plus précisément de son substitut, les connaissances sur les nombres nécessaires pour réaliser les transitions de rationalités prévues dans la situation de la limite sont donc disponibles.

Pour ce qui est de la quantification, le résultat de la situation de la double quantification est également en demie teinte. Nous rappelons ici que ce type d'interprétation de la double quantification joue un rôle fondamental dans la situation de la limite dans la mesure où il constitue un objet annexe incontournable pour donner sens à nombre de conjectures étudiées dans la cadre de la situation choisie. Nous disions en demie teinte, car autant nous avons constaté, en situation, une amélioration de l'interprétation des énoncés doublement-quantifiés, mais nous avons également constaté des difficultés résiduelles significatives concernant leur démonstration dans certains contextes, en particulier le contexte mathématique quand sont impliquées des variables quantifiées sur un domaine infini. Cette difficulté est liée aux initiatives à prendre pour utiliser les variables présentes et prouver ces énoncés. Nous pouvons dans tous les cas compter sur la présence, à minima, d'une connaissance sur la possibilité d'avoir deux types d'énoncés (EA ou AE) qui ont des interprétations distinctes. Nous n'avons pas besoin, en effet, que la connaissance du type d'interprétation en fonction de la syntaxe soit totalement idoine mais seulement que les connaissances permettent, le moment venu, de savoir résoudre les conflits d'interprétation en se référant à des règles. Toutefois nous pouvons vraiment compter sur ces connaissances qui ont été l'enjeu fondamental de la situation et qui ont été au cœur des conflits rencontrés par les élèves. Comme pour le principe fondamental de l'analyse, nous pensons que, les connaissances disponibles sont suffisantes pour affronter la situation de la limite.

III.2. Analyse locale par phase

Dans cette partie, nous analysons pour chaque phase le déroulement et pour les parties les plus significatives, nous détaillons la dynamique en termes de rationalité qui se jouent à partir d'extraits de scripts[76].

a) Phase I

Nous présentons ici l'analyse a posteriori de cette phase dont le déroulement est décrit plus complètement en annexe 12.

[76] L'ampleur du script (170 pages) nous oblige à effectuer cette sélection.

Voici les trois conjectures étudiées lors de cette phase :

C0 : « Si f est une fonction définie sur R et $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$ alors elle a une limite quand x tend vers + infini »

C0' : « Si une fonction f est strictement croissante sur R alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ »

C0" : « Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f est une fonction croissante sur R »

Nous rappelons que les trois objectifs la phase I sont :

- Une adaptation des connaissances, issues de première et celles du cours de terminale réalisé avant expérimentation, sur les suites, en particulier passer de la convergence des suites aux limites de fonctions. Les connaissances concrétisent les conceptions qu'ont les élèves de la notion de limite. Elles ne seront ici travaillées que sur le plan pragmatique (dessin et « tend vers »).
- Une légitimation de l'usage du dessin pour donner des contre-exemple, c'est-à-dire donner au dessin une véritable efficience dans l'étude des conjectures.
- Constituer des références collectives en termes de formes prototypiques de limite et de non limites aussi bien quand la fonction est donnée par une formule algébrique que par leur graphe.

Pour cette analyse a posteriori nous allons identifier les diverses conceptions exprimées par les élèves, décrire synthétiquement l'institutionnalisation qui sera faite à l'issue de ces discussions, et vérifier l'adéquation du déroulement aux objectifs prévus.

i. Conceptions exprimées au sujet de la limite d'une fonction

La phase I est l'occasion pour les élèves de proposer des exemples et contre-exemples pour valider ou réfuter les conjectures. Ainsi les conceptions sur la limite d'une fonction sont exprimées. Nous distinguons trois types de conceptions au sujet des limites de fonctions : celles qui relèvent de la confusion fonction/suite, celles qui correspondent aux formes prototypiques de la limite, et les autres conceptions largement décrites par la littérature et que nous appelons conceptions classiques.

Les conceptions classiques

Nous présentons les différentes conceptions exprimées et des exemples significatifs :

- *La limite-barrière (La limite est vue comme ne pouvant être dépassée)*

  [>Baptiste] : Dans son nom, en lui-même, l'infini ça ne peut pas être une limite.

  [>Hadrien] : Et bien c'est quand la fonction se termine. Quand elle ne peut pas aller plus loin que la limite.

Figure 46 : La limite selon Hadrien

[>Evann] : Parce que je ne sais pas si la limite c'est forcément que ça finit sur un nombre ou que ça a besoin de... par exemple, qu'elle longe un nombre mais sans jamais le dépasser.

[>Evann] : Alors quand on a une parabole, je ne sais pas si ça c'est forcément une limite ou pas. (il trace et montre la parabole en 0 qui ne descend pas dans les négatifs)

[>Aya]: Pour la fonction sinus, ça ne peut pas dépasser donc il y a une limite.

- *La conception dynamique de la limite*

[>Mathieu] : Ben au fur et à mesure que x devient de plus en plus grand, 1/x se rapproche de plus en plus de zéro.

[>Nathan] : On reprend la même phrase: quand x devient de plus en plus grand f(x) = x, donc x se rapproche de plus l'infini. Quand x se rapproche de + l'infini, f(x) se rapproche de + l'infini.

[>Loïc] : Pour moi elle n'a pas de limite parce que plus x devient grand, on a pas la fonction qui converge... qui se rapproche de... là ça sera zéro je pense. Enfin plus x devient grand, la fonction ne se rapproche pas de zéro.

- *La limite sans la covariance (qui prend en compte seulement une seule des variables)*

[>Marine] : Je suis dans Vrai parce que pour moi j'étais partie sur l'idée que ça… quand x tend vers plus l'infini, ça tend vers plus l'infini.

- *La non unicité de la limite*

[>Nathan] : Je disais que j'étais dans Autre parce que je ne savais pas trop comment définir exactement la limite, et je me dis pourquoi une fonction n'aurait pas deux limites. Et sur la fonction sinus, ce serait -1 et 1. Elle aurait une limite positive, une limite négative, mais elle aurait quand même une limite.

Les conceptions qui relèvent de la confusion fonction/suite

Des analogies ou confusions sont réalisées au sujet de la limite d'une fonction et celle d'une suite. On trouve par exemple la confusion entre limite infini de la fonction et divergence de la suite (la divergence est entendue par les élèves comme excluant une limite infinie) :

[>Baptiste]: Donc, je suis dans Faux, parce que la fonction f(x) =x, quand x tend vers plus l'infini, la fonction elle tend vers plus l'infini, elle n'a pas de limite.

[>Maxime]: On a fait des conjectures au début de l'année. Enfin depuis qu'on fait des maths. Il y en a une dedans c'était "pour qu'une suite soit... pour qu'une suite ait une limite, il faut qu'elle soit croissante et majorée ou décroissante et minorée. Et ici elle est pas majorée, donc du coup elle ne converge pas,donc du coup elle diverge et quand elle diverge elle n'a pas de limite.

[>Quentin]: Pour moi la limite, c'est une valeur exacte. Donc, je veux que ceux qui sont dans + infini ils me donnent la valeur exacte de + infini.

On trouve aussi l'emploi des termes propres au suites :

[>Maxime]: Parce que la fonction 1/x quand x va vers l'infini, alors la fonction <u>converge</u> vers zéro.

[>Loïc]: Pour moi elle n'a pas de limite parce que plus x devient grand, on a pas la fonction qui converge...

Ou bien de leur représentation :

Figure 47 : Premier contre-exemple de Carla à la conjecture C0'

Ou encore l'usage du fameux théorème des suites croissantes majorées :

[>Carla]: si f(x) = 1 elle est majorée par 1, elle peut très bien être croissante et être majorée par un /…/ elle est majorée par un, elle converge.

Les conceptions sur les formes prototypiques

Pour ce qui est des conceptions sur les formes prototypiques de la limite nous trouvons, en fait, quelques résultats valides sur les limites des fonctions usuelles (sinus, carré, inverse) mais aussi la représentation asymptotique d'une fonction croissante ayant une limite :

Figure 48 : Deuxième contre-exemple de Carla à la conjecture C0'

ii. Institutionalisation du professeur

Etant donnés les objectifs de la situation, le professeur effectue plusieurs institutionnalisations intermédiaires limitées. A ce stade de la situation, il ne peut avoir recours à aucun argument théorique pour trancher les arguments d'élèves. Il se contente de donner du poids aux différentes conceptions de la limites susceptibles de permettre l'accès à la suite de la situation :

- Validation les formes prototypiques de la limite.
- Validation la possibilité de dire que l'infini est la limite d'une fonction.
- La limite pour une fonction peut s'étudier en + infini mais aussi – infini ou même en un nombre.
- Distinction du vocabulaire spécifique aux fonctions : limite plutôt que converge.
- Emploi provisoire par le professeur du terme « se rapprocher » à un premier niveau pour parler de la limite.

iii. Conclusion sur cette première phase

Cette première phase concernait avait trois objectifs : adapter les conceptions de première et de terminale au sujet de la limite des suites à celles des fonctions, légitimer l'emploi du dessin et constituer des références collectives au sujet des formes prototypiques de la limite. Ces trois

objectifs sont atteints. D'une part les conceptions concernant la limite d'une suite ont été discutées et régulées, soit par le débat des élèves, soit par l'institutionnalisation du professeur. La confusion tout au long des discussions a d'ailleurs beaucoup diminuée. Le dessin a été largement employé pour invalider les conjectures et illustrer la notion de limite. Enfin les formes prototypiques ont été proposées par les élèves au cours des débats et ensuite validées par le professeur. La première phase remplit donc son rôle : constituer le milieu matériel pour la suite de la situation.

b) Phase II

Nous présentons ici l'analyse a posteriori de cette phase dont le déroulement est décrit plus complètement en annexe 12.

La phase II est prévue pour commencer à donner un sens à certains formalismes liés à la notion de limite, ici celui du voisinage de l'infini. Le scénario consiste à étudier consécutivement les conjectures suivantes :

C1 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors $f(x) < g(x)$ pour tout x de R »

C2 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors $f(x) < g(x)$ *du côté de + infini* » (ou tout autre formulation des élèves destinée à « réparer » C0 en modifiant sa conclusion)

C3 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors il existe un nombre A tel que pour tout $x > A$ on a $f(x) < g(x)$ »

La phase II se déroule suivant l'analyse a priori : la conjecture 1 est résolue sans difficulté, la réparation de cette conjecture donne lieu à plusieurs essais invalidés et la conjecture 3, finalement donnée par le professeur, va provoquer une longue discussion sur le sens du nouveau formalisme. Cette formalisation du voisinage de l'infini était justement l'objectif principal de la situation. Nous choisissons donc, dans cette analyse a posteriori, d'étudier les différentes étapes de l'évolution de la signification de ce formalisme. En particulier, l'existence est avant tout matérielle et A un point à positionner. Progressivement, la variable A devient une valeur qui ne doit plus forcément être construite mais répondre d'une condition. Nous explicitons, dans ce qui suit, ce cheminement.

On peut distinguer concernant la variable A, deux étapes bien distinctes dans la discussion : l'étape où A est désignée comme un point et l'étape où A est désignée comme une valeur. L'écriture du A en lettre majuscule induit certainement une lecture géométrique de l'objet pourtant défini comme un nombre dans la conjecture. Ainsi, après avoir été placé sur l'axe des ordonnées, il est placé sur l'intersection des deux courbes de l'exemple donné. On cherche donc une localisation du point A. Parallèlement le quantificateur existentiel est envisagé d'abord comme valide lorsqu'il donne l'endroit à partir duquel la propriété f(x)<g(x) est vérifiée.

> [>Evann] : Là on voit que, à partir de A, quand x est supérieur à A, on voit que la courbe elle devient... que f devient inférieur à g. Alors que quand A est inférieur à x, g est inférieur à f.

L'énoncé est ainsi compris dans une rationalité pragmatique où déterminer la validité du « il existe A » revient à positionner explicitement A. Cela revient à concevoir la validité du quantificateur existentiel seulement dans sa dimension « existence matériel ». Evidemment ceci ne peut se réaliser, dans notre cas, que sur un exemple. En effet, l'existence d'un tel A, déterminé explicitement suppose elle-même l'existence d'une intersection. C'est ainsi que Evann, après avoir tracé deux courbes sans intersection, change d'exemple et donc modifie le dessin pour fabriquer une intersection. Ainsi pour l'exemple donné, un tel A peut être construit (à l'intersection) mais cela masque l'impossibilité de le construire ainsi dans d'autres cas. Il est, de toute manière, évident que cette construction constitue le seul moyen de prouver cette existence étant donné l'impossibilité de la déduire d'autres existences données par la définition de la limite (rappelons que les élèves ne disposent pas de cette définition). Le « point A » devient « valeur » de A, puis plus précisément valeur d'abscisse quand dans l'énoncé, le rôle de A qui est identifié (A est comparé à x) :

> [>Nathan] : C'est juste pour dire que dans la conjecture on parle pas de point, on parle juste de A, et donc, pour moi, c'est une valeur, ce n'est pas forcément un point. C'est une valeur et on compare la valeur de x avec la valeur de A.

Ce détachement du géométrique (de point à valeur) conduit à reposer la question de l'existence en dehors d'une constructibilité :

> [>Nathan] : A c'était une valeur et pas un point Donc, normalement on n'a pas à le placer sur le graphique mais vu que ce qu'on compare c'est la valeur de A avec x, si on veut le placer pour que ce soit plus clair, oui on va plutôt chercher à le placer sur l'axe des abscisses pour le comparer avec la valeur de A. Mais ce n'est pas un point donc on a pas à le placer normalement.

Ainsi la question de la preuve de l'existence modifie elle-même le sens envisageable du quantificateur existentiel :

> [>Maxime] : Ben pour moi, en fait, entre les trois schémas, le point A est bien positionné de partout parce qu'en fait il suffit juste que g(x) soit supérieur à f(x), en fait. Et pour le premier schéma, même s'il n'y a pas d'intersection, on s'en fout, on a jamais demandé qu'avant A, g(x) soit inférieur à f(x). Enfin même si elle est au-dessus, on peut mettre un point n'importe où, ce n'est pas grave.

Mais Maxime en reste à une existence matérielle. Ce premier niveau d'appréhension du quantificateur existentiel, permet cependant d'éliminer le doute d'Hadrien qui positionne la valeur de A avant l'intersection et explique que pour ce A, la propriété n'est pas vérifiée :

Figure 49 : La valeur de A qui fait douter Hadrien

> [>Maxime] : Ben je pense que son schéma, il ne marche pas. Parce que le A, il doit être à droite de l'intersection. Enfin il faut que g(x) soit supérieur à f(x) et on peut très bien placer un point. Si on le place à droite, plus à droite. Est-ce qu'on peut placer... il existe un point A? Donc, oui on peut faire un point A qui serait à droite de l'intersection.

Dans cette phase, on peut clairement observer une transition de rationalité du pragmatique au théorique concernant la définition du formalisme lié au voisinage de l'infini. Le « il existe A » passe de la seule question de la détermination en termes de la localisation géométrique précise (renvoyant le quantificateur existentiel à une signification restreinte) à une question sur le type d'existence beaucoup plus ouverte (en particulier à celle, pour notre cas, des courbes sans intersections). Cependant, du point de vue de la démonstration, ce formalisme reste à une rationalité pragmatique puisque l'existence est seulement liée à l'évidence perçue sur un dessin. Cette stagnation est logique puisque les arguments théoriques de cette existence ne sont pas disponibles.

Dans les deux cas on assiste à une transition de rationalité jusqu'à la rationalité théorique. Et cette transition permet de donner un sens partagé aux objets en question.

La discussion a permis progressivement de donner une signification idoine aux énoncés successifs jusqu'à l'énoncé le plus formalisé à travers des transitions de rationalités. De part ailleurs, nous voyons aussi progressivement complètement disparaître l'usage des conceptions relatives à la notion de limite de suite. En particulier, les graphes de fonctions ne sont plus dessinés avec des points, il n'est plus fait référence à la convergence mais à la limite de la fonction, l'utilisation de la représentation graphique pour déterminer les points fixes d'une suite définie par récurrence en guise de limite de fonction est disqualifiée…La conjecture C3 a atteint ses objectifs, ce qui devrait permettre à la phase III un déroulement optimal.

c) Phase III

Nous présentons ici l'analyse a posteriori de cette phase dont le déroulement est décrit plus complètement en annexe 12.

Cette troisième phase a pour objectif de déstabiliser la conception de limite des élèves afin de laisser de la place à la notion de limite formalisée par sa définition en epsilon/alpha. En particulier, on donne des fonctions dont la limite parait de plus en plus difficile à évaluer avec les seules conceptions des élèves, ce qui devrait conduire à l'émergence d'un doute les concernant, c'est-à-dire au minimum un début de transition de rationalité au sujet de la définition de limite. Dans cette phase se joue la question de la définition de la limite donc de la mobilisation de la composante définition de la rationalité pour la limite au-delà de la rationalité pragmatique qui avait été essentiellement mobilisée à la phase I. Il s'agit de voir si un doute apparait et s'il conduit à l'exigence d'une définition, exigence que nous avions déjà travaillée dans les situations précédentes (Nombres consécutifs de la situation des nombres, grille gagnante et convention d'interprétations des énoncés doublement quantifiés pour la situation Q^2)

Nous distinguons trois types d'interventions :

- Les interventions qui expriment des conceptions au sujet de la limite pour justifier.

Ces interventions correspondent essentiellement aux conceptions exprimées déjà à la phase I. où elles sont utilisées pour valider ou invalider les limites des fonctions proposées. Ces conceptions qui vont être cette fois-ci systématiquement réfutées.

- Les interventions qui cherchent à réfuter des conceptions.

Les conceptions de la limite exprimées entrent en contradiction avec des connaissances validées sur la limite. Ces contradictions sont alors mobilisées pour réfuter ces conceptions. On retrouve la dynamique initiée particulièrement lors de la situation sur la quantification (chapitre 7) sur la question de la validité et de la validation. Ici on peut observer le même phénomène : il y a accord sur la validité mais le désaccord a lieu au sujet de la validation, et cela malgré le manque d'une définition de la limite. On comprend alors le rôle déterminant des connaissances validées à la phase I.

- Les interventions qui proposent de nouvelles fonctions pour justifier une nouvelle conception

De nouvelles fonctions sont proposées par les élèves sous forme de dessins comme illustration de leurs nouvelles conceptions de la limite, nouvelles conceptions qui tentent de prendre en compte les réfutations précédentes.

Nous recensons dans le tableau ci-dessous les conceptions exprimées et les réfutations correspondantes :

Conceptions	Réfutations
Conception : limite barrière [>Caroline] : Pour moi f n'admet pas de limite en 2,9 parce qu'elle est croissante... elle est strictement... enfin elle dépasse 2,9. Avec le sommet des pics c'est 3,1.	[>Sébastien] : Donc, pour l'argument de Caroline, le tout premier, je ne suis pas d'accord parce qu'il y a des fonctions décroissantes, on l'avait fait pour contrer... pour contrer la conjecture deux je crois, c'était si la limite de f est inférieure à la limite de g alors limite de g majore f. [>Quentin] : C'était son tout premier Faux pour Caroline, je vais prendre comme exemple la fonction 1/x. La fonction 1/x où au départ la fonction est en dessous de zéro. Quand on passe zéro elle est au-dessus de zéro. /…./ Elle est des deux côté de zéro. Alors que zéro c'est la limite. Pourtant ça revient au même que là-bas.
Conception : limite barrière [>Maxime] : Je pense que ce n'est pas parce qu'elle dépasse 2,9 qu'elle n'a pas de limite. Et je pense que la limite c'est 3,1.	[>Sébastien] : Ensuite c'est l'argument de Maxime, j'avais envie de dire que la fonction, elle est du même genre que la fonction sinus. Or la fonction sinus, elle n'a pas de limite. Donc, on ne peut pas dire...
Conception dynamique [>Loïc] : Pour moi ce qu'a dit Maxime c'est faux. Parce qu'une limite, c'est un nombre vers lequel la fonction fait que de se rapprocher. Et la fonction déjà elle est égale à 3,1 donc ça ne peut pas être une limite 3,1 et tous les... tous les dix puissance six, la fonction s'éloigne de 3,1 aussi.	[>Sébastien] : Ensuite c'est l'argument de Maxime, j'avais envie de dire que la fonction, elle est du même genre que la fonction sinus. Or la fonction sinus, elle n'a pas de limite. Donc, on ne peut pas dire...

Conception dynamique [>Loïc] : C'est se rapprocher pour tout x alors que là, pour tout x des fois ça se rapproche, des fois ça s'éloigne. C'est comme la fonction sinusoïdale. Il n'y a pas de limite.	
Conception : limite barrière [>Caroline] : Enfin, je ne sais pas si c'est parce qu'il ne comprend pas ce que je veux dire mais en gros, enfin, pour moi on ne peut pas entraver la limite. On ne peut pas passer dessus, quoi. /…/ Toi, tu as compris comme Sébastien : dépasser sa limite dans le sens de la hauteur. Mais c'est, peu importe que la limite soit au-dessus ou en dessous, tu ne peux pas la couper... et revenir.	[>Louis] : Je ne sais pas vraiment si... donc par exemple imagine une limite comme ça et une fonction qui ferait comme ça. C'est... je ne sais pas ce que tu en penses ? **Figure 55 : Dessin de Louis à propos des limites qui sont coupées** [>Louis] : Ben moi je pense que si.

Tableau 46 : conceptions sur les limites et réfutations associées

Ces réfutations systématiques conduisent à la sophistication des propositions, propositions qui tentent de prendre en compte les réfutations exprimées. Par exemple Louis produit une série de dessins sensés traduire son idée de limite. Mais les anciens mots sont insuffisants pour exprimer cette nouvelle complexité :

> [>Louis] : Alors problème de limite, il y a plusieurs cas. Alors tout d'abord on a le cas genre comme la sinusoïde. Où on a une fonction qui fait comme ça, à peu près. Et là on dit qu'il n'y a pas de limite. Vous êtes d'accord ? (Les élèves mollement : oui !). Ensuite il y a un autre cas, c'est le cas où la fonction elle fait comme ça. Comme ça. Et donc là je ne sais pas si vous êtes tous d'accord, mais la limite pour moi c'est cette valeur-là. Elle est des fois au-dessus, des fois en dessous mais elle se rapproche de cette valeur. Donc, pour moi la fonction comme ça, la limite c'est comme ça. Ça ne représente pas encore ça mais j'ai une troisième fonction.

Figure 50 : Les trois (non) limite de Louis

> [>Louis] : Et qui représente plus cette fonction-là. C'est qu'est-ce que vous pensez de la fonction qui fait comme ça ? Donc, les pics rétrécissent mais en gros les pics rétrécissent et descendent vers le bas. Et là ce serait la limite de celle-là. Et en fait c'est exactement comme si on avait une limite qui ferait comme ça, sauf qu'il y a des pics et qu'ils rétrécissent. (Rires dans la classe) Et donc pour moi, cette fonction-là, elle a pour limite... elle a pour limite la droite qui est là. Et donc pour moi ici, c'est pareil parce que les pics ils rétrécissent et que ce soient les valeurs qui sont là, ou les valeurs qui sont là, elles se rapprochent toutes de deux virgule neuf à chaque fois. Voilà c'est comme ça.

En donnant ces trois cas, Louis se démarque de toutes les autres conceptions. En effet, le deuxième cas pour lequel il y a, selon, lui une limite, ne relève ni d'une conception barrière, ni d'une conception « se rapproche » au sens donné précédemment, ni encore ça ne coupe pas, ni de modèle monotone. Pourquoi alors produire un troisième cas ? Notre hypothèse est que ce troisième cas sert à donner du sens à une nouvelle forme de « se rapprocher ». Cette nouvelle conception, selon nous, cherche à matérialiser les éléments pertinents des autres conceptions en dépassant les contradictions qu'elles ont montré générer. Ainsi, Louis semble regarder l'allure générale de la fonction pour déclarer qu'elle se rapproche. Tout se passe comme s'il regardait les distances maximales et que celles-ci diminuent. On peut qualifier la proposition de Louis comme un début de recherche de caractérisation.

Cependant utiliser, même sous une forme nouvelle, la conception dynamique « se rapprocher », appelle à de nouvelles réfutations. Ainsi, Hadrien introduit une autre subtilité par rapport au modèle de Louis : une fonction dont la hauteur des pics est décroissante mais qui n'a pas de limite.

> [>Hadrien] : Moi je suis dans Autre en fait mais c'est un peu bizarre, comme on avait vu le cas d'une puce qui sautait et elle faisait à chaque fois la moitié de sa distance en saut. Et c'était pour savoir si les pics ça pouvait être pareil mais au lieu qu'ils finissent à 2,9, ils tendent vers 3, mais toujours en étant décroissants mais en augmentant les décimales après.

Figure 51 : Le contre-exemple « puce » d'Hadrien

Cette phase III donne lieu à la mobilisation d'une rationalité pragmatique, marquée par des affrontements de conceptions, puis la mobilisation une rationalité franchement empirique s'est développée, à travers des réfutations reposant sur des certitudes issues des connaissances sur la limite. On a pu voir l'importance et le rôle des connaissances mises en place initialement par la première phase : ce sont elles qui autorisent cette période de réfutation. Cette période de réfutation systématique conduit à un questionnement de plus en plus théorique et sophistiqué, avec le modèle de Louis exprimé d'abord à l'aide d'exemples puis ensuite précisé sur le contre-exemple d'Hadrien. Le niveau de rationalité sur la composante définition de la limite à l'œuvre prépare la future transition de rationalité théorique par un questionnement profond sur les conceptions. Ainsi, la phase IV qui a pour objectif de réaliser cette transition devrait pouvoir jouer pleinement son rôle.

d) Phase IV

Nous présentons ici l'analyse a posteriori de cette phase dont le déroulement est décrit plus complètement en annexe 12.

La phase IV a pour objectif d'aboutir à la formalisation en epsilon/alpha de la définition de limite. On utilise pour cela l'étude d'une conjecture correspondant au principe fondamental de l'analyse appliqué aux fonctions : « Pour tout réel $\varepsilon > 0$ tel que si $x > 50$, on a $2 + \varepsilon \geq f(x) \geq 2 - \varepsilon$ ». Lorsqu'ensuite on inverse les quantificateurs de la propriété P2 : « Il existe A réel, pour tout réel $\varepsilon > 0$ tel que si $x > A$, on a $2 + \varepsilon \geq f(x) \geq 2 - \varepsilon$ » cela donne la propriété P3 : « Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe A réel tel que si $x > A$, on a $2 + \varepsilon \geq f(x) \geq 2 - \varepsilon$ » qui est étudiée et correspond au formalisme de la limite. Nous étudions trois évolutions pendant cette phase, celle de la rationalité, celle de l'interprétation de la double quantification et enfin celle des connaissances liées à la notion de limite.

i. Evolution de la rationalité

Nous rappelons que, sur le plan de la rationalité, nous avons observé une évolution progressive entre la phase I et II, où cette rationalité demeurait essentiellement pragmatique sur les trois composantes, à la phase III, où une rationalité empirique de réfutation sur la composante définition a largement été mobilisée. Dans cette phase IV nous allons voir comment cette rationalité empirique de réfutation continue sur la composante démonstration, cette fois-ci, et comment cette dernière prépare le terrain à une rationalité théorique.

<u>Rationalité empirique</u>

Nous présentons dans ce qui suit, trois illustrations clefs du processus de réfutations. Ces illustrations montrent qu'à travers ces réfutations tous les points clefs des conjectures proposées sont étudiées un à un.

- La condition portant sur x

  Si le vote sur C1.1 : « Si *f* vérifie P1 alors *f* est bornée » donne une grande majorité de Vrai, Aya explique pourquoi elle pense que C1.1 est fausse et rapidement cela convainc toute la classe. Elle reprend l'exemple dessiné par le professeur où epsilon vaut 0,01 et le complète :

Figure 52 : Contre-exemple de Aya à la conjecture C1.1

[>Aya] : Parce que comme on peut voir dans l'exemple, la fonction, elle peut dépasser deux virgule zéro un ou un virgule quatre-vingt-dix-neuf avant.

- La condition portant sur le quantificateur universel du epsilon

  Pour cette conjecture (C1.5 : « $f(x) = 2 + 1 / x$ vérifie P1 ») une seule élève pense qu'elle est vraie, quinze élèves pensent qu'elle est fausse et onze ont voté Autre[77]. Baptiste va produire un contre-exemple en choisissant une valeur pour epsilon (0,01) et une valeur de x (51).

- La condition portant sur l'ordre de la double quantification

  Pour la conjecture C1.7 : « Si f vérifie P1 alors pour tout $x > 50$ on a $f(x) = 2$ », on voit une rationalité de réfutation à l'œuvre :

[>Erika] : La fonction elle est entre deux plus epsilon et deux moins epsilon et elle n'est pas forcément égale à deux.

Figure 53 : Le (faux) contre-exemple d'Erika à C1.7

Ce contre-exemple va lui-même être réfuté par Mathieu :

[>Mathieu] : En fait epsilon, c'est pour... dans P1 on a pour tout epsilon, on a le droit de changer epsilon. Et si on trouve un epsilon pour lequel la fonction en certains x est inférieure à deux moins epsilon ou supérieure à deux plus epsilon, la fonction ne correspond pas, enfin, ne vérifie pas P1. Donc, j'ai mis un epsilon tel que certains pics de la fonction soit au-dessus de deux plus epsilon.

[>Le professeur] : Alors pour toi si ce n'est pas un contre-exemple, c'est quoi ?

[77] Les comptes sont parfois approximatifs car ils servent surtout, pour le professeur, à représenter les forces en présences.

[>Mathieu] : Ben c'est un hors-sujet parce que ça ne vérifie pas P1.

Figure 54 : L'invalidation du contre-exemple d'Erika par Matthieu

On remarque parallèlement la prise en compte progressive devant ces réfutations des différentes contraintes imposées. Par exemple, lorsque sont demandés des exemples de P1, la première réponse évite la condition $x > 50$ avec la proposition $f(x)=2$, et la seconde proposition $2+1/x$ est invalidée, et la troisième prend bien en compte cette contrainte :

Figure 55 : L'exemple de fonction vérifiant P1 de Quentin

D'autre part, le refus de certains élèves de statuer sur une conjecture comportant le mot « borné à partir de 50 » car borné a seulement été défini pour les suites mais pas pour les fonctions, montre qu'en ce qui concerne la composante définition de la rationalité, une exigence théorique est à l'œuvre : définir les mots employés.

<u>Rationalité théorique</u>

La rationalité mobilisée devient alors beaucoup plus théorique, notamment en ce qui concerne la composante validation, puisqu'on y voit une démonstration par l'absurde de la conjecture C1.7 : « Si f vérifie P1 alors pour tout $x > 50$ on a $f(x) = 2$ » qui constitue le cœur de la première partie de la phase IV.

Quentin entreprend un début de démonstration par l'absurde :

> [>Quentin] : Pour montrer que c'est vrai je vais montrer que f (x) ne peut pas être différent de deux. Si ce n'est pas différent de deux, ça veut dire que c'est égal à deux, on est d'accord. Donc, si f (x) est différent de deux, il y a forcément une valeur comprise entre f (x) et deux. Donc, il y a forcément une valeur de deux plus epsilon comprise entre f (x) et deux. Et donc P1 ne sera plus vérifié. Donc, l'exemple sera faux, f(x) différent de deux.

Figure 56 : début de démonstration par l'absurde de C1.7 par Quentin

Quentin utilise une démonstration par l'absurde et le principe qu'entre deux réels distincts on peut mettre un troisième réel. Mais sa démonstration manque de quantificateurs pour être explicite et convaincante (la classe n'est pas encore convaincue). Louis va proposer de compléter la démonstration de Quentin, en particulier, il va être plus explicite sur la quantification :

> [>Louis] : Si on prend la première fonction qu'on avait f (x) =2, donc celle-là. C'est ce qu'on essaie de dire là. En fait je vais partir comme Quentin : si la fonction f (x) est différente de deux, ça veut dire qu'à un moment elle fait au moins entre guillemet "un soubresaut" comme ça, elle est au moins pour une valeur de x différente de deux. Donc, par exemple, là.

Figure 57 : le dessin de Louis pour sa démonstration

> [>Louis] : On peut la faire petite ou on peut la faire bien plus grande. Ici elle est en dessous de deux plus epsilon. Et si on prend pour valeur ici h, et bien on pourra toujours trouver une valeur d'epsilon qui sera plus petit que h qui sera en fait le plus, on va dire le plus haut pic de la fonction qui se rapprocherait de deux en fait.

On a pu voir comment une rationalité empirique de la réfutation a permis progressivement d'affiner les conjectures au questionnement. Vient un moment où la conjecture (C1.7) apparait comme vraie et est démontrée. Ainsi, la rationalité empirique a préparé le terrain à la rationalité théorique. Ceci est particulièrement visible dans l'épisode où le faux contre-exemple d'Erika (réfutation) va initier la démonstration. En effet, Ceux qui étaient convaincus que le contre-exemple était faux, ont cherché à l'invalider. Or, ce qui est justement difficile à réaliser dans un raisonnement par l'absurde consiste à faire l'hypothèse de la fausseté de la conclusion. Et finalement, en produisant son faux contre-exemple, Erika a précisément matérialisé cette hypothèse. Ne reste plus qu'à prouver que ce contre-exemple est bien faux. C'est ce qu'a fait Matthieu. Quentin n'a alors qu'à rassembler les morceaux pour proposer cette démonstration.

ii. Evolution des connaissances sur la double quantification

La question de l'interprétation a été l'objet d'une situation qui a abouti à la distinction de deux types de double quantification AE et EA et à la formalisation des règles d'interprétation selon la logique dialogique. La phase I n'as pas donné lieu à l'étude d'énoncés doublement quantifiés, tandis que la phase II a mis en place le formalisme du voisinage de l'infini qui conduit à exprimer la conjecture initiale C1 en C3 qui comporte une double quantification. Aucune difficulté n'a été rencontrée au sujet de l'interprétation de C3 malgré cette présence d'une double quantification. Cependant toute la phase IV va donner lieu à des discussions au sujet de l'interprétation des quantificateurs. On retrouve ainsi des inversions « masquées » avec des contre-exemple à C1.7 : « Si f vérifie P1 alors pour tout $x > 50$ on a $f(x) = 2$ » sous forme de fonctions dépendant d'epsilon. En effet, pour appréhender C1.7, il faut envisager deux énoncés à la fois, celui de C1.7 et celui de P1. Mais d'autres inversions proviennent du scénario qui les provoque lui-même en opacifiant l'enjeu véritable de l'étude (les conséquences de l'inversion des quantificateurs). C'est particulièrement le cas, par exemple, avec l'étude de $C\varepsilon_5$: « Si f vérifie P3 alors il existe B tel que pour tout x supérieur à B on a $f(x) = 2$ » qui se fait par l'intermédiaire du statut relativement à la conjecture $C\varepsilon_5$ d'une fonction donnée.

Pour ce qui concerne la conjecture C1.7 : « Si f vérifie P1 alors pour tout $x > 50$ on a $f(x) = 2$ » certaines propositions de contre-exemples (Valentin, Baptiste, Erika) relèvent d'une interprétation inversée de la quantification :

> [>Valentin]: J'ai un contre-exemple, mais je suis pas sur il est …/…/ C'est si on définit la fonction en fonction de x et epsilon.
>
> [>Baptiste]:[37:38] Je m'étais trouvé un contre-exemple mais après ce que vous avez dit à Valentin, ça ne marchait pas. C'était epsilon fois sinus de x plus deux.

Pour ce qui est des propositions de Valentin et Baptiste, c'est le professeur qui les refuse en demandant de faire appel à des fonctions d'une seule variable.

> [>Erika]: La fonction elle est entre deux plus epsilon et deux moins epsilon et elle n'est pas forcément égale à deux. (Elle parle de la fonction qu'elle a dessinée - figure 53)

Pour ce qui est de la proposition du contre-exemple d'Erika, il correspond bien, à une manipulation illicite des quantificateurs. En effet on peut modéliser la conjecture P1 par « $\forall f$ (Si $\forall \varepsilon$ $on\ a\ R(f,\varepsilon)$ alors C(f)) » est interprété comme (Si $\forall \varepsilon\ \exists f\ tel\ que\ R(f,\varepsilon)$ alors C(f)), autrement dit Erika introduit une dépendance de f à epsilon. Ce sont les élèves qui invalident ce contre-exemple.

La phase IV qui repose justement sur une inversion des quantificateurs, va donner lieu à une longue discussion sur l'interprétation de la double quantification au moment du passage de P2 à P3. La question posée initialement est extrêmement complexe et cela pourrait expliquer la confusion. Il s'agit, considérant la conjecture $C\varepsilon_5$: « Si f vérifie P3 alors il existe B tel que pour tout x supérieur à B on a $f(x) = 2$ » où P3 est « Pour tout epsilon strictement positif, il existe un réel A tel que pour tout réel x supérieur à A, on a $f(x)$ qui est compris entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. », de déterminer si la fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ est un exemple, un contre-exemple ou un hors-sujet de $C\varepsilon_5$. De fait, les élèves collectivement pensent que la conjecture P3 est vraie, la confondant avec P2, et donc que f en est, pour eux, un hors-sujet, puisque, pour eux, f ne vérifie pas P3. Le professeur va alors effectuer un effet de contrat de rationalité en donnant plusieurs valeurs d'epsilon et en demandant de déterminer le A correspondant. Cette intervention va faire basculer certains élèves dans l'interprétation correcte et c'est à partir de là que commence une longue discussion pour départager les deux interprétations dont nous proposons un « court » extrait :

> [>Sébastien] : En fait je voudrais demander à ceux qui pensent que c'est vrai de choisir un A, n'importe quel A et je pourrais à chaque fois trouver un contre-exemple en fait.

Thomas alors répond que Sébastien interprète selon une inversion de quantificateur :

> [>Thomas] : Mais en fait lui, je pense, qu'il comprend la question dans le sens, il existe pour tout alors que la question en ce moment elle est écrite pour tout, il existe. Donc, ça serait à lui de nous proposer un epsilon et a nous de lui trouver un A.
>
> [>Le professeur] : Ah oui, alors tu dis : on ne joue pas le même jeu. Toi tu es en train de jouer le jeu de...ça c'est le jeu de "il existe pour tout", c'est-à-dire ce qu'on avait appelé EA, et nous notre jeu, c'est "pour tout il existe", c'est-à-dire AE et dans ce cas-là c'est à lui de... c'est qui qui propose dans ce cas-là ?
>
> [>Thomas] : Sébastien.
>
> [>Le professeur] : Sébastien propose un quoi ?

[>Maxime] : Sébastien il faut qu'il propose un epsilon et nous on trouve un A qui marche.

[>Thomas] : C'est Sébastien qui doit proposer un epsilon et nous on trouve un A qui marche.

[>Maxime] : Ouais.

Mais Sébastien a une autre interprétation du jeu, ce qui déclenche une discussion :

[>Sébastien] : En fait, moi je pense que pour chaque A qu'ils choisiront, j'ai le droit de prendre tous les nombres qui se situent entre 0 et plus l'infini. Pour epsilon.

[>Le professeur] : Donc, tu dis que ceux qui pensent que c'est vrai donnent un A et toi tu choisis l'epsilon qui va faire un contre-exemple.

[>Sébastien] : Oui.

[>Le professeur] : D'accord.

[>Sébastien] : C'est toujours celui qui défend le « il existe » qui défend en premier parce que celui qui "a pour tout" il peut choisir justement tout (plusieurs élèves répondent : je ne suis pas d'accord avec toi).

[>Thomas] : Moi je ne suis pas d'accord avec toi.

[>Baptiste] : Tu voudrais choisir un seul epsilon ?

[>Sébastien] : Je peux choisir tout et j'ai le droit d'en choisir qu'un.

[>Thomas] : Tu en choisis qu'un et après c'est au défenseur d'en choisir un.

[>Mathieu] : Et l'attaquant avec un autre epsilon. (Là beaucoup d'élèves répondent à la fois).

La discussion va encore durer un quart d'heure sans interruption pour départager la bonne interprétation et cette question sera tranchée lorsque Margot utilisera les références sur la logique dialogique données lors de la situation de la double quantification. Après cela quasiment toute la classe est d'accord sur la même interprétation et pense que la fonction f vérifie P3, autrement dit dissocie P3 de la nécessité d'égalité de f à deux. Cette dissociation est d'autant plus manifeste quand ils déterminent le A en fonction de epsilon, ce qui permet bien à chaque epsilon d'associer une valeur de A qui réalise la condition pour $f(x)$ d'être comprise, à partir de A, entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. Nous pensons que lors de cette démonstration, pour des cas particuliers, puis dans le cas général se forge un début de compréhension sur la traduction de la condition P3 sur le comportement de f. En effet, le fait pour $f(x)$ de pouvoir être suffisamment « proche » de deux sans devoir être égal à deux n'est possible, cela se voit dans les calculs de A, que parce que la condition porte sur des x de plus en plus loin. Cette hypothèse de mise en parallèle du comportement décrit en termes de « se rapprocher » et celui du formalisme de P3, va se vérifier en deux occasions immédiatement. On remarquera en tout cas deux traits importants dans cet épisode. Tout d'abord, devant la complexité pour les élèves d'aborder la situation comme elle est présentée initialement, le professeur a choisi d'adapter le scénario et propose directement le jeu dialogique. Ceci est une entorse majeure à l'adidacticité de la situation et au scénario prévu. On pourrait penser que cette intervention est de nature à empêcher irrémédiablement le jeu des conflits puisque ce faisant il indique la bonne interprétation. Mais c'est sans compter sur une forme de liberté de penser des élèves qui pour certains continuent de penser selon leur propre interprétation et le conflit d'interprétation EA/AE a bien lieu et se développe largement comme s'il n'y avait pas eu « d'intervention magistrale ». Ensuite, lors de la discussion, les élèves identifient parfaitement les deux interprétations possibles, le contexte s'y prête davantage, et finissent par se référer à une convention syntaxique commune,

les règles de la logique dialogique, celle qui avait été adoptée pour la situation de la double quantification. Dès lors, il n'y a plus de conflit.

En guise de conclusion, le scénario, tel que conçu initialement, masque le vrai problème de l'inversion des quantificateurs en attirant l'attention davantage sur le statut de la fonction f. Déterminer le statut de f signifie évaluer deux choses : déterminer si f vérifie la conclusion et si f vérifie l'hypothèse. Même en sachant que la conclusion n'est pas respectée par *f*, il faut néanmoins aussi se demander si l'hypothèse l'est, car cela est discriminant pour différencier contre-exemple de hors-sujet. Manifestement l'hypothèse P3 ressemble trop à l'hypothèse précédente P2 pour que la distinction soit faite dans ce contexte. Nous pensons effectivement que les connaissances concernant l'interprétation de la double quantification, en particulier le fait de savoir qu'il existe deux types de double quantifications EA et EA qui se ressemblent mais n'ont pas la même interprétation, sont mobilisables lorsque le contexte d'interprétation est dépouillé. Mais dans ce cas, il faut tenir simultanément beaucoup de paramètres pour réaliser l'évaluation de la fonction f par rapport à la conjecture Cε_5.

iii. Evolution des connaissances sur la limite

Nous rappelons que la phase I a permis d'exprimer les conceptions de la limite, que la phase II a permis de les exploiter pour donner un sens aux conjectures et un formalisme au voisinage de l'infini, et qu'enfin la phase III les a fortement destabilisés par l'étude de cas pathologiques (les monstres). Nous avons, à ce stade, dans la phase IV, des conceptions de limite qui demeurent puisque destabilisées mais non remplacées, mais ces conceptions sont devenues fragiles. Il s'agit justement dans cette phase IV d'établir un pont entre des conceptions essentiellement dynamiques (ça se rapproche) et ce que le formalisme de la limite peut traduire vis-à-vis de ces conceptions. A la fin de la phase IV les élèves peuvent clairement établir un lien le formalisme

de P3 et leur conception initiales de la limite. En effet, lorsque le professeur demande de réparer la conjecture Cε_5 : « Si f vérifie P3, alors il existe B tel que pour tout x réel avec $x > B$, $f(x) = 2$. », les élèves proposent Cε_6 « Si f vérifie P3, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ » . Cette conjecture recueille la quasi-unanimité de Vrais. C'est Maxime qui vient expliquer pourquoi il pense vraie la conjecture. Il vient au tableau pour dessiner et expliquer, c'est à ce moment-là qu'Aya qui est la seule à avoir voté Autre, pose une question fondamentale, le lien entre « se rapproche » et « limite » :

Figure 58 : L'illustration de P3 par Maxime

> [>Maxime] : Si tu as une fonction... en fait chaque fois qu'on va choisir un A l'epsilon il va... enfin tout ce qui sera au-dessus de A en fait, ce sera entre deux moins epsilon et deux plus epsilon.
>
> [>Maxime] : Tu parles à tout le monde, pas seulement à Aya.

[>Mathieu] : Mets bien deux plus et deux moins (il n'avait qu'écrit epsilon et moins epsilon)

[>Maxime] : Ouais (il rajoute deux). En fait ta fonction elle sera toujours entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. Et on aura beau raccourcir l'epsilon, la fonction elle se rapprochera toujours de deux en fait. Du coup ça fera que la limite ça sera deux.

[>Aya] : Oui mais quand une fonction se rapproche de deux c'est pas que la limite c'est deux ?

[Le professeur] : C'est quoi ? Aya c'est quoi que tu poses comme question ?

[>Aya] : Si la fonction se rapproche de deux, est-ce que la limite est forcément deux ou pas ?

[>Maxime] : Ben là en fait c'est la même distance entre deux plus epsilon et deux moins epsilon, la distance c'est epsilon en fait et du coup ça va réduire tout ça en même temps. Enfin si on réduit epsilon, ça va réduire tout ça en fait, ça ira vers deux, ça ne pourra pas aller vers autre chose en fait. Enfin je ne sais pas si tu vois ?

Il y a donc bien un lien qui est perçu entre ce que le formalisme signifie et l'idée de « se rapprocher ». Ce n'est que dans un deuxième temps (phase V), lorsqu'on étudiera avec ce nouveau formalisme les cas pathologiques de la phase III, cas que la conception « se rapprocher » ne peut pas résoudre, que l'on pourra percevoir l'efficacité du nouveau formalisme : non seulement il répond des cas évidents mais aussi des cas pathologiques. Alors la question d'Aya est pleine de sens, la conception « se rapprocher » pour elle a été discréditée à la phase III, maintenant elle a l'air de se demander comment qualifier de limite le comportement de la fonction si limite ne signifie plus « se rapprocher ». Cela signifie d'une part qu'elle associe bien le formalisme à « se rapprocher » mais qu'elle questionne maintenant le sens de la limite. Nous rapprochons cette question du problème de l'existence d'objets et de leur définition que nous avons déjà évoqué : comment définir un objet s'il n'a pas une forme d'existence, mais comment existe-t-il en mathématiques sans définition ? En tout cas, la question d'Aya permet au professeur de commencer son institutionnalisation par les questions initiales qui avaient motivées l'étude : la question de la limite et son rapport à l'approche intuitive pleine de sens mais nécessitant une objectivisation par une définition idoine pour pouvoir discriminer les cas pathologiques et démontrer les propriétés.

iv. Conclusion

L'institutionnalisation s'achève avec la définition de la limite, du rôle spécifique d'epsilon et A dans la définition. Finalement, cette phase IV a pu jouer son rôle, associer la notion de limite dans sa première conception « se rapprocher » et le nouveau formalisme de sa définition. La question d'Aya met en évidence la négociation délicate qu'il y a pour introduire un nouveau savoir en comptant sur des conceptions pour lui donner du sens (ici le « se rapprocher »), conceptions auxquelles ce savoir a simultanément vocation à se substituer. Nous constatons que toutes les connaissances précédemment travaillées (nombres quantificateurs) ont été mobilisée comme prévu, même si parfois avec quelques difficultés, et ont permis ce franchissement délicat. En effet les connaissances sur le principe fondamental de l'analyse ont mené jusqu'à une démonstration sans qu'aucun effet de contrat ne soit nécessaire (C1.7). Les connaissances sur l'interprétation de la double quantification ont finalement permis l'association du formalisme avec la conception initiale « se rapproche », et les connaissances sur la définition justifient qu'on adopte une définition pour matérialiser enfin le concept de limite. Nous avons constaté que le professeur, au moment de l'inversion des quantificateurs a effectué un effet de contrat de rationalité en donnant la méthode d'interprétation de l'énoncé doublement quantifié étudié.

Si l'impact s'est finalement avéré léger, nous avons tenu à chercher les causes de ce phénomène. Nous avons fait l'hypothèse que les connaissances n'étaient principalement pas en cause. En effet nous n'avions pas comme objectif, à l'issue de la situation Q², de générer les connaissances susceptibles de résoudre tous les cas d'interprétation de double quantification, mais seulement celles qui permettent d'identifier deux cas possibles d'interprétation et les rapporter à une convention commune partagée. C'est essentiellement ce que l'on a pu observer quand le professeur a fini par simplifier le contexte qui masquait le changement dans la double quantification.

En termes de rationalité, nous avons pu identifier, dans cette phase IV, la mobilisation d'une rationalité résolument théorique. Rationalité théorique qui a élevé le niveau d'exigence jusqu'à rendre nécessaire la définition de limite : pour justifier qu'on se préoccupe de ce formalisme complexe, il faut être prêt à exiger que les objets en jeu répondent de la théorie. Sur chacune des composantes de la rationalité, on observe effectivement un niveau d'exigence théorique évident. Pour ce qui est de la phase V, le nouveau formalisme de la limite, perçu comme compatible avec la conception « se rapproche » de la limite, doit pouvoir montrer qu'il dépasse cette conception en s'attaquant aux cas pathologiques rencontrés non résolus à la phase III, et sur lesquels cette conception s'est avérée buter. Compte tenu du travail réalisé, les connaissances nécessaires pour la phase V sont disponibles.

e) Phase V

Nous présentons ici l'analyse a posteriori de cette phase dont le déroulement est décrit plus complètement en annexe 12.

L'objectif de cette phase est d'éprouver l'efficience du nouveau formalisme pour la démonstration : d'une part discriminer les limites finies en l'infini et les non limites finies en l'infini avec ce nouvel outil, d'autre part prouver des conjectures élémentaires. Ces deux aspects sont les significations fondamentales que nous avons retenues dans notre métaphore fondamentale de la notion de limite. Reste à vérifier si la situation a rendu possible finalement l'accès à ces significations.

Nous distinguons ici deux types de démonstrations à partir de la définition de la limite : celles qui consiste à choisir un epsilon dans le cas de l'invalidation d'une limite ou bien celui de la démonstration d'une inégalité à partir d'une limite connue, et celui de la démonstration qui consiste à établir la relation entre epsilon et A lorsqu'on veut montrer qu'il y a bien une limite. Nous montrons que le premier cas est plus facilement réalisé par les élèves que le second.

i. Cas du choix d'un epsilon

Nous avons trois cas correspondants au choix d'un epsilon. Le premier est celui de l'invalidation de la limite du « monstre », qui est résolu par Juliette et sa preuve est adoptée collectivement :

Figure 59 : La fonction dite « le monstre »

> [>Juliette] : Ben par exemple, là c'est marqué pour tout epsilon, alors si on prend epsilon égal 0,01 par exemple. On ne trouvera pas de A tel que pour tout x plus grand que A, elle sera comprise entre 2,91 et 2,89. Oui parce que les pics ils sont toujours de 0,2.

Le deuxième cas correspond à démontrer une inégalité à partir d'une limite connue, en étudiant la conjecture : "si la limite en plus l'infini de f est 1 alors il existe un réel A tel que pour tout x supérieur à A, $f(x)$ est supérieur à 0,6". Mathieu démontre ce cas avec facilité et la démonstration est aussi adoptée collectivement :

> [>Mathieu] : D'abord la définition de la limite : pour tout epsilon supérieur à zéro, il existe un A tel que pour tout x supérieur à A on a L moins epsilon inférieur à f (x) inférieur à L plus epsilon. Ici L c'est 1. Donc la limite de la fonction c'est 1. Donc, on a bien un A tel que, par exemple pour epsilon égal 0,3, on a f (x) compris entre 1-0,3 donc 0,7 et 1+0,3 donc 1,3. Donc f (x) à partir d'un certain A est toujours supérieur à 0,7 qui est supérieur à 0,6.

Le troisième cas correspond à démontrer une inégalité à partir de deux limites connues, en étudiant la conjecture : « Si limite quand x tend vers plus l'infini de f (x) égal 1 et limite de g (x) quand x tend vers plus l'infini égal 4 alors il existe un réel A tel que pour tout x supérieur à A, on a f (x) qui est inférieur strictement à g (x) ». Si tout le monde pense vraie la conjecture, la démonstration est un peu plus difficile à démontrer car la distinction du A du f et celui du g n'est pas effectuée. Cette distinction est cependant prise en compte lorsque le professeur la pointe.

On peut constater qu'une démonstration impliquant le choix d'un epsilon est très accessible aux élèves même lorsque ce choix provient de la négation d'un quantificateur universel dans une double quantification.

ii. Cas de la démonstration d'une relation entre epsilon et A

Dans la phase V, l'étude de la fonction dont les pics sont, cette fois-ci, décroissants (la fonction vaut 3 partout sur R+ sauf en des pics qui sont de hauteur 2/n, où n est un entier non nul, espacés toutes les unités et de largeur 0,01) va conduire à démontrer que la fonction a bien une limite.

Figure 60 : Le « monstre » à pics décroissants

Cela implique de montrer que pour chaque epsilon il existe un A, autrement dit trouver une relation entre epsilon et A. Et cela s'avère beaucoup plus difficile que pour les premiers cas. En

effet voici les démonstrations successives et diverses qui montrent la difficulté du problème. Nous verrons que ces démonstrations incorrectes sont systématiquement réfutées :

- L'inversion des quantificateurs

Lucas commence à expliquer pourquoi il vote Autre. On peut toujours trouver des epsilons en dessous des pics. Deux élèves déclarent alors changer d'avis et passent de Vrai à Autre. Cet argument témoigne d'une interprétation inversée des quantificateurs « pour tout epsilon, il existe un A » lu comme « pour tout A il existe un epsilon ». Nous remarquons cependant que Lucas, bien qu'ayant une interprétation erronée, cherche à fonder sa conviction sur une interprétation de la définition de la limite et plus seulement sur l'intuition. Caroline n'est pas d'accord avec cet argument et l'explique en prenant la fonction inverse comme argument :

> [>Caroline] : Pour moi, en fait, la fonction, si on reprend l'argument du Faux, on peut toujours prendre, et celui de Lucas, on peut toujours trouver un epsilon qui passe sous le pic. C'est pareil pour la fonction 1/x. On pourra toujours trouver plus petit mais pourtant on dit bien qu'elle tend vers zéro.

Caroline utilise un argument subtil pour contrer l'interprétation de Lucas, argument qui permet d'éviter le recours à la définition de limite. Si l'on suit l'argument de Lucas, il faudrait alors déclarer que la fonction inverse n'admet pas de limite, or chacun sait qu'elle a pour limite zéro en l'infini. Ceci est un argument de type réfutation de lemme au sens de Lakatos. En effet, la démonstration de Lucas est du type : on peut mettre des epsilons entre la fonction et sa limite, or d'après le lemme « si on peut mettre un epsilon entre la fonction et sa limite alors il n'y a pas de limite » on peut conclure que la fonction n'a pas de limite. Caroline attaque le lemme, en montrant qu'il admet un contre-exemple. La démonstration de Lucas est ainsi invalidée. Mais Loïc, lui, veut ramener la réfutation de la limite à la définition même, il pointe alors implicitement l'inversion de quantificateur en comparant les deux interprétations et expliquant pour lui, ce qu'est la bonne interprétation de la définition :

> [>Loïc] : Par rapport à ce qu'a dit Caroline et pour répondre à Lucas, il pourra toujours trouver un epsilon qui passe sous la fonction mais à chaque fois qu'il va dire un epsilon, on pourra toujours trouver un nombre A et à partir de ce nombre A la fonction sera toujours en dessous d'epsilon.

Nous voyons dans cette intervention de Loïc, une compréhension avancée du formalisme et du jeu des quantificateurs, des variables et de la double quantification.

- L'algèbre des limites

Maxime donne ses raisons pour penser vraie la conjecture, raisons qui s'apparentent à un argument d'algèbre des limites :

> [>Maxime] : Quand n va monter, enfin il va croître vers plus l'infini, sa limite ça va être zéro en fait. Pour x qui tend vers + infini. Sa limite ça va être zéro en fait parce que plus tu monteras plus

en fait ce nombre (2/n) sera infiniment petit. Donc, du coup on dit qu'il aura une limite. C'est comme avec Caroline, avec 1/x, on dit qu'elle a la limite à zéro parce que ça va devenir de plus en plus petit, ça va se rapprocher de zéro. Après f (x) = 3 sa limite c'est trois. Donc, du coup je pense que la limite de cette fonction c'est trois.

Figure 61 : La proposition de démonstration de C5 par Maxime

Aussitôt, il convainc quasiment tous ceux qui avait voté Autre ou Faux. On voit qu'il existe un moyen pour tenter d'échapper à la définition, et traduit dans les termes de l'algèbre des limites, ceci signifie qu'on décompose f(x) en une somme d'une fonction constante égale à trois et en une fonction qui est nulle partout sauf en des pics de hauteur 2 / *x*. Et ce moyen est beaucoup plus convaincant que l'argument précédent de Loïc qui lui mobilisait la définition de limite. On va voir cependant que ce moyen va rapidement être contesté car dans ce cas particulier, il est difficile à appliquer de manière rigoureuse et les élèves sont manifestement devenus exigeants sur le plan épistémologique. Le professeur va alors organiser un débat de démonstration où ce n'est pas la validité d'une conjecture qui est discutée mais celle d'une démonstration. Maxime demande de compléter dans ce cas ce qu'il avait dit à l'oral sans l'écrire au tableau. Le vote sur cette démonstration donne quinze élèves qui la pensent correcte, deux qui la pense non correcte et cinq sont dans Autre. Fabio commence à expliquer pourquoi pour lui ce n'est pas une démonstration :

[>Fabio] : Ben moi je pense qu'il n'a rien prouvé avec sa démonstration. Ben en fait il montre ce qu'il observe mais il n'a rien démontré de plus, en fait.

Fabio ne connaît pas la théorie de l'algèbre des limites, il interprète la démonstration de Maxime comme une seule description à partir du dessin, mais en réalité la démonstration de Maxime ne repose pas sur la seule lecture du dessin, c'est déjà la mise en forme selon des théorèmes sur les limites. Hadrien lui pense que la démonstration n'est pas correcte mais pour des raisons seulement de forme :

[>Hadrien] :[35:14] Enfin il manque la conclusion en fait. Il dit ce qu'il faut mais après il manque par exemple de dire que la limite de 3+2n (en fait 3+2/n) est bien 3. Enfin une phrase qui réponde au problème. Parce qu'il dit limite de ça c'est zéro, limite de ça c'est trois donc c'est vrai.

Il rajoutera plus tard qu'il ne s'agissait qu'un complément des raisons de Fabio. Mais commence à se poser des questions au sujet de la fonction f évoquée par Maxime :

[>Loïc] : 3+2/n, je voudrais savoir ce que c'est. Parce que ce n'est pas la fonction qui est représentée là, ça n'a rien à voir en fait.

[>Fabio] : C'est la hauteur des pics. La hauteur des pics c'est 2/n et ça commence à 3.

[>Caroline] : Je suis d'accord avec Loïc

En effet, d'autres questions de forme plus gênantes pour la démonstration de Maxime sont pointées : si on ajoute deux fonctions, ce sont lesquelles ? Et clarisse va être encore plus précise :

[>Clarisse] : Pour moi le fait qu'il écrive f (x) = 3 ça me perturbe parce que j'ai l'impression que ça marche que pour une partie de la fonction, là où elle est toute droite, et pas là où il y a des pics.

Nathan, lui a voté Autre, et se pose des questions plus théoriques sur l'argumentation de Maxime, questions qui relèvent de l'algèbre des limites dans le cas proposé :

[>Nathan] : Parce qu'en fait je me demande... en fait dans ce cas ça marche, il y a une partie de la

fonction qui tend vers zéro et une partie de la fonction qui tend vers trois. Donc, la fonction tend vers trois. Mais est-ce qu'on peut toujours additionner les limites comme ça ?

[>Le professeur] : Est-ce qu'on peut additionner les limites ?

[>Nathan] : Et quand on les additionne, qu'est-ce que ça fait ?

Maxime va expliquer ce qu'il exprime avec cette démonstration, la limite d'une somme de fonction, le fait que la fonction *f* qu'il utilise, il devrait lui donner un autre nom. Et il finit par convaincre ses camarades mais ceux-ci persistent à dire que cependant la démonstration telle qu'elle est écrite n'est pas correcte. Plus personne ne trouve correcte cette démonstration, telle qu'elle est écrite au tableau, à la fin de la discussion.

- Le « On peut trouver A »

Loïc propose une démonstration :

Figure 62 : La proposition de démonstration de Loïc

Quatre qui la jugent correcte cette démonstration, douze incorrecte et sept sont dans Autre. Fabio pense la démonstration pas correcte car pour lui :

[>Fabio] : Moi je pense que la démonstration qu'il y a au tableau, c'est une définition de la limite. Enfin ça peut aider à la démonstration mais ça ne suffit pas.

Juliette pense aussi que la démonstration n'est pas correcte mais pour une autre raison :

[>Juliette] : Pas Correct. Ce n'est pas une démonstration, il dit "on peut trouver un A à partir duquel la fonction est entre" sauf que c'est pas démontré du tout, il dit juste...

iii. L'intervention du professeur

Le professeur va finalement demander de réparer l'insuffisance pointée par Juliette, à savoir prouver qu'on peut trouver A. Et il commence par demander si quelqu'un peut trouver le A correspondant à un epsilon ayant pour valeur 0,1. Aussitôt on lui répond 20. Puis il demande pour une valeur d'epsilon de 0,01 et on lui répond 200. Il demande alors pour n'importe quel epsilon. On remarque que l'intervention du professeur est ici un effet de contrat de rationalité pour ce qui est de la validation. En effet, la démonstration proposée par un élève mobilise la définition de limite selon une rationalité pragmatique (composante validation) qui s'appuie sur l'évidence du dessin (ce n'est pas explicite mais cohérent avec le travail précédent) : l'évidence est qu'« on peut trouver un A». Le professeur, lui propose différentes valeurs d'epsilon et demande la valeur correspondante du A, puis il demande le A correspondant à une valeur quelconque d'epsilon. Cette dernière demande peut induire deux réponses : l'une sous forme de lois émergeant de la série de cas particuliers étudiés (rationalité empirique), l'autre sous forme de calcul de A (rationalité théorique). C'est cette première option que nous privilégions du fait de l'induction du professeur : seuls les cas particuliers sont proposés et aucun indice correspondant à un calcul. De toute manière, dans les deux cas, il s'agit d'un effet de contrat de rationalité. Il s'éloigne ainsi du modèle d'apprentissage que nous éprouvons ici, puisque le professeur réalise

un effet de contrat de rationalité. Cependant, nous pouvons nous interroger sur les raisons qui motivent cette intervention. Une première raison peut se trouver dans la minoration du scénario choisi de la signification fondamentale « approximation de la limite ». En effet, dans une démarche plus centrée sur l'approximation, le jeu du « trouver A pour obtenir une approximation donnée » est beaucoup plus naturelle. Une autre raison nous parait évidente, elle concerne la possibilité de garder une cohérence globale de la démarche. En effet le problème initial posé concerne le fait qu'une fonction ait une limite ou pas. Des démonstrations sont proposée et invalidées. L'une d'entre elle, est choisie par le professeur pour être réparée. Il s'agit alors de produire une démonstration de « pour chaque epsilon on peut trouver un A ». Si le processus de proposition de démonstration de ce lemme conduit à d'autres bifurcations, il devient alors très difficile de garder l'unité de la démarche dans la classe et finalement le problème initial risque d'apparaître comme très déconnecté de l'enjeu final local. Le nombre total d'étages à une telle démarche est nécessairement limité par la possibilité effective de redonner un sens ultérieurement aux actions entreprises pour résoudre le problème initial. Cette raison explique peut-être le recentrage du professeur sur la technique ad-hoc.

iv. L'esquisse de la démonstration attendue

Après une recherche, Victor propose deux sur epsilon. La conjecture « Si $x > 2/\varepsilon$ alors f(x) compris entre deux plus epsilon et deux moins epsilon » est soumise alors au vote et recueille la quasi-unanimité. Maxime va justifier son vote Vrai et s'ensuit une longue discussion :

> [>Maxime] : Ce qu'on nous demande c'est que les x qui sont supérieurs à A… soit en dessous d'epsilon. Du coup ça revient à dire que A est inférieur à x, ou n. Là en l'occurrence c'est n. En gros epsilon c'est égal à 2/n donc 2/A donc A égal deux sur epsilon.
>
> [>Maxime] : Du coup j'ai tout écrit puisque là-bas c'était mal écrit. Donc, le but c'est de chercher des n qui soient supérieurs au A qu'on... enfin il faut que les n soient supérieurs à A. Il faut que la fonction soit comprise entre trois moins epsilon et trois plus epsilon. Et du coup ça revient à dire que A = n et vu qu'epsilon égal 2/n, donc A égal deux sur epsilon.
>
> [>Fabio] : J'ai juste une question. Là tu dis que n est supérieur à A et tu remplaces n par A!
>
> [>Maxime] : Parce qu'en fait, c'est supérieur ou égal, parce qu'en fait on demande de chercher tous ceux qui sont au-dessus de n. C'est bon ? (Plusieurs élèves répondent non).
>
> [>Juliette] : Ah si moi j'ai compris.
>
> [>Loïc] : Comment tu sais qu'epsilon est égal à 2/n?
>
> [>Maxime] : Euh enfin pour moi ce que je comprends c'est ça parce que quand on a donné un epsilon, on a appliqué la fonction 2/n en fait. On a dit : est-ce que pour un epsilon, par exemple égal à 0,1, est-ce que 2/n ça rentre dedans en fait. C'est ça qu'on posait en gros comme question. Donc, epsilon est égal à deux sur n en fait. Tu m'as compris ou pas.
>
> [>Loïc] : Non mais oui.
>
> [>Juliette] : Moi j'ai compris.
>
> [>Léa] : Moi je ne comprends pas ton "Ça revient à dire que n = A".
>
> [>Maxime] : Que A = n?
>
> [>Léa] : Oui, tu dis que ce que tu as écrit avant, le but, ça revient à dire que A = n mais avant tu mets que...
>
> [>Maxime] : n supérieur ou égal à A.
>
> [>Léa] : Ben je n'ai pas compris.

[>Maxime] : Là je montre que c'est supérieur ou égal à n. Enfin que n est supérieur ou égal à A. Et ici je montre que...enfin ici je montre qu'il faut qu'il soit compris entre le plus epsilon et le moins epsilon. Du coup ça revient à dire que tu ne peux pas être au-dessus de A. Non je m'exprime mal là...

[>Léa] : Ton A=n, c'est toi qui a choisi un exemple ou...c'est...

[>Loïc] : Non en fait il cherche, là A=n c'est premier x à partir duquel...

[>Maxime] : Ouais.

[>Léa] : C'est toi qui la choisit.

[>Maxime] : Ben en fait c'est logique, enfin je trouve ça logique. Mais quand tu prends un A tu auras tous les n qui seront...

[>Caroline] : Plus grands...

[>Maxime] : Voilà et quand tu utilises 2/n tu fais 2/A après tu fais deux sur A plus un nombre... Donc, en gros ton n c'est ton A. Après c'est peut-être mal expliqué.

Nous avons produit ce long passage car il illustre bien, à notre avis, ce que nous avons appelé les situations S2, celles qui cherchent à établir les contours d'un objet, ici une technique, sans faire finalement apparaître l'objet, mais en en préparant son besoin. Ici, il est clair que les explications de Maxime peinent à convaincre mais le jeu entre les questions qu'on lui pose et les réponses qu'il donne est de nature à préparer le terrain pour une institutionnalisation qui pourra répondre des questions soulevées et qui restent en suspend.

v. Conclusion

Nous avons pu voir à quel point le formalisme de la définition de limite est opérationnel pour ce qui est des démonstrations qui dépendent du choix d'un A. Nous attribuons cette capacité de mobilisation du formalisme à un niveau de compréhension de celui-ci assez avancé dans la mesure où il suppose de faire des choix des bonnes variables et des bonnes valeurs. S'il reste à rendre accessible les techniques plus algébriques de détermination du A en fonction du epsilon, la partie analytique du raisonnement « On peut trouver un A adapté pour chaque epsilon » semble avoir acquis un sens. On peut ajouter que cette première rencontre, qui a donné lieu à tant de réfutations de démonstrations et finit avec l'institutionnalisation de la méthode algébrique manquante, prépare le terrain pour une rencontre ultérieure de ce type de cas, rencontre que le scénario n'a pas prévue.

Pour ce qui est de la rationalité, nous pouvons observer que la rationalité empirique de réfutation est maintenant pleinement à l'œuvre, en particulier sur la composante validation, et que cette rationalité alterne en permanence avec une rationalité théorique sur les composantes validation et définition : à la fois on cherche absolument à prouver les résultats envisagés, à la fois on mobilise très souvent la définition de la limite.

Nous pouvons dire en conclusion que cette phase V valide un niveau de connaissance sur la compréhension et l'emploi du formalisme de la notion de la limite qui permet aux élèves de concevoir des démonstrations élémentaires. En outre, nous ajoutons que les échanges sur les questions liées à ce formalisme traduisent une maturité vis-à-vis de ces connaissances assez remarquables à ce niveau de scolarité.

III.3 Vision globale et éléments d'apprentissage

Après cette vision phase par phase qui a mis en évidence le fonctionnement de chacune d'elle, et l'articulation entre une phase et la suivante, nous voulons ici prendre un peu de recul pour développer une vision plus globale de la situation de la limite et comprendre son fonctionnement global ainsi que les éléments d'apprentissages qui s'en dégagent.

Nous avons mis en évidence la notion de milieu subjectif pour une situation donnée, aussi bien sur le plan théorique que lors de l'expérimentation. Cette notion est locale : elle est associée à une situation. Or, chaque phase de la situation de la limite peut ainsi être considérée comme situation indépendante et possède son propre milieu subjectif. On peut même parler de milieu subjectif à un niveau encore plus local quand il s'agit de l'étude d'une seule conjecture. Cependant, à ce dernier niveau d'observation, il peut être plus délicat à observer dans la mesure où le domaine considéré se rétrécit avec la taille du questionnement. Mais on peut aussi envisager une forme de macro-milieu subjectif à l'échelle d'une situation comme celle de la limite, situation constituée de cinq phases, elle-même constituées de sous parties. A cette échelle d'observation, nous dirons que les phases I et II constituent le macro-milieu matériel pour la situation de la limite, la phase III en constitue le macro milieu subjectif, et nous dirons que la phase IV et V en constituent le macro-milieu de référence. Regardons cela plus précisément. La phase I sert à vérifier la présence de conception sur la limite de fonction et les adapter à partir des connaissances sur la convergence et les limites des suites. Elle sert donc bien à établir les conceptions éventuellement antagonistes mais dans ce premier temps évite de les confronter en les faisant agir sur des contextes non problématiques. La phase II joue le même rôle que la phase I dans la mesure où elle continue à faire agir ces conceptions mais est, elle aussi, non problématique pour les conceptions de la limite. Cependant, l'objectif spécifique de cette phase est celui d'établir, non plus cette fois-ci des conceptions sur la limite, mais des connaissances sur le formalisme. Ainsi pour la phase II, la notion de voisinage de l'infini et sa formalisation, joue le rôle de celui de la notion de limite et sa formalisation pour la situation de la limite. On joue en plus petit sur la notion de voisinage de l'infini le grand scénario pour la notion de limite. Ceci a pour conséquence de constituer un milieu matériel à partir d'éléments substantiels sur le formalisme : avec le « il existe », la double quantification, et le rappel de la fonction du formalisme. Avec ces deux phases s'établit un milieu matériel qui va être mobilisé dans la phase III qui représente le milieu subjectif de la situation totale : la formulation mais surtout la confrontation de ces conceptions sur la notion de limite a lieu dans cette phase III. Evidemment, les élèves ne disposent pas des moyens de résoudre totalement ces conflits car la définition de limite est à ce stade hors de portée, mais ils éprouvent les contradictions que portent leurs conceptions et même s'ils tentent de dépasser celles-ci, par exemple le modèle de Louis avec sa nouvelle façon de s'approcher, le saut est tel qu'ils n'ont aucune idée de comment le réaliser. Le modèle de Louis veut effectivement dépasser les contradictions des anciennes conceptions mais il le fait avec les anciens mots, les anciens concepts, d'avance cela est voué à l'échec. On remarquera que toutes ces caractéristiques correspondent à une situation S3, comme nous l'avons décrite, où l'on vise « seulement » à montrer que les conceptions actuelles conduisent à des contradictions indépassables sans un objet, un concept, une notion dont on n'a même pas idée qu'ils existent. Viennent ensuite les phase IV et V comme milieu de validation. En effet, que ce soit dans la phase IV où l'on établit le formalisme de la limite ou bien dans la phase V où celui-ci sert à démontrer, la notion de limite agit dans un contexte de validation. Dans la

phase IV, où l'on commence par le principe fondamental de l'analyse, tous les éléments du formalisme de la limite sont déjà présents et permettent de démontrer. Ensuite, lorsque l'inversion des quantificateurs est réalisée, les élèves se rendent compte du fait qu'il ne s'agit plus de la même dépendance entre epsilon et A, et que la nouvelle dépendance force la fonction à « s'approcher » de sa limite sans la forcer à lui être égale, en donnant la possibilité d'aller chercher cette proximité « plus loin » avec A. Ainsi, les élèves identifient la notion de limite. Bien sûr, ils n'ont pas fabriqué le formalisme de la limite, mais la situation les a amenés à rencontrer des contradictions, dessiner les contours d'un nouvel objet qui est devenu ainsi nécessaire. Nous reconnaissons là les caractéristiques d'une situation que nous avons appelée S2. Ce type de situation fait apparaître les contours d'un objet de façon suffisamment forte pour que celui-ci devienne nécessaire sans pour autant que la situation conduise à sa formalisation totale. Ici dans la phase IV, le formalisme est donné par la situation, il n'est pas construit. La phase V fait agir ce nouveau formalisme dans un contexte démonstratif.

A l'issu de ce survol de cette situation didactique nous pouvons nous demander : quels apprentissages se dégagent pour les élèves de cette situation de la limite ? Nous aurions tendance à dire qu'il existe deux niveaux d'apprentissage, l'un concerne les connaissances d'ordre I, et le second les connaissances d'ordre II. Pour ce qui est des connaissances d'ordre I, nous pouvons penser à chacun des objets ayant joué un rôle principal dans la situation (principe fondamental de l'analyse, simple ou double quantification, notion de voisinage, notion de limite…). Nous ne dirons pas que ces connaissances sont établies à l'issue de cette situation, ce serait contradictoire avec la notion même de métaphore fondamentale. Nous ne dirons pas non plus que les significations que nous avons retenues sont conformes et mobilisables sans difficultés et sur demande à l'issue de la situation. Par contre, elles ont acquis une telle consistance que lorsqu'elles agiront dans d'autres contextes elles pourront s'enrichir et se consolider sans réclamer de profonds réajustements. Les dépassements effectués sont décisifs et ont fait basculé ces notions dans des univers nouveaux où elles pourront continuer à évoluer. Ceci est visible lors de la phase V où il se dégage une certaine facilité d'emploi de concepts habituellement délicats. Nous ajoutons que nous aurions pu aller jusqu'à l'unicité de la limite compte tenu du travail réalisé précédemment et particulièrement de la connaissance du principe fondamental de l'analyse. Pour ce qui est des connaissances d'ordre II (définition, rôle du formalisme, rôle de la logique, rôle de la validation…), nous pensons là aussi que certains pas décisifs ont été réalisés. Nous avons à ce propos constaté tout au long de la situation des avancées significatives sur ces plans. Lorsque Nathan commence à se demander si on a le droit d'ajouter les limites et si oui ce que cela signifie, nous voyons là le signe que Nathan a pris l'habitude de s'interroger au niveau théorique sur les objets et nous attribuons cela à l'expérience de ce type de situation. Nous avons également remarqué que pour nombre de situations, finalement ce qui était le cœur du débat ne correspondait plus à la validité de la conjecture sur laquelle il y avait accord mais sur la manière de fonder cette validité, sur les moyens de démonstration. L'intérêt d'une telle situation en termes d'apprentissages semble évident.

IV Conclusions sur l'ingénierie

Au terme de cette ingénierie, nous proposons de revenir sur l'hypothèse H3 que nous rappelons ici *: Il existe un milieu didactique suffisant pour permettre l'accès adidactique à la définition*

de limite la rendant nécessaire dans le sens du besoin de définition et de l'intelligibilité de son formalisme. Ce milieu permet essentiellement de développer conjointement certaines connaissances nécessaires à cet accès et les niveaux de rationalités et de transitions de rationalités qui vont le rendre possible. Cette hypothèse que nous avions présentée constitue le cœur de notre projet général, qui concerne le besoin et le sens des objets dans l'enseignement et l'apprentissage, dans le cas particulier de la limite. C'est effectivement la notion de limite que nous avions choisie comme paradigmatique de ce projet. Aussi, au terme de cette ingénierie, nous proposons une synthèse et une discussion sur les aspects les plus fondamentaux que nous retenons de l'étude de ce cas particulier, nous reviendrons sur des éléments de généralisation dans la conclusion.

Mais commençons par la fin pour remonter ensuite aux intentions initiales. L'étude de la phase V de l'ingénierie a mis en évidence que pour l'essentiel, cette hypothèse H3, dont la consistance a été fondée au niveau théorique, se vérifie dans la contingence. Certes nous remarquons que le niveau de technicité concernant le maniement de la définition de limite reste à développer, par exemple déterminer le A en fonction de epsilon. Certes, nous remarquons que le professeur, à plusieurs reprises, est sorti de sa neutralité épistémologique et réalise des effets de contrats de rationalités, et donc qu'il y a certaines ruptures d'adidacticité. Cependant, quand nous observons les élèves échanger des avis et des arguments sur des énoncés fortement quantifiés et manifestement significatifs pour eux, quand nous voyons la facilité avec laquelle certaines démonstrations utilisant la définition formelle de la limite sont effectuées et recueillent l'adhésion, nous sommes portés à penser qu'effectivement la nécessité de la définition de limite a bien émergé, dans la réalité de cette classe, dans le double sens du besoin du formalisme et de son entendement. Puisque le résultat est attesté dans la réalité, voyons maintenant les causes de cette réussite, en particuliers la constitution d'un milieu en termes de connaissances et de rationalité, puisque ce sont les termes de l'hypothèse H3.

Du point de vue des connaissances, nous avions dès le début de cette thèse, déterminé certaines des connaissances clefs pour l'accès à la notion de limite : des connaissances sur les nombres, en particulier sur le principe fondamental de l'analyse, des connaissances sur la logique, en particulier l'interprétation de la double quantification et les règles de validité, et des connaissances sur la définition. Nous nous demandions, à ce moment-là, si certaines connaissances que nous avions écartées, parce qu'il était impensable de réunir au sein d'une même ingénierie tous les savoirs relatifs à la notion de limite, feraient défaut. Si sur le plan théorique aucune contradiction n'était apparue du fait de leur absence, nous pouvons constater que dans la contingence, elles n'ont manifestement pas fait défaut. Nous pensons, par exemple, à la notion de complétude. Son absence n'est pas apparue comme un obstacle lors l'expérimentation car l'inexistence d'une limite, ou les non-limites, ne sont pas, dans l'ingénierie, le fait de la notion de complétude, mais celle du seul comportement de la fonction. (par exemple, le comportement de la fonction sinus ne lui permet pas d'avoir une limite finie en l'infini). Le fait de systématiquement supposer la limite existante dans l'hypothèse des conjectures étudiées évite bien, comme nous l'avions prévu, cette discussion. Nous remarquons d'ailleurs que cette supposition restreint aussi toutes les discussions liées à l'éventuelle possibilité de non unicité de la limite. Une question ouverte se pose ici pour cette notion de complétude, comme pour d'autres, par exemple la

notion d'approximation d'un réel : les significations retenues pour servir de métaphore fondamentale permettent-elles un retour sur les significations non retenues ou bien vont-elles se constituer en obstacle parce que la simplification choisie suppose de sinon dissimuler ces dernières mais au moins de les ignorer ? Cette question pourra faire l'objet d'une autre étude. Dans tous les cas, les notions retenues ont permis, dans la contingence, de mener, au terme de l'ingénierie, les élèves aux résultats escomptés. Nous voulons ici, revenir sur les choix effectués sur ces connaissances en termes de métaphore fondamentale, et pour cela nous partons d'un exemple : celui de l'interprétation de la double quantification. Nous avions choisi pour cette connaissance de viser d'abord l'identification de deux écritures différentes des énoncés AE et EA donnant lieu à deux interprétations différentes. Il s'agissait de pouvoir compter sur la connaissance non de l'interprétation correcte mais sur celle qui préviendrait, en cas de conflit d'interprétation (très prévisible d'après l'étude menée) qu'une convention d'interprétation existe et que celle-ci est liée au type de double quantification (EA ou AE). Nous avons vu que ce niveau de connaissance a largement suffi puisque, lorsque les conflits sont survenus, la référence a finalement pu départager les interprétations en mode adidactique. Evidemment, obtenir des interprétations correctes immédiatement peut être un objectif aussi. Mais, d'une part, il n'était pas nécessaire de l'atteindre pour notre ingénierie, et d'autre part, malgré l'objectif minimaliste que nous avions assigné à la situation Q^2, celle-ci a cependant permis que ce deuxième niveau de connaissance commence à voir le jour. Cela se voit très bien dans les démonstrations réalisées, quand les élèves n'ont plus de difficulté, ni à interpréter les quantifications multiples pour démontrer ni à démontrer leur négation, ce qui est remarquable. Il en est de même pour la notion de nombre, où l'on voit que le principe fondamental n'est pas utilisé nommément mais qu'il est intégré au point que les élèves vont le redémontrer en cas de besoin (phase IV de la situation de la limite) car ils en ont conservé l'essence à travers la propriété de densité. Pour ce qui est de la notion de définition, on a pu observer que l'ingénierie qui mobilise à plusieurs niveaux cette notion, aussi bien quand l'absence de définition empêche de résoudre un problème et qu'elle en apparait finalement comme la clef, que comme ressource qui apparait incontournable à mobiliser quand cette définition est déjà présente. Sur ce plan, des avancées importantes ont été réalisées, l'adoption immédiate de la définition formelle de limite, par exemple ou bien le recours à la définition pour résoudre les conflits d'interprétation. Cependant, nous n'avons essentiellement jamais constaté la formulation d'une demande explicite de définition. Malgré tout, du chemin a été réalisé dans cette direction, car lorsque le professeur demande ce qui a empêché de résoudre les difficultés dans la situation (institutionnalisation de la phase III), Caroline évoque l'absence de définition. Pour ce qui concerne les règles de validité nous pouvons constater qu'elles ont été largement adoptées, ce qui a facilité grandement la discussion sur les sujets complexes, car celles-ci n'ont pas ajouté une couche supplémentaire de difficulté. Nous remarquons quand même que lors de la phase IV, quand il s'agit de déterminer la nature de fonction f par rapport à la conjecture, la complexité de la situation fragilise l'emploi de ces règles. Pour ce qui est de l'ensemble de l'ingénierie, on pourrait, comme nous l'avions fait pour la situation de la limite, parler de macro-milieux pour les connaissances, mais nous nous bornerons ici à constater que l'architecture globale de la situation engendre bien un milieu qui s'enrichit progressivement en termes de connaissances, celles-ci servant assez systématiquement dans toutes

les phases suivantes. La facilité relative pour aborder la phase finale démonstrative de la situation, phase qui nécessite une large partie des connaissances visées par l'ingénierie, atteste de l'efficacité de cette progression en termes de connaissances et d'apprentissages.

Pour ce qui est maintenant de la question de la rationalité mise en œuvre dans cette situation, la capacité à réaliser les transitions de rationalité de manière adidactique a été décisive pour l'ingénierie. Cette capacité, comme cela était prévu, s'est nourrie des apprentissages réalisés, en particulier des connaissances d'ordre II qui constituent le cœur de la rationalité théorique. Ces connaissances ont été effectivement immédiatement les enjeux de la situation des nombres avec les notions de définition, des règles de validité et pour la situation Q^2 avec la notion de quantification. Comme nous l'avons déjà évoqué, l'ingénierie semble avoir modifié sensiblement le rapport des élèves à l'activité mathématique en termes de rationalité. Cela s'est vu par exemple quand pour la situation Q^2 les conflits d'interprétation ont immédiatement été pris en charge par les élèves, et cela de manière bien plus rapide que prévue. Cela dénote d'une aversion à la contradiction, aversion qui est le fondement de la pensée théorique en mathématique. Cela s'est vu également lorsque les élèves se sont attardés, à plusieurs reprises et de plus en plus fréquemment, sur des discussions qui n'avaient plus pour objet la validité de la conjecture qu'ils étudiaient, validité sur laquelle ils étaient d'accord, mais sur les moyens d'assurer cette validité, c'est-à-dire sur la validité des argumentations proposées. Nous ajoutons que, comme prévu dans le modèle d'apprentissage, cet accès au théorique s'est réalisé dans des allers retours entre différents niveaux de rationalités, cela de manière essentiellement adidactique, allers retours servant à « matérialiser la théorie et à théoriser le réel ». Cela a particulièrement pu s'observer, sur la fin de l'ingénierie, lorsque le recours assez systématique au dessin a permis à la fois de donner chair aux pensées théoriques, servir de réfutation, mais aussi d'appui pour aller vers le théorique. La question d'ailleurs du rôle du dessin a souvent été un enjeu des discussions, que ce soit au moment où un faux contre-exemple a été produit lors de l'étude du principe fondamental de l'analyse appliqué aux fonctions, ou bien lorsque le dessin a été proposé comme démonstration en toute fin d'ingénierie à la dernière conjecture pour démontrer une existence. Nous rappelons à ce sujet également la phase III de la situation de la limite où les conceptions n'ont pas été seulement formulées dans le contexte proposé mais ont été réfutées systématiquement dans une forme de jeux de preuve et réfutation. Ceci n'avait pas été prévu par l'analyse a priori car il avait seulement été prévu que les conceptions révèlent leurs caractères contradictoires, internes ou bien externes par opposition à d'autres conceptions. Le processus de mise en évidence des contradictions a été là beaucoup plus loin que ce que nous imaginions préalablement.

Nous pouvons donc affirmer, après expérimentation, que l'hypothèse H3 fondée au niveau théorique, semble robuste dans la mesure où elle résiste au réel d'une classe. Autrement dit, dans la contingence, nous constatons qu'un certain milieu permet de développer conjointement les connaissances et les niveaux de rationalités nécessaires à ce développement afin que la notion de limite acquiert, de manière adidactique, un caractère de nécessité au sens du besoin théorique de la notion et de l'intelligibilité de son formalisme.

Conclusion et perspectives de recherche

Notre étude est partie de la question du sens et du besoin des objets mathématiques en cours de mathématiques. Comment faire en sorte que les objets mathématiques apparaissent comme réponses à des questions que l'élève se pose véritablement, et que ces objets acquièrent pour lui une certaine intelligibilité ? C'est dans la notion de conflit cognitif que nous avons trouvé une première clef de la réponse : si un objet mathématique apparaît comme outil pour résoudre un conflit cognitif, alors il prend sens et utilité. Une deuxième clef de la réponse se trouve dans l'identification des conditions pour qu'un tel conflit puisse se produire. Une de ces conditions concerne la rationalité disponible. Si des positions contradictoires sont présentes et qu'une rationalité adéquate est à l'œuvre, des conflits cognitifs sont possibles et résolubles. Cela nous a conduit à développer un modèle de rationalités pour assurer l'existence et le rôle des conflits cognitifs dans le cadre de la TSD, en particulier pour préserver l'adidacticité des situations. Une troisième clef concerne les adaptations possibles de la TSD pour la conception de situations sur les savoirs complexes. Enfin, une quatrième clef correspond à la question de prise en charge, parmi ces adaptations, de celles relatives aux niveaux heuristiques. C'est dans le débat scientifique en classe que nous avons tenté une réponse à cette question. Pour donner corps à cette construction théorique, nous avons choisi la notion de limite. Cette notion de limite, de par sa complexité, représente une forme de généricité vis-à-vis de notre étude et des moyens que nous avons développés. Aussi, nous concevons une ingénierie de la limite avec l'intention d'éprouver cette construction dans ce cas particulier.

De la rationalité au formalisme : le cas paradigmatique de la notion de limite

La notion de limite est effectivement connue pour la difficulté qu'elle engendre chez les élèves/étudiants à tous les niveaux où elle est enseignée, lycée, comme début d'université, et cela en France comme dans de nombreux autres pays. La littérature, extrêmement fournie au sujet de cette notion, identifie et analyse les nombreuses difficultés qui lui sont liées. En tant que concept FUG, la limite se trouve de fait au carrefour de très nombreuses autres notions (le F de FUG, notion Formalisatrice), chacune apportant un éclairage spécifique sur la question et ses difficultés propres.

En particulier, le formalisme de la définition en epsilon/alpha de la limite détermine les notions centrales en jeu : nombre, quantification, et définition. Il parait évident que des connaissances minimales relatives à ces notions sont indispensables pour donner sens à ce formalisme. Parmi les difficultés répertoriées au sujet de ces notions et d'autres notions associées à la limite, l'infini par exemple, la question de la présence d'obstacles épistémologiques est récurrente. Cette question des obstacles épistémologiques en didactique des mathématiques reste ouverte dans la mesure où s'il est parfois simple de faire un parallèle entre les conceptions historiques du développement de ces notions avec les conceptions des élèves, il reste néanmoins délicat d'affirmer qu'elles relèvent des mêmes mécanismes, tant les conditions de développement sont différentes. Cependant, cette notion d'obstacle épistémologique, et donc de résistance à adapter les conceptions, nous a conduit à chercher dans la notion de conflit cognitif les moyens de ce dépassement. C'est dans cette optique que nous abordons l'abondante littérature concernant les

ingénieries sur la limite qui précisément recherchent un moyen pour venir à bout de ces difficultés. Nous étudions donc une sélection de ces ingénieries sous l'angle spécifique de la mobilisation des conflits cognitifs. Il s'avère que l'usage de ce concept dans ce cadre est varié. Alors que certaines ingénieries ne se posent pas la question des conflits, d'autre prévoient d'en générer avec plus ou moins de succès. Les conditions permettant, non seulement l'existence de ces conflits cognitifs, mais assurant aussi leur efficience pour la prise en charge des difficultés sont souvent peu explicitées. Il apparait cependant qu'une condition d'existence effective d'un conflit cognitif dépend de la rationalité disponible. Si celle-ci fait défaut, alors le conflit que l'on cherche à provoquer n'intervient pas. En effet, par exemple, si le principe de non contradiction est absent, alors les conceptions antagonistes ne peuvent pas provoquer de conflit. Aussi, dans le cadre de la TSD, formaliser la notion de rationalité est apparu comme nécessaire.

Nous avons constaté que de nombreuses disciplines des sciences humaines (sociologie, économie, psychologie…) reposent sur des modèles de rationalités élaborés. Ces modèles sont variés, parfois au sein d'une même discipline, et ils leurs servent de fondement et de systèmes explicatifs des comportements des individus. Brousseau (2002) emprunte d'ailleurs une partie de son modèle à la théorie des jeux, théorie qui est d'origine mathématique mais a été importée comme socle conceptuel pour de nombreux de modèles utilisé dans ces disciplines. Pour ce qui est de la didactique des mathématiques, nous avons étudié les modèles de rationalités existants (Boero 2006, Lerouge 2000, Legrand 1990). Nous pensons que ces modèles de rationalités ont modifié les approches en didactique des mathématiques. Que l'on songe à la distinction entre rationalité scientifique et rationalité du quotidien de Legrand (1990), nous pouvons trouver nombre d'indices dans les études didactiques qui laissent supposer que ces modèles ont permis de mieux distinguer certains phénomènes. Dans le cadre de notre recherche portant sur les conditions de l'existence et de l'efficience des conflits cognitifs, ces modèles se sont avérés assez peu adaptés. Nous avons donc conçu un modèle de rationalités sur une base épistémologique, modèle de nature à donner un sens aux démarches des élèves. Ce modèle repose sur quatre hypothèses de modélisation : une hypothèse d'extériorité, une hypothèse des caractéristiques d'une rationalité, une hypothèse de stabilité et une hypothèse concernant les modèles épistémologiques. Ces quatre hypothèses conduisent à définir un modèle de rationalités en trois types ou niveaux de rationalités : rationalité pragmatique, rationalité empirique et rationalité théorique avec pour les deux dernières des sous types. Chacun de ces trois niveaux est identifié par trois caractéristiques : le mode de validation, le type de logique et le mode d'existence des objets. La rationalité pragmatique repose sur une appréhension première du réel, sur l'évidence immédiate et sur l'efficacité dans l'action. La rationalité empirique se décompose en deux sous types de rationalités : la rationalité inductiviste qui repose sur le recherche de généralités pour fonder des lois au travers de collections de cas et d'arguments leur donnant une plausibilité, et la rationalité réfutationniste où une théorie n'est jamais vraie mais seulement non réfutée, et fausse quand elle est réfutée. La rationalité théorique elle aussi se décompose en deux sous types de rationalités : la rationalité théorique locale qui fonctionne sur l'établissement de la vérité apodictique à partir de définitions, d'axiomes et de propriétés prouvées dans ce système, et la rationalité théorique générale qui rajoute à la première un questionnement fondationnel. La démarche d'accès à un savoir peut être caractérisée par ces trois rationalités et particulièrement le

passage de l'une à l'autre. On appelle transition de rationalité ce passage. Cette transition apparait comme déterminante dans le sens donné au savoir en question et son existence est liée à celle de conflit cognitif. On appelle alors conflit de rationalité, le conflit cognitif interprété et analysé en termes de rationalités. Ce conflit de rationalités peut être de deux types : de type intra-rationalité et de type inter-rationalité. Dans les deux cas la résolution de ce conflit passe souvent par une transition de rationalité.

La transition de rationalité marque donc un changement de niveau de connaissance pour un savoir donné, c'est-à-dire une modification au niveau de sa définition ou bien de la logique auquel on le soumet ou encore au type de validation dans lequel il est impliqué. Une part de l'accès à ce savoir tient dans la motivation de cette transition. Quand cette transition est forcée au niveau didactique (par le professeur, par l'énoncé…), alors il y a effet de contrat de rationalité, il y a risque alors de perte d'une signification de l'objet, sinon il y a transition adidactique. Dès lors, la transition de rationalité joue un rôle déterminant dans les situations adidactiques, et prévoir les conditions de sa réalisation devient une forme de garantie de sa possibilité. C'est ce que nous avons exemplifié dans la construction de nos situations expérimentales.

Les adaptations de la TSD au niveau des objets complexes

Dans le cadre de la conception d'une ingénierie sur des savoirs complexes dans la TSD, nous avons vu que cette possibilité induit certaines adaptations de la TSD à la spécificité de ces savoirs.

En fait, deux types d'adaptation de la TSD se sont avérés nécessaires. La notion de *métaphore fondamentale* a permis de sélectionner les significations fondamentales du savoir visé et ainsi de s'affranchir de "l'universalité" de la situation fondamentale. Cependant ces significations doivent être porteuses de la potentialité des autres significations. Nous avons vu d'ailleurs que dans la contingence les autres significations s'invitent, même si elles n'ont pas été retenues comme prioritaires, mais sans faire obstacle dans la mesure où la situation ne les incorpore pas comme décisives. La deuxième adaptation que nous avons pointée comme nécessaire concerne la notion de milieu subjectif, en lieu et place du milieu objectif, pour modéliser des interactions avec le milieu matériel qui prenne en compte aussi cette complexité du savoir visé. Pour les savoirs complexes, les rétroactions du milieu matériel ne sont, en effet, plus objectives, c'est-à-dire immédiatement interprétables et partageables, mais sont bien davantage des rétroactions subjectives car elles proviennent d'une interprétation forte du milieu. Ce type de milieu implique de porter l'attention non plus sur les seules rétroactions objectives possibles, mais avant tout sur les rétroactions subjectives, et les moyens de les mettre en conflits pour créer une dynamique d'objectivisation. Cette objectivisation passe par des conflits de rationalités et nécessite la plupart du temps une transition de rationalité, ainsi que par une organisation des interactions qui suppose une animation idoine. Le débat scientifique peut prendre en charge, aux niveaux heuristiques du milieu, ces adaptations de la TSD : nous pensons que nos expérimentations l'ont montré.

Le débat scientifique en classe cherche « à convier les élèves à pratiquer le grand jeu, c'est à dire le jeu d'une communauté scientifique dans laquelle chacun s'essayera à produire des énoncés généraux (les conjectures) et se sent en charge de contrôler la validité de ceux qui sont produits par d'autres. » (Legrand, 1993). Le professeur, dans la phase heuristique, est dans ce

cadre un animateur qui met en avant et structure les différentes propositions pour leur donner de la visibilité, tout en gardant une neutralité épistémologique. Dans la première partie du débat les différentes thèses s'exposent, et les participants comprennent que d'autres pensent différemment : le milieu subjectif correspond à cette phase. Le travail qui consiste à argumenter pour défendre sa thèse ou pour montrer que telle autre thèse n'est pas valide, est réalisé dans le milieu de référence. Le modèle de rationalité vient s'insérer naturellement dans ce dispositif en répondant à la nécessité de préserver l'adidacticité. Pour que les différentes positions s'affrontent il est d'abord nécessaire qu'un fort principe de non contradiction soit à l'œuvre : « on ne peut pas dire tous les deux le contraire et avoir raison tous les deux ». Ce principe est le fondement du modèle de rationalité et la condition première pour qu'un conflit existe et conduise à une transition de rationalité. Mais ce n'est pas suffisant. Pour que le dépassement des conflits de rationalité puisse avoir lieu, il faut que les transitions de rationalités soient effectuées. Il faut donc que des connaissances qui fondent les rationalités, dans tous ses niveaux, soient mobilisables : éléments de logique, notion de définition et éléments de validation.

Les adaptations de la TSD et les niveaux de modèles de milieux

Trois niveaux de modèles de milieux interviennent nécessairement dans la conception d'une ingénierie didactique dans le cadre de la TSD (Bloch, 2002) : le niveau théorique de la situation fondamentale, le niveau expérimental où l'on analyse la réalisation de la situation théorique et enfin le niveau de la contingence où l'on analyse la réalisation effective de la situation expérimentale. Le niveau théorique est le lieu de l'établissement d'une situation fondamentale où les critères de conceptions sont épistémologiques et mathématiques. La situation fondamentale permet de prévoir les différentes variables didactiques, les valeurs potentielles de ces variables sont étudiées au niveau du modèle expérimental. Une fois le choix de ces valeurs fixé, la situation est confrontée à la contingence. On analyse ensuite les résultats de cette expérimentation à l'aune de l'analyse a priori.

Dans le cadre des adaptations de la TSD aux savoirs complexes telles que nous les avons décrites, le niveau théorique devient, pour le savoir visé, le niveau de définition de la métaphore fondamentale à partir du choix des significations parmi celles qui fonderaient une situation fondamentale. Les significations retenues donnent lieu à des variables didactiques dont les valeurs vont être étudiées au niveau expérimental. La prise en en compte des adaptations liées aux niveaux heuristiques (les niveaux de milieux régulés) et les possibilités de mise en œuvre sous forme de débat scientifique, et aux niveaux et transitions de rationalités, vont permettre de définir une situation expérimentale a priori. Les connaissances réelles des élèves jouent un rôle déterminant dans le choix des valeurs des variables didactiques finalement retenue. Le tableau de la structuration des niveaux des milieux régulés et des niveaux de rationalités est utilisé notamment pour effectuer les analyses a priori. Dans ce tableau, les modifications apportées sont fondamentalement soulignées à travers le rôle des élèves et celui du professeur, mais aussi dans l'explicitation des possibilités de transitions de rationalités. Dans ce modèle, le rôle du professeur ne se limite pas à observer des rétroactions du milieu matériel. Le professeur devient garant, aux niveaux subjectifs et de référence, de l'efficacité des interactions entre les élèves. La fonction d'un tel schéma est de prévoir les différentes interactions en prenant en compte, à chaque niveau, l'analyse : des niveaux de rationalités sur l'objet visé, des conflits de rationalités, des niveaux de rationalités sur les objets annexes, des transitions nécessaires pour l'objet

visé en vue de changements de milieux de la situation, des niveaux de rationalités nécessaires pour les objets annexes afin de pouvoir effectuer les transitions qui permettent de résoudre les conflits. C'est ce modèle que nous avons mis en œuvre pour la notion de limite.

Les significations de la métaphore fondamentale de la limite que nous avons retenues constituent le fondement épistémologique de notre ingénierie : le principe fondamental de l'analyse, la notion de définition, les règles de la logique et particulièrement l'interprétation de la double quantification. La progression que nous avons retenue articule progressivement ces significations, les fait jouer et rejouer dans différents contextes. Le fil directeur de l'ingénierie est la notion de définition. Il est question de définition quand, dans la première situation, définir le mot « nombres consécutifs » devient incontournable pour décider de la validité de l'assertion. Il est question de définition dans la deuxième situation sur la double quantification à plusieurs reprises, par exemple, lorsque les interprétations antagonistes de la double quantification font émerger le besoin d'une convention partagée. Il est aussi question de définition quand, dans la situation sur la limite, l'inversion des quantificateurs produit la définition de la limite. Ces multiples occasions de rencontrer le besoin de formaliser ce qui initialement paraissait évident, mais à l'usage s'avérait ambigu puisque chacun voyait une évidence qui lui était propre, mènent manifestement à adopter finalement le formalisme de la limite. Ces types de situations de définition – que nous avons notées Sd3 quand les conceptions concernant un objet conduisent seulement à des contradictions et Sd2 quand, de plus, la situation conduit aussi à dessiner les contours de l'objet visé et faire apparaître le besoin de le formaliser – conduisent à établir à un autre rapport à la définition. C'est un apprentissage sur l'objet lui-même auquel on peut assister, mais aussi progressivement à la notion même de définition : celle-ci devient ce passage obligé de l'activité mathématique. Autrement dit, les élèves construisent des éléments de la rationalité théorique à travers ces situations. C'est d'ailleurs bien ce à quoi nous avons assisté quand progressivement les discussions des élèves portent de plus en plus sur la validité des arguments une fois qu'ils sont d'accord sur la validité des conjectures elle-même. Les élèves, fondamentalement, sont sur le chemin d'adopter les principes mathématiques de la communauté savante. L'acculturation progressive à laquelle nous assistons provient, selon nous, d'une analyse a priori qui prend en compte non seulement les niveaux de milieux et les connaissances mais aussi les niveaux et transitions de rationalités. Les conflits de rationalités prévus dans les analyses a priori ont lieu et déclenchent des processus efficients de transitions de rationalités. Dans ces processus, la prise en compte des connaissances réelles des élèves est un élément incontournable de la robustesse des analyses a priori. Progressivement, les contradictions sont identifiées de plus en plus rapidement et finalement jamais lâchées avant d'être résolues quand la situation le permet. Autrement dit, le dispositif acquiert progressivement de l'efficacité. En guise d'épilogue~~,~~ nous voudrions évoquer un épisode post-ingénierie que nous trouvons significatif de l'effet de l'ingénierie, significatif mais non contrôlé. A la suite de cette ingénierie, un cours pour cette classe sur les limites infinies à l'infini a débuté par un questionnaire dont voici l'énoncé :

Pour chacune des trois fonctions données par leurs graphes (figure ci-dessous), lorsque le graphe de la fonction continue comme il a commencé, la fonction admet une limite infinie en l'infini. Est-ce vrai ou faux ?

Figure 63 : Trois graphes de fonctions ayant ou pas de limite infinie en l'infini

Le questionnaire a révélé un fait surprenant. Alors qu'il était plutôt attendu qu'« on ne peut pas répondre sans définition », un élève a répondu en élaborant la définition formelle de la limite infinie en l'infini. Cet élève est venu ensuite expliquer au tableau comment il avait répondu à ce questionnaire, comment il avait conçu cette définition et comment il l'appliquait dans chaque cas. A l'issue de discussions en classe, il a su convaincre de la validité de la définition proposée et qui a été finalement adoptée. Finalement, si un seul élève propose une telle définition, nous retenons surtout qu'il parvient, seul et sans difficulté, à convaincre la classe du bien-fondé de sa définition et de l'utilisation du formalisme associé pour chaque cas.

Questions et perspectives de recherche

Nous voudrions terminer cette conclusion par quelques questions et ouvertures.

La première question que nous posons concerne la reproductibilité d'une telle situation. Si on peut, globalement, constater des apprentissages certains lors des situations expérimentales, peut-on espérer arriver aux mêmes constats dans d'autres contextes notamment ceux des classes ordinaires ? Nous pourrons alors nous demander aussi dans quelle mesure l'épistémologie propre du professeur intervient dans cette question de la reproductibilité. Il pourrait s'agir, par exemple, d'étudier l'influence de cette épistémologie dans les prises de décisions d'animation lors d'expérimentations de la situation par d'autres intervenants.

La deuxième question concerne le rôle du professeur. Comment définir plus précisément le rôle du professeur de manière à ce que celui-ci puisse gérer efficacement la situation ? Nous avons vu que, si très peu d'effets de contrat de rationalités ont été identifiés tout au long des expérimentations, il y a eu cependant quelques ruptures d'adidacticité. Deux choix sont alors possible, le premier correspond à celui développé par Bloch et appuyé par les chercheurs dans le cadre de la TSD (Margolinas, 1995 ; Comiti, Grenier, & Margolinas, 1995; Bloch, 1999...), et consiste à confier au professeur la possibilité de régulations ponctuelles, ceci justifiant la dénomination de « situation à dimension adidactique », récemment interprétée en termes de « potentiel adidactique de la situation » (Gravesen, Grønbæk, & Winsløw, 2016). La seule stricte neutralité ne serait alors plus suffisante pour définir le rôle du professeur. Et la question théorique sous-jacente dans la TSD pourrait être : jusqu'à quel point peut-on envisager l'action du professeur dans une situation à dimension adidactique relative à des savoirs complexes, sans que cette action ne dénature la situation ? Une redéfinition possible à partir de la possibilité, pour celui-ci, de réaliser des effets de contrat pour débloquer « les situations coincées » mais uniquement sur les objets annexes de la situation pourrait être alors envisagée. Cela conduirait le professeur à garder une vigilance épistémologique plus forte dans la mesure où il lui reviendrait certains choix, et donc une plus grande responsabilité. L'autre choix est celui que nous avions suivi en essayant de préserver l'adidacticité. Ce choix devrait pouvoir résister à l'expérimentation, cela

implique qu'une étude supplémentaire est nécessaire concernant les ruptures d'adidacticité observées. Proviennent-elles d'un choix inadapté, par exemple, de variable didactique, de valeurs de variable didactiques ?

La troisième question concerne l'intégration des registres sémiotiques dans notre cadre d'analyse. Comment intégrer à ce cadre, par exemple les apports sémiotiques du modèle de Bloch et Gibel qui a été enrichi et exploité par Lalaude-Labayle (2016), et quel autre éclairage pourrait nous apporter cette dimension d'analyse ?

Une quatrième question porte sur le caractère individuel et collectif de la rationalité mobilisée. Si l'on peut observer les indices de rationalités individuelles exprimées, les échanges collectifs laissent à penser qu'une forme de rationalité collective est en cours de développement. Quels mécanismes sous-tend la dialectique rationalité individuelle/rationalité ?

Une dernière question porte sur l'utilisation du modèle de rationalité dans d'autres contextes que celui de la TSD. En effet, ce modèle a été conçu pour répondre à un besoin de la TSD et nous avons montré comment il pouvait être mobilisé dans ce cadre, mais nous pouvons aussi nous demander comment ce modèle pourrait être mobilisé dans d'autres contextes, ou dans l'analyse des classes ordinaires, ou encore couplé à d'autres cadres d'analyse. Toutes ces questions sont autant de pistes d'étude à explorer à la suite de cette recherche.

Bibliographie

Alcock, L., & Simpson, A. (2009). The role of definition in example classification. In *Proceedings of the 33 conference of the international group for the Psychology of Mathematic Education*, (pp. 33-40). Tessaloniki (Grèce).

Andler, D. (2004). Logique, raisonnement et psychologie. In D. Andler (Éd.), *Introduction aux sciences cognitives* (pp. 315-405). Paris : Gallimard.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2.3), 241-286.

Artigue, M. (2014). Potential and limitations of the theory of Didactic Situations for addressing the teaching and learning of mathematics at university level. *Research in mathematic education*, *16*(2), 135-138.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance* (Nouvelle édition). Paris : J. Vrin.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Thèse. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG ; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Grenoble.

Barallobres, G., & Giroud, J. (2006). Carences et régulations des milieux en situation de validation. In *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke (Canada).

Barrier, T. (2009). *Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques*. Thèse. Université Claude Bernard - Lyon I, Lyon.

Bebbouchi, R. (2006). Quelle rationalité dans une figure géométrique ? In *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke, Canada.

Bergé, A. (2008). The Completeness Property of the Set of Real Numbers in the Transition from Calculus to Analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 217-235.

Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 217-227.

Berthelot, R. (1983). Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en première A. IREM de Bordeaux.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique- Détermination d'un milieu- Connaissances et savoir. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-194.

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, Bordeaux.

Bloch, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. Dans *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques,* (pp. 125-139). La Pensée Sauvage- Editions : Corps.

Bloch, I. (2005). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieure*. HDR. Université Paris-Diderot - Paris VII. Paris.

Bloch, I. (2015). Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques … Réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Petit x*, *97*, 71-79.

Bloch, I. (2017). L'enseignement de l'analyse : de la limite à la dérivée et au EDO, questions épistémologiques et didactiques. In *Actes de la 18ème école d'été de didactiques des mathématiques*. Brest. (à paraître).

Bloch, I., Chiocca, C.-M., Job, P., & Schneider, M. (2006). Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse ? In *Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage-Editions.

Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques. Étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(2), 191-228.

B.O.E.N. (2009). *Programme de mathématiques seconde 2010*. Eduscol.

B.O.E.N. (2011). *Programme de mathématiques terminale S 2012*. Eduscol.

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school. In *proceedings of the 30th conference of international group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 185-192). Prague (Czech Republic).

Boero, P., & al. (2014). Habermas' construct of rational behaviour in mathematics education: new advances and research questions. In *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1) PME.* (Vol. 1, p. 205-235). Vancouver, Canada.

Boudon, R. (2009). *La rationalité*. Paris : Presses universitaires de France.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. Cham : Springer International Publishing.

Bridoux, S. (2016). Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique pour l'enseignant ? In *proceedings of INDRUM* 2016. Montpellier.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *La problématique et l'enseignement de la mathématique. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, (pp.101–117).

Brousseau, G. (1986). La relation didactique : le milieu. In *Actes de la IV école d'été de didactique des mathématiques* (Irem, pp. 54-68). Paris 7.

Brousseau, G. (1997) Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. A paraître dans «Interactions didactiques» (Genève). http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf

Brousseau, G. (1998a). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. *La théorie des situations didactiques*, 115–160. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998b). *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000). Education et Didactique des mathématiques. In *Educacion y didactica de las matematicas*, 12, 5-39.

Brousseau, G. (2002). Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques. *Revue du Centre de Recherches en Education,* 22-23, 83–155.

Burn, B. (2005). The Vice: Some Historically Inspired and Proof-Generated Steps to Limits of Sequences. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 269-295.

Cabassut, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*. Thèse. Université Paris-Diderot - Paris VII. Paris.

Cabassut, R. (2006). Un cadre théorique pour étudier la rationalité dans les programmes de mathématiques du collège : entre nécessité et plausibilité. In *Actes du colloque EMF 2006*, Sherbrooke (Canada).

Cauchy, A.-L. (1821). *Analyse algébrique*. Cours donné de l'école polytechnique.

Chalmers, A. F., & Biezunski, M. (1990). *Qu'est-ce que la science ? récents développements en philosophie des sciences : Popper, Kuhn, Lakatos, Feyerabend.* Paris : Librairie générale française.

Charlot, G., Lecorre, T., Legrand, M., Leroux, L., & Di Martino, H. (2015). Le débat scientifique en classe : une démarche d'investigation collective pour une culture scientifique commune. In *Actes du colloque EMF 2015*. Alger.

Chellougui, F. (2003). Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x*, *61*, 11–34.

Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse. Université Claude Bernard Lyon 1 et l'Université de Tunis, l'Université Claude Bernard Lyon 1. Lyon.

Comiti, Grenier, D., & Margolinas, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In *Différents types de savoirs et leur articulation* (La Pensée Sauvage., pp. 93-128). Grenoble.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Thèse. Math. pures-Grenoble 1, Grenoble.

Dahlberg, R., & Houssman, D. (1997). Facilitating learning event trough example generation. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 283-399.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique.* Thèse. Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble.

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse. Lyon 1 - Claude Bernard, Lyon.

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA Quantification. *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, *8*, 239-289.

Durand-Guerrier. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(1), 5-34.

Durand-Guerrier, L. (2007). La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique. Communication présentée au Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques ? INRP : Lyon.

Durand-Guerrier, V. (2005). Retour sur le Schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. In *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques*. Bordeaux.

Durand-Guerrier, V. (2006). Logique mathématique et logique de sens commun : rupture ou continuité ? In *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke, Canada.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(3), 295-342.

Durand-Guerrier, V., & Ngansop, J. N. (2013). An equality questioning the relationships between truth and validity, In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp.196-205). Antalya, Turquie.

Durand-Guerrier, V., & Vergnac. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique. *Petit x*, *96*, 7-30.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, *31*, 37-61.

Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de science cognitives*, (5), 37-65.

Duval, R. (2005). Compréhension des démonstrations, développement de la rationalité et formation de la conscience individuelle. In *Actes GDM 2005* (pp. 7-41). Montreal (Canada).

Edwards. B. S. (1982). *The historical development of the calculus*. Spring-Verlag.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, *111*(5), 411–424.

Fabert, C., & Grenier, D. (2011). Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x*, (87), 31–52.

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse. Université Claude Bernard-Lyon I, Lyon.

Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique.* Thèse. Université de Tunis, Université Victor Segalen - Bordeaux II, Bordeaux.

Ghedamsi, I. (2016). Entrée des étudiants dans l'Analyse formelle de début d'université : Potentialité des méthodes numériques d'approximation. In *Proccedings of INDRUM 2016* (pp. 63-72). Montpellier.

Ghedamsi, I., Haddad, S., & Lecorre, T. (2107). Les alternatives en analyse : le cas de la limite et de l'intégrale. In *Actes de la 18ème école d'été de didactiques des mathématiques*. Brest.

Gibel, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire*. Thèse. Bordeaux 2. Bordeaux.

Gibel, P. (2006). Raisonnement et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire. In *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke, Canada.

Gilbert, T., & Rouche, N. (2001). *La notion d'infini : l'infini mathématique entre mystère et raison : intuitions, paradoxes, rigueur*. Paris : Ellipses.

Giroud, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse. Université Genoble, Grenoble.

González-Martín, A. S., Bloch, I., Durand-Guerrier, V., & Maschietto, M. (2014). Didactic Situations and Didactical Engineering in university mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 117-134.

Gravesen, K. F., Grønbæk, N., & Winsløw, C. (2016). Task Design for Students' Work with Basic Theory in Analysis: the Cases of Multidimensional Differentiability and Curve Integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 1-25.

Herbst, P., & Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: The case of engaging students in proving. *For the learning of Mathematics*, 23 (1), 2–14.

Hitt, F. (2006). Rationalité argumentative comme prélude à la démonstration en mathématiques. In *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke, Canada.

Houdement, C. (2006). Rationalité en géométrie, une affaire de paradigme ? In *Actes du colloque EMF 2006.* Sherbrooke, Canada.

Hume, D., & Beyssade, M. (2006). *Enquête sur l'entendement humain*. Paris : Flammarion.

Iannone, P., Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., Simpson, A., & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 1-14.

Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*. Thèse. Université de Liège, Belgique.

Kouki, R. (2006). L'articulation syntaxe/sémantique au coeur des analyses didactiques au niveau du collège élémentaire ? In *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke, Canada.

Kuhn, T. S. (1962). *La Structure des révolutions scientifiques*. Paris : Flammarion.

Lalaude-Labayle, M. (à paraitre). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire Analyses didactique et épistémologique. Thèse*, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris : Hermann.

Lê Thai, B. (2012). Notion de limite et décimalisation des nombres réels. Le cas de l'enseignment secondaire au Viet Nam. *Petit x*, *89*, 33-50.

Lê Thai, B. (2007). *Étude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'. Une étude de cas au Viêt-nam.* Thèse. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Grenoble.

Lecorre, T. (2016). Le « débat scientifique en classe », des points de vue didactique, épistémologique et socio-affectif. In *Actes de la 18ème école d'été de didactiques des mathématiques*. Brest.

Legrand, M. (1990a). « Circuit » ou les règles du débat mathématique. In *Enseigner autrement les mathématiques en deug A première année : Principes et réalisations*. Commision inter-IREM universités.

Legrand, M. (1990b). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*(9), 365-406.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, 10, 123-158.

Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales- Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(2), 221-280.

Lerouge, A. (1992). *Représentation cartésienne, rationalité mathématique et rationalité du quotidien chez des élèves de collège*. Thèse. Université Montpellier sciences et techniques du Languedoc. Montpellier.

Lerouge, A. (2000). La notion de cadre de rationalité. A propos de la droite au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20*(2), 171-208.

Lutz R., Makhlouf A., Meyer E. (1996) Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordre de grandeur : les réels dévoilés. APMEP, brochure n°103, Paris.

Malafosse, D., Lerouge, A., & Dusseau, J.-M. (2000). Notions de registre et de cadre de rationalité en inter-didactique des mathématiques et de la physique. *Tréma*, (18), 49-60.

Mamona-Downs, J. (2010). On introducing a set perspective in the learning of limits of real sequences. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 277-291.

Margolinas, C. (1985). *Questions sur l'enseignement des nombres réels : Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4e, le nombre dans tous ses états*. Talence : IREM de Bordeaux.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. *Les débats de didactique des mathématiques*, 89–102.

Mason, J. (2011). Phenomenology of example construction. *ZDM*, *43*(2), 195-204.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educationnale studies in mathematics*, *15*, 277-289.

Maurel, M., & Sackur, C. (2010). *Faire l'expérience des mathématiques entre enseignement et recherche*. Lyon : Aléas.

Mercier, A. Le milieu et la dimension adidactique des relations didactique, in Brun J., Conne, F., Floris R., *Analyse de protocoles entre didactique des mathématiques et psychologie cognitive*, Interactions Didactiques.

Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement.* Thèse. Université Paris-Diderot - Paris VII, Paris.

Morin, E. (1996). Rationalité et rationalisation. *Cahiers de l'Ocha*, *5*, 109-110.

Morselli, F., & Boero, P. (2009). Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 211-221).

Oehrtman, M., Swinyard, C., Martin, J., Hart-Weber, C., & Hah Roh, K. (2011). From intuition to rigor: calculus students' reinvention of the definition of sequence convergence. In *Proceedings of the 14th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 325-338). Oregon, Etats-Unis.

Oliveira, I., Bednarz, N., & Lajoie, C. (2006). Développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité : analyse d'une pratique d'enseignement au secondaire en regard du jugement porté sur la reconnaissance de situations proportionnelles. In *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke, Canada.

Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Grenoble.

Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve Étude épistémologique et enjeux didactiques*. HDR. Université Paris-Diderot - Paris VII, Paris.

Pedemonte, B. (2003). What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation? In *proceedings of CERME 3*. Bellaria, Italie.

Piatek-Jimenez, K. (2010). Students' interpretations of mathematical statements involving quantification. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(3), 41-56.

Popper, K. R., & Rosat, J.-J. (2009). *La connaissance objective : une approche évolutionniste*. Paris : Flammarion.

Popper, K. R., Thyssen-Rutten, N., & Devaux, P. (1973). *La logique de la découverte scientifique*. Paris : Payot.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1-3), 103-132.

Robert, A. (1982a). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*, *340* (431-449).

Robert, A. (1982b). *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. Divers articles de mathématiques.* Thèse. Université Paris VII, Paris.

Robinet, J. (1983). Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite d'une fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(3), 223-292.

Rogalski, J., & Rogalski, M. (2004). Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futures enseignants de mathématiques. *Annales de didactique et de science cognitives*, *9*, 175-203.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : Mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (L Viennot (Ed.), pp. 61-87). Paris : PUF.

Rogalski, M. (2012). Approches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques. In *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle–Actes du colloque EMF2012* (pp. 504–513). Genève.

Roh, K. H. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 263-279.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire.* Thèse. Université de Liège. Liège, Belgique.

Saboya, M., Bednarz, N., & Hitt, F. (2006). Le contrôle sur l'activité mathématique comme constitutif de la rationalité en mathématiques : élaboration d'un cadre de référence. In *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke, Canada.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P., & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *25*(1), 57-90.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, G. J., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(3), 323-340.

Schneider, M. (2007). Entre recherche et développement, quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ? In *Actes des journées mathématiques INRP* (pp. 21-36). INRP : Lyon.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Sur la relativité des Erreurs. In *Proceedings of the 39th CIEAEMos meeting* (pp. 70-87). Sherbrooke, Canada.

Simon, H. (1978). Rationality as Process and as Product of a Thought. In *Richerd T. Ely Lecture*.

Sirotic, N., & Zazkis, A. (2007). Irrational Numbers: The Gap between Formal and Intuitive Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 49-76.

Swinyard, C. (2008). *Students' reasoning about the concept of limit in the context of reinventing the formal definition*. Thèse. Portland State University. Portland, Etats-Unis.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. The Journal of Mathematical Behavior, 30(2), 93-114.

Tall, D., & Schwarzenberger, R. L. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, *82*, 44–49.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151–169.

Tall, D. (1986). Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics , Thèse, University of Warwick

Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. Educational Studies in Mathematics, 86(1), 97–124.

Davis, T. (2007) Notes de cours sur la rationalité, Stanford University, Californie, Etat-Unis. Non publiés papier et disponibles à : http://web.stanford.edu/class/symbsys170/Rationality.pdf

Vandebrouck, F. (2016). Student's visualization of functions from secondary to tertiary level. In *Proccedings of INDRUM 2016* (pp. 153-152). Montpellier.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol.10 n°2-3, pp 133-170

Vinner, S. (1992). The role of definitions in teaching and learning mathematics. In Tall, D.O. (ed), Advanced mathematical thinking, Dordrecht, Kluwer, pp.65-81.

Vivier, L. (2015). *Sur la route des réels*. HDR. Université Paris Diderot LDAR, Paris.

Vivier, L., & Durand-Guerrier, V. (2016). Densité de D, Complétude de R et analyse réelle Première approche. In *Proccedings of INDRUM 2016* (pp. 143-152). Montpellier.

Watson, A., & Mason, J. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4–377).

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, New Jersey, USA : Lawrence Erlbaum Associates.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). How do mathematicians validate proofs? *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education October 2004 Toronto, Ontario, Canada*, (pp. 622-628).

Weber, K., Porter, M., & Housman, D. (2008). Worked Examples and concept example usage in understanding mathematical concepts and proofs. *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education*, *73*, 245-252.

Williams, S. R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.

Zaslavsky, O. (2014). Thinking with and through examples. In *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education PME,* (Vol. 1, pp.32-35). Vancouver, Canada.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131-148.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM*, *40*(1), 131-141.

Annexes

1. Typologie des mots utilisés

Nous proposons ici séparément de revenir sur certaines des définitions que nous avons rencontrées et que nous adopterons comme référence. Nous isolons ce paragraphe des contextes qui nous amenés à rencontrer ces définitions afin de réaliser un accès pour le lecteur plus aisé lorsqu'il éprouvera le besoin de retourner à la référence. La majorité des définitions proposées ici concernent la validation.

Validation : on appelle validation un discours écrit ou oral, ou bien un dessin, un schéma, ou encore une manipulation concrète qui tend à donner un caractère de vérité à une affirmation. Ce caractère de vérité peut être relatif à l'apodicticité, la plausibilité, l'évidence perceptive…

Pour le mot raisonnement nous reprenons la définition d'Oléron (1977) adoptée par Boch et Gibel (2011) en le dénommant « raisonnement selon Oléron » car ce terme sera rediscuté ultérieurement. Jusqu'à ce moment nous ne préciserons pas chaque fois « selon Oléron » par soucis d'allègement mais ce sera cette définition qui fera quand même référence :

Raisonnement selon Oléron : un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicités et conduits en fonction d'un but.

Nous utiliserons les définitions de Cabassut (2005) suivantes (argument, formel, pragmatique, sémantique):

Un argument est un élément de validation caractérisé par le triplet (donnée, règle de validation, conclusion). (en gras ce que nous ajoutons)

Argument formel ou syntaxique : tout argument dont la structure est clairement explicitée (données, règle de validation, conclusion) et dont l'application de la règle de validation repose sur la forme des termes de la règle et des données, et ne nécessite pas une interprétation supplémentaire basée sur la signification ou le contenu de ces termes ou de ces données.

Argument pragmatique : tout argument utilisant le succès d'une action comme règle de validation /…/ L'action peut être effectivement réalisée ou pensée. On comprend que le recours à une action ne correspond pas à une règle formelle.

Argument sémantique : tout argument dont la règle de validation est constituée de règles qui ne sont pas formulées de manière formelle mais qui s'appuie sur la signification ou le contenu des objets qu'elles mettent en jeu.

Pour les mots preuve, démonstration, et argumentation nous empruntons certains éléments à Cabassut (2005), et d'autres à Balacheff (1988) :

Preuve : une preuve est un raisonnement de validation qui vise à rendre la conclusion nécessaire/certaine/apodictique à l'issu d'un processus social par lequel un discours assurant la validité d'une proposition change de statut en étant acceptée par une communauté.

Démonstration : une démonstration est une preuve constituée d'une suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit à

partir de ceux qui la précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini.

Argumentation : Lorsque dans une validation, la vérité de la conclusion est plus ou moins plausible nous l'appellerons argumentation.

Vérification : Nous appelons vérification une validation faisant appel à un argument pragmatique.

2. Fiche professeur pour situation des nombres

Situations de nombres consécutifs et règle de la logique : fiche résumé pour le professeur

Deuxième situation didactique.

C1 : « Si deux nombres sont consécutifs alors ils sont égaux »

Cette conjecture ne peut pas être résolue telle qu'elle est écrite car nombres et consécutifs sont des mots non définis a priori. Il faut faire cet acte de modélisation propre à tout questionnement scientifique qui consiste ici à fixer de quels nombres on parle et le sens de consécutif, cela s'appelle définir.

Définition : On dira que deux nombres distincts sont consécutifs s'il n'existe pas de nombre différent des deux nombres entre les deux.

Étude de C2 : « Si deux nombres entiers sont consécutifs alors ils sont égaux »

Les règles de la logique en mathématiques

« Si A alors B » est une conjecture, A s'appelle Hypothèse, B Conclusion.

Il existe plusieurs types de situations possibles pour une même conjecture :

Les exemples : Les situations qui vérifient l'hypothèse et la conclusion.

Les contre-exemples : Les situations qui vérifient l'hypothèse mais pas la conclusion.

Les Hors-sujet : les situations qui ne vérifient pas l'hypothèse.

Pour C2, il n'existe pas d'exemple puisque pour les entiers deux nombres consécutifs sont toujours différents, les nombres 2 et 3 constituent un contre-exemple puisqu'ils sont consécutifs et différents, et 4 et 6 constituent un hors-Sujet puisqu'ils ne sont pas consécutifs.

La règle fondamentale de la vérité d'une conjecture en mathématiques :

Si une conjecture admet un contre-exemple alors elle est fausse et elle est vraie si elle n'est pas fausse.

Ce qui signifie que :

Une conjecture est soit vraie soit fausse (si elle est suffisamment définie)

Un seul contre-exemple suffit pour prouver la fausseté

La vérité en maths pour une conjecture ne s'occupe pas de savoir s'il y a beaucoup d'exemples, ou des exemples intéressants. En fait les exemples ne disent rien sur la vérité en mathématique.

Pour notre conjecture : C2 est fausse puisqu'elle a un contre-exemple. 1et 2 est un contre-exemple et cela suffit.

Étude de C3 : « Si deux nombres réels sont consécutifs alors ils sont égaux »

Vérité de C3

Deux nombres consécutifs sont distincts, or dans R (l'ensemble des nombres réels) si deux nombres sont différents il y a un nombre entre les deux, la moyenne des deux. Cela signifie que dans R il n'y a pas deux nombres consécutifs.

Cela signifie donc qu'on ne peut pas trouver de contre-exemple puisque aucune paire de nombre ne peut vérifier l'hypothèse (être consécutifs). Cela signifie, puisqu'il n'y a pas de contre-exemple, que la conjecture C3 est vraie.

Cela est perturbant, et semble absurde...

Ce sentiment d'absurdité provient de plusieurs différences entre la logique du quotidien et celle des mathématiques.

Rapport vérité utilité

Dans la logique du quotidien, on attend à ce qu'une affirmation vraie soit utile : on peut en donner des exemples et même souvent on montre qu'on a raison en montrant qu'il y a beaucoup d'exemple.

Dans la logique des mathématiques, la vérité ne s'occupe pas de l'utilité, une conjecture est vraie si elle n'a pas de contre-exemple, y compris si elle n'a pas d'exemple non plus (et dans ce cas elle est vraie mais vraiment inutile).

Différence entre Causalité et Nécessité et entre logique du quotidien et logique mathématique

Dans la logique du quotidien : Quand« Si A alors B » est vrai, cela signifie que A est la cause de B.

Exemple : Si quelqu'un dit : « si il pleut alors je prends mon parapluie » alors on attribue à la pluie un caractère de causalité, et on en déduit que

Si il pleut et que la personne est fidèle à ses propos alors on peut être certain qu'elle prendra son parapluie.

S'il ne pleut pas alors on peut aussi être certain qu'il ne prendra pas son parapluie. (sinon à quoi sert de dire qu'on prend son parapluie à la condition qu'il pleuve, c'est à dire à quoi sert d'affirmer que la pluie est la cause du parapluie ?)

Dans la logique mathématique : Quand « Si A alors B » est vrai cela établit un rapport de nécessité entre A et B, ce qui signifie que

Si A est vrai alors B l'est aussi (sans exception, c'est à dire il n'y a pas de contre-exemple) (idem causalité)

Si A est faux alors B peut être soit vrai soit fausse, car l'affirmation « Si A alors B » n'a de conséquence sur B que quand A est vrai. (et cela diffère de la causalité)

C'est bien ce dernier aspect qui nous fait penser que C3 est fausse puisqu'en terme de causalité on a du mal à penser que consécutifs puisse être la cause de l'égalité. En terme de cause on a évidemment raison de penser cela mais C3 ne relève pas de la causalité mais de la nécessité et donc de l'existence ou non de contre-exemple (et pas d'exemples!).

Troisième situation didactique.

Première étape : dans N

Il s'agit de commencer à manipuler les collections d'inégalités.

Définition : Soit a et b deux nombres d'un ensemble de nombres K. On dit que a et b sont de proximité maximale dans K si f, la distance entre a et b est inférieure ou égale à n'importe quel nombre strictement positif de K.Ce qui s'écrit aussi :

a et b de K sont de proximité maximale dans K si pour tout de K avec on a

Question 1 : 2 et 6 sont-ils de proximité maximale dans N ?

Question 2 : trouvez deux nombres entiers de proximité maximale dans N.

Deuxième étape : dans R

Question 3 : 2 et 3 sont-ils de proximité immédiate dans R ?

Question 4 : trouvez deux nombres réels distincts de proximité maximale dans R.

Des couples peuvent être proposés et étudiés sous forme de conjecture. Si le cas 1 et 0,999 apparaît alors il sera traité comme c'est indiqué à partir de C3.

On peut penser que la proposition de l'impossibilité est rapidement effectuée : elle sera mise alors au vote sous forme de conjecture.

C2 : « Il n'existe pas deux nombres réels distincts a et b de proximité maximale dans R »

Deux avis peuvent être émis :

Oui c'est vrai ou bien non c'est faux avec un contre-exemple du type : 1 et 0,999...

Dans ce dernier cas le professeur soumet à la classe :

« a=1 et b=0,999... » est un exemple, un contre-exemple, un hors-sujet pour C2 ?

Si une majorité d'avis pour le contre-exemple devrait être exprimée, il devrait exister des élèves ayant l'idée qui a déjà été rencontré deux fois, à savoir prendre un troisième nombre entre deux nombres distincts et qui penseront donc que c'est un contre-exemple. Ce dernier avis devrait l'emporter ou moins créer du doute.

Sinon le professeur proposera lui-même d(a;b)/2 et montrera que d(a;b)/2<d(a;b)

On devrait dans ces conditions pouvoir conclure finalement que a=b.

Le professeur institutionnalisera la méthode : pour trouver plus petit qu'un réel strictement positif donné, il suffit de prendre la moitié ; en fait on déjà rencontré cette situation lors des nombres consécutifs. La démonstration consiste donc à supposer les deux nombres distincts, la distance entre les deux est donc non nulle, ce qui permet de trouver un nombre plus petit que cette distance et de conclure ainsi que les nombres ne peuvent donc pas être distincts.

Il s'agira alors de revenir à C2 que l'on peut écrire aussi :

C2' : « Si a et b sont distincts alors ils ne sont pas de proximité maximale ».

La démonstration précédente (sur 1 et 0,9999...) ayant été réalisée, on peut espérer qu'un élève l'adapte pour C2'. C'est à dire, suppose que a et b sont distincts et montre dans ce cas que les deux nombres ne peuvent pas être de proximité maximale. Finalement, le cas précédent aura servi à préparer le cas général.

Cette proposition démontrée constituera le principe fondamental de l'analyse qui sera reformulé sous la forme : « Si a et b, deux nombres réels vérifie que la distance entre les deux deux est aussi petite que l'on veut ; c'est à dire que si pour tout de R avec on a ; alors a=b »

3. Vérification d'une hypothèse de prévalence AE sur EA dans les manuels

Nous avons constaté la même interprétation erronée des énoncés de type (EA) que celle qu'identifie Dubinsky & Yiparaki (2000). Une hypothèse naturelle peut être faite sur la possible prévalence des énoncés de type (AE) dans l'enseignement secondaire qui pourrait contribuer à ce phénomène. Nous souhaitons ici tester cette hypothèse par une analyse des manuels scolaires. Nous pensons que l'utilisation des quantificateurs simples ou doubles, sous forme (EA) ou (AE) dans un manuel scolaire peut être une indication pertinente sur la fréquentation de l'élève de ces quantificateurs dans le quotidien de ses apprentissages. En effet, si ce quotidien n'est pas déterminé par la forme des manuels, beaucoup d'autres facteurs interviennent, les manuels qui sont la plupart du temps rédigés par des professeurs et des inspecteurs témoignent de pratiques et/ou de propositions de pratiques, ce qui peut constituer une information suffisamment significative pour statuer sur notre hypothèse. De plus cette étude des manuels s'avère, faute d'indication significatives dans les programme, une des seules manières de s'informer sur la place des quantificateurs dans l'enseignement si l'on excepte les enquêtes de terrain.

L'analyse des manuels à propos de la quantification présentée ici découle de plusieurs choix. Tout d'abord, nous ne souhaitons pas être exhaustifs car pour une telle question un échantillon bien choisi devrait suffire. En particulier nous avons choisi d'analyser quelques chapitres d'analyse (représentatif de l'enjeu de notre recherche) d'un manuel de seconde et un de terminale S en nous limitant à repérer précisément la présence de la quantification dans la totalité de la partie cours de ces chapitres. Nous n'explorerons donc pas les parties activités résolues, ni exercices, car si nous pensons que ces parties pourraient être instructives pour notre sujet, nous pensons a priori néanmoins que la présence de la quantification devrait apparaître davantage dans la partie théorique où le formalisme devrait être naturellement davantage présent. Ainsi nous repérerons dans cette partie cours, sur ces deux manuels, les énoncés susceptibles d'être analysés sur un échantillon de manuels plus vaste. Nous utiliserons d'autres manuels ensuite pour mener l'analyse de ces énoncés que nous jugeons emblématiques de l'emploi de la quantification. Nous pensons ainsi être plus efficaces dans notre analyse et obtenir des réponses satisfaisantes à nos questions, en particulier :

Quelle est la présence (quantité et qualité) des quantificateurs simples ?

Quelle est la présence (quantité et qualité) des énoncés de type (AE) et (EA) ?

Pour répondre à ces questions, nous avons enrichi la typologie réalisée par Chellougui (2003) pour analyser les formulations des quantifications dans les manuels :

1. Présence d'un quantificateur explicite (trié par quantification existentielle et universelle).
2. Absence de définition de la variable (ni ensemble, ni quantifié).

   Beaucoup de variables ne sont pas définies, ainsi par exemple on rencontre souvent l'emploi de l'intervalle [a;b] sans que ni a ni b soient définis. Nous ne compterons par exemple pour un tel intervalle [a;b] que 2 occurrences (par page) de ce type 3 même si la page contient plusieurs fois cet intervalle.
3. Enoncé doublement quantifié (triée par type AE ou EA).

Dans ce cas, ce type 4 se substituera au type 1 quantification explicite en cas de présence de quantificateur.

4. Si H alors C, H est quantifiée mais pas C.
5. Elément générique.
6. Présence d'un quantificateur existentiel implicite ou masqué.

Par exemple, nous comptons comme implicite ou masqué le quantificateur existentiel qui n'est pas écrit dans l'énoncé : « Par trois points A, B et C non alignés, passe un seul plan. ».

L'étude correspondante selon cette méthodologie figure en annexe, nous nous contentons ici de faire état des résultats.

Nous voulions analyser les manuels pour savoir si une prévalence d'énoncés de type (AE) pouvait expliquer une meilleure interprétation de ces énoncés que celle de type (EA). Cette étude a d'abord permis d'établir que le quantificateur existentiel simple est, dans l'échantillon analysé, très peu représenté. Nous avons également mis en évidence des rédactions qui permettent de transformer des énoncés qui contiendraient naturellement une quantification existentielle en énoncés qui n'en ont pas. Est-ce le signe de la prise en compte de la difficulté de donner du sens à ce quantificateur ? Est-ce une « stratégie » consciente de la part des auteurs ? Essaie-t-on d'utiliser un langage plus courant ? Dans tous les cas cette tendance observée a pour conséquence de réduire considérablement le nombre d'énoncés véritablement doublement quantifiés et selon l'échantillon étudié, davantage encore les énoncés de type (EA). Si l'on ne peut pas facilement mesurer les conséquences négatives d'une telle distribution asymétrique des différents types d'énoncés et de quantificateurs, on peut au moins affirmer qu'une telle distribution est cohérente avec l'asymétrie d'interprétation des énoncés doublement quantifiés identifiée par Dubinski et confirmée par notre première étude sur une classe.

a- La quantification dans le manuel de seconde transmaths

Nous avons donc analysé les 4 premiers chapitres du manuel transmaths seconde 2010 (Barra, Barros et Bénizeau 2010)

Voici par type, le nombre d'occurrences comptées :

1. présence d'un quantificateur explicite 19 (aucun quantificateur existentiel)
2. présence d'un quantificateur universel implicite 10
3. absence de définition de la variable 4
4. énoncé doublement quantifié 0
5. si H alors C, H est quantifiée mais pas C 0
6. élément générique 11
7. Présence d'un quantificateur existentiel implicite ou masqué 2

Pour ce qui est de nos deux questions :

Quelle est la présence des quantificateurs simples ? La réponse est simple : aucun quantificateur existentiel explicite dans ces quatre chapitres et pour ce qui est des quantificateurs universels, ils sont présents sous les 3 formes (explicite, implicite, élément générique).

Quelle est la place relative des énoncés de type (AE) et (EA) ? La réponse est simple encore : aucun énoncé de ce type n'est présent dans ces 4 chapitres.

Notons que les deux quantificateurs implicites (ou masqués) que nous avons relevés ne sont peut-être pas les seuls dans la mesure où il n'est pas toujours évident de les mettre à jour. Voici les deux exemples trouvés : dans le chapitre sur les généralités de fonction on définit ce qu'est un antécédent de la manière suivante :

Antécédent. Si un nombre k est l'image d'un nombre x, c'est-à-dire si $f(x) = k$, alors on dit que x est un antécédent de k.

Par exemple, si $f(x) = x^2$, alors $f(2) = 2^2 = 4$. Donc 2 est un antécédent de 4. Mais -2 est aussi un antécédent de 4 car $f(-2) = (-2)^2 = 4$.

On voit ici que le choix de rédaction fait disparaître la question de l'existence de l'antécédent, il fait d'ailleurs aussi disparaître l'idée même de définition puisque cet extrait apparaît sous le chapeau : « vocabulaire ». On remarquera que l'exemple qui suit, à propos de la fonction carré, ne pose pas non plus la question de l'existence de l'antécédent. Il aurait été simple de rajouter que -5 n'a pas d'antécédent puisqu'un carré est toujours positif. C'est effectivement simple quand on propose « Soit k un nombre réel. Si il existe x appartenant à Df l'ensemble de définition de f tel que f(x)=k, on dit que x est l'antécédent de k par f sur Df. » mais cela devient difficile si la définition n'aborde pas la question de l'existence. On voit ici que le formalisme initial adopté va faciliter ou au contraire compliquer voire empêcher certaines études de l'aspect des notions : dans notre cas la disparition du « il existe » pour l'antécédent occulte surtout sa non existence possible.

L'autre exemple que nous avons relevé est celui de la définition du maximum d'une fonction sur un intervalle.

Définition 4 f est une fonction définie sur D, I est un intervalle contenu dans D et a est un nombre de I.

- Dire que $f(a)$ est le **minimum** de f sur I signifie que $f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction : pour tout x de I, $\boldsymbol{f(x) \geqslant f(a)}$.
- Dire que $f(a)$ est le **maximum** de f sur I signifie que $f(a)$ est la plus grande valeur de la fonction : pour tout x de I, $\boldsymbol{f(x) \leqslant f(a)}$.

Ici même remarque que pour l'antécédent : on dit ce qu'est un minimum et un maximum pour une fonction réelle sur un intervalle, mais la formulation ne fait pas savoir qu'ils peuvent très bien ne pas exister. On aurait pu utiliser une formulation du type : « Si il existe a appartenant à I, tel que f(x)≤f(a) pour tout x de I alors f(a) est appelé maximum de f sur I ». Si la définition proposée par le manuel est formellement correcte, un aspect significatif du concept de maximum est passé sous silence par cette formulation.

On remarquera que cette absence de question de l'existence a lieu ici dans une définition (contrairement à l'antécédent) ce qui peut laisser penser que la disparition du quantificateur existentiel n'est pas lié au niveau de théorique en jeu. On aurait, en effet, pu penser que dans une

définition le niveau d'exigence du formalisme serait supérieur à celui d'une remarque sur le vocabulaire. On remarquera d'ailleurs, au passage, dans la définition proposée pour le minimum et maximum, que le statut des deux points (:) avant « le pour tout x... » n'est pas très clair...

Pour conclure sur cet exemple, nous verrons, avec les manuels de terminale, qu'il est emblématique de la disparition du quantificateur existentiel au niveau de la méthode utilisée : la variable qui pourrait être l'objet d'une question d'existence est projetée à l'avant de l'énoncé comme faisant partie du décor dès le départ : l'existence est ainsi devenue un fait.

Pour compléter cette étude de ce manuel de seconde, nous proposons une brève incursion dans un autre chapitre : le chapitre 8 « Géométrie dans l'espace ». Il n'a pas fait l'objet d'une analyse systématique (cela sortait du cadre fixé) mais nous tenons néanmoins à faire remarquer qu'il s'agit d'un chapitre qui, certainement du fait d'habitudes de rédaction spécifique au domaine, a une tendance à éliminer toute quantification :

Par exemple on y propose la propriété suivante : « Par trois points A, B et C non alignés, passe un seul et seul plan. » qui pourrait être quantifiée ainsi :

« <u>Pour tout</u> points A, B, C non alignés, <u>il existe</u> un seul plan passant par ces trois points. »

Autre exemple : « Une droite d et un point extérieur à d déterminent un seul plan » pourraient être quantifiée ainsi : « <u>Pour toute</u> droite d et <u>tout</u> point extérieur à d, <u>il existe</u> un seul plan contenant d et ce point. ». Nous ne disons pas ici que cette seconde formulation est meilleure que la première mais seulement que l'une ne contient aucun quantificateur, la seconde plusieurs et constatons seulement que le choix, dans ce manuel, semble favorable aux énoncés non quantifiés.

Dans le reste du chapitre on assiste à l'utilisation massive de quantificateurs universels implicites (en fait quasiment aucun n'est explicite), mais pas d'autres quantificateurs existentiels implicites.

Enfin remarquons que, en fin d'ouvrage, dans la partie appelée « Le vocabulaire la logique » (p.258 à 261) un passage est consacré à la quantification (extrait ci-dessous). Il y est expliqué ce que signifient les quantificateurs universel et existentiel. La quantification universelle implicite contenue dans certaines énoncés y est abordée avec l'exemple : « Dans **un** triangle, les médianes sont concourantes » (le gras est celui des auteurs) en rajoutant que cet énoncé doit se comprendre ainsi : «Pour tout triangle, les médianes sont concourantes » (On aurait pu ajouter « **toutes les** médianes » ?).

Nous remarquons ainsi que le manuel de seconde transmaths 2010, en proposant une partie (et non un chapitre) à la logique et en particulier un passage à la quantification, répond bien aux instructions officielles, de ne pas proposer la logique et les notations comme « l'objet de cours de séances spécifiques mais doivent être réparties sur toute l'année scolaire ». (« MENE0913405A programme de seconde 2010 » 2014)

Nous sommes cependant réservés, au vu de la partie du manuel analysé, de la possibilité de faire vivre la quantification existentielle tout au long de l'année quand elle est occultée à ce point par le cours lui-même.

5 Les quantificateurs

5.1 « Quel que soit », « Pour tout »

Exemples

1. Dans la proposition (P) : quel que soit le nombre x, $x^2 \geqslant 0$ », « **quel que soit** » est appelé **quantificateur universel**. Ce quantificateur permet de préciser l'ensemble des nombres x tels que $x^2 \geqslant 0$. Ici, cet ensemble est l'ensemble $\mathbb{R}$.
On peut dire aussi : « Pour tout nombre x, $x^2 \geqslant 0$ ». « **Pour tout** » est aussi un **quantificateur universel**.
2. Quels que soient les nombres a et b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Remarque : « Pour tout » et « un »

Parfois, « quel que soit » ou « pour tout » sont remplacés par les articles indéfinis « un », « des ». Par exemple, la proposition : « Dans **un** triangle, les médianes sont concourantes » doit se comprendre ainsi : « **Pour tout** triangle, les médianes sont concourantes ». De même, « Pour **des** nombres positifs a et b, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ » signifie « **Pour tous** nombres positifs a et b, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ».

5.2 « Il existe au moins un »

Exemple. Considérons la proposition (P) : « Si a, b et c sont trois nombres positifs tels que $a+b+c=12$, alors parmi ces trois nombres, il en existe au moins un qui est supérieur ou égal à 4 ».
Dans cette proposition, « **il existe au moins un** » est appelée **quantificateur existentiel**.
Cette proposition est vraie. En effet si a, b et c, positifs, sont tous strictement inférieurs à 4, leur somme est strictement inférieure à 12. Donc au moins l'un de ces nombres est supérieur ou égal à 4. Mais il peut en exister deux. Par exemple : $4+5+3=12$.

Autre exemple. La proposition « il existe un triangle pour lequel la somme des angles est 190° » est fausse.

b- La quantification dans le manuel de terminal transmaths TS

Nous avons analysé le cours des cinq premiers chapitre du manuel transmaths TS 2012. (Bonneval, Barros et Bénizeau 2012).

(Chapitre 1 Suites, Chapitre 2 fonctions et limites, Chapitre3 fonction exponentielle, Chapitre 4 continuité et dérivation, Chapitre 5 fonction logarithme népérien)

Voici par type, le nombre d'occurrences comptées :

1. présence d'un quantificateur explicite 113 universels et 8 existentiels
2. présence d'un quantificateur universel implicite 75
3. absence de définition de la variable 11
4. énoncé doublement quantifié 6 (4 type AE et 2 de type EA)
5. si H alors C, H est quantifiée mais pas C 0
6. élément générique 14
7. Présence d'un quantificateur existentiel implicite ou masqué 10

Reprenons maintenant notre première question : Quelle est la présence des quantificateurs simples ?

Il y a une présence massive de quantificateur universels explicites. Ils apparaissent aussi dans leur forme implicite et élément générique. Pour ce qui est des quantificateurs existentiels, il y en a très peu et le plus souvent ils sont masqués ou implicites (Notons d'ailleurs que les quantificateurs existentiels simples ont été comptabilisés aussi dans la catégorie des énoncés doublement quantifiés quand ils participaient à de telles énoncés). Mais regardons dans quelles situations ces quantificateurs existentiels justement disparaissent.

Le programme de terminale contient plusieurs théorèmes, dans le programme d'analyse, contenant a priori des quantificateurs existentiels, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires ou bien la définition de convergence d'une suite. Il apparaît que ces occasions de faire jouer son rôle à ces quantificateurs sont souvent manquées puisque des formulations alternatives permettent de les éviter. Regardons plus précisément :

Dans le chapitre sur les suites page 25, on définit la convergence ainsi :

« dire qu'une suite a pour limite l signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice (ou rang) »

Ici, on voit que hormis pour la suite, tous les quantificateurs universels sont explicites, mais que les deux quantificateurs existentiels disparaissent par effet de formulation. Ceci est effectivement obtenu en définissant ce que signifie « converger vers l » au lieu de définir « converger » la formulation évite d'utiliser le « si il existe l tel que... » puis en utilisant le « à partir d'un certain indice » au lieu de « si il existe un rang à partir duquel.... ».

Si comme le fait observer Viviane Durand Guerrier (Durand-Guerrier 2005), le l de la définition peut être déplacé à l'avant de la définition précédé d'un quantificateur universel : « Pour tout l, pour toute suite (u_n) où n est un entier, on dit que converge vers l si.... »

Pour le second quantificateur existentiel (concernant le rang à partir duquel...) on ne peut pas le placer devant comme le premier puisque le rang dépend de l'intervalle choisi.

On peut observer sur la même page 25, une autre expression identique « un certain rang ». Cette deuxième occurrence n'est pas identique à la première dans la mesure où ce « certain rang » peut, lui, être déplacé contrairement au « certain rang » précédent.

Voici le théorème de comparaison dans lequel il apparaît :

« (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si pour tout entier n supérieur à un certain entier n_0, $u_n<v_n$ et $\lim_{x\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} v_n=+\infty$ »

En effet on peut à la fois remplacer cet énoncé par un énoncé précédent ce certain rang d'un quantificateur existentiel :

« (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si il existe n_0 tel que pour tout entier n supérieur à n_0, on a $u_n<v_n$ et $\lim_{x\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} v_n=+\infty$ »

Ou bien précédé d'un quantificateur existentiel :

« Pour tout n_0, pour toute suite (u_n) et (v_n), si pour tout entier n supérieur à n_0, et $\lim_{x\to+\infty} u_n=+\infty$ on a alors $\lim_{x\to+\infty} v_n=+\infty$ »

Dans le cas de ce théorème de comparaison, on voit que au moins trois formulations sont possibles. Celle qui est retenue écarte toute quantification. La conséquence d'un tel choix risque d'être la confusion car le sens de ces substitutions peut varier d'un contexte à l'autre. En effet dans cette page du manuel « le certain rang » renvoie à des possibilités de quantifications très distinctes selon les cas comme on l'a vu. Ceci est clair pour celui qui connaît préalablement le sens des énoncés, mais pour celui qui les découvre, cela peut être source de confusion.

En réalité, c'est la notion de variable libre ou liée (a priori hors du niveau de terminale S) qui justifie qu'on puisse déplacer ou non la variable dans l'énoncé. Quand elle est libre, elle peut être déplacée, quand elle est liée, elle dépend d'une autre variable qui doit la précéder et donc la variable liée est beaucoup moins mobile.

On remarquera que dans le théorème de comparaison précédent, dans la définition de convergence mais aussi dans les définitions d'antécédents et de maximum (du manuel de seconde) l'existence d'une variable libre est remplacée par une quantification universelle (souvent implicite) placée en début d'énoncé et que cette « substitution » constitue manifestement une technique efficace pour faire disparaître le « il existe » des énoncés. Comme nous l'avons vu pour le maximum et l'antécédent (pour le manuel de seconde), cela ne va pas sans transformation du sens exprimé : ainsi, par exemple, « la convergence d'une suite » est remplacée par « la convergence d'une suite vers l », ce qui peut induire que la convergence d'une suite n'est plus appréhendée comme une propriété intrinsèque la suite.

Regardons d'autres cas de quantifications existentielles où le quantificateur apparaît comme masqué.

Page 112 : Le théorème des valeurs intermédiaires est énoncé ainsi : « f est une fonction continue sur un intervalle [a;b]. Pour tout nombre k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un nombre c compris entre a et b tel que f(c)=k. »

Une explication vient juste ensuite : « Autrement dit, pour un nombre k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x)=k, d'inconnue x, a au moins une solution c dans l'intervalle [a;b] » Cette nouvelle formulation gomme tout quantificateur de l'énoncé.

Viens ensuite le théorème des valeurs intermédiaires avec stricte monotonie :

« f est une fonction continue, strictement croissante sur l'intervalle I=[a;b].

1. L'image de l'intervalle I par f est [f(a);f(b)].

2. Pour tout nombre k compris de [f(a) ; f(b)], l'équation f(x)=k a une seule solution et une seule dans l'intervalle [a;b] »

En exprimant ainsi le théorème, l'existence d'un nombre qui vérifie f(x)=k est remplacée par le fait qu'une équation a une solution. Cette substitution est définitive dans la même page puisque ensuite le « il n'existe » n'apparaîtra plus et laissera sa place aux « solutions de l'équation » (3 autres fois dans la page).

Encore une autre façon d'évacuer rapidement la question de l'existence :

Page 138 pour introduire la fonction ln, on utilise la réciproque de la fonction exponentielle. Ainsi « Pour tout nombre x>0, il existe un nombre y et un seul tel que ». Cette formulation

faisant apparaître un quantificateur existentiel est aussitôt remplacée par une formulation le faisant disparaître : « A chaque nombre x>0, on peut associer un unique réel y » qui sera à nouveau utilisé lors de la définition.

Enfin apparaît une autre opportunité de statuer sur une existence : la définition de la fonction exponentielle comme unique solution à l'équation différentielle y'=y et y(0)=1. Dans le manuel, cela apparaît sous la forme d'un théorème : « il existe une unique fonction f dérivable sur R telle que : pour tout nombre x, f '(x)=f(x) et f(0)=0 ». La démonstration commence par « l'existence d'une telle fonction est admise » (conformément au programme (« MENE1119473A programme TS 2011 » 2014)).

Et cette existence ne sera plus questionnée, ni évoquée dans le cours.

Reprenons maintenant notre deuxième question : quelle est la place relative des énoncés de type (AE) et de type (EA) ?

Le décompte est clair, la présence de ces deux types d'énoncés dans le cours des chapitres étudiés de ce manuel est extrêmement rare : il y a seulement six énoncés franchement doublement quantifiés. En effet nous venons de voir que des énoncés qui aurait pu l'être naturellement sont rédigés de manière à masquer complètement le quantificateur existentiel, ce qui fait perdre à nos yeux le caractère doublement quantifiés de ces énoncés. Aussi nous ne les avons pas comptabilisés comme tels. Mais regardons ces six énoncés doublement quantifiés :

Définition 3

- Dire qu'une suite (u_n) est **majorée** signifie qu'il existe un nombre M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$. Un tel nombre M est appelé un **majorant** de la suite (u_n).
- Dire qu'une suite (u_n) est **minorée** signifie qu'il existe un nombre m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$. Un tel nombre m est appelé un **minorant** de la suite (u_n).
- Une suite à la fois minorée et majorée est dite **bornée**.

page 28 : définition d'une majorée, d'une suite minorée

Cette définition est comptée comme deux énoncés de type (EA)

Théorème 9

1. Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

2. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

LOGIQUE
Négation d'une proposition
→ p. 465

Démonstration

1. Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Par négation de la définition d'une suite majorée, quel que soit le nombre A, il existe un indice N tel que $u_N > A$.

La suite étant croissante, il en résulte que tous les termes de la suite d'indice supérieur à N sont supérieurs à A. Quel que soit le nombre A, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain indice (l'indice N) : la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

2. De façon analogue, on démontre la partie 2.

page 28 : utilisation de la définition de suite majorée dans la démonstration. La première ligne de la démonstration est comptée comme un énoncé de type AE (en fait présentée comme la négation d'un énoncé de EA).

Remarquons l'encadré « logique » qui pointe un passage « négation d'une proposition logique » que nous reproduirons ensuite.

Page 56 : interprétation graphique de la définition de limite infini en un point

Interprétation graphique dans le cas où $I =]a\,;\,+\infty[$. Quel que soit le nombre M, on peut trouver un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout x de $]a\,;\,a+\alpha[$, $f(x) > M$: la courbe $\mathscr{C}_f$ restreinte à $]a\,;\,a+\alpha[$ est dans la partie colorée ci-dessous.

Cette interprétation graphique fait intervenir une forme d'énoncé doublement quantifié de type (AE) (le « il existe » a été ici remplacé par « on peut trouver » qui est jugé suffisamment proche pour le comptabiliser) alors que l'énoncé de la définition elle-même n'est franchement pas doublement quantifiée.

P 112 : Le théorème des valeurs intermédiaires (comptabilisé comme énoncé de type (AE)

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3 (admis)

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** nombre c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

page 138 : définition du logarithme népérien

1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition

La fonction exponentielle étudiée dans le chapitre 3 est dérivable (donc continue) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
Il en résulte, d'après l'extension du théorème des valeurs intermédiaires (théorème 5, chapitre 4, p. 113), que :
– l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction exp est l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$;
– pour tout nombre $x > 0$, il existe un nombre y et un seul tel que $e^y = x$.
À chaque nombre $x > 0$, on peut associer un unique réel y.
On définit ainsi une fonction de $]0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1

La fonction **logarithme népérien**, notée **ln**, est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
Elle associe à tout nombre x strictement positif le nombre y, noté $\ln(x)$, dont l'exponentielle est x.

On peut voir dans l'introduction qui précède la définition du logarithme népérien, l'énoncé : « pour tout nombre x>0, il existe un nombre y et un seul tel que » qui sera comptabilisée comme énoncé de type (AE)

Pour la question de la part relative des deux types d'énoncés, il est clair que, dans la rareté observée, les énoncés de type (AE) sont effectivement p nombreux (4 AE pour 2 EA). A cela nous devons ajouter le fait que ces deux énoncés de type (EA) représentent la même idée, l'un

la définition de suite majorée, l'autre de suite minorée. Il y a clairement une distribution non homogène des deux types d'énoncés en faveur de ceux de type (AE).

Enfin, comme pour le manuel de seconde, en fin de manuel, une partie « vocabulaire de la logique » reprend les éléments sur la quantification déjà présents dans le manuel de seconde et ajoute à ceux-ci un passage sur la négation qui contient les règles de négation des énoncés quantifiés que voici page 466 et 468 :

page 466 : négation d'une proposition universelle.

5.4 Négation d'une proposition universelle

Une proposition universelle est une proposition qui contient le seul quantificateur « pour tout » ou « quel que soit » (ou « pour tous » ou « quels que soient »).

Exemple

Prenons la proposition (P) suivante : « **Pour tout** nombre x, $(x+1)^2 > 0$ ».
Nier (P), c'est dire : « Il **existe au moins un** nombre x tel que $(x+1)^2 \leqslant 0$ ».
(Non P) est vraie car pour $x = -1$, $(x+1)^2 = 0$. Donc (P) est fausse.

Cas général

Notons (P) la proposition : « **Pour tout élément** x d'un ensemble E, x **satisfait** à une condition C ».
Alors (non P) est la proposition :
« **Il existe au moins un** élément x de E qui **ne satisfait pas** à la condition C ».

Conséquence : démonstration par recours à un contre-exemple

À l'aide d'un contre-exemple, démontrons que la proposition (P) : « Pour tout nombre $x > -1$, $x^2 > 1$ » est fausse.
Démontrer que (P) est fausse revient à démontrer que sa négation (non P) est vraie.
Or (non P) est :
« **Il existe au moins un** nombre x tel que $x > -1$, et tel que $x^2 \leqslant 1$ ».
Il s'agit donc de trouver un tel nombre x.
On cherche au plus simple : zéro convient car $0 > -1$ et $0^2 \leqslant 1$. Donc (P) est fausse.

Page 467 : négation d'une proposition existentielle

5.5 Négation d'une proposition existentielle

Exemple. La négation de la proposition (P) : « **Il existe au moins un** triangle dont l'orthocentre **est à l'extérieur** du triangle » est : « **Pour tout** triangle, l'orthocentre **est à l'intérieur** du triangle ».
Ici, (P) est vraie (figure ci-contre), et donc (non P) est fausse.

Cas général

Notons (P) la proposition : « **Il existe au moins un** élément x de l'ensemble E qui **satisfait** à une condition C ». Alors (non P) est la proposition :
« **Pour tout** élément x de E, x **ne satisfait pas** à C ».

Remarquons, dans ces deux cas, qu'aucune allusion n'est faite à la double quantification, ni pour la négation, ni pour l'affirmation (dans la partie non reproduite ici sur les généralités des quantificateurs).

Conclusion de cette analyse de manuel de terminale transmaths 2012 :

Si nous avons dans ce manuel de terminale S une présence bien supérieure de quantificateurs existentiels que dans celui de seconde, nous pouvons remarquer les mêmes phénomènes : d'une part leur présence est beaucoup plus faible que celle des quantificateurs universels et d'autre part la rédaction des énoncés où ils pourraient apparaître comme naturels a tendance à les faire disparaître. Nous pouvons nous demander si ces observations sont liées à un ouvrage particulier ou bien si nous pouvons observer les mêmes phénomènes sur d'autre manuels. C'est ce que nous proposons de faire dans la partie suivante :

c- La quantification de quelques énoncés spécifiques dans huit manuels de Terminale S

Nous avons identifié dans la partie précédente sur les chapitres d'analyse, plusieurs énoncés qui expriment une existence plus ou moins masquée :

- La définition de la convergence d'une suite.
- Unicité de la limite.
- La définition de suite majorée.
- Les théorèmes de comparaison et limites des suites.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- La définition de la fonction exponentielle comme unique solution à l'équation différentielle y'=y et y(0)=1.

Nous nous proposons de vérifier dans d'autres manuels comment sont énoncés ces théorèmes et définitions afin de constater si cette tendance à éliminer les quantifications existentielles et en même temps les énoncés doublement quantifiés, est spécifique au manuel initialement analysé (Bonneval, Barros et Bénizeau 2012) ou bien beaucoup plus partagée.

Nous analyserons les énoncés précédents sur les huit manuels suivants :

Math'x Didier 2012	(Abihssira-Lavandier et al. 2012)
Déclic Hachette 2012	(Beltramone et Brun 2012)
Odyssée TleS Hatier 2011	(Bruneau et al. 2012)
Maths repère Hachette 2012	(Bruneau et al. 2012)
Symbole Belin 2012	(Deschamps 2012)
Hyperbole Nathan 2012	(Chrétien et al. 2012)
Transmaths Nathan 2012	(Bonneval, Barros et Bénizeau 2012)
Indice maths Bordas 2012	(Poncy, Bonnafet et Russier 2012)

Voici les différents types d'énoncés que nous trouvons pour chaque théorème/définition :

Définition de convergence d'une suite

Convergence (C1) « On dit que (u_n) admet pour limite le réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que la suite (u_n) est convergente et converge vers l. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente » (Brisoux et al. 2012)

Une telle définition est reprise par tous les manuels testés conformément aux instructions du programme : « Pour exprimer que (u_n) tend vers l quand n tend vers +∞, on dit que « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang » (« MENE1119473A programme TS 2011 » 2014)

On remarquera qu'une telle définition fait disparaître tout quantificateur existentiel.

Unicité de la limite

Unicité 1 (U1) : Quand elle existe, la limite l de la suite u est unique. (Beltramone et Brun,) 2012)

Unicité 2 (U2) : « Si une suite (u_n) a une limite l quand n tend vers +∞, cette limite est unique . On note $\lim_{x \to -\infty} u_n = l$ » (Abihssira-Lavandier et al. 2012)

Dans les manuels testés, trois cas apparaissent : soit l'unicité de la limite d'une suite n'est pas évoquée, soit elle l'est et dans ce cas sous les deux versions précédentes, l'une faisant référence à *l'existence de la limite*, l'autre faisant référence au fait que *le suite a une limite*.

Définition de suite majorée

Majorée 1 (M1) : « Soit une suite (u_n) définie sur . La suite est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n de **N** , on a $u_n \leq M$. »(Brisoux et al. 2012)

Majorée 2 (M2) : « Une suite (u_n) est majorée par M si pour tout n de **N**, on a $u_n \leq M$. »(Abihssira-Lavandier et al. 2012)

Théorème de comparaison

Théorème de comparaison 1 (TC1) : « Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{x \to -\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{x \to -\infty} v_n = +\infty$ » (Poncy, Bonnafet et Russier 2012)

Théorème de comparaison 2 (TC2) : « Soient deux suites u et v et un entier naturel N tel que pour tout entier n >N, . Si alors » (Beltramone et Brun 2012)

Aucune de ces deux versions très voisines ne fait apparaître le « Si il existe N tel que... ». Cependant la seconde fait appel clairement à un N sous la forme d'élément générique (au même titre que les deux suites) qui est très proche du quantificateur universel. (Soit versus quel que soit). Sauf un, tous les manuels testés utilisent la première formulation avec « à partir d'un certain rang ».

Théorème des valeurs intermédiaires

Sous forme deux énoncés complémentaires : TVI 1 : « f est une fonction continue sur un intervalle [a;b]. Pour tout nombre k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un nombre c compris entre a et b tel que f(c)=k » Puis TVI 1' « f est une fonction continue, strictement croissante sur l'intervalle I=[a;b]. L'image de l'intervalle I par f est l'intervalle [f(a);f(b)]. Pour tout nombre k de [f(a);f(b)], l'équation f(x)=k, d'inconnue x, a une solution et une seule dans l'intervalle [a;b]. ». (Bonneval, Barros et Bénizeau 2012)

Sous forme deux énoncés complémentaires : TVI 2 : « Si f est une fonction continue sur un intervalle [a;b] alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c)=k. Autrement dit, l'équation f(x) a au moins une solution appartenant à l'intervalle [a;b] » Puis TVI 2' :« Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a;b] alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe un unique réel c de [a ;b] tel que f(c)=k. Autrement dit, l'équation f(x) a une unique solution sur [a;b] ». (Deschamps 2012)

Dans la première formulation (TVI 1 + TVI 1') on utilise pour le premier énoncé TVI 1, qualifié de théorème des valeurs intermédiaires, un quantificateur existentiel, « il existe au moins un nombre c » tandis que dans le deuxième énoncé TVI 1', ce n'est plus une existence qui est déclarée, mais la « possession » d'une solution : « l'équation a unique solution ». Nous voyons là une nouvelle manière d'exprimer une existence sans quantificateur : « l'existence »est remplacée par une « propriété », l'être par l'avoir. Le « Je **suis** un nombre c qui vérifie f(c)=k » est remplacé par « l'équation f(x)=c **possède** une solution ».

Théorème d'existence de la fonction exponentielle

TE1 :« Il existe une unique fonction f dérivable sur R telle que f ' = f et f(0)=1. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et se note exp ». (Bruneau et al. 2012)

Tous les manuels testés ont le même énoncé TE1. On peut s'étonner de cette uniformité car pour le théorème des valeurs intermédiaires, plusieurs manières de parler d'existence de solutions d'une équation ont été utilisées. Les instructions officielles ne proposent pas d'énoncé type : « La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur R telle que : f ' = f et f(0)=1. »

Nous répertorions les différents types d'énoncés de chaque manuel dans le tableau suivant.

Dans chaque case on trouvera la référence de l'énoncé (C1, U1, U2, M1, M2, TC1, TC2, TV1, TV1', TV2, TV2', TE1), la présence d'un quantificateur existentiel dans l'énoncé ou non (avec existentiel ou sans existentiel) afin d'avoir une idée rapide de leur présence/absence et enfin la page du manuel où figure cet énoncé.

Manuels	Convergence	Unicité de la limite	Suite majorée	Comparaison	TVI	Fonction exp
Math'x Didier 2012	Sans existentiel p.104 C1	Sans existentiel (propriété) p.104 U2	Sans existentiel p.100 M1	Sans existentiel p.106 TC1	p.40 TVI 1 +TVI 1'	TE1 p.66

Déclic Hachette 2012	Sans existentiel p.18 C1	Existentiel (définition) p.18 U1	Sans existentiel p.16 M1	Sans existentiel p22 TC2	p.62 TVI 2 +TVI 2'	TE1 p.122
Odyssée TleS Hatier 2011	Sans existentiel p.32 C1	Existentiel (théo) p.33 U1	Avec existentiel p.38 M1	Sans existentiel p.34 TC1	p.79 TVI 2 +TVI 2'	TE1 p.166
Maths repère Hachette 2012	Sans existentiel p.12 C1	Non présent	Sans existentiel p.12 M2	Sans existentiel p.16 TC1	p.68 TVI 2 +TVI 2'	TE1 114
Symbole Belin 2012	Sans existentiel p.34 C1	Non présent	Sans existentiel p.14 M2	Sans existentiel p.38 TC1	p.108 TVI 2 +TVI 2'	TE1 p.134
Hyperbole Nathan 2012	Sans existentiel p.44 C1	Non présent	Avec existentiel p.72 M2	Sans existentiel p.46 TC1	p.124-126 TVI 1 +TVI 1'	TE1 p.16
Transmaths Nathan 2012	Sans existentiel p.25 C1	Existentiel (Remarque) p.25 U1	Avec existentiel p.28 M1	Sans existentiel p.25 TC1	p.112 TVI 1 +TVI 1'	TE1 p.80
Indice maths Bordas 2012	Sans existentiel p.14 C1	Sans existentiel (propriété) p.14 U2	Avec existentiel p.20 M2	Sans existentiel p.18 TC1	p.52 TVI 1 +TVI 1'	TE1 p.106

Pour ce qui est des quantificateurs existentiels : nous pouvons constater, à partir de cet échantillon, une forte tendance à utiliser des rédactions qui les font disparaître. Ces mêmes quantificateurs subsistent uniformément à des endroits où l'existence est sans enjeu véritable pour le niveau de TS en question (la fonction exponentielle dont l'existence n'est pas prouvée, par exemple). Dans les endroits où apparaît la quantification existentielle, elle est souvent associée à une formulation alternative la faisant disparaître, ainsi par exemple, si le théorème des valeusr intermédiaires est proposé comme « il existe un nombre tel que... », il est suivi d'un autre énoncé faisant apparaître ce nombre comme l'unique solution d'une équation : « Si....alors l'équation f(x)=k a une unique solution » (pour la moitié des manuels) et c'est bien souvent ce dernier énoncé qui sera mobilisé puisque les exercices font appel à cette unicité qui n'est pas présente dans l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Pour ce qui est des énoncés doublement quantifiés, parmi les énoncés analysés, nous avons quatre énoncés doublement quantifiés :

- La définition de convergence (de type AE, plus précisément AEA) dont le quantificateur existentiel est absent dans 8 cas sur 8.
- La définition de suite majorée (de type EA) dont le quantificateur existentiel est absent dans 4 cas sur 8.
- Le théorème de comparaison (de type EA) dont le quantificateur existentiel est absent dans 8 cas sur 8.
- Le théorème des valeurs intermédiaires (de type AE) dont le quantificateur existentiel est absent dans 0 cas sur 8 pour TV1 et TV2 et dans 4 cas sur 8 pour TV1' et TV2'.

Au final le quantificateur existentiel est absent dans 12 cas sur 24 pour les énoncés de type (AE) et dans 12 cas sur 16 pour les énoncés de type (EA).

L'absence d'une quantification existentielle explicite dans un énoncé doublement quantifié a tendance à atténuer l'effet double quantification. Il y a dans cet échantillon moins d'énoncés véritablement de type (EA) (4 avec présence des deux quantificateurs) que d'énoncés véritablement de type (AE) (12 avec présence des deux quantificateurs).

4. Questionnaire de Dubinsky & Yiparaki (2000)

Voici les affirmations proposées :

(1) (AE) Everyone hates somebody.

(2) (AE) Every pot has a cover.

(3) (EA) Someone is kind and considerate to everyone.

(4) (EA) There is a mother for all children.

(5) (AE) All good things must come to an end.

(6) (EA) There is a magic key that unlocks everyone's heart.

(7) (AE) All medieval Greek poems described a war legend.

(8) (EA) There is a perfect gift for every child.

(9) (EA) There is a fertilizer for all plants.

(10) (AE) For every positive number a there exists a positive number b such that $b < a$

(11)[78] (EA) There exists a positive number b such that for every positive number a $b < a$

[78] Si l'énoncé ne comporte pas de virgule (« ...number a, b<a ») cela est voulu par les auteurs

5. Questionnaire de Piatek-Jimenez

Voici les cinq assertions qui leur sont proposées :

Item1 : For every natural number n, there exists a natural number K such that 2n<K.

Item 2 : There is a natural number such that for all positive real numbers k, .

Item 3 : For all positive real numbers k, there is a natural number M such that

Item 4 : Let x and y be real numbers. There exists an x such that for every y, x+y=0.

Item 5 : Let x and y be real numbers. For every x there exists a y such that for every z, we have x+y=z.

6. Questionnaires Q1, Q2, Q3, Q4, Q5

Questionnaire Q1

Consigne : dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en indiquant votre degré de certitude en mettant une croix dans la case qui vous convient le mieux. Aucune justification n'est demandée. AUTRE signifie qu'on se positionne ni dans vrai ni dans faux, pour de multiple raisons possibles, par exemple « je ne sais pas » ou bien « écrit ainsi c'est ni vrai, ni faux », ou bien etc... **Il n'y a, dans ce questionnaire, aucun piège.**

Affirmation 1 : Soient deux nombres réels a et b. Il existe un nombre c réel tel que c=ab

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 2 : Soit a=50. Il existe un nombre réel b et un nombre réel c tels que a=bc

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 3 : Pour tous nombres réels x et y, il existe un nombre réel z tel que x = z et y=z

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 4 : Pour tout nombre réel a, il existe un nombre c tel que a < c

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 5 : Il existe un nombre c tel que pour tout nombre réel b, on a c > b

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 6 : Sur le graphique de f ci dessous, il existe un nombre réel a compris entre 0 et 1,5 tel que f(a)=1

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 7 : Sur le graphique de f ci dessous, il existe un nombre réel a tel que f(a)=0

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 8 : Si x est un nombre réel et x<6 alors x<2

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 9 : « si x est un nombre réel et x>15 alors x>10 »

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

QUESTION 10 : Pour la conjecture « si x est un nombre réel et x>15 alors x>10 », le nombre 11 représente un exemple ou un contre-exemple ou un hors sujet ou Autre ?

EXEMPLE		CONTRE-EXEMPLE		HORS-SUJET		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Questionnaire 2

Consigne : dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en indiquant votre degré de certitude en mettant une croix dans la case qui vous convient le mieux. **Donne une justification systématiquement.** AUTRE signifie qu'on se positionne ni dans vrai ni dans faux, pour de multiple raisons possibles, par exemple « je ne sais pas » ou bien « écrit ainsi c'est ni vrai, ni faux », ou bien etc... **Il n'y a, dans ce questionnaire, aucun piège.**

Affirmation 1 : « Il existe une fonction f définie sur R telle que pour tout nombre réel x, f(x)>2 »

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 2 : Pour tout nombre réel a, il existe un nombre c tel que a < c

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 3 : « Il existe un nombre réel a tel que pour toute fonction f définie sur R, on a f(a)>2 »

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 4 : « Il existe un nombre réel c tel que pour tout nombre réel b, on a c > b »

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 5 : « Pour tout nombre réel a, il existe une fonction f définie sur R telle que f(a)>2 »

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 6 : « Pour toute fonction f définie sur R, il existe un nombre réel a tel que f(a)>2 »

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Affirmation 7 : « Il existe un nombre réel a supérieur à n'importe quel autre nombre b »

VRAI		FAUX		AUTRE
Avec certitude	Sans certitude	Avec certitude	Sans certitude	

Questionnaire Q3

Consigne 1 : pour les conjectures C1 et C2 entoure pour chaque argument ce qu'il prouve :

Conjecture C1 : « Il existe un nombre réel x tel que pour tout nombre réel y on a x-y<10 »,

l'argument A1 : « pour x=10 et y=8 on a x-y=2<10 »

1) prouve que C1 est vrai

2) prouve que C1 est fausse

3) ne prouve ni que C1 est vraie, ni que C1 est fausse

4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

L'argument A2 : « pour x =100 et y = 10 on a x-y=90>10 » 1) prouve que C1 est vrai

2) prouve que C1 est fausse

3) ne prouve ni que C1 est vraie, ni que C1 est fausse

4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

L'argument A3 : « pour x=y+11 on a x-y=11>10 » 1) prouve que C1 est vrai

2) prouve que C1 est fausse

3) ne prouve ni que C1 est vraie, ni que C1 est fausse

4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

L'argument A4 : « pour x=y+9 on a x-y=9<10 » 1) prouve que C1 est vrai

2) prouve que C1 est fausse

3) ne prouve ni que C1 est vraie, ni que C1 est fausse

4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

Conjecture C2 : C2 : « Il existe un nombre réel u tel que pour tout nombre réel m on a m+u=2 »,

l'argumentA1 : « pour u=50 et m= -48 on a m+u=2 »

1) prouve que C2 est vrai
2) prouve que C2 est fausse
3) ne prouve ni que C2 est vraie, ni que C2 est fausse
4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

L'argument A2 : « pour u = 12 et m = 10 on a m+u=22 ≠2 »

1) prouve que C2 est vrai
2) prouve que C2 est fausse
3) ne prouve ni que C2 est vraie, ni que C2 est fausse
4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

L'argument A3 : « Si on prend m=2-u alors m+u=u+2-u=2 »

1) prouve que C2 est vrai
2) prouve que C2 est fausse
3) ne prouve ni que C2 est vraie, ni que C2 est fausse
4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

L'argument A4 : « Si on prend m=1-u alors m+u=m+1-m=1≠2 »

1) prouve que C2 est vrai
2) prouve que C2 est fausse
3) ne prouve ni que C2 est vraie, ni que C2 est fausse

4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

L'argument A5 : « Si on prend u=2-m alors m+u=m+2-m=2 »

1) prouve que C2 est vrai
2) prouve que C2 est fausse
3) ne prouve ni que C2 est vraie, ni que C2 est fausse
4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

L'argument A6 : « Si on prend u=1-m alors m+u=m+1-m=1≠2 »

1) prouve que C2 est vrai
2) prouve que C2 est fausse
3) ne prouve ni que C2 est vraie, ni que C2 est fausse
4) prouve autre chose : quoi ? (explique)

Consigne 2 : Pour chaque affirmation ci-dessous, dis si elle est vraie ou fausse et justifie tes réponses avec des arguments qui les prouvent :

Dans le carré ci-contre il y a neuf cases numérotées de 1 à 9

Deux cases sont voisines si elles ont un coté en commun.

Par exemple *pour A1*, la case 1 et la case 9 sont voisines mais pas la case 1 et la case 7.

A1 : « Il existe une case blanche telle que toute case grise lui est voisine »

1	9	6
2	7	4
3	5	8

A2 : « Pour toute case blanche il existe une case grise qui lui est voisine »

7	1	9
3	6	2
8	5	4

A3 : « Il existe une case grise telle que toute case blanche lui est voisine »

1	5	7
9	2	3
4	6	8

A4 : « Pour toute case grise il existe une case blanche qui lui est voisine »

1	9	6
2	7	4
3	5	8

A5 : « Il existe une case blanche telle qu'avec toute case grise la somme de leur deux numéros est paire »

9	2	8
3	1	4
6	5	7

A6 : « Pour toute case blanche il existe une case grise telle que la somme de leur deux numéros est paire »

9	2	8
3	1	4
6	5	7

A7 : « Il existe une case grise telle qu'avec toute case blanche la somme de leur deux numéros est paire »

1	5	7
9	2	3
4	6	8

A8 : « Pour toute case grise il existe une case blanche telle que la somme de leur deux numéros est paire »

1	7	6
9	2	5
4	3	8

Questionnaire Q4

Pour chacune des affirmations suivantes, dis si elle est vraie ou fausse et justifie ta réponse.

Deux cases sont voisines si elles sont différentes et ont un côté en commun.

Exemple pour A1 : la case 1 est voisine de la case 2 mais la case 1 n'est pas voisine avec la case 4.

A1 :« Il existe une case N voisine d'une blanche telle que toute les cases voisines de la case N sont grises »

A2 :« Pour toute case N voisine d'une grise il existe une case blanche qui est voisine de la case N »

A3 :« Pour toute case N voisine d'une blanche il existe une case grise qui est voisine de la case N »

A4 :« Il existe une case N voisine d'une grise telle que toute les cases voisines de la case N sont blanches »

Soit A l'ensemble de tous les nombre entiers relatifs de -5 à 5 sauf 0,

c'est à dire A= { -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }

A5 : « Il existe un nombre x de A tel que pour tout nombre y de A on a x + y = 0 »

Questionnaire Q5

Consigne 1 : pour chaque conjecture ci dessous, dis si elle est vrai ou fausse et justifie tes réponses par un argument qui les prouvent.

Soit A un ensemble de nombres entiers tel que A={ -5; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }

C1 : « Il existe un nombre x de A tel que pour tout nombre y de A on a x+y=0 »

Soit B un ensemble de nombres entiers tel que B={ -5; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 }

C2 : « Pour tout nombre x de B il existe un nombre y de B tel que x+y=0 »

Soit E et F les ensembles de nombres entiers tels que E={ 4 ; 6 ; 8 } et F= { 1 ; 2 ; 10 }

C4 : « pour tout nombre x de E, il existe un nombre y de F tel que x+y est un nombre pair. »

Soit l'ensemble de tous les entiers.

C 13 : « Il existe un nombre entier x de tel que pour tout nombre entier y de on a x > y »

Soit l'ensemble de tous les entiers.

C14 : « Pour tout nombre entier y de il existe un nombre entier x de tel que x > y »

C15 : « Pour tous nombres réels x et y, il existe un nombre réel z tel que x = z et y=z » (Q1)

C18 : « Il existe un nombre réel u tel que pour tout nombre réel m on a m+u=2 »

Consigne 2 : Pour chaque affirmation ci dessous concernant des grilles colorées, dis si elle est vraie ou fausse et justifie tes réponses avec des arguments qui les prouvent :

Dans le carré ci contre il y a neuf cases numérotées de 1 à 9. Deux cases sont voisines si elles ont un coté en commun. Par exemple *pour A1*, la case 1 et la case 9 sont voisines mais pas la case 1 et la case 7.

1	9	6
2	7	4
3	5	8

A1 : « Il existe une case blanche telle que toute case grise lui est voisine »

7	1	9
3	6	2
8	5	4

A2 : « Pour toute case blanche il existe une case grise qui lui est voisine »

1	5	7
9	2	3
4	6	8

A3 : « Il existe une case grise telle que toute case blanche lui est voisine »

1	9	6
2	7	4
3	5	8

A4 : « Pour toute case grise il existe une case blanche qui lui est voisine »

Consigne 3 : pour chaque conjecture ci dessous, dis si elle est vraie ou fausse et justifie tes réponses

B1 : « Il existe un nombre entier qui est supérieur ou égal à tous les nombres entiers »

B3 : « Pour tout nombre entier, il existe un nombre entier qui lui est supérieur »

B4 : « Il existe un nombre entier naturel tel qu'avec tout autre nombre entier naturel, la somme des deux fait cinq »

7. Diaporama de présentation et d'institutionnalisation du jeu Q^2

Jeu Q^2

Diapo 1

Consignes de jeu sur un exemple

« Pour toute case rouge il existe une case noire ayant même symbole »

Noir joue pour vrai et Rouge commence

Qui gagne, Rouge ou Noir ?

Diapo 2

A vous de jouer !

Diapo 3

Pour le jeu :

« Il existe une case rouge telle que toute case noire a le même symbole »
Avec rouge commence et joue pour vrai

Quelles sont TOUTES les grilles gagnantes pour rouge ?

Diapo 4

Définition de grille gagnante :
« Une grille est gagnante pour un joueur, si il existe une stratégie gagnante pour ce joueur »

Par exemple : « Il existe une case rouge telle que toute case noire a le même symbole » avec rouge commence et joue pour vrai.

Diapo 5

Revenons sur nos grilles :

Sont-elles gagnantes avec cette définition ?

Diapo 6

Pour le jeu :

« Pour toute case noire, il existe une case rouge ayant le même symbole »
où Noir commence et Rouge joue pour vrai.

Quelles sont TOUTES les grilles gagnantes pour rouge ?

Diapo 7

Un peu de vocabulaire

Pour ce jeu Q^2 nous appellerons :

- **Défenseur** celui qui affirme que l'énoncé est vrai
- **Attaquant** celui qui affirme qu'il est faux

Diapo 8

« Pour toute case noire, il existe une case rouge ayant le même symbole »
où Noir commence et Rouge joue pour vrai.

Nous pouvons voir que

Une grille qui contient **au moins un singleton** est **perdante** pour Rouge :

Par exemple :

A	A	A
B	B	B
C	C	D

Il suffit à l'attaquant de choisir le singleton.

Diapo 9

« Pour toute case noire, il existe une case rouge ayant le même symbole »
où Noir commence et Rouge joue pour vrai.

Nous pouvons voir que

Une grille qui contient **au moins un singleton** est **perdante** pour Rouge :

Par exemple :

A	A	A
B	B	B
C	C	D

Il suffit à l'attaquant de choisir le singleton.

Diapo 10

Il y a deux types de phrases :

Les phrases de type AE : (All…. Exists ...)

« Pour tout t de A, il existe t' de B tel que R(t,t') »

Les phrases de type EA : (Exists…. All ...)

« Il existe t de A, tel que pour tout t' de B on a R(t,t') »

Diapo 11

Pour comprendre ces phrases

Nous allons apprendre à les prouver par un dialogue entre un attaquant et un défenseur.

Diapo 12

Pour une phrase AE :
Pour tout t de A, il existe t' de B tel que R(t,t')

L'attaquant fait des propositions t de A et le défenseur répond avec t' de B.

La phrase est fausse si le défenseur ne peut pas trouver un t' de B vérifiant R(t,t')

La phrase est vraie si à toute proposition t de A de l'attaquant le défenseur peut trouver un t' de B tel que R(t,t') est vérifié.

Diapo 13

Exemple

Soit E et F les ensembles de nombres entiers tels que E={ 4 ; 6 ; 8 } et F= { 1 ; 2 ; 10 }

A1 : « Pour tout nombre x de E, il existe un nombre y de F tel que x+y est un nombre pair. »

A1 est vraie ou fausse ?

Diapo 14

Pour une phrase EA
« Il existe t de A, tel que pour tout t' de B on a R(t,t') »

Le défenseur fait des propositions t de A et l'attaquant répond avec t' de B.

La phrase est fausse si à toute proposition t de A du défenseur, l'attaquant peut trouver un t' de B tel que R(t,t') n'est pas vérifiée.

La phrase est vraie si l'attaquant ne peut pas faire autrement que de répondre par un t' de B qui vérifie R(t,t').

Diapo 15

Exemple

Soit G et H les ensembles de nombres entiers tels que G={ 4 ; 6 ; 9 } et H= { 2 ; 8; 7 }

A2 : « Il existe un nombre x de G tel que pour tout nombre y de H, x+y est un nombre pair. »

A2 est vraie ou fausse ?

Diapo 16

Quelques conjectures Q²

C1 : « Pour tout x réel, il existe un réel y tel que x=y »

C2 : « Pour tout réel x, il existe un réel y tel qu'on a $y^2 < x$ »

C3 : « Il existe un réel u tel que pour tout réel m on a m+u=2 »

C4 : « Il existe un réel x tel que pour tout réel y on a $y^2-1 \geq x$ »

Diapo 17

8. Temps de rebond d'une balle rebondissante avec le modèle physique standard

La somme vectorielle des forces qui s'exercent sur la balle est égale au produit de la masse par l'accélération, c'est-à-dire ici $m\vec{g} = m\vec{a}$ où m est la masse de la balle, *g* la constante vectorielle de gravitation, *a* l'accélération vectorielle de la balle). Par projection sur l'axe vertical, il vient que $a = -g$, et, en intégrant et en tenant compte des conditions initiales, que $V(t) = -gt + V(0)$. Nous prendrons alors une vitesse nulle (on lâche la balle), et donc $V(t) = -gt$. En intégrant une fois de plus, on obtient $X(t) = -gt^2/2 + X(0)$ où $X(t)$ est la hauteur de la balle à l'instant t. Imaginons que nous lâchions la balle d'une hauteur h_0 à l'instant $t = 0$, on a alors $X(t) = -g\,t^2/2 + h_0$.

Maintenant nous pouvons calculer le temps t_1 mis avant le premier rebond :

$0 = -g\,{t_1}^2/2 + h_0$ donc $t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

La hauteur de rebond suivante est de moitié. Le temps de remontée suivant est égal au temps de redescente suivant donc le temps de remontée suivant est :

$t_2 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1$ et ainsi de suite...

Le temps total est donc

$$T_{total} = t_0 + \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} 2t_i = t_0 + \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Ainsi si on lâche une balle de 2m de hauteur le temps d'arrêt est environ de 5 secondes.

9. Script de la situation de la balle rebondissante : jeunes chercheurs à EEDM18 2015

[>Le professeur] : Je me présente, je suis Thomas Lecorre, je suis professeur de mathématiques depuis une vingtaine d'année. Il y a quelques années, je me suis lancé dans une aventure folle qui est de faire une thèse (rires). J'adore et en même temps j'ai hâte que ça se termine.

[>R1] : Tu n'as jamais aussi près de la fin.

[>Le professeur] : Tu dis ?

[>R1] : Tu n'as jamais été aussi près de la fin...

[>Le professeur] : C'est vrai ! Ca fait aussi quinze ans que je travaille à l'IREM dans un groupe à Grenoble sur le débat scientifique. La dimension du collectif c'est une dimension qui existe dans le débat scientifique naturellement. Donc je vous en parlerai aussi. En réalité ma thèse ne porte ni sur le débat scientifique ni sur le collectif mais plus sur comment faire en sorte que la limite prenne du sens, et en particulier le formalisme. Le formalisme de l'analyse pour les élèves et les étudiants. Voilà.

[>Le professeur] : Donc aujourd'hui, ce que je vous propose, c'est de regarder les phénomènes au niveau de trois regards, épistémologique, didactique, Psychologique Alors psychologique ici c'est un grand mot mais il faut mettre des mots sur ce dont on parle donc j'ai utilisé celui-là, et nous mobiliserons trois outils pour chacun de ces regards : l'outil obstacle épistémologique, l'outil contrat didactique et l'hypothèse du socio-affectif. Alors quelque repère sur le débat scientifique. En fait le débat scientifique, à l'origine, c'est Marc Legrand, un chercheur de l'université de Grenoble dans les années quatre-vingt. Depuis il y a eu des publications et un groupe à l'IREM de Grenoble travaille là-dessus depuis maintenant trente ans. Une double filiation pour le débat scientifique, d'abord la théorie des situations de Brousseau, qui fait l'hypothèse, d'une certaine manière que l'élève peut construire son savoir, au travers de la notion de situation adidactique que je ne développerai pas ici et puis la deuxième filiation, c'est la théorie anthropologique du didactique qui fait l'hypothèse contraire : l'élève ne peut pas construire seul son savoir. Pour quelle raison ? L'élève quand il est à l'école, et le professeur également, sont soumis à des contraintes institutionnelles. Il y a une transposition du savoir qui fait que le savoir savant n'est pas celui qui enseigné et encore moins celui qui est appris. Donc une double filiation. Ce que je vous propose tout de suite c'est de vous rendre et expérimenter, in vivo finalement, ce que c'est qu'un débat scientifique. Parce que je crois qu'il faut l'expérimenter pour vraiment se rendre compte...après on en parle plus facilement. Donc je vous propose de détailler les conditions de fonctionnement. Alors ce n'est pas super simple d'établir un débat scientifique dans une situation comme la nôtre parce que...je vous le dirai après...Il faut que chacun soit capable de se fonder une thèse sur la question que je vais vous poser...qu'il soit prêt à la partager devant tous...de la défendre avec conviction...éventuellement de l'abandonner si il s'aperçoit que sa thèse initiale ne lui convient plus...Et ça demande que chacun exprime son accord ou son désaccord avec ce qui est raconté de par ailleurs. Donc chacun se sent responsable de ce qui est dit collectivement... Alors évidemment dans une confrontation sincère d'idées...C'est une confrontation, on n'a pas les mêmes idées, on dit on est pas d'accord. Evidemment ça peut être dit avec conviction, donc avec force mais pas violence. Ce sont des idées dont on discute. Ça ne

peut marcher que si vous êtes d'accord collectivement pour confronter des idées. Alors évidemment ces conditions semblent utopiques. Tout concourt pour qu'elles ne soient pas réunies. Clairement, on ne se connait pas bien...souvent on est inhibé par la peur de se tromper...et on pas tellement l'habitude de ce genre de situation. Et je pose la question : la recherche de la vérité n'est-ce pas précisément notre utopie?

[>R1] : C'est la question du débat ? (Rires)

[>Le professeur] : ça se pourrait, ça se pourrait... Les réponses ne seront pas aussi claires que ça...Moi je pars de l'hypothèse qu'on est là collectivement pour essayer de vivre cette utopie, on cherche la vérité...et comme c'est difficile on le fait à plusieurs et y met tous les moyens de notre enthousiasme... Voilà ! Et donc ce que je vous propose c'est d'essayer...

[>Le professeur] : La situation que je vous propose est une situation simple. Je prends mon matériel d'expérimentation. (Il prend un ballon). Il y aura trois temps. Le premier ça sera un débat privé et vous devrez vous faire une thèse : qu'est-ce que je pense vraiment de cette situation. Vous aurez quelques minutes pour réfléchir à ça. Vous pourrez discuter éventuellement avec votre voisin immédiat. Pas collectivement parce que ça c'est le deuxième temps : le débat public. Alors ce temps-là ça sera justement un débat où il n'y aura plus de débat privé. On s'interdira de discuter de manière privée mais on discutera uniquement collectivement, c'est à dire de manière publique. Et le troisième temps de l'institutionnalisation. Synthèse et apports. Alors voilà la situation dont je vous parle.

[>Le professeur] : La situation de la balle rebondissante. Il s'agit d'une balle comme celle-ci. Elle est rebondissante comme celle-ci (il lâche son ballon qui rebondit jusqu'à s'arrêter) mais celle dont je vous parle, celle de la situation, est une balle qui rebondit exactement à la moitié de sa hauteur de chute. Pas de problème ? Et je vous pose la question suivante, question 1: quand on lâche cette balle s'arrête-t-elle de rebondir? Alors vous pouvez répondre : oui, oui elle s'arrête de rebondir. Vous pouvez répondre non, non elle ne s'arrête pas de rebondir. Ou Autre si ni la case oui, ou la case non ne vous conviennent. Je vous laisse réfléchir...

[>R2] : Pour l'instant on réfléchit individuellement, c'est ça ?

[>Le professeur] : Voilà c'est ça. Eventuellement vous pouvez en discuter avec votre voisin...il se trouve que parfois on est par sûr et on aimerait bien avoir son voisin qui pense la même chose que nous.

[>Le professeur] : Bon alors...ce que je vous demande maintenant, avant de passer au débat public, c'est de voter. Qui dans l'assemblée, pense que oui cette balle s'arrête de rebondir ? (rires un seul vote oui) ....

[>R1] : repose la question parce que...ils attendaient de voir ...

[>Le professeur] : Ah ils attendaient de voir qui allait voter comme eux pour voter...Classique...

[>R2] : Ils attendaient de voir ce que j'allais voter parce que.... (Rires)

[>R3] : J'aurais besoin de préciser la question. J'ai besoin de savoir si c'est cette balle...mettons que cette balle s'arrête exactement à la moitié...

[>Le professeur] : Si tu as des questions, libre à toi d'avoir des questions...simplement toutes les questions que vous posez...vous pouvez répondre Oui Non Autre et Autre c'est une situation où on peut dire "moi tant que je n'ai pas de réponse à cette question précise, je ne peux pas répondre à la question". C'est le sens du Autre qui est là. Et ensuite dans le débat vous exposerez vos questions, les raisons pour lesquelles vous votez Autre. Donc je recommence, qui pense que cette balle s'arrête de rebondir ? Six. Qui pense que non elle ne s'arrête pas de rebondir ? Quatre. Qui se met dans Autre ? Onze. On doit avoir le nombre. Je dois vous préciser que j'enregistre le débat. En fait tous les débats que je fais je les enregistre et ça me sers ensuite pour mes recherches. Soyez tranquille c'est anonyme. Mais je dois vous préciser ça.

[>Le professeur] : Alors en général, je commence par donner la parole à ceux qui votent Autre. Là il y en a beaucoup.

[>R1] : C'est toujours comme ça que tu fais ?

[>Le professeur] : Ça dépend. Ça dépend des circonstances. Qui veut dire pourquoi il est dans Autre ? Oui ?

[>R3] : Ça dépend si la balle est une balle idéale ou bien une balle de la réalité.

[>R2] : Physique…

[>Le professeur] : Physique ?

[>R3] : Qui est physique et sujette... assujetties aux lois... à la friction de l'air...et tout ça.

[>Le professeur] : Oui alors tu dis ça dépend de ça. C'est pour cela que tu te mets dans Autre. Est-ce que tu pourrais être plus précise...Si c'était une balle idéale tu dirais quoi ?

[>R3] : ça ne s'arrêtera pas.

[>Le professeur] : Dans ce cas-là ça ne s'arrêtera pas...dans ce cas ça serait oui...Euh, non ça ne s'arrête pas : Non. Et dans l'autre cas, ça serait ?

[>R3] : Ça serait Oui elle va s'arrêter.

[>Le professeur] : D'accord, Ok. Qui est dans Autre pour cette raison-là ? Onze. Les onze.

[>R4] : Ah non, moi je suis dans Autre pour une autre raison.

[>Le professeur] : Ah, donc j'ai mal compté tout à l'heure. Ca faisait douze, et toi tu es dans Autre pour une autre raison, vas-y !

[>R4] : Ben enfin, balle idéale...pour moi ça ne s'arrête pas si notre balle est un point. Si notre balle a un rayon...

[>Le professeur] : Alors tu es en train de dire que si la balle a un rayon...Si c'est un point ou si c'est une balle avec un rayon...

[>R4] : Oui c'est à dire si on considère notre balle comme un point...peut-être je me trompe...

[>Le professeur] : Rayon zéro ou pas zéro...

[>R4] : Du coup là ça ne s'arrête pas.

[>Le professeur] : Non.

[>R4] : Mais peut-être que je me trompe...

[>Le professeur] : Peut-être...et si le rayon est non nul ?

[>R4] : Là pour moi elle s'arrête.

[>Le professeur] : Là elle s'arrête...finalement tu es un peu dans la même position que ceux qui ceux qui sont ici...

[>R4] : Oui mais...

[>Le professeur] : Mais pas pour les mes raisons. Ok, oui ?

[>R3] : Moi j'entendais par balle idéale, c'est à dire si on est dans une situation purement théorique, c'est à dire que chaque fois ça rebondit de la moitié comme c'est marqué au tableau. Mais qu'on étudie pas du tout effectivement la résistance de l'air...C'était ça pour moi la balle idéale, c'était la situation théorique...J'ai marqué ça rebondit chaque fois de la moitié donc ça ne s'arrête jamais.

[>Le professeur] : idéale c'est en fait ça rebondit exactement égal à un demi.

[>R3] : Voilà c'est ça...Mais si c'est une vraie balle...

[>Le professeur] : Ok pour ça...Donc on a écouté Autre, on va écouter ceux qui penses que non, ça ne s'arrête pas. Oui ?

[>R1] : Ben moi je pense que la réponse à la question : est-ce qu'on est dans le cas d'une balle idéale, on l'a en fait. Parce que qu'une balle qui rebondit à une hauteur exactement...Je trouve que le exactement est un indice du fait que l'on est dans une situation théorique idéale et cetera...

[>Le professeur] : Exactement, pour toi, ...

[>R1] : Et par rapport à l'argument de R4 ce qui est dessiné, les schémas, il montre que ce qui est diminué de moitié c'est la distance entre le sol et le bas de la balle...

[>R4] : Ouais ouais...Je suis d'accord...parce que moi dans ma tête ce n’était pas rapport au milieu...

[>R1] : Donc pour moi c'est vraiment, on lâche cette balle qui est une balle qui est une balle idéale et ce qui fait moitié à chaque fois c'est la distance entre le sol et le bas de cette balle et moitié ça tend vers zéro mais ça ne fait jamais...

[>R5] : Oui mais il a montré une balle physique...

[>R1] : Oui mais il a dit ce n’est pas cette balle...

[>Le professeur] : Oui parce que la balle que je vous ai montrée, elle ne rebondit pas exactement à la moitié.

[>R1] : Pour moi de toute façon le exactement (brouhaha)

[>Le professeur] : Juste une règle du jeu que je rajoute, vous avez le droit de changer d'avis à tout moment parce que à un moment donné j'en ai entendu être d'accord avec ce que tu racontais (S'adressant à R1) alors qu’ils n’avaient pas la même position que toi. Finalement peut-être qu'ils ont changé d'avis, ça je n’en sais rien. Alors un ils peuvent changer d'avis. Et deux, s’ils le font alors il faut qu'ils le disent. Parce que ça donne du crédit aux propos qui sont donnés.

Nous en train de chose qui sont sérieuses, et quand je donne mon avis, éventuellement ça fait changer l'avis des autres. Ce ne sont pas juste des propos comme ça. Voilà tu as dit exactement c'est idéal et en conclusion ?

[>R1] : Du coup la réponse est non. Du coup la distance sol-bas de la balle diminue à chaque fois donc on a distance qui tend vers zéro mais qui ne fait jamais zéro à chaque fois.

[>Le professeur] : donc la hauteur n'est jamais nulle.

[>R1] : Ouais.

[>Le professeur] : Oui ?

[>R4] : Par rapport à ce que je disais tout à l'heure, en fait moi je m'étais trompé dans le sens où...je ne n'avais pas bien regardé...et que du coup c'était la distance par rapport au centre de la balle et c'est pour ça que je parlais du rayon mais là vu que ça ne prend pas en compte l'épaisseur de la balle...enfin vu que c'est la distance au sol avec le bas de la balle...

[>Le professeur] : Oui...

[>R4] : Mon argument n'est pas bon...

[>Le professeur] : D'accord, et toi tu étais dans Autre et tu as changé d'avis ?

[>R4] : Moi j'étais dans...Autre ah oui...je bien là où je suis mais ce que j'ai dit n'allait pas.

[>Le professeur] : Oui ?

[>R6] : Une autre réponse pour Autre...

[>Le professeur] : Oui...

[>R6] : Mais je n'y avais pas pensé au début...

[>Le professeur] : Vas-y...

[>R6] : C'est que ça dépend du temps...parce ce que ce qu'on a c'est des considérations de distances...Mais ça dépend du temps de rebond...et en fait si....En fait c'est parce qu'on en a parlé avec R2 et du coup ça a fait son chemin...Parce que si le temps est proportionnel à la distance...Finalement dans un temps fini...Si on considère que l'infini actuel est réalisé, on dit que oui ça s'arrête. Mais là on n'a pas le temps.

[>Le professeur] : Donc tu es dans Autre...et qu'est-ce qui t'embête finalement ?

[>R6] : On ne sait pas...On n'a pas de considération sur le temps donc on ne peut pas répondre sur le temps parce qu'on demande quand !

[>Le professeur] : D'accord, tu dis que la question c'est quand, donc le temps. Et comme on n'a pas de considération sur le temps...

[>R6] : On ne sait pas combien de temps ça met à rebondir...

[>Le professeur] : D'accord. Ok, c'est pour cela que tu es dans Autre.

[>R6] : Oui finalement...Ça met du temps !

[>Le professeur] : Alors ce que je n'avais pas demandé c'est qui est dans Non pour cette raison-là, qui a été évoqué là-bas ? (hauteur non nulle) deux. Donc il y en a qui sont dans Non pour d'autre raisons ? Oui ?

[>R7] : Ah non moi j'ai répondu par rapport à la formulation de la question. C'est par rapport à mes conceptions si la balle...je sais que la balle va s'arrêter...Si je tiens compte de mon expérience personnelle je sais que la balle va s'arrêter. Mais eu égard à la formulation de la question, la balle, elle ne s'arrêtera pas.

[>Le professeur] : Donc tu dis : avec ton expérience, ça s'arrête...

[>R7] : Voilà...

[>R8] : Si tu veux tu as lancé le débat de deux façons : tu nous mets un texte affiché et en même temps tu nous fais une simulation avec la balle. (Rires) C'est toi qui l'a créé le trouble...

[>Le professeur] : Ah tu dis que le professeur crée des troubles...Avec l'expérience ça s'arrête mais ici non, ça ne s'arrête pas.

[>R8] : Alors moi ce que je vous ai dit ce n'était pas exactement ça... (semble interpréter le mot « trouble » du professeur selon un autre sens que le sien)

[>Le professeur] : Pardon ? Ah oui ce n'est pas exactement ça...Non mais je ne l'entends pas comme ça du moins je ne sais pas ce que tu...

[>R9] : Moi j'aimerai bien la voir cette balle qui fait ça, parce que je n'ai pas assez de connaissance en physique, non ce n'est pas possible qu'elle puisse faire ça...il y a quand même...il me manque des connaissances en physique là...

[>Le professeur] : Toi tu as voté quoi ?

[>R9] : Ben moi j'ai voté Autre d'un point de vue matheux je dis ben oui on prend des moitiés de moitié de moitié...Mais on n’est pas en maths on est en physique. Et la ça m’enquiquine !

[>Le professeur] : Physique ou maths. Donc en fait... (Brouhaha) Faudrait qu'on se mette d'accord...Ce que je vous propose...Oui ?

[>R1] : Non mais c'était un peu la dessus, moi j'ai un soucis avec le mot distance, parce qu'en fait...parce que un demi, un demi, un demi, ça ne fait jamais zéro donc du coup si je mesure, enfin mathématiquement...J'ai une mesure qui ne fait jamais zéro...mais je ne sais pas si j'ai une mesure qui ne fait jamais zéro...Je ne sais pas si on mesure physiquement je ne sais pas si on est dans les mesures aussi idéales que le sont les mesures mathématiques. Et donc quand je dis la distance elle ne sera jamais nulle...La hauteur, toi tu as dit la hauteur, du coup c'était bien...Mais je dis du coup la distance elle diminue de moitié à chaque fois mais justement à un moment il y a un passage...Alors moi je l'ai résolu en disant on est dans une situation idéale donc voilà…donc voilà toute la question elle est là. Tous ces mots qui sont peut-être ambiguës.

[>Le professeur] : D'accord alors voilà, je...Oui ?

[>R10] : Je voulais juste dire que dire jusqu'ici j'ai l'impression qu'on était tous d'accord sur la distinction entre le modèle mathématique et la réalité physique et on a à peu près tous dit que dans le modèle mathématique ça ne s'arrête pas et que dans le modèle physique ça s'arrête...

[>R2] : Parce que les gens qui ont voté oui n'ont pas encore parlé...C'est pour ça qu'on est tous d'accord.

[>R10] : Sauf sur le modèle idéal celui de R7 avec le temps...

[>Le professeur] : Oui tu as voté quoi parce que en fait...

[>R10] : Moi j'ai voté Autre.

[>Le professeur] : Dites le parce que parfois on ne sait pas ce que vous défendez.

[>R10] : J'essaie juste interpréter ce que je ne comprends pas que quand on parle du modèle idéal, jusqu'ici il n'y avait qu'un seul argument qui a remis en question que ça ne s'arrête pas et c'est avec l'argument du temps.

[>Le professeur] : D'accord, on va peut-être écouter ceux qui sont dans Oui puisqu'on ne les a pas entendus. Qui est dans le Oui ?

[>R11] : Moi j'ai voté Oui parce que si le fait vraiment alors on verra que la balle s'arrête. J'en suis sûre.

[>Le professeur] : Donc la balle s'arrête quand la lâche.

[>R1] : Je pense qu'elle coule même !

[>Le professeur] : Oui aussi...Qui est dans le Oui pour cette raison-là ?

[>R2] : Pas que pour cette raison-là.

[>Le professeur] : Quatre. Il y avait six Oui.

[>R3] : Mais c'est ce que disais c'est que dans notre expérience la balle s'arrête.

[>Le professeur] : Oui alors vous voyez bien qu'on tourne autour de la question : est-ce qu'on est face au réel ou face à un modèle ? Oui alors ce qu'on pourrait faire...

[>R1] : De toute façon on est tous d'accord...

[>R2] : Moi je trouve que l'argument du temps…

[>Le professeur] : Toi tu as voté quoi?

[>R2] : Moi j'ai voté oui mais je n’ai pas eu le temps de faire les calculs pour savoir si j'aurai voté non. Mais ce que je me dis c'est autant on est capable de dire si dans le modèle théorique si les rebonds sont de la moitié du précédent alors théoriquement on a toujours un nombre qui est un demi du précédent et là dans les réels on n’aura pas de problème à avoir une suite qui est comme ça...

[>R7] : Oui c'est ça donc ça fait une demi puissance n fois h la hauteur initiale.

[>R2] : Oui mais ce que je dis c'est qu'il y a infinité de rebonds, ça ne me dit pas que ça va rebondir pendant une infinité de temps, parce que je sais que je peux additionner une infinité d'intervalles de temps, si ces intervalles de temps sont deux fois plus petits que le précédent, je sais qu'il y a un temps que je ne vais jamais dépasser, et peut-être qu'elle va rebondir une infinité de fois dans un laps de temps fini...théoriquement...dans le modèle théorique...

[>R7] : Absolument...

[>R2] : Même si je sais qu'en pratique ce n'est pas ce qui se passera parce que je sais qu'une balle ne peut pas...

[>Le professeur] : Toi tu dis qu'il peut y avoir une infinité de rebonds dans un temps fini...

[>R2] : Je dis que ce n'est pas qu'une question de modèle, parce que dans le modèle peut-être qu'elle s'arrête de rebondir parce que il y a un temps t après lequel elle n'est plus en train de rebondir puisque le temps pendant lequel elle rebondit s'arrête.

[>Le professeur] : Oui donc une infinité de rebond dans un temps fini.

[>R2] : Oui voilà. Mais ce que je dis c'est que ce n'est pas une question d'être dans le pratique par rapport au théorique...Là c'est bien une réponse dans le théorique, là c'est dans le modèle.

[>Le professeur] : Oui là c'est dans le modèle.

[>R12] : Le temps peut avoir une limite ?? C'est à dire ne pas dépasser une certaine valeur mais continuer à croitre tout le temps ??? Non ? Je ne suis pas certaine de bien comprendre : le temps peut ne pas dépasser une certaine valeur mais ça peut quand même toujours augmenter ?

[>R2] : Non mais le temps pendant lequel elle rebondit pourrait s'arrêter, même si pendant ce temps-là elle aurait rebondi une infinité de fois.

[>R12] : Pourquoi il s’arrêterait ?

[>R2] : Alors ce que je dis c'est que c'est le même argument que celui de la hauteur mais avec le nombre de rebonds. J'ai le même argument sur les intervalles de temps que je mets bouts à bout. Le premier met une seconde, le deuxième une demie seconde...

[>R4] : Pourquoi ?

[>R2] : C'est une hypothèse. C'est une hypothèse mais comme on n’a pas d'information je dis dans ce cas-là ça se pourrait qu'elle s'arrête...une seconde plus une demie plus un quart...

[>R12] : Dans ce cas-là ça ne dépassera pas deux secondes mais la quantité de temps ça va continuer à augmenter...

[>R2] : Mais après deux secondes il n'y a plus de rebond donc...Après deux secondes elle s'est arrêtée.

[>R12] : Oui mais ça continue...

[>R2] : C'est mon hypothèse...

[>Le professeur] : Au fond là-bas ?

[>R1] : Du coup tout le ...c'est des jeux sur les termes, parce que moi l'ambiguïté elle est sûr de s'arrêter parce que ce que tu dis c'est que quelque part elle ne s'arrête jamais de rebondir mais à un moment elle a arrêté de rebondir.

[>R2] : Voilà.

[>R7] : C'est ça qui est exceptionnel...

[>R1] : Alors moi je ne sais pas comment c'est possible... (Rires)

[>R7] : La balle va s'arrêter...

[>R1] : De fait à un moment la balle a arrêté...

[>R2] : Je n'ai pas dit que j'étais complètement cohérent... (Rires)

[>R7] : Tu fais l'hypothèse que la balle s'arrête...

[>Le professeur] : Ce qu'on pourrait faire, avant d'éventuellement continuer, c'est que je précise les choses. En fait on va se mettre maintenant... on peut se poser la question, est-ce que l'énoncé est suffisant pour savoir si on est dans le cas idéal ou le cas réel, le exactement pourrait indiquer que c'est le cas idéal mais comme ce n'est pas indiqué explicitement on peut se poser la question, elle est légitime. Moi ce que j'aimerai maintenant c'est fixer ce cadre : on est dans un cadre idéal, elle rebondit exactement à la moitié de sa hauteur et je vais vous faire revoter. Ce que je vous demande c'est de prendre les trente secondes pour réfléchir dans le cas idéal, pour vous...En même temps je ne vais pas pouvoir continuer longtemps parce que je n'aurais pas de temps pour la suite. Je vois que ça vous prend.

[>R13] : L'idéal c'est quoi ? La balle est modélisée par un point ? C'est une balle physique ? Il n'y a pas de frottement ?

[>Le professeur] : Mettons oui, voilà, c'est un point, qui a un mouvement, il n'y a pas de frottement, pas de résistance de l'air, une balle idéale dans un modèle mathématique.

[>R13] : Ce n'est pas une question de modèle, ça peut être un modèle mathématique et avoir une réaction du sol et puis...

[>Le professeur] : Oui, oui...

[>Le professeur] : Alors qui pense que dans le modèle la balle s'arrête, oui elle s’arrête ? Deux. Qui pense que non elle ne s'arrête pas ? Dix-sept. Qui est dans Autre ? Deux.

[>R6] : On ne savait pas qu'il y avait un Autre au début (Le professeur n'avait écrit que Oui et Non). Il n'y avait que oui et non. C’est ambigu.

[>Le professeur] : Ah, je n’avais pas mis le Autre, ça c'est une erreur…

[>R6] : Donc du coup...On se positionnait qu'en bivalence.

[>Le professeur] : Oui c'est une erreur de ma part. Tu veux changer de position.

[>R6] : Non (rires).

[>R2] : Moi je passe dans Autre.

[>Le professeur] : On pourrait continuer un moment mais on s'arrête sinon on n’aura pas le temps pour regarder la suite.

10. Script de la situation des nombres consécutifs du 11 09 14

Script composée de deux périodes :

Rappel du cours précédent et étude de C1 et C2 pour une durée de 0h41 (puis récréation)

Institutionnalisation sur C2, étude de C3 et institutionnalisation sur C3. (durée 1h27)

Rappel du raisonnement sur la situation des nombres puis Conjecture C1 et C2.

Fin de la première situation avec en début de cours par un rappel du raisonnement tenu pour démontrer qu'il n'y a pas de plus grand nombre dans l'intervalle ouvert [2 ;3[.

[>Le professeur] : [00:35] Alors on va reprendre où on en était la dernière fois. [00:40] Il y en a qui ont des questions? [00:45] Non parce que j'entends une sorte de rumeur là. [00:55] Si vous avez des questions, vous levez la main, sinon il n'y a pas de raison que vous parliez maintenant. [01:00] Je vous donne la parole si vous avez une question. [01:05] Donc la dernière fois on a évoqué le problème de chercher un plus grand élément à l'intervalle [2;3 [. [100.0] ouvert en 3. Ce qui a été proposé et discuté longuement c'était que le nombre 2,999...jusqu'à l'infini est le plus grand élément de cet intervalle. Et finalement, le professeur a introduit une manière de dire que ce n'est pas possible que ça soit 2,999.... [02:10] Comment on fait ? On dit: imaginons que ce nombre-là soit différent de 3. [02:15] C'est-à-dire qu'il se situe comme ça. Là il y a deux, là il y a trois et ici il a 2,999...jusqu'à l'infini. S'ils sont différents alors pile au milieu, il y a quelque chose, un autre nombre, il suffit de faire la moyenne, ça c'est parce qu'ils sont différents qu'on peut faire ça. Donc on glisse au milieu un autre nombre. [02:45] Et ce nombre-là, il plus grand que 2,999...jusqu'à l'infini. [02:50] et plus petit que 3 strictement et plus grand aussi strictement que 2,999 donc ce nombre-là nous dit que ce ne peut pas être 2,999...jusqu'à l'infini qui est le plus grand, Ok? Alors quand on a fini avec cette démonstration-là, en réalité on n'a pas résolu le problème puisqu'on n'a pas démontré quel est le plus grand. [03:20] Et bien c'est très facile de finir, pourquoi? Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il y en ait un plus grand, petit a, là il y a deux, là il y a trois et mettons-le ici. [03:35] Quelque part par là, il est plutôt du côté de trois, on est d'accord. [03:40] Si il y a un plus grand, il ne doit pas être égal à trois puisque trois est exclu. [03:45] Donc il doit être différent de trois. [03:50] Il est pas égal à trois. A partir du moment où il n'est pas égal à trois, je peux faire exactement le même raisonnement qu'avec 2,999...jusqu'à l'infini. [03:58] C'est-à-dire que là, entre petit a et trois, il y a un nombre pile au milieu, la moyenne, et ce nombre-là est plus grand que a strictement et il est plus petit que strictement que trois et ça veut dire que a ne peut pas être le plus grand. [04:18] Donc vous entendez bien, j'ai fait un raisonnement par l'absurde, j'ai dit "supposons qu'il existe un, on l'appelle a" et à partir du moment où je suppose qu'il y en a un et que je le nomme, je m'aperçois que celui que j'ai nommé, il ne peut pas être le plus grand, donc je tombe sur une contradiction, autrement dit ma supposition d'origine est une supposition qui est fausse. Il ne peut pas y avoir de plus grand. Autrement dit, là, on a un ensemble avec plein...là il y a une infinité de nombres là-dedans mais il n'y en a pas un qui est le plus grand. [04:52] Si bien sûr on ferme en trois, il y a un plus grand élément, c'est trois. Si on ouvre en trois, il n'y a pas de plus grand élément. On va écrire ce petit raisonnement par l'absurde sur le cours. [05:02] Supposons que a soit le plus grand élément de [2;3 [alors il y a un nombre entre a et 3, le milieu

par exemple, et donc a ne peut pas être le plus grand nombre. Ce raisonnement par l'absurde montre que l'hypothèse "a plus grand élément" est fausse. Oui ?

[>Hadrien] : [06:42] Si a c'est le plus grand, pourquoi il y a encore des points entre a et trois?[06:45]

[>Le professeur] : Parce que si a n'est pas égal à trois, il faut rajouter a différent de trois. Si a est le plus grand élément de cet intervalle, a n'est pas égal à trois. [07:05]

[>Hadrien] : Oui

[>Le professeur] : A partir du moment où il n'est pas égal à trois, il n'est pas sur trois. [07:10] Et si il est pas sur trois, il est ailleurs, autrement dit, quand tu fais la moyenne de a et de 3, tu obtiens un nombre qui est exactement pile au milieu des deux. Et du coup tu obtiens un nombre qui est plus grand que a qui était supposé être le plus grand. [07:30] Yes? Donc ça veut dire que ta supposition est fausse. [07:35] Conclusion l'intervalle deux trois n'a pas de plus grand élément.

Deuxième situation sur les nombres : les nombres consécutifs

[>Le professeur] : [08:00] Bon aujourd'hui on va rester toujours dans les nombres, mais je vais attaquer avec un nouveau problème, que j'appelle le problème des nombres consécutifs. [08:45] Voilà, ce que je vous demande en premier lieu c'est de me dire ce que vous pensez de cette conjecture, si elle est vraie ou fausse: "Si deux nombres sont consécutifs alors ils sont égaux". [09:25] Vrai, Faux, Autre. [09:30] Vous êtes prêts?[11:40] C'est bon? Dans la classe, cette conjecture : "Si deux nombres sont consécutifs alors ils sont égaux" qui pense que cette conjecture est vraie? un. Qui pense que c'est faux?[12:15] Alors levez bien la main que je puisse vous compter parce que c'est après pour cela que je n'ai jamais le bon compte. [12:20] quatorze. [12:30] Qui est dans Autre?[12:40] Quatorze. [12:45] Ok. C'est assez partagé. [12:50] Alors on va écouter Autre en premier. Allez C'est parti. Oui? Valentin, c'est ça ?

[>Valentin] : [13:00] Oui. [13:05] D'après la question d'avant, on dit qu'on peut toujours glisser un nombre entre deux. [13:15]

[>Le professeur] : On peut toujours glisser un nombre entre deux, oui. [13:20]

[>Valentin] : Déjà, il n'y a pas de nombre consécutif. [13:25] Du coup cette question elle n'a pas vraiment de sens. [13:36]

[>Le professeur] : [13:37] Ah oui, on peut toujours glisser un nombre entre deux donc pas de nombre consécutif,.. [13:42] et tu as répondu quoi après?

[>Valentin] : Du coup la question, la question n'a pas de sens comme ça.

[>Le professeur] : [13:52] Du coup la question n'a pas de sens comme ça. C'est pour cela que tu es dans Autre?

[>Valentin] : Oui. [13:57]

[>Le professeur] : [14:02] Pas de sens à la question...Je ne sais pas si tu te rends compte mais tu es en train de dire que le prof pose des questions insensées, hein? (Rires)

[>Valentin] : [14:07] Ça veut peut-être dire que je dois mal la comprendre. [14:12]

[>Le professeur] : D'accord. Oui?[14:17]

[>Nathan] : Oui je pensais la même chose. [14:22] En fait pour qu'elle ait vraiment du sens, il faudrait être plus précis, genre entiers consécutifs. [14:23]

[>Le professeur] : Toi tu es dans Autre ?

[>Nathan] : Oui. Pour la même raison. [14:28]

[>Le professeur] : Tu dis : il faut préciser, il faut préciser, par exemple, entiers consécutifs. [14:43]

[>Nathan] : Ou un nombre de décimales.

[>Le professeur] : Ou un nombre de décimales. [14:48] Ok! Oui? Tu es dans Autre aussi?[14:58]

[>Juliette] : Pour la même raison.

[>Le professeur] : Alors ce qu'on va faire c'est qu'on va demander : qui est dans Autre pour "il faut préciser"?[15:13] Huit. Qui est dans Autre dans consécutif ça n'existe pas donc ça n'a pas de sens ? Six. [15:28] On a en a bien quatorze. [15:33] Maintenant on va écouter ceux qui sont dans Vrai. Il y en a qu'un en fait. [15:43] C'est Maxime.

[>Maxime] : Moi, en fait, quand j'ai lu votre question, je me suis dit, le prof il va encore nous sortir quelque chose d'absurde pour trouver un moyen que ce soit vrai. Je me suis dit, si on prend l'exemple de 2,999... et 3. Je me suis dit, il n'y a rien pour passer de 2,999... [16:08] à 3 et si il y a rien pour passer d'un nombre à l'autre, c'est que c'est le même. [16:18]

[>Le professeur] : 983.0] répète la fin parce que...

[>Maxime] : [16:23] J'ai dit que vu que 2,999...c'est juste avant 3, enfin ils sont consécutifs, enfin d'après moi, donc si ils sont consécutifs comme cela, on ne peut rien ajouter à 2.999... pour arriver à 3. [16:48] Enfin il n'y a rien de palpable qu'on peut ajouter. [16:53] Donc du coup ça veut dire que c'est les mêmes chiffres vu qu'on ne peut rien ajouter pour passer de l'un à l'autre en même temps.

[>Le professeur] : [16:58] Et alors pour la conjecture pourquoi c'est vrai pour toi? Ah par ce qu'ils sont égaux du coup ![17:03]

[>Maxime] : Oui.

[>Le professeur] : Ah oui je comprends. Alors première chose que dit Maxime : Le prof est piégeur. [17:13] Vous vous êtes lâchés, il y en a un qui dit que le professeur pose des questions insensées, l'autre le prof pose des pièges. [17:23] Et puis deuxième chose, 2,999... [17:28] et 3 sont des nombres consécutifs et égaux et donc C1 est vraie. [17:48] Hein, c'est ça? Ils sont égaux, parce qu'il n'y a rien entre les deux. [18:03]

[>Juliette] : Monsieur, en fait qui c'est qui a raison parce que vous avez marqué que 2,999...ce n'est pas égal à trois alors qu'on a démontré la dernière fois que c'est égal à trois. [18:08] Du coup?????[18:13]

[>Le professeur] : Alors là j'ai laissé ça au tableau mais on dit supposons que ce soit différent, tu sais c'était pour autre chose... [18:28] Ici j'ai écrit différent de trois ça veut pas dire que ça

l'est. [18:38] C'est juste si ça alors ça, c'était une supposition. [18:43] Comme je fais là: je suppose que a est le plus grand entier. [18:48] Le plus grand élément de l'intervalle ouvert. Mais après on s'aperçoit qu'il n'y en a pas. [18:53] Donc ça ce n'est pas une affirmation, je n'affirme pas que c'est différent, ni d'ailleurs que c'est égal. [19:03] Ok? En fait la dernière fois on a dit que c'était égal. [19:08] A vrai dire. [19:13] Tu voulais rajouter quelque chose Juliette?[19:23] Donc on a entendu celui qui pensait que c'est vrai? Maintenant ceux qui pensent que c'est faux. [19:28] Alors Victor.

[>Victor] : [19:33] Chaque nombre est consécutif à un autre donc cela voudrait dire que tous les nombres serait égaux et ça ne voudrait rien dire si tous les nombres étaient égaux. [20:22]

[>Le professeur] : Ah tu dis, si je comprends bien, si on dit que 2,999.... et 3 sont des nombres égaux alors comme tous les nombres sont consécutifs les uns des autres, alors finalement tout le monde est égal. C'est ça?

[>Victor] : [20:37] Oui.

[>Le professeur] : Et tu dis c'est pour cela que je vote Faux parce que je sais très bien que ce n'est pas vrai : tous les nombres ne sont pas égaux. C'est ça?[20:47] Donc si ça c'est vrai, si C1 est vrai alors tous les nombres sont égaux. [20:57] Car ils sont tous consécutifs des uns des autres. [21:17] D'accord. [21:22] Qui est dans Faux pour exactement cette raison-là?[21:27] Oh, ho![21:32] Treize. [21:37] Je ne n'aurais jamais parié un truc comme ça. Qu'il y ait autant de personnes qui pensent Faux pour cette raison-là particulière. Oui?[21:47]

[>Louis] : Moi je n'avais pas pensé à ça mais ça me parait vrai. Mais sinon j'avais pensé à autre chose, moi enfin, deux nombres consécutifs c'est quand il y a un des deux nombres qui est soit plus petit soit plus grand que l'autre. [22:00] Et donc qui n'a pas la même valeur et donc qu'ils ne sont pas égaux.

[>Le professeur] : Tu dis si x et y sont consécutifs, x est inférieur à y ou y inférieur à x. [22:14] Et donc x différent de y. Ok. [22:24] Alors là on a peu près toutes les raisons. On les a toutes les raisons dans la classe, simplement, le jeu habituel c'est le prof, une fois que les raisons sont données et encore habituellement on en donne moins, le prof donne son avis et dit qui a raison dans la classe. Le jeu qu'on joue ici, est totalement différent, on essaie de se mettre d'accord. [23:09] Ici moi je dis qu'on n'est pas d'accord. Ceux qui sont dans Autre ne sont pas du tout d'accord avec ceux qui sont dans Faux. [23:14] Pourquoi? Parce que ceux qui sont dans Autre, ils disent: "non on ne peut pas répondre à cette question-là". [23:19] Alors que les autres ils disent: "Bien sûr que si on peut répondre, c'est clairement faux." Vous voyez ce sont des positions très différentes. [23:29] Vous voyez, ce sont des positions vis à vis de la validité qui sont très différentes. [23:34] Oui Baptiste ?

[>Baptiste] : Est-ce qu'on pourrait avoir la définition de consécutif en mathématiques ?[23:39]

[>Le professeur] : Toi tu exprimes le besoin d'avoir une définition pour consécutif.

[>Baptiste] : Exactement. [23:44]

[>Le professeur] : Tu es dans quoi, toi ?

[>Baptiste] : [23:49] Autre. [23:54]

[>Le professeur] : Autre et tu dis : j'ai besoin d'une définition pour consécutif. [24:04] Alors juste...Est-ce que tu vas plus loin que ça en disant que, a priori, pour toi on ne peut pas répondre à cette question si on a pas cette définition ?[24:24]

[>Baptiste] : Non, je me suis demandé d'abord si la définition de consécutif existait. [24:29] Parce que si ceux qui ont dit Autre pour la première raison de Autre, là.

[>Le professeur] : [24:34] C'est-à-dire?[24:39] On peut toujours glisser deux nombres...oui pas de sens. [24:45]

[>Baptiste] : Si consécutif n'existait pas en mathématiques donc on aurait pas de définition en mathématiques. Donc je me demande si consécutif a une définition en mathématiques. [24:55]

[>Le professeur] : Ah. Oui bon je vais arrêter là ce débat. [25:00] Pour cette conjecture-là. Est-ce qu'il y a quelqu'un qui a changé d'avis pour cette conjecture-là dans la classe ?[25:05] Non? On ne va pas aller plus plus loin pour cette conjecture, je pourrais jouer à continuer d'aller un peu plus loin. [25:20] On va s'arrêter là parce que Baptiste nous propose quelque chose. Il nous propose de définir consécutif. Alors Baptiste, je te dis tout de suite, on ne discute jamais de quelque chose qui n'est pas défini. Ça n'existe pas. [25:40] Pourquoi? Pourquoi on ne peut pas discuter de quelque chose qui n'est pas défini ? Parce que si on ne le définit pas, on parle pas de la même chose ensemble. Ok?[25:55] Tu vois, il y en a qui disent qu'on peut toujours glisser un nombre entre deux et donc consécutif, finalement on ne sait pas trop ce que c'est. D'autres disent 2,999...et 3 sont consécutifs et égaux en même temps, et finalement on ne va pas savoir, pas pouvoir se mettre d'accord. [26:20] Et il y en a qui aussi expriment le besoin de savoir si il s'agissait de nombres entiers ou de nombres réels. [26:25] C'est-à-dire tous les nombres quoi. [26:30] Est-ce qu'on utilise que les nombres entiers ou bien tous les réels?[26:35] Alors il faut répondre à cette question-là. En fait la première chose qu'on va apprendre avec cette conjecture c'est que on ne se mettra pas d'accord sur une conjecture comme ça, c'est fondamentalement impossible de se mettre d'accord tant qu'on n'a pas précisé ce que veut dire consécutif, et ce que veut dire nombre, de quels nombres on parle. Et ici ce n'est pas clair. [26:55] Ni pour l'un, ni pour l'autre.

[>Hadrien] : C'est fait exprès ?

[>Le professeur] : Oui bien sûr que c'est fait exprès ![27:00] Pour qu'on se rende compte que la seule position qui est tenable ici c'est de dire! moi je ne peux pas répondre ici à une question comme ça tant que je ne sais pas ce que consécutif ça veut dire. [27:15] Je ne blague pas! C'est pour cela que je prenais un peu à la légère tout à l'heure quand quelqu'un m'a dit que ma question est insensée. Oui elle est insensée, et c'est à nous de donner du sens en réclamant une définition. [27:30] Ou en en construisant une. Mais là je vais vous en donner une définition. [27:35] Mais quand il y a des mots dont vous ne savez pas ce qu'ils veulent dire, autrement dit, vous n'avez pas leur définition, vous devez vous arrêter. Vous devez vous dire, moi je ne peux pas répondre à cette question tant que je ne sais pas ce que ça veut dire. [27:50] Alors pourquoi, ici ça ne saute pas aux yeux de tout le monde qu'il faut définir ce que veut dire consécutif. Et bien parce que consécutif tout le monde connaît ce mot -là. [28:00] Pour cette raison-là. Sauf qu'on s'aperçoit que ce n'est pas aussi clair que ça. [28:05] Et dès qu'on en discute, on tombe sur des problèmes comme ça. Là, il y en a quatorze qui pensent que c'est faux et quatorze qui sont dans

Autre en disant qu'on ne peut pas répondre à cette question-là, mais pas toujours pour les mêmes raisons. [28:20] Certains qui sont dans Autre pensent que ça n'a pas sens car on peut toujours en glisser un autre et d'autres qu'il faut préciser. Alors qu'est-ce que veut dire ici consécutif ? Consécutif, définition, je vais l'écrire au tableau parce qu'on va s'en servir après. [28:53] Définition: deux nombres distincts sont consécutifs dans un ensemble K si il n'y a aucun nombre de K entre les deux. [29:43] Donc à partir de maintenant je vais pouvoir vous reposer la question et nous allons pouvoir nous mettre d'accord beaucoup plus facilement. [29:54] Avec la conjecture C2: Si deux nombres entiers sont consécutifs dans N alors ils sont égaux. [30:24] Je vous laisse réfléchir à cette conjecture. [30:34] On vote dans une minute. [30:39] On va accélérer parce que comme il nous reste que dix minutes avant la récré, couper un débat un milieu ce n'est pas la peine d'essayer ça ne marche pas. [33:09] Donc je vous demande tout de suite. Dans la classe, qui pense que cette conjecture est vraie ?[33:14] Un. [33:19] Qui pense qu'elle est fausse?[33:24] Beaucoup. Qui se met dans Autre ?[33:29] Un, d'accord. [33:34] Donc vingt-sept dans Faux. [33:39]

[>Baptiste] : Je me mets dans Vrai.

[>Le professeur] : Tu étais dans quoi ?

[>Baptiste] : Je n'ai pas levé la main. [33:39]

[>Le professeur] : D'accord. Donc deux dans Vrai, vingt-six dans Faux et un dans Autre. La première chose que l'on remarque c'est qu'on a une définition et qu'on arrive à se mettre d'accord d'entrée de jeu. Ça ne veut pas dire qu'au final, tout le monde ne se retrouvera pas dans Vrai mais manifestement ça met d'accord assez rapidement. Donc on va écouter en premier ceux qui sont dans Autre. [34:09] Ah tu étais dans Faux?[34:19] Dans Vrai, on commence par Loïc?[34:24]

[>Loïc] : [34:29] Je dis Vrai parce que par rapport à la définition. [34:34] (Quelqu'un dit il y a le mot distinct) . Ah oui je n’avais pas vu le mot distinct. [34:39] Faux!

[>Le professeur] : [34:44] Tu passes dans Faux à cause du mot distinct?

[>Loïc] : Oui. [34:49]

[>Le professeur] : Ok! Qui est dans Vrai aussi ? [34:59]

[>Baptiste] : La même chose.

[>Le professeur] : Idem ! Ok ! Qui est dans Faux et veut expliquer pourquoi ? [35:09] Oui, Baptiste ?

[>Baptiste] : Deux n'est pas égal à trois.

[>Le professeur] : Faux parce que deux n'est pas égal à trois. [35:14] Tu peux dire un mot de plus pour expliquer pourquoi, pour toi, ça explique pourquoi la conjecture est fausse?[35:24]

[>Baptiste] : [35:29] Il y a deux nombres entiers donc ça appartient à N, Si ça appartient à N ça appartient à l'ensemble K. [35:36] Et si ils sont consécutifs, ça veut dire qu'on peut pas mettre de nombre entre les deux, ça veut dire que ça marche avec tous les nombres entiers en fait, entre deux et trois on ne peut pas mettre de nombres entiers donc ils ne sont pas égaux. [35:56] Et ça marche pour tous les entiers.

[>Louis] : [36:01] Ils sont consécutifs et pas égaux.

[>Le professeur] : Ils sont consécutifs et pas égaux. [36:06] C'est ce que tu veux dire? (Baptiste réfléchit) Ce n'est pas clair au final. [36:11]

[>Baptiste] : Ouais.. [36:16] Pourtant ça avait l'air bien sur le papier! (Rires dans la classe) . [36:17]

[>Le professeur] : Sur le papier tu as écrit quelque chose ? (Un peu Ironique) Quelqu'un veut rattraper son argument parce que j'ai l'impression qu'on n'est pas loin du compte. [36:27] Oui, Hadrien.

[>Hadrien] : C'est marqué que s'ils sont consécutifs alors ils sont égaux et là on montre qu'ils sont consécutifs et pas égaux donc c'est pour ça.

[>Le professeur] : [36:37] Donc il manque quoi ici? (désigne la phrase de Baptiste au tableau)[36:42] Deux et trois sont consécutifs.

[>Hadrien] : Voilà. [36:47]

[>Le professeur] : Consécutifs et différents. [36:52] Ok! Ça c'est un argument. Est-ce que quelqu'un a un autre argument pour dire cette conjecture, c'est évident qu'elle est fausse, on ne va pas en discuter deux ans. Fausse pour un autre argument. [37:02] Qui a un autre argument dans la classe?[37:07] Oui?[37:12]

[>Victor] : Ben moi c'est pareil, k il est toujours différent de k+1 vu que c'est des entiers.

[>Le professeur] : [37:13] Si on prend k et k+1, k et k+1 sont consécutifs, c'est ça que tu veux dire?

[>Victor] : [37:18] Ouais![37:23]

[>Le professeur] : Et k différent de k+1. [37:28] C'est la même chose et pas tout à fait la même chose non plus. [37:33] Ok. Est-ce que quelqu'un a encore un autre argument pour dire c'est faux d'une manière évidente parce que ... ? [37:38] Oui?

[>Baptiste] : [37:48] Consécutif ne veut pas dire égaux.

[>Le professeur] : Oui. Consécutif ne veut pas dire égaux ?[37:58]

[>Baptiste] : Consécutifs et égaux ne veulent pas dire la même chose. [38:03]

[>Le professeur] : Ah, tu dis c'est deux noms différents donc ce n'est pas la même chose ? [38:08]

[>Baptiste] : C'est comme deux fonctions différentes, on les assemble ensemble et ça ne va pas. [38:13]

[>Le professeur] : D'accord...Oui ? [38:18]

[>Nathan] : Pour reprendre ce que dit Baptiste, nombres consécutifs c'est deux nombres distincts donc consécutifs ne peuvent pas être égaux. [38:22]

[>Le professeur] : Toi ce n'est pas tout à fait la même chose, ce que tu dis. [38:27] Parce Baptiste, lui ce qu'il dit, enfin il me semble, consécutifs et égaux d'habitude on voit bien que c'est deux choses différentes, on les met dans la même phrase on voit bien que ça ne marche pas. Toi

tu es en train de dire, si on regarde la définition de consécutif qui est là, dans la définition c'est marqué distinct donc ça ne peut pas être égaux. C'est ça ?

[>Nathan] : [38:42] Oui.

[>Le professeur] : Ce n'est pas tout à fait la même chose. [38:47] Donc ça ça constitue une raison différentes: deux nombres consécutifs sont par définition différents, distincts. Donc ils ne peuvent pas être égaux. [39:10] ...Bon on a réussi à clore enfin. Tout le monde est d'accord ? [39:20] Les Vrais sont passés dans Faux et les Autres aussi. [39:30] Alors je suis d'accord avec vous, cette conjecture elle est fausse. Tout à l'heure je vous raconterai exactement comment en mathématiques comment on fait pour dire que c'est faux. Là vous avez eu trois arguments très distincts. [39:44] Ces trois-là. [39:48] En général en mathématique pour dire qu'une conjecture est fausse, on utilise quoi ? [40:04] Un contre-exemple, Oui. [40:08] Un contre-exemple, c'est quel argument ici ? [40:14] C'est le premier. Ca ce n'est pas un contre-exemple, c'est une famille de contre-exemples. [40:17] k et k+1. [40:22] k ça peut être n'importe quel nombre entier a priori. Hein, c'est bien ça ? [40:27] Donc ce n'est pas vraiment un contre-exemple et celui-là non plus. Ok ? [40:32] Tout à l'heure, on verra ce qu'il faut retenir de cette histoire-là. [40:37]

Nombres consécutifs 2ème partie TS1 le 11 09 14 après la récréation.

Institutionnalisation sur les règles de la vérité puis conjecture C3. Durée 1h27

[>Le professeur] : [00:10] Oui donc je disais "si deux nombres sont consécutifs alors ils sont égaux, les règles de la logique en mathématique sont celles-ci. Un peu de vocabulaire. [00:20] En générale les conjectures sont de la forme si A alors B; c'est le cas ici. [00:25] Si deux nombres entiers sont consécutifs alors ils sont égaux. Le A c'est "ils sont deux nombres entiers consécutifs" et le B "ils sont égaux". Ça, ça s'appelle une conjecture, A s'appelle hypothèse et B conclusion. A priori vous connaissez déjà. Il existe plusieurs types de situations possibles pour une conjecture. [00:50] Il existe les exemples que vous connaissez très bien. [00:55] Les exemples c'est quoi? Ce sont les situations qui vérifient à la fois A et B. [01:00] Ce sont des exemples. Les situations qui vérifient A mais pas B sont appelées contre-exemples. Et les situations qui ne vérifient pas l'hypothèse sont appelées hors-sujets. [01:15] Celles qui ne vérifient pas l'hypothèse sont donc des hors-sujets, celles qui vérifient l'hypothèse mais pas la conclusion des contre-exemples. Ok ? [01:25] Je ne suis pas sûr de vous apprendre grand-chose, à part le hors-sujet. [01:30] Mais je fais le point parce qu'on va en avoir besoin assez souvent de ces mots-là. Alors si on regarde pour C2, pour C2 il n'y a pas d'exemple puisque quand vous prenez deux nombres entiers, s'ils sont consécutifs alors automatiquement…Mais alors qu'est-ce que j'ai dit.... [01:54] Oui c'est ça, oui. Quand vous prenez deux nombres entiers consécutifs, c'est-à-dire deux nombres qui vérifient l'hypothèse de cette conjecture-là, alors automatiquement, ça a été dit tout à l'heure, ils sont différents, donc ils ne sont jamais égaux. Donc ça veut dire quoi pour cette conjecture ? [02:19] Ça veut dire qu'il n'y a pas d'exemple. [02:24] Autre chose, deux et trois, ça a été proposé tout à l'heure, deux et trois pour cette conjecture-là, vérifient l'hypothèse, ce sont deux nombres entiers consécutifs, on ne peut rien mettre entre les

deux, au sens de la définition qu'on a donnée tout à l'heure. [02:39] Et par contre ils sont différents. Ils vérifient l'hypothèse et pas la conclusion, ça s'appelle un contre-exemple. Ok? Et puis si on prend quatre et six, si quelqu'un propose quatre et six, on lui dit "là tu nous proposes un hors-sujet, ça ne vérifie pas les hypothèses". Quatre et six ne sont pas des nombres entiers consécutifs au sens de la définition de tout à l'heure : on peut mettre cinq entre les deux. [03:04] Entre quatre et six, il y a cinq et donc ils ne sont pas consécutifs. Voilà. Donc ce vocabulaire-là, je vous donnerai une feuille tout à l'heure, il va nous servir toute l'année et bien au-delà. Alors la règle fondamentale de la vérité en mathématiques, elle est simple, c'est : si une conjecture admet un contre-exemple alors elle est fausse. C'est celle que vous avez énoncée tout à l'heure, vous la connaissez. [03:29] Et quand est-ce qu'elle est vraie? Quand elle n'est pas fausse. Autrement dit quand il n'y a pas de contre-exemple. [03:39]

[>Élève] : [03:44] Est-ce qu'on peut avoir des exemples et des contre-exemples pour la même conjecture?

[>Le professeur] : Oui. Qui peut proposer une conjecture dans la classe une conjecture qui a des exemples et des contre-exemples ? [03:49] Ah, ah! Oui ? [03:59] Hadrien?

[>Hadrien] : L'ensemble de -5 à 5. Si x égal -5 alors les autres nombres, n'importe quel autre nombre de K de -5 à 5 sera égal à 0. [04:24] -5 +5 ça fait 0 mais -5 +4 ça fait pas 0.

[>Le professeur] : [04:29] Ah oui, tu parles du questionnaire. [04:34] On prend ....Oui mais elles n'étaient pas écrites comme ça. On va avoir un problème avec celle-là. [04:44] Ce n'est pas écrit en si alors. [04:54] Il est écrit autrement celui-là. Une conjecture en si alors ? [04:59] Tu avais une proposition toi, Caroline?[05:04]

[>Caroline] : Si un angle est aigu alors il fait moins de quarante degrés"

[>Le professeur] : [05:14] Oui, si un angle est aigu alors il fait moins de quarante degrés. [05:19] Est-ce que quelqu'un peut donner un exemple de ça?[05:34]

[>Maxime] : (vient au tableau et dessine) Un angle qui fait...ça c'est un angle aigu et il est...enfin je suppose, je n'ai pas de rapporteur mais il fait plus de quarante degrés. [05:50]

[>Le professeur] : Ça s'appelle comment pour la conjecture ?[06:00] ...Pourquoi tu mets plus de quarante degrés, pourquoi tu marques pas exactement combien il fait?

[>Le professeur] : Je ne sais pas. J'en sais rien ! (Il veut dire qu'il ne connaît pas la mesure de l'angle)

[>Élève] : Et bien tu mets n'importe quoi. [06:10]

[>Maxime] : [06:19] Quarante-trois."

[>Le professeur] : [06:24] Et l'autre?

[>Maxime] : Vingt-cinq.

[>Le professeur] : Bon ça, c'est quoi pour la conjecture ton angle de vingt-cinq degrés ?

[>Maxime] : [06:29] C'est un exemple.

[>Le professeur] : C'est un exemple. Et ça ?

[>Maxime] : Un contre-exemple. [06:34]

[>Le professeur] : Un contre-exemple. Donc vous voyez bien que cette conjecture, elle a des exemples et des contre-exemples. [06:39] Ça marche?[06:44] Oui ça c'est la règle fondamentale et ça a des conséquences, cette règle fondamentale extrêmement simple, c'est qu'une conjecture est soit vraie soit fausse. [06:54] Puisqu'elle est fausse si elle a un contre-exemple et vraie si elle n'est pas fausse. Deux, un contre-exemple, un seul contre-exemple suffit pour prouver la fausseté d'une conjecture. Pas besoin de dix, juste un seul. [07:09] Et trois, la vérité en maths pour une conjecture, elle ne s'occupe pas de savoir si il y a beaucoup d'exemples, ou des exemples intéressants, elle s'occupe que des contre-exemples. [07:15] En fait les exemples ne disent rien sur la vérité en mathématique. [07:24] Ok? Alors que dans la vie de tous les jours on aurait plutôt tendance à dire : "Moi ce que je te dis est vrai parce que je peux te donner des tonnes d'exemples". [07:34] Et bien en mathématique on ne procède pas comme ça puisque c'est pas parce qu'il y a des tonnes d'exemples qu'il n'y a pas de contre-exemple. [07:44] Là par exemple, pour cette conjecture, il y a des tonnes d'exemples: 25,1 25,2 25,11 25.111etc... [07:49] Il y en a des tonnes des exemples mais, il y a aussi des contre-exemples donc cette conjecture-là est fausse. [07:59] Un seul contre-exemple suffit. Celui-là. [08:04] Quelqu'un arrive au tableau, il dessine ça, quarante-trois degrés. On s'arrête de discuter, un seul contre-exemple suffit. [08:14] C'est bon? Donc la suite. [08:19] Pour conclure sur cette conjecture, on a donné un contre-exemple qui est là: deux et trois sont deux nombres consécutifs au sens de ce qui a été exprimé ici comme définition de deux nombres consécutifs, on peut mettre aucun entier naturel entre deux et trois et deux est clairement différent de trois. Dans la classe tout le monde le sait que deux est différent de trois. [08:56] Donc ça vérifie l'hypothèse mais pas la conclusion donc c'est un contre-exemple, donc la conjecture est fausse. [09:06] Point barre. L'existence d'un contre-exemple permet de dire que la conjecture est fausse. [09:13] Maintenant ce que je voudrais vous proposer c'est la conjecture C3, un peu différente, c'est: "Si deux nombres réels sont consécutifs alors ils sont égaux.". [09:43] Vrai, Faux, Autre. [09:48] Je vous laisse..... [10:13] (Un élève demande ce qu'est un réel.) Réel ça veut dire, tous les nombres. D'accord ? Les nombres entiers, décimaux, rationnels, relatifs, les irrationnels... [10:36]

[>Le professeur] : Alors c'est bon, je peux vous faire voter ? Qui, dans la classe, pense que cette conjecture est vraie ? Personne. [13:02] Qui pense que c'est faux ? [13:07] Quinze. Qui se met dans Autre ? [13:17] quatorze. [13:27] Encore une fois, Faux beaucoup et Autre beaucoup aussi. On écoute qui en premier ? [13:57] Juliette, on écoute Juliette. [14:02] Vas -y Juliette! Tu es dans … ?

[>Juliette] : Dans Faux. [14:07] Si c'est deux nombres réels...

[>Le professeur] : Oui.

[>Juliette] : C'est deux nombres qui se terminent donc entre deux nombres qui se terminent, on peut mettre un autre nombre entre les deux. [14:22] Par exemple, entre 2,3 et 2,4 on peut mettre 2.35.

[>Le professeur] : [14:24] Oui tu prends 2,3 et 2,4 là entre les deux tu mets 2,35 et alors ? [14:38]

[>Juliette] : Il y a toujours un nombre entre les deux.

[>Le professeur] : Alors tu dis : entre deux nombres réels il y a toujours un nombre entre les deux. [14:54] Et alors?

[>Baptiste] : C'est un contre-exemple.

[>Juliette] : Ils ne peuvent pas être égaux.

[>Le professeur] : [14:59] donc ils ne peuvent pas être égaux, c'est ça?

[>Juliette] : Oui. [15:19]

[>Le professeur] : Donc c'est faux.

[>Nathan] : Donc si on peut mettre un nombre entre les deux alors ils ne sont pas consécutifs. [15:24]

[>Le professeur] : [15:25] Nathan, toi tu es dans quoi?

[>Nathan] : Dans Autre. [15:30]

[>Le professeur] : Je veux bien entendre ce que tu dis, par contre je voudrais savoir combien sont dans Faux pour cette raison-là (celle de Juliette). [15:35] Juste pour savoir où on est dans la classe. Qui est dans Faux pour la raison qui est là ? Il y en a huit. [15:45] La moitié de ceux qui sont dans Faux. [15:55] Ok. Nathan, toi tu dis, mais ce n'est pas possible, je peux pas être d'accord avec cet argument parce que si on peut mettre un nombre tout le temps entre les deux, alors ils ne sont pas consécutifs. Et alors ? [16:10]

[>Nathan] : Ben alors ça ne vérifie pas l'hypothèse, c'est hors-sujet. [16:13]

[>Le professeur] : Ah, toi tu es dans Autre et tu dis... [16:18] Si on peut mettre un nombre entre les deux, c'est un hors-sujet puisque ça ne vérifie pas l'hypothèse. [16:38] Ah, toi tu es en train de dire que ce n'est pas possible qu'il y ait deux nombres consécutifs![17:03] Toi tu es dans Faux. Et tu dis, du coup ce n'est pas possible que deux nombres soient consécutifs. [17:13] Ok. [17:31] (Beaucoup de discussions pendant qu'une élève lève la main) Attends je vais te faire un espace sonore. S'IL VOUS PLAIT ! [17:36] Il y a Orlane qui veut prendre la parole, Merci![17:41] Et entre nous, que ça soit Orlane ou n'importe qui, ça mérite qu'on l'écoute. [17:51]

[>Élève] : Ce n’est pas ... ????? (parle trop bas)

[>Le professeur] : Par contre, il faut que tu prennes ta place aussi.

[>Orlane] : Ce n’est pas possible que deux réels soient consécutifs.

[>Le professeur] : [17:55] Ah! Toi tu es dans quoi ?

[>Orlane] : Faux. [18:00]

[>Le professeur] : Et tu affirmes que ce n'est pas possible ou bien c'est une question ? [18:05]

[>Orlane] : J'affirme !

[>Le professeur] : Ah oui.

[>Orlane] : Parce que sinon on peut toujours rajouter une décimale, il y aura toujours un nombre entre les deux.

[>Le professeur] : [18:14] Oui il y aura toujours un nombre entre les deux. Du coup, tu es d'accord avec Juliette. [18:19] Oui. Vous êtes deux dans ce cas-là. Et pour la raison Faux. [18:24] Hein? Juliette tu veux rajouter quelque chose ?

[>Juliette] : Ça marcherait que si on donnait une suite de nombres. Que si on donnait, enfin, un ensemble de nombres. [18:34]

[>Le professeur] : [18:32] Je ne comprends pas ta proposition, Juliette.

[>Juliette] : [18:37] On pourrait dire qu'il n'y a de nombres consécutifs que si on donnait un ensemble de nombres et donc on a 1, 2, 3, 4, 5 on aurait un ensemble de nombres.

[>Le professeur] : [18:44] Alors l'ensemble de nombres, il est donné, c'est les réels.

[>Juliette] : [18:49] Et bien là, du coup, ça ne va pas marcher. [18:54]

[>Le professeur] : [18:56] Certainement ... alors là j'en ai plusieurs qui veulent prendre la parole. Alors on va commencer par Sébastien. [19:01] Et après Maxime. Vas-y Sébastien.

[>Sébastien] : On ne va pas trouver de contre-exemple parce que ce sera toujours hors-sujet. [19:14] On peut pas se mettre dans Faux puisqu'il n'y a pas de contre-exemple. [19:18]

[>Le professeur] : Ah, d'accord. Toi, tu es dans quoi ?

[>Sébastien] : Dans Autre.

[>Le professeur] : Tu dis, [19:24] il n'y a pas de contre-exemple donc quoi?

[>Sébastien] : [19:34] Donc ce n'est pas Faux. (un élève rajoute mais ce n'est pas vrai) . [19:38]

[>Hadrien] : C'est que des hors-sujet.

[>Le professeur] : Ah oui, il n'y a que des hors-sujet. [19:44] Ok![19:54] C'est pour cela que tu es dans Autre? Ok ! [19:58] Oui ?[20:04]

[>Margot] : Après je ne sais pas si c'est un contre-exemple mais dans la définition, ça dit que c'est un nombre différent. [20:08]

[>Le professeur] : Tu es dans quoi ?

[>Margot] : Faux. Dans la définition ça dit que ces deux nombres différents sont consécutifs, ben ils ne peuvent pas être égaux ! [20:18]

[>Le professeur] : Ah.

[>Margot] : Ils ne peuvent pas être égaux puisqu'ils sont distincts.

[>Le professeur] : Toi tu utilises un autre argument, tu dis : on prend la définition qui est là, on regarde, la définition dit que deux nombres sont consécutifs que s'ils sont différents et que si il n'existe aucun nombre de K entre les deux. [20:38] Donc il faut qu'ils soient différents. [20:43] Donc ils ne peuvent pas être égaux. C'est pour cela que tu dis que c'est faux. [20:43]

[>Margot] : Oui.

[>Le professeur] : Faux parce que dans la définition, ils sont différents et donc pas égaux. [20:58] Alors qui est dans Faux pour cette raison-là? Ah oui vous êtes deux en fait. [21:10] Oui?[21:20]

[>Caroline] : [21:36] Moi je suis dans Faux et j'ai oublié ce que je voulais dire....non, Je pense que la définition ne marche pas pour l'ensemble des réels. [21:27]

[>Le professeur] : Ah. Toi tu rajoutes autre chose : tu dis : moi je pense que c'est faux mais cette définition ne marche pas pour les réels. [21:42] Tu veux dire quoi par "ne marche pas"?[21:47] ....On t'écoute. [21:57] Caroline!

[>Caroline] : Ça rejoint ce que disait Juliette : "entre chaque réel on peut en mettre encore un."

[>Le professeur] : [22:02] Et alors?[22:07]

[>Caroline] : Ils ne sont plus consécutifs mais ils .... Enfin ils paraissent consécutifs mais ils ne le sont pas.

[>Le professeur] : [22:12] Qui "ils"?

[>Caroline] : Les nombres. [22:17]

[>Le professeur] : Tu dis : deux nombres peuvent paraître consécutifs mais ils ne le sont pas?[22:22]

[>Caroline] : [22:30] Il y en a un peu.

[>Le professeur] : Car il y a toujours un nombre entre deux nombres différents. [22:39] (Il finit d'écrire l'argument de Caroline). Maxime ?

[>Maxime] : Ben je pense que comme d'habitude, il faudrait une définition de nombres réels. [22:52]

[>Le professeur] : Tu es dans quoi ?

[>Maxime] : Dans Autre. [22:57]

[>Le professeur] : [23:02] D'accord, tu réclames une définition de nombres réels. [23:07] Alors par exemple, je vais simplifier la vie en vous disant que...Je ne vais pas vous donner une définition des nombres réels parce que ça risque d'être un peu compliqué parce que justement... [14:25] on est en train plus ou moins d'en constituer une. Une chose qui est sûre c'est que si vous prenez deux nombres réels et que vous prenez la moyenne, vous obtenez alors un autre troisième nombre réel. [23:30] Là ce n'est pas une définition des nombres réels mais c'est une manière de fabriquer des nombres réels facilement. [23:40] Vous en avez deux, vous faites la moyenne, vous en obtenez un autre. Ok? [23:45] D'ailleurs, à vrai dire, vous ajoutez deux nombres réels, vous obtenez un réel, vous les multipliez ensemble ça fait un réel... [23:50] Bien, alors depuis qu'on fait des débats ensemble, je remarque une chose assez étonnante dans votre classe, c'est que je ne vois pas tellement de changements d'avis. J'ai plutôt l'impression que vous campez sur vos positions. [24:15] C'est-à-dire, ou peut-être que vous n'écoutez pas ce que disent les autres, parce que forcément ça met le doute au bout d'un moment. [24:25] Chacun d'entre vous n'a pas pu penser seul ce que pensaient les autres, pas tout en tout cas. [24:30] Des fois ce que pensent les autres, ça nous convainc pas du tout. [24:35] D'autres fois ça nous met le doute et d'autres fois ça nous fait changer d'avis. Moi je remarque que d'habitude il y a plus de changements d'avis. C'est juste pour savoir s'il y en a dans la classe qui ont changé d'avis depuis le début. Il y en avait seize Faux, treize Autre. [24:50] Oui?[24:55]

[>Déborah] : J'étais dans Faux et je passe dans Autre pour la raison que Margot elle a dit.

[>Le professeur] : Alors je ne sais pas qui c'est l'argument de Margot. [25:01] Quel argument ?[25:06]

[>Déborah] : Le dernier !

[>Le professeur] : Dans la définition, ils sont différents et donc pas égaux. [25:06] Tu étais dans Autre et tu vas dans Faux parce que différents, s'ils sont différents ils ne sont pas égaux. [25:21] Oui?[25:26]

[>Loïc] : [25:43] Moi j'étais dans Faux et je passe dans Autre.

[>Le professeur] : D'accord.

[>Loïc] : Parce que on ne trouve pas de contre-exemple. [25:26] Donc...

[>Le professeur] : Donc tu dis pas de contre-exemple donc...Oui alors finis ta phrase parce que je ne t'ai pas laissé finir. [25:41] Je n'ai pas de contre-exemple donc ...?

[>Loïc] : Donc on ne peut pas dire que c'est faux. [25:46]

[>Le professeur] : Donc on ne peut pas dire que c'est faux. [25:51]

[>Nathan] : [26:01] Le truc c'est que l'hypothèse n'est pas vérifiable donc on ne peut pas trouver deux nombres réels consécutifs donc on ne peut pas dire que c'est vrai, on ne peut pas dire que c'est faux.

[>Le professeur] : [26:11] Nathan tu es dans quoi?[26:16]

[>Nathan] : Dans Autre.

[>Le professeur] : Tu dis: on ne peut pas ... l'hypothèse n'est pas vérifiable, hein c'est ça?

[>Nathan] : [26:26] Oui.

[>Le professeur] : [26:26] Donc c'est ni vrai, ni faux?

[>Nathan] : [26:36] C'est ni vrai, ni faux.

[>Le professeur] : [26:41] Ok. Oui?

[>Orlane] : [26:46] Moi je passe dans Autre pour la raison que Nathan il a cité.

[>Fabio] : [26:43] Moi aussi.

[>Le professeur] : Toi aussi Fabio. Toi c'était miss Orlane. Et Erika aussi ! Il y en a trois qui passent de Autre à Faux (en fait le contraire). Je vais faire un autre vote dans ce cas-là. Dans la classe, qui pense que c'est vrai ? Personne. Qui pense que c'est faux ? Neuf. Qui se met dans Autre ? Beaucoup en principe vingt. On va peut-être arrêter le débat ici. On va se mettre au clair les raisons des Faux. Qui se met dans Faux pour la raison qui est donnée ici ? Dans la définition c'est marqué qu'ils doivent être différents donc ils ne peuvent pas être égaux.

[>Juliette] : [27:54] On peut être dans Faux pour plusieurs raisons, hein!

[>Le professeur] : [27:59] Alors vas-y Juliette, donne-moi tes raisons.

[>Juliette] : Ben toutes celles qu'on a vues pour les Faux.

[>Le professeur] : [28:06] Oui ça va être difficile de trier. On ne va pas faire ce tri-là. On va peut-être trier pour les Autres. J'ai l'impression qu'il y en avait beaucoup qui étaient passés dans Autre pour la dernière raison, c'est-à-dire l'hypothèse n'est pas vérifiable donc c'est ni vrai ni faux. Qui est dans Autre pour cette dernière raison-là ? Je vous compte, Ok beaucoup ! Qui dans Autre pour une autre raison? zéro. Donc vous êtes tous pour cette raison-là dans Autre. Alors on a le choix. Soit il y a quelqu'un qui veut convaincre les autres que sa position est plus raisonnable que la position des autres, par exemple certains qui pensent que c'est faux pourrait vouloir convaincre ceux qui sont dans Autre que "clairement ce n'est pas Autre qu'il faut voter ici, ça se voit que c'est faux !" Ou alors "On ne peut pas voter faux dans cette situation on ne peut que voter Autre." Alors ça réveille quelques-uns au fond. Alors on va commencer par Louis.

[>Louis] : [29:36] Moi je pense qu'on ne peut voter que Autre parce qu'on ne peut pas trouver de contre-exemple, et on ne peut pas trouver d'exemples non plus tout simplement parce que dans les réels on ne peut pas trouver de nombres consécutifs, parce qu'on peut toujours glisser un nombre entre deux autres.

[>Le professeur] : [29:56] D'accord, tu dis on ne peut pas trouver de contre-exemple et on ne peut pas trouver d'exemple, donc c'est ni vrai ni faux. C'est ça ? Ok !

[>Baptiste] : [30:26] C'était ce que j'allais dire.

[>Le professeur] : [30:32] Exactement ça, Ok. Oui ? Marine !

[>Marine] : [30:36] Je suis dans Autre parce que si deux nombres étaient consécutifs ce n'est pas possible...

[>Le professeur] : [30:52] Marine parle plus fort.

[>Marine] : Ce n'est pas possible que des réels soient consécutifs parce qu'un réel ça peut être infini et le nombre suivant d'un nombre infini ce n'est pas possible.

[>Le professeur] : [31:06] Tu veux dire quoi par nombre infini? Qu'est-ce que tu veux dire par nombre infini ?

[>Marine] : Ben, ça veut dire que par exemple c'est égal à 46,5555...et à la fin il y a un autre chiffre.

[>Le professeur] : [31:18] OH! (à l'attention de quelques élèves qui font inutilement du bruit). Juste Marine, il faut que tu comprennes ce qui se passe là. Tu ne prends pas ta place. Tu la prends parce que tu parles, super, bravo Marine. Mais tu ne la prends pas totalement, parce que tu ne parles pas assez fort, du coup il y en a qui te marchent sur les pieds, hein ! Même plus que ça !

[>Marine] : [31:41] DEUX NOMBRES réels ne peuvent pas être consécutifs parce que si il y en a un qui ne se finit pas, on peut pas ???? un nombre qui se finit a un nombre qui ne se finit pas.

[>Le professeur] : [31:48] D'accord, Ok. Oui alors quand tu dis se finir tu parles de la partie décimale. La partie décimale ne s'arrête pas et dans ce cas-là trouver un nombre consécutif à ça c'est difficile. Ou pas possible, carrément. Hein ?

[>Marine] : [32:04] Ouais.

[>Le professeur] : Alors Maxime.

[>Maxime] : [32:08] Moi je vais juste mettre une nuance à ce qu'a dit Marine. Elle a dit: "les nombres réels ne se finissent pas". C'est certains nombres réels se finissent et certains nombres réels ne se finissent pas. Ce n'est pas tous les nombres réels ne se finissent pas.

[>Marine] : [32:21] Ouais c'est vrai.

[>Maxime] : [32:24] Car 2 est un nombre réel et ça se finit.

[>Le professeur] : [32:34] Matthieu.

[>Matthieu] : Alors le réel consécutif de deux ?

[>Maxime] : [32:38] : J'ai jamais dit qu'il y avait un réel consécutif de deux.

[>Matthieu] : [32:44] Il y en a qui se finissent et on peut pas trouver de nombre consécutif.

[>Maxime] : [32:47] Oui, oui, j'ai juste dit qu'il y avait des nombres réels qui se finissaient.

[>Matthieu] : [32:52] Oui mais on ne peut pas donner un nombre consécutif..

[>Maxime] : : Je n'ai jamais dit qu'on pouvait trouver un exemple ni un contre-exemple. [32:57]

[>Le professeur] : Ok. Caroline ?

[>Caroline] : Donc la définition ne s'applique pas pour l'ensemble des réels. [33:07]

[>Le professeur] : [33:17] Marine veut reprendre la parole. [33:22]

[>Marine] : Moi je passe dans Autre parce que ... ???? ça dépend de la situation...?????

[>Le professeur] : [33:40] Ok. On va peut-être s'arrêter là. [33:45] Est-ce que les arguments proposés ont fait changer d'opinion certains d'entre vous? Clarisse. [33:55] Tu reviens dans Autre, Ok. [34:00] Tu dis?

[>Elsa] : [34:20] Rien. [34:25]

[>Le professeur] : Tu resteras dans Faux quoiqu'il arrive?

[>Elsa] : Parce que vous prenez trop la tête pour rien.

[>Le professeur] : Parce que ?[34:30]

[>Elsa] : Parce que tout le monde se prend la tête pour rien. Alors que la réponse elle n'est même pas encore là en fait. [34:36]

[>Le professeur] : On va...je vais vous expliquer par contre, il va falloir allumer.... (le vidéo-projecteur) .... [35:01] Pour vous dire d'abord, vous êtes allés au fond du problème, c'est clair. [37:01] Et vous avez des choses à apprendre tout de même, ce que je vais vous expliquer tout de suite. [37:06] Moi je dis on ne peut pas aller tellement plus loin que ce que vous avez fait. Voilà ça c'est la règle fondamentale de la vérité en mathématiques. Ok ? La suite. L'étude de C3, les arguments qu'on donne en principe à ce genre de conjecture sont les suivants : Pour les Autres : puisque la définition n'est pas utilisable, c'est impossible, l'hypothèse est non réalisable, c'est ce qu'on a dit. Pour le faux : dans la définition deux nombres consécutifs doivent être

distincts, ils ne peuvent pas être égaux. [37:44] Et pour le vrai, il n'y a pas de contre-exemple donc c'est vrai. Tiens, il n'y a personne qui a utilisé cet argument-là. Il n'y a personne qui a défendu le Vrai, ici ? [37:54] Bon alors ici à l'étude de C3. [37:59] Vérité de C3. Deux nombres consécutifs sont distincts, or si deux réels sont distincts il y a toujours un nombre entre les deux. C'est ce que vous dites. Tout le monde est d'accord là-dessus ? Quand on a deux nombres réels, s'ils sont distincts, il y a un nombre entre les deux. [38:14] Ça veut dire que comme l'a dit Caroline mais je ne le dirais pas comme elle, dans R il n'y a pas de nombres consécutifs puisque si vous avez deux nombres distincts automatiquement vous pouvez mettre un nombre entre les deux. Ok ? La définition de consécutif s'applique bien à R mais par contre, il n'y a plus de nombres consécutifs dans R. Zéro, il n'y en a pas. [38:44] Ok. Du coup ce n'est pas très intéressant, c'est un concept qui s'applique à R mais du coup qui vide le concept. Donc dans R il n'y a pas de nombres consécutifs. [38:54] Autrement dit, comme vous avez dit, il n'y a pas de contre-exemple. [38:59]

[>Caroline] : Mais monsieur, dans R il n'y a pas de nombres irrationnels ?????

[>Le professeur] : Je répondrai à ça tout à l'heure d'accord ? [39:09] Vous êtes tous d'accord, ça a été dit plusieurs fois, il n'y a personne dans la classe qui dit le contraire de il n'y a pas de contre-exemple. [39:19] Et s'il n'y a pas de contre-exemple, ...

[>Élève] : [39:24] C'est vrai...

[>Le professeur] : Et bien oui, c'est ce qu'on a dit tout à l'heure. [39:29] C'est faux quand il y a un contre-exemple, un seul suffit, et quand est-ce que c'est vrai ?... Quand ce n'est pas faux ! [39:39] Autrement dit quand il n'y a pas de contre-exemple. Donc on est obligé d'accepter ....

[>Louis] : [39:44] Les Autres ont dit qu'il n'y avait pas d'exemple.

[>Le professeur] : C'est aussi ce que j'ai dit tout à l'heure. Vous vous souvenez. C'est pour cela que quand on me dit Monsieur, vous nous piégez, je ne suis pas d'accord. Je vous l'ai dit, très clairement. [39:59] Les exemples en mathématiques, ne disent pas la vérité, il peut y en avoir des tonnes, si il y a un seul contre-exemple, c'est faux. Et s'il n'y en a pas et qu'il n'y a pas non plus de contre-exemple alors ce sera vrai. [40:14] Ok, ça va jusqu'à là. [40:19] Alors, oui?[40:24]

[>Nathan] : Je pensais que quand c'était vrai, il y avait au moins un exemple.

[>Le professeur] : Ce n'est pas ça la définition de la vérité en mathématique. La définition, c'est : « c'est vrai quand ce n'est pas Faux et c'est faux quand il n'y a pas de contre-exemple ». La vérité en mathématiques ne s'occupe pas du tout des exemples. Alors bien sûr qu'on va s'en occuper. Je vais vous expliquer pourquoi on s'en occupe : on n'a pas envie de passer notre temps à parler de choses qui n'ont pas d'exemple. N'empêche que la vérité en mathématique ne se définit pas avec les exemples mais seulement la présence ou l'absence de contre-exemple. [40:59] Donc en fait je comprends très bien que ça peut être perturbant et sembler absurde. [41:09] Je vais vous expliquer pourquoi ça va vraiment à l'encontre de notre bon sens habituel. [41:19] D'abord, ça remet en cause le rapport entre la vérité et l'utilité. Qu'est-ce que c'est ? [41:29] Dans la logique du quotidien, sans que vous fassiez des maths, votre mère par exemple vous dit : "non mais tu n'es pas logique là". [41:39] Ou au contraire elle dit "Là tu fais preuve

de bonne logique". [41:44] Au quotidien on utilise une logique et dans cette logique du quotidien, qu'on utilise tous les jours, pour faire ses courses, pour aller faire des tonnes de trucs, et bien ...Fabio, tu viens à ma place et tu expliques le diapo que j'explique là si ça te plaît. [42:08] Parce que moi je ne peux pas continuer...c'est compliqué ce que j'ai à expliquer. Je suis en train de vous expliquer que la logique du quotidien que vous utilisez tous les jours, et qui ne sera jamais remise en cause, moi je l'utilise, quand je rentre chez moi, je dépose ma logique de mathématicien et je vais faire des trucs avec la logique du quotidien. [42:34] Il se trouve qu'à plein d'endroits c'est la même donc ce n'est pas un gros problème mais je sais qu'à certains endroits ce n'est pas la même. Je suis en train de vous expliquer qu'à certains endroits, ce n'est pas la même. [42:48] C'est la raison très précise pour laquelle tout à l'heure vous vous êtes tous trompés, personne n'a défendu le Vrai. [42:54] Et curieusement tout le monde a accepté de dire qu'il n'y avait pas de contre-exemple. [42:58] Vous l'avez même dit plusieurs fois, je peux vous montrer les endroits au tableau. [43:04] Regardez juste là. [43:08] C'est pas par hasard ce truc-là. [43:14] J'ai pas de contre-exemple donc on peut pas dire que c'est faux (il lit l'argument au tableau). Si on ne peut pas dire que c'est faux, c'est que c'est vrai.

[>Élève] : [43:30] Ben non!

[>Le professeur] : En maths si ! Parce que soit il y a des contre-exemples, soit il n'y en a pas. [43:36] C'est exactement pour cette raison-à. Dans la vie quotidienne bien sûr qu'on ne dit pas les choses comme ça. Tout n'est pas vrai ou faux comme ça. Mais en maths si. Oui ? [43:50] Nathan.

[>Nathan] : Ça veut dire que si une hypothèse n'est pas vérifiable, la conjecture est vraie.

[>Le professeur] : [43:56] Non ça ne veut pas dire ça. Alors je ne suis pas allé jusque-là. Nathan, tu as dit tout à l'heure, l'hypothèse n'est pas vérifiable. Bien sûr que oui elle est vérifiable. Ça dépend de ce que veut dire vérifier. Donne-moi deux nombres. [44:10] Vas-y!

[>Nathan] : 4 et 5. [44:16]

[>Le professeur] : 4 et 5. Est-ce que ce sont des nombres consécutifs dans R ? Non ![44:20] Donne-m ‘en d'autres.

[>Nathan] : 3 et 2. [44:26]

[>Le professeur] : 3 et 2 ils ne sont pas consécutifs dans R on est d'accord. Et donc chaque fois qu'on essaie des nombres, ils ne seront pas consécutifs dans R donc ils ne vérifieront pas l'hypothèse. Autrement dit jamais tu ne trouveras de contre-exemple.

[>Léa] : [44:40] On ne trouvera pas non plus d'exemple.

[>Le professeur] : Tout à fait. [44:46]

[>Léa] : Ça fait un peu bizarre.

[>Le professeur] : Tu sais pourquoi. C'est parce que pour toi, c'est ce que je suis en train de raconter. C'est hyper contre-intuitif ce que je vous raconte. [45:01] Pourquoi? C'est exactement ce que Léa vient de dire. Elle dit : il n'y a pas d'exemple non plus du coup [45:06] Non il y en a pas. Et Léa elle se dit, ben s’il n'y a pas d'exemple c'est pas vrai. [45:12] Pourquoi? Parce que comme dans la vie de tous les jours, elle vient en maths avec sa logique de tous les jours, et elle

se dit pour qu'une phrase soit vraie il faut que j'aie des exemples, au moins un, sinon je ne peux pas dire que c'est vrai. [45:27] On est bien d'accord. Regarde ce qui est écrit au tableau. [45:32] C'est écrit: dans la logique du quotidien on s'attend à ce qu'une affirmation vraie soit utile, c'est-à-dire qu'elle ait beaucoup d'exemples. [45:42] Au quotidien c'est comme ça qu'on pense. [45:47] Alors en maths c'est un peu différent. Dans la logique des mathématiques la logique ne s'occupe pas de l'utilité, ce qu'on exige pour qu'une phrase soit vraie, c'est juste qu'elle n'ait pas de contre-exemple, pas qu'elle soit utile. [46:07] Ok? Y compris si elle n'a pas d'exemple. Une phrase qui n'a pas d'exemple c'est totalement inutile on est d'accord. [46:17] Et bien l'utilité n'est pas la vérité en mathématiques. [46:22] La vérité ne s'occupe pas de l'utilité. Par contre le mathématicien, qu'on soit clair, il s'occupe d'utilité. Parce qu'il veut des phrases qui soient vraies mais qui en plus soient utiles. [46:37] Mais c'est deux choses dissociées. Par contre dans la vie quotidienne, les phrases pour qu'elles soient vraies il faut qu'elles soient un minimum utiles. Ok ?[46:47] Et dans ce cas elle est vraie mais elle est vraiment inutile. La suite. [46:52] S'il vous plaît, là je vais vous choquer encore plus, normalement. [46:57] Si vous m'écoutez, vous devez être choqué par ce que je vais raconter. C'est une des raisons pour lesquelles tout à l'heure personne n'a pu voter Vrai alors que tous les bons arguments pour voter Vrai étaient au tableau. [47:07] C'est la différence entre ce qu'on appelle la causalité et la nécessité, c'est-à-dire entre une certaine logique. Dans la logique du quotidien, ça arrive souvent de dire un truc du style : si A alors B. Alors on ne dit pas A et B mais plutôt ...en disant si A alors B on sous-entend que A est la cause de B. Par exemple, on dit "s'il pleut alors je prends mon parapluie" ou alors "si tu viens moi j'irai aussi au ciné ». Vous imaginez le nombre de phrases comme ça qu'on dit tous les jours. [47:47] Tous les jours. [47:52] Prenons la phrase qui est là: "Si il pleut alors je prends mon parapluie". On attribue automatiquement quand on parle, à la pluie un caractère de causalité. Ça veut dire quoi ? Ça veut dire qu'ici la pluie c'est la cause de "je prends mon parapluie". [48:07] Si il pleut, c'est la cause, alors je prends mon parapluie. [48:12] Vous me suivez. Jusqu'à là je ne vous choque pas. C'est normal ça. [48:17] Donc si il pleut vraiment on peut être certain que celui qui dit ça il va prendre son parapluie ou bien si il ne le prend pas vraiment il nous prend pour des andouilles. Il dit que « si il pleut alors je prends mon parapluie », il pleut et il ne le prend pas. [48:32] Ça n'arrive pas en général. Et puis deuxièmement, s'il ne pleut pas on attend en général qu'il ne prenne pas son parapluie. Ben oui, il a dit « s'il pleut je prends mon parapluie » donc s'il ne pleut pas, il ne le prend pas, tout ça c'est logique. [48:52] La logique du quotidien. [48:57] Je montre maintenant la logique mathématique. [49:02] Quand on dit en mathématiques, si A alors B, on appelle ça un rapport de nécessité. Ça veut dire quoi un rapport de nécessité en mathématiques. Ça veut dire que si A est vrai B doit l'être automatiquement. [49:22] On est d'accord. Et cela sans exception, autrement dit il n'y a pas de contre-exemple à cela. Quand "Si A alors B" est vrai et quand A se produit alors B automatiquement aussi. Par contre, quand A est faux, alors B peut être soit vrai soit faux. [49:42] Autrement dit si je reprends mon histoire de parapluie. [49:47] et qu'on la traite comme une histoire de mathématiques celui qui dit "s'il pleut je prends mon parapluie" imaginons que ce soit une phrase mathématique, ça n'en est pas une, on est d'accord, et bien, s'il est mathématicien, et qu'il fonctionne avec sa logique mathématique, et bien il peut prendre logiquement son parapluie. [50:12] Et on ne pourra pas le traiter d'illogique au sens mathématique bien-sûr. Vu au sens de la vie quotidienne, bien sûr on va lui dire "il ne pleut pas et tu prends ton parapluie ?!" On est d'accord ? Oui ? [50:32]

[>Loïc] : Si B est faux alors A ne peut pas être vrai avec la convention mathématique.

[>Le professeur] : Exactement, si B est faux, alors A ne peut pas être vrai. [50:42]

[>Loïc] : Si B est vrai, A il ne peut pas être vrai non plus ?

[>Le professeur] : Alors là tu vas trop vite. [50:48] Loïc est en train de nous dire, si A alors B est vrai. Imaginons que B soit faux, alors qu'est-ce que tu en déduis toi ?

[>Loïc] : [50:58] Alors A est faux.

[>Le professeur] : [51:03] A est forcément faux. Parce que si il était vrai, alors B le serait automatiquement aussi, tu as raison. [51:13] Ça s'appelle même la contraposée. [51:18] On peut dire que si on sait que "Si A alors B" alors on sait que si non B alors automatiquement non A. A ne pas confondre avec la réciproque "si B alors A". Si B est vrai, alors A ne l'est pas forcément, c'est justement ça une différence avec la logique du quotidien. [51:58] Oui?

[>Maxime] : [52:12] Je peux expliquer ou pas?

[>Le professeur] : Expliquer quoi ?

[>Maxime] : Ben avec l'exemple du parapluie en fait. [52:22] C'est si il pleut alors je prends mon parapluie, mais si je prends mon parapluie, ce n'est pas forcément qu'il va pleuvoir. [52:32]

[>Le professeur] : Oui, voilà. Là tu es en train de parler de la réciproque ?

[>Maxime] : Ouais. [52:38]

[>Le professeur] : Au sens mathématique. Dans la vie quotidienne, vous voyez bien. Imaginez deux seconde, vous êtes à l'intérieur, d'accord, vous ne voyez pas dehors, il n'y a pas de fenêtre. Mais quelqu'un vous a dit au téléphone, s'il pleut alors je prends mon parapluie. [52:58] Vous êtes toujours dans votre casemate, il n'y a pas de fenêtre et vous voyez la personne qui débarque, il a son parapluie. Là automatiquement dans la vie quotidienne, vous vous dites : et bien il pleut. Alors qu'en maths non ! Puisqu'il a dit s'il pleut alors je prends mon parapluie la seule chose qu'on sache c'est que si il n'a pas son parapluie, c'est qu'il ne pleut pas. Exactement ce qu'on a dit tout à l'heure. Mathématiquement, hein ? Alors le problème c'est que je suis en train de mélanger mathématiques et vie quotidienne. [53:38] Dans sa casemate celui qui pense il a son parapluie donc il pleut il a parfaitement raison de penser cela, on est d'accord. C'est pour cela qu'on doit bien faire la différence entre les deux parce que tout à l'heure Léa elle arrive en disant "mais monsieur il n'y a pas d'exemple, donc forcément ça ne peut pas être vrai". Et bien, elle a raison mais dans la vie quotidienne, en mathématiques elle avait tort. [54:02] Léa quand elle va faire la différence entre les endroits où ce n'est pas la même chose en maths et dans la vie quotidienne ben là elle va pouvoir être qualifiée de logique partout. [54:18] Juste je finis. [54:22] En terme de causalité, j'en ai pour trois secondes et après c'est la pause. En terme de causalité, la conjecture dont on vient de parler, c'est-à-dire celle qui est normalement là : "si deux nombres sont consécutifs alors ils sont égaux", en terme de causalité c'est complètement stupide de dire que consécutif est la cause de l'égalité puisque consécutif, justement, c'est pas égal. Donc c'est tout à fait logique de refuser de dire que cette conjecture est vraie. Quand vous arrivez tout à l'heure dans mon cours de maths vous êtes arrivés avec l'idée de la causalité, si alors exprime une causalité, donc vous ne pouvez pas dire que cette phrase est vraie. [55:18] Puisqu'il n'y a pas de cause. Consécutif ne peut pas être la cause de l'égalité. Vous avez peut-

être l'impression que je m'emballe mais je vous explique pourquoi il n'y a jamais personne qui pense que c'est vrai cette phrase. [55:32] Sur des centaines d'élèves. [55:38] Pour cette raison-là. Vous venez en classe avec cette idée de la causalité. Maintenant on va faire des maths, il va falloir intégrer l'idée de la nécessité. Ce n'est pas très différent de la causalité mais il y a des endroits où ce n'est pas la même chose. [55:52] Et pour finir deux exemples où vous verrez bien que la logique des mathématiques et celle de la vie quotidienne ne sont pas exactement identiques. [56:05] Imaginez deux secondes, une femme qui dit à son mari: "J'en ai vraiment assez, tu ne descends jamais les poubelles." D'accord ? On peut la comprendre, s'il ne descend jamais les poubelles, elle en a assez de descendre les poubelles. Ça se comprend. [56:30] C'est légitime. Le mari lui répond, c'est un mathématicien son mari, et vous allez voir qu'il va se recevoir une claque bientôt, il dit : "Ce que tu me dis, je ne descends jamais les poubelles, et bien ça c'est faux, il y a trente-trois ans je les ai descendues." C'est un contre-exemple ! [56:50] Et là il se prend deux claques, c'est la logique du quotidien qui lui revient dans la figure. [57:00] Rires. Ok ! Premier exemple. [57:05] Deuxième exemple, imaginez une mère qui dit à son enfant: "Si tu ne ranges pas ta chambre tu n'auras pas de chocolat. "Ok ? [57:20] Cette femme-là c'est une mathématicienne. L'enfant il sait très bien que sa mère elle respecte ce qu'elle dit. Comme il veut du chocolat, il sait que s'il ne range pas sa chambre il en aura pas donc il range sa chambre. [57:40] La mère lui dit : tu as rangé ta chambre je ne t'en donne pas....Elle a dit ce qu'elle ferait si il ne range pas sa chambre mais elle ne lui a jamais dit ce qu'elle ferait si il la rangeait. [57:55] Vous comprenez. D'un point de vue mathématique elle a raison, on ne peut pas la qualifier d'illogique, d'un point de vue éducatif, c'est un monstre.

Et puis il y a aussi le contraire, "si tu ranges ta chambre alors tu auras du chocolat". Le gamin ne range pas sa chambre, on lui en donne quand même. Et bien là ce n'est pas illogique non plus, sur le plan mathématique bien sûr, sur le plan éducatif c'est évident que si.

[>Hadrien] : [58:40] Pourquoi là?

[>Le professeur] : Et bien on lui dit: si tu ranges ta chambre, tu auras du chocolat, il ne la range pas et bien il peut en avoir quand même!

[>Hadrien] : Ah ouais.

[>Le professeur] : [58:40] Et oui. Et vous voyez ici qu'il y a une sacrée confusion entre la logique du quotidien et la logique mathématique, c'est que justement quand on dit un si alors on ne dit qu'une seule chose en mathématiques, s'il se passe ce truc-là, mais s'il ne se passe pas ce truc-là on ne peut rien savoir. Alors que dans la logique du quotidien on entend les deux : si tu ranges ta chambre alors tu auras du chocolat et si tu ne la ranges pas tu en auras pas, non plus. Yes? Deux minutes de pause.

[1:24:41] Pause de quelques minutes et ensuite petite discussion sur la méthode pédagogique suite à un questionnement d'élève. [1:26:41]

[1:26:51] Institutionnalisation avec reprise des arguments donnés en C3 mais aussi pour rendre faux C2. Seul le contre-exemple est valable puisque les deux autres arguments rendent C3 fausse aussi alors qu'elle est vraie.

10. Script situation des nombres de proximité maximale du 18 09 14

Ce script est composé de deux périodes :

- Etude de C1-C2-C3 durée 40 minutes (puis récréation)

- Etude C4. durée 49 minutes

Première partie de la situation : étude C1, C2, C3

[>Le professeur] : Ce que je vous propose maintenant c'est une activité sur les nombres, toujours, parce que les suites ce sont des nombres et que pour étudier les suites on a besoin d'avoir des propriétés sur les nombres. En particulier ce qui va nous être très utile c'est d'avoir des propriétés sur les nombres qui sont très proches. On a déjà plus ou moins parlé de ça. Aujourd'hui on va en parler davantage. On va appeler ça des nombres de proximité maximale. Je vais tout de suite vous donner une définition. Définition (il écrit au tableau) ...vous n'écrivez pas s'il vous plaît je vous donnerai après les documents correspondants. **Soit a et b deux nombres d'un ensemble K. On dit que a et b sont de proximité maximale si la distance entre a et b est plus petite que n'importe quel nombre positif de K strictement positif.** Là je l'ai écrit en toutes lettres mais on pourrait l'écrire aussi comme ça : c'est-à-dire si epsilon strictement supérieur à zéro, la distance entre a et b est inférieure ou égale à epsilon (il écrit d (a;b) < epsilon avec le égal), Ok? Donc c'est ça ! Donc je comprends bien qu'au tout début ce n'est pas évident à comprendre cette définition. On va commencer par des questions très simples, on va regarder ça dans N. Par exemple, on se pose **la question 1 : 2 et 6 sont des nombres de proximité maximale dans N**....N ce sont des entiers, on en a déjà parlé...Alors ça c'est une question, ce sont des nombres de proximité maximale, oui, ...Non, on va plutôt dire que c'est une conjecture, comme ça c'est plus facile, soit elle est vraie, soit elle est fausse, soit Autre. (Il écrit Vrai, faux, Autre).

[>Elsa] : Qu'est-ce que vous voulez dire quand vous dites la distance ?

[>Le professeur] : La distance entre, par exemple, entre zéro et quatre, c'est combien d'après toi ?

[>Elsa] : Quatre.

[>Le professeur] : La distance entre trois et cinq, c'est combien ?

[>Elsa] : Deux.

[>Le professeur] : Voilà il n'y a pas de piège là.

[>Elsa] : Je voulais juste savoir.

[>Le professeur] : Ok. Est-ce que c'est bon ? Est-ce que je peux vous faire voter maintenant ?.... (les élèves discutent toujours entre eux, le professeur attend) ...J'ai oublié un truc ici, quel que soit epsilon avec epsilon qui appartient à K évidemment....Bien allez, c'est parti. Si certains d'entre vous n'ont pas compris la question, Autre est la case parfaite pour vous. Qui, dans la classe, pense que c'est vrai ? Personne ! Qui pense que c'est faux ? vingt-cinq? Qui est dans Autre ? quatre. On va écouter les Autre en premier. Fabio tu es dans Autre, c'est ça?

[>Fabio] : Ouais!

[>Le professeur] : Tu dis pourquoi.

[>Fabio] : Je n'ai pas compris la définition.

[>Le professeur] : Alors qu'est-ce qui t'embête dans la définition? Qu'est-ce que tu ne comprends pas particulièrement ?

[>Fabio] : Ben je ne vois pas...ce que vous voulez dire par proximité maximale.

[>Le professeur] : D'accord. Proximité maximale qu'est-ce que ça veut dire ? Ok. Qui est dans Autre pour cette raison-là ? Deux. Vous êtes deux pour cette raison-là. Margot aussi ? Il y en encore deux dans Autre ? Oui ?

[>Evann] : Moi je n'ai pas compris ce que c'était "n'importe quel nombre strictement positif".

[>Le professeur] : D'accord : qu'est-ce que veut dire "n'importe quel"?

[>Evann] : Non mais le K.

[>Le professeur] : Ah pardon, c'est le K que tu ne comprends pas ?

[>Evann] : Oui.

[>Le professeur] : Donc K, qu'est-ce que c'est ? Ok. Et il y en a combien qui sont dans Autre pour cette raison là ? Deux ?

[>Loïc] : Non moi c'est pour epsilon.

[>Le professeur] : Epsilon, je n'ai pas compris les égalités, là.

[>Le professeur] : D'accord, epsilon et la distance de a à b inférieure ou égale à epsilon, qu'est-ce que ça veut dire ? C'est ça ? Ok ! Un, ceux qui sont dans Faux, ils vont expliquer pourquoi ils pensent que c'est faux, et deux, ils vont aussi répondre à ces questions-là, pour convaincre ceux qui sont dans Autre qu'ils ont raison de penser Faux. On a Marine, toi tu es dans Faux. Vas-y !

[>Marine] : C'est faux parce que entre deux et six il y a quatre nombres. Il y a plein de nombres.

[>Le professeur] : La distance de quatre à six, c'est ça hein ?

[>Maxime] : De deux à six.

[>Le professeur] : De deux à à six, c'est ...

[>Marine] : De deux à six, il y a plein de nombres.

[>Le professeur] : Ah, excuse-moi alors, entre deux et six il y a ...quand tu parleras plus fort je pourrais t'entendre parce que là je n'entends rien.

[>Marine] : Ben enfin du coup on ne peut pas dire qu'ils sont de proximité maximale s'il y a plusieurs nombres entre eux...

[>Le professeur] : Ils ne sont pas de distance maximale parce qu'il y a des nombres entre eux ? (erreur distance-proximité à l'oral mais le professeur écrit proximité maximale au tableau) .....Ok. Alors je vais poser la question : "Qui est dans Faux" pour exactement la raison que vient de donner Marine. Je vous compte. Neuf ! Ok. Donc il y en a qui sont dans Faux pour d'autres raisons. Alors on a Evann et puis après Elsa.

[>Victor] : C'est Victor !

[>Le professeur] : Victor. Evann est là-bas, excuse-moi.

[>Victor] : Il y a des contre-exemples.

[>Le professeur] : Il y a des contre-exemples, tu dis. Alors vas-y...

[>Victor] : trois, quatre et cinq....

[>Le professeur] : Alors trois, quatre et cinq, c'est quoi...

[>Victor] : Trois, quatre et cinq, ce sont des nombres qui peuvent se mettre au milieu.

[>Le professeur] : Trois, quatre et cinq sont des nombres qui peuvent se mettre entre trois et quoi ?

[>Victor] : Entre deux et...

[>Le professeur] : Entre deux et … ?

[>Victor] : Six

[>Le professeur] : Entre deux et six, d'accord. Donc ça c'est une autre raison que celle de Marine, tu dis que ça c'est des contre-exemples. Contre-exemple (il écrit). Ok. Qui est dans Faux pour cette raison-là ? Quatre, Ok ! Vous voyez qu'on n'a toujours pas toutes les raisons du Faux encore. Il y en a d'autres qui sont dans Faux pour d'autres raisons encore. Elsa, maintenant.

[>Elsa] : Alors moi ce que j'ai compris, c'est que la distance entre a et b ici elle est quatre.

[>Le professeur] : La distance entre a et b ici elle est quatre.

[>Elsa] : Elle est plus petite que n'importe quel nombre entre deux et six. Là elle est plus petite que six mais pas plus petite que deux.

[>Le professeur] : Elle doit être plus petite que n'importe quel nombre entre deux et six. T'as dit ?

[>Elsa] : Oui, attendez...Dans ce cas-là elle est plus petite que six mais elle n'est pas plus petite que deux.

[>Le professeur] : Donc là la distance entre a et b elle est inférieure à six mais pas ...

[>Elsa] : Mais supérieure à deux.

[>Le professeur] : Supérieure à deux, strictement. Ok, j'en ai qui veulent prendre la parole, maintenant. Juliette !

[>Juliette] : Ici le nombre strictement positif le plus petit c'est zéro.

[>Le professeur] : Alors toi tu as voté Faux ?

[>Juliette] : Oui.

[>Le professeur] : Tu dis ici le nombre le plus petit strictement positif, strictement positif c'est zéro...

[>Juliette] : Donc il n'y a pas … c'est pas possible qu'on trouve deux nombres de proximité maximale qui sont différents.

[>Le professeur] : Donc ce n'est pas possible de trouver deux nombres de proximité.... Alors maintenant je ne vais pas écrire proximité maximale chaque fois, je vais marquer PM à la place...de PM qui sont distincts. Ok. Donc ce que vient de dire Juliette, c'est que puisque le plus petit nombre strictement positif, ce n'est pas possible de trouver deux nombres de proximité maximale qui sont différents. Baptiste.

[>Baptiste] : Si c'est strictement positif ça peut pas être zéro.

[>Le professeur] : Pardon.

[>Baptiste] : Quand on dit strictement positif...

[>Le professeur] : Strictement positif tu dis...

[>Baptiste] : Quand on dit zéro que zéro c'est un nombre strictement positif je trouve que ce n'est pas mathématique puisque quand on dit strictement positif pourquoi on dit strictement alors ?

[>Le professeur] : Alors tu dis : zéro n'est pas strictement positif. Tu te poses la question ou tu en es sûr ?

[>Baptiste] : Là ça me parait logique mais en même temps je me pose la question parce que si quelqu'un pose la question c'est que dans sa tête c'est peut-être correct aussi.

[>Le professeur] : Oui ?

[>Louis] : Alors moi je veux bien compléter la définition de PM que les autres parce que je n'ai pas tout compris leur définition. Moi...

[>Le professeur] : Attends une seconde je ne peux pas te laisser continuer parce que .... Vous comprenez bien que là c'est Louis qui parle, mais la prochaine fois c'est vous, et si je vous laisse parler maintenant alors que je sais très bien que vous parlez de mathématiques, ça empêche d'entendre louis, et la prochaine fois ça vous empêchera vous d'être entendu. Ok ? Donc disciplinez-vous ! Vous avez le droit de dire tout ce que vous voulez mais en public maintenant. C'est la partie publique, Ok ? Louis vas-y !

[>Louis] : Moi je n'ai pas dû comprendre pareil que les autres parce que je comprends pas trop leur raisonnement dans leur définition et moi je suis dans Faux pour une autre raison.

[>Le professeur] : Dans Faux pour encore une autre raison, vas-y !

[>Louis] : Je pars un peu comme Elsa, je pense que la distance entre deux et six, c'est quatre. Je pense que d'après la définition, cette distance, donc quatre, doit être plus petite que n'importe quel nombre de l'ensemble N.

[>Élève] : Non, K !

[>Louis] : Oui K mais dans ce cas c'est N.

[>Le professeur] : Doit être plus petit que n'importe quel entier....

[>Elsa] : C'est ce que j'ai dit !

[>Le professeur] : Oui ?

[>Louis] : Donc c'est un contre-exemple, parce que quatre c'est plus grand que deux...

[>Elsa] : Et plus petit que six !

[>Le professeur] : Et toi tu dis la distance entre deux et six, elle vaut quatre et elle est plus grande que deux. Donc ça, ça constitue un contre-exemple. ...Plus grand que ... ?

[>Louis] : Que un.

[>Le professeur] : Oui plus grand qu'un aussi. Ok ! Donc ça c'est ta manière de comprendre Louis ?

[>Louis] : Oui, par exemple deux c'est un nombre strictement positif de K, quatre c'est plus grand que deux donc c'est un contre-exemple.

[>Le professeur] : D'accord. Donc quatre est plus grand que deux ou plus grand qu'un, donc c'est un contre-exemple, et donc ça explique pourquoi dans cette manière de penser pour toi c'est faux. Vous, vous êtes aussi dans cette manière de voir là? J'ai oublié de compter. Qui vote Faux pour cette raison-là ? Six. Donc tu n'es pas le seul à penser ça. Oui, Caroline ?

[>Caroline] : Peut-être je n'ai pas compris mais pour moi proximité maximale ça doit être entre un et zéro.

[>Le professeur] : La proximité maximale doit être entre un et zéro. Alors tu es dans quoi toi ?

[>Caroline] : Dans Faux.

[>Le professeur] : Proximité maximale, proximité entre un et zéro.

[>Orlane] : Il doit faire partie de l'ensemble K donc ce n'est pas possible qu'il soit entre un et zéro.

[>Le professeur] : Margot ?

[>Margot] : Je voudrais passer de Autre à Faux pour ce qu'a dit Louis.

[>Le professeur] : Pour la dernière raison qui est écrite ici ?

[>Hadrien] : Moi aussi.

[>Le professeur] : Toi tu étais dans ?

[>Hadrien] : Dans Faux mais pour une autre raison.

[>Le professeur] : Vous passez ...Alors il y a un Autre qui passe à Faux pour cette raison et il y a un Faux qui ...D'accord. Victor ?

[>Victor] : La même chose qu'a dit Hadrien, j'étais dans Faux pour une Autre raison mais je pense que celle-là c'est la bonne.

[>Le professeur] : Ah d'accord, tu étais là-dedans aussi ? (il montre une autre raison) .

[>Victor] : J'étais dans celle-là et je passe dans celle de Louis.

[>Le professeur] : D'accord. Tu peux expliquer c'est plus proche parce que tout à l'heure tu es passé ...c'est même toi qui a donné cet argument-là. Tu disais que trois quatre et cinq sont des nombres qui peuvent se mettre entre deux et six.

[>Victor] : Je n’avais pas compris la définition et maintenant je suis dans Faux et j'ai compris...

[>Le professeur] : Tu as compris quoi ?

[>Victor] : Ben la notion de distance entre les deux, en fait.

[>Le professeur] : D'accord, ici on n'a que des Faux. Il n'y a personne qui devenu Vrai dans la classe, est-ce qu'il y a des Faux qui sont passés dans Autre, des Autres qui sont passés dans Faux ? A part Hadrien et Margot aussi ? Et les deux Autres c'était Fabio et Loïc. Ils ne vous ont pas convaincus ?

[>Loïc] : On ne sait toujours pas ce que c'est que epsilon !

[>Le professeur] : Toujours tu ne sais pas ce que c'est que epsilon, et toujours tu sais pas...et bien oui ils n'ont pas répondu à ta question. Oui, Maxime ?

[>Maxime] : Ben déjà c'est une lettre grecque, on l'a vu en physique, et en maths ça sert pour dire un nombre qui est infiniment petit.

[>Loïc] : Qui quoi ?

[>Maxime] : Qui est infiniment petit. C'est quelque chose qui est très petit. Quand on dit que quelque chose est epsilonien, c'est quelque chose qui est très petit, tellement petit qu'on ne le voit presque pas. Voilà.

[>Le professeur] : Louis tu veux rajouter quelque chose ?

[>Louis] : Je veux rajouter quelque chose à ce que dit Maxime, pour moi dans la définition ça n'a rien à voir avec epsilon petit, c'est juste une variable qui a été choisie pour représenter un nombre qui appartient à K. C'est un nombre de K plus grand que zéro...Et puis tant que j'ai la parole, (Rires dans la classe) ...

[>Le professeur] : Oui, Vas-y, vas-y...

[>Louis] : Il y avait une question sur K je crois que c'était Evann.

[>Evann] : Ouais

[>Louis] : Tu ne sais pas ce que c'est que l'ensemble K ?

[>Evann] : Non.

[>Louis] : Ben en fait c'est … K c'est un ensemble de nombre, c'est ...C'est par exemple comme N, par exemple, Grand N c'est comme un sac, dedans tu mets tous les entiers naturels. Ben K c'est un sac dans lequel tu mets tous les nombres d'un même type ou bien d'un même...tu choisis un ensemble K; et il n'y a que ces nombres là-dedans. C'est bon ou pas ?

[>Evann] : Ouais.

[>Le professeur] : Ok. On va s'arrêter sur cette question C1. Donc je reprends. Vous avez posé les bonnes questions, tout de suite. Qu'est-ce que ça veut dire proximité maximale ? Qu'est-ce que c'est K ? Qu'est-ce que c'est epsilon ? Je vais d'abord revenir sur K. K qu'est-ce que c'est ? L'ensemble K j'aurais peut-être dû rajouter ensemble K de nombres, je n'ai pas écrit "de nombres", donc la question de Evann se pose vraiment. Implicitement on travaille sur des ensembles de nombres. Et parfois on travaille sur autre chose, ici ce sont des ensembles de nombres. Ici deux nombres d'un ensemble de nombres. Alors qu'est-ce que c'est qu'un ensemble de nombres ? C'est par exemple, on en connaît...qu'est-ce que tu connais comme ensemble de nombre Evann ?

[>Evann] : Les nombres pairs.

[>Le professeur] : Voilà, les nombres pairs. Qu'est-ce que tu pourrais imaginer d'autre comme ensemble de nombres ?

[>Evann] : Les impairs.

[>Le professeur] : Les impairs. Tu en connais d'autres ?

[>Evann] : Les positifs.

[>Le professeur] : Les nombres positifs, les nombres négatifs....

[>Evann] : Les rationnels.

[>Le professeur] : Les rationnels, les irrationnels, voilà. Il y a plein d'ensembles de nombres. Et K peut être n'importe lequel de ces ensembles. A priori on ne sait pas. D'accord. Mais quand j'écris deux et six sont des nombres de proximité maximale dans N, ça veut dire que K c'est les entiers. On ne s'occupe que des entiers, ici. Yes ? Le epsilon quel est son rôle ici ? Son rôle c'est d'être une variable ici. On dit quel que soit epsilon positif, vous avez le droit...ah oui j'ai écrit quel que soit comme ça (A inversé) . Pourquoi personne ne m'a posé la question ? Qu'est-ce que c'est ce A à l'envers ?

[>Élève] : C'est quel que soit.

[>Le professeur] : Oui ça veut dire pour tout, ça veut dire quel que soit. Et pourquoi A à l'envers ? Est-ce qu'il y a quelqu'un qui sait ? Ça vient de l'anglais.

[>Élève] : C'est All.

[>Le professeur] : C'est All, oui. C'est exactement le A de All. Ok. Pour tout epsilon, c'est à-dire All epsilon en anglais, c'est-à-dire n'importe quel nombre de K sera plus grand que la distance de a à b. Alors il y en a qui ont dit : "ben ça c'est faux." Pourquoi ? Proximité maximale, qu'est-ce que ça veut dire proximité maximale ? Certains se sont dit proximité maximale, ça veut dire qu'il n'y a rien entre les deux. Or la proximité maximale, elle est définie ici. Sont de proximité maximale si la distance entre a et b est plus petite que n'importe quel nombre strictement positif de K ; Donc c'est ça la définition de proximité maximale de K. Il y a une définition ici. Alors on va regarder, la distance de a à b vaut combien

? Quatre, d'accord. Est-ce que dans N il y a des nombres plus petits que quatre ? C'est ça la question. Eh bien oui il y en a, il y a deux, il y a un aussi. Autrement dit, on ne peut pas dire que la distance entre deux et six, elle est plus petite que tous les nombres de N. Et du coup comme elle n'est pas plus petite que tous les nombres de N, on peut en conclure que deux et six ne sont pas de proximité maximale. Est-ce que ça marche ? C'est bon ? Ok. Donc je vais vous poser la question : qui dans la classe peut me trouver deux nombres de proximité maximale dans N ? Est-ce que vous avez des propositions ? Valentin ?

[>Valentin] : Deux et trois.

[>Le professeur] : Deux et trois. Donc je vais au tableau, à la place de deux et six, je vais écrire deux et trois (2 et 3 sont de proximité maximale dans N). Et je vais vous demander de vous positionner par rapport à deux et trois. La même question mais plus avec deux et six mais avec deux et trois ?

[>Des élèves] : Dans N ?

[>Le professeur] : Oui oui dans N bien sûr. Deux et trois sont deux nombres de proximité maximale dans N. C'est ça la question.

[>Le professeur] : Tout à l'heure j'ai oublié de dire un truc : vous n'avez pas réagi trop fort mais strictement positif ça veut dire différent de zéro. On est d'accord ?

[>Élève] : Oui mais on l'a dit.

[>Le professeur] : Oui Baptiste il l'a dit mais c'était un peu évasif, il se posait des questions au final. Clairement entre nous on peut dire que zéro ne convient pas. Strictement positif, hein ?...C'est bon? Qui pense que C2 est vraie, deux et trois sont deux nombres de proximité maximale. Vous êtes nombreux, baissez vos mains. Qui se met dans Faux ? Trois. Qui se met dans Autre ? Un. Et donc vingt-cinq dans Vrai. On va écouter Autre en premier.

[>Maxime] : Non, non, c'est juste qu'il me faut dix secondes de plus pour réfléchir un peu.

[>Le professeur] : Ça veut dire je n'ai pas eu le temps. (il l'écrit au tableau: pas le temps.) Ensuite Faux, Elsa ?

[>Elsa] : C'est pareil, la distance entre deux et trois, c'est un et un il est pas dans l'ensemble K.

[>Le professeur] : Et un n'appartient pas à K.

[>Elsa] : Un il est plus petit que deux et trois mais il n'appartient pas à K.

[>Le professeur] : Un est plus petit que deux et plus petit que trois mais un n'appartient pas à K. Alors...Quentin ?

[>Quentin] : Moi je voudrais répondre à Elsa, là N...K en l'occurrence c'est N et un c'est un entier naturel.

[>Le professeur] : Toi tu as voté quoi ?

[>Quentin] : Vrai.

[>Le professeur] : Vrai. Et tu dis K ici c'est N et un ça appartient à N. Oui ? Loïc ?

[>Loïc] : Moi c'est pour une autre raison.

[>Le professeur] : Vas-y!

[>Loïc] : Ben, la distance entre deux et trois c'est un, c'est comme Elsa pour le début mais un ce n’est pas plus petit que...enfin c'est plus grand...c'est égal à ...

[>Juliette] : La distance....

[>Loïc] : Ouais et ce n’est pas strictement....

[>Juliette] : Ce n’est pas strictement inférieur ...

[>Élève] : Ce n’est pas tout le temps au-dessus de ...

[>Le professeur] : Juliette tu le laisses parler !

[>Juliette] : En fait on a la même idée, on en a parlé.

[>Le professeur] : Ah, alors vas-y finis.

[>Loïc] : Ce n’est pas strictement inférieur aux nombres de l'ensemble N. Parce qu'il y a un dans l'ensemble N.

[>Le professeur] : Ah alors un qui n'est pas strictement supérieur à tous les nombres de N. C'est ça ?

[>Loïc] : J'avais dit strictement inférieur.

[>Le professeur] : Ah strictement inférieur, excuse-moi.

[>Loïc] : Parce que l'ensemble N, il y aussi un et un est égal à un. Donc...

[>Le professeur] : Ok. Maxime.

[>Maxime] : Alors j'étais dans Autre et maintenant je passe dans Vrai. Parce que j'ai eu le le temps de réfléchir un petit peu.

[>Le professeur] : Alors tu nous expliques pourquoi.

[>Maxime] : Alors du coup je contredis l'exemple de Loïc. Parce que il y a marqué "inférieur ou égal" à epsilon. Du coup si ben si c'est égal à un c'est de proximité maximale.

[>Juliette] : ben dans la définition c'est marqué strictement et après...

[>Le professeur] : La distance...

[>Maxime] : C'est marqué d (a ;b) inférieur ou égal à epsilon (il dit "d a b")

[>Juliette] : Oui mais c'est marqué strictement dans la définition.

[>Le professeur] : J'ai écrit strictement positif.

[>Juliette] : Ah ouais...

[>Loïc] : Oui mais il y a zéro aussi !

[>Maxime] : Mais il n'y a pas marqué inférieur. Zéro n'est pas compris puisqu'il n'est pas positif.

[>Loïc] : Oui mais pourquoi on dit qu'il y avait zéro là ?

[>Maxime] : Évidemment parce qu'elle s'est trompée, on a montré après que c'était faux.

[>Juliette] : Ah ! (Juliette semble réaliser). Ah elle a montré que c'est faux.

[>Loïc] : Je n'avais pas entendu.

[>Juliette] : Ah ben du coup je change.

[>Maxime] : Ben du coup ça fait que c'est vrai.

[>Le professeur] : Juliette tu es dans quoi ?

[>Juliette] : J'étais dans Faux et je viens de comprendre que ...

[>Le professeur] : Tu passes dans ?

[>Juliette] : Dans Vrai.

[>Loïc] : Pareil !

[>Le professeur] : Deux ? Ils sont tous passés dans Vrai, non ?

[>Juliette] : Il reste Elsa.

[>Le professeur] : Ah oui il reste Elsa. Vous allez nous expliquer pourquoi d'un seul coup vous passez dans Vrai.

[>Loïc] : Ben parce qu'on vient de nous dire qu'il n'y avait pas zéro dans l'ensemble N.

[>Juliette] : Non c'est pas ça !

[>Loïc] : Pour moi c'est ça.

[>Juliette] : Pour moi du coup comme c'est plus strictement plus petit ou égal, ben maintenant le un il suffit.

[>Le professeur] : Ah oui, c'est ce qui est écrit là juste au-dessus. La distance de a à b est strictement inférieure ou égale à un.

[>Loïc] : Oui voilà.

[>Juliette] : Je pensais que c'était strictement.

[>Le professeur] : D'accord. Elsa tu voulais rajouter autre chose ?

[>Elsa] : Non je ne sais toujours pas si K c'est N ou pas.

[>Beaucoup d'élèves] : Ben si c'est N.

[>Elsa] : Non, Quentin a dit mais ce n’est pas vrai pour ça.

[>Le professeur] : Oui ce n’est pas parce que Quentin le dit que c'est forcément vrai.

[>Elsa] : Voilà.

[>Le professeur] : On est d'accord. Oui ?

[>Louis] : Moi c'est pour Elsa. Je ne comprends pourquoi tu crois pas que K est égal à N...

[>Elsa] : Ce n'est pas parce que je ne le crois pas c'est que je ne le sais pas. Ce n’est pas parce que Quentin l'a dit que c'est vrai.

[>Maxime] : Ben c'est marqué dans la conjecture.

[>Louis] : Ben en fait c'est écrit dans la conjecture. Dans la définition, c'est écrit qu'on choisit un ensemble K dans lequel on va faire la conjecture. Et dans la conjecture c'est écrit qu'on prend des nombres dans l'ensemble N ; donc voilà.

[>Elsa] : Donc K il est égal à N ici.

[>Maxime] : Dans cette conjecture. Ailleurs ça peut être autrement, mais dans celle-là.

[>Elsa] : (se tourne vers le professeur) K il est égal à N ou pas?

[>Le professeur] : Oui.

[>Elsa] : Oui, alors je passe dans Vrai.

[>Le professeur] : OK. Ici quand tu écris de proximité maximale dans N, ça veut dire que...

[>Elsa] : Pour moi K et N ce n'était pas la même chose.

[>Le professeur] : Oui mais si...

[>Elsa] : Pour moi proximité maximale c'est là et "dans N" c'était la conjecture.

[>Le professeur] : Oui, de manière générale, quand on écrit une définition générale, on donne un nom général à l'ensemble et quand après on regarde dans des cas particuliers et bien l'ensemble porte un nom particulier, ici c'est l'ensemble des nombres entiers naturels. OK ? Bien ça ne pose plus de problème. Maintenant C3: "deux et trois sont des nombres de proximité maximale dans R." troisième conjecture. Alors vous avez raison je suis allé un peu vite, je mets la troisième conjecture avant de parler de celle-ci (C2). On a réglé le problème de K. On a réglé le problème, ici il y en avait qui n'avaient pas lu correctement, "strictement positif" le strictement il allait avec positif mais pas avec ce "plus petit que" c'est pas "strictement plus petit que ». Donc voilà. Donc ça, c'est réglé. Maintenant je vous pose la question avec C3. Du coup ça voulait dire que C2 est vraie, elle est vraie. Maintenant C3. Deux et trois sont des nombres de proximité maximale dans R. R c'est les nombres réels. Tous les nombres.

[>Le professeur] : C'est bon ?

[>Le professeur] : Ok, qui pense dans la classe que la conjecture C3 est vraie ? Personne. Qui pense qu'elle est fausse ? Beaucoup. Qui se met dans Autre ? Un. Elsa, tu peux nous expliquer ton Autre.

[>Elsa] : Parce que je ne sais pas.

[>Le professeur] : Ok, tu as le droit, Elsa. Attends une seconde Clarisse, je voudrais dire que quand on ne comprend pas ...

[>Elsa] : Ce n’est pas que je ne comprends pas, c'est que je ne sais pas.

[>Le professeur] : ou on ne sait pas, le fait de se rendre compte qu'on ne sait pas, c'est le premier pas vers la compréhension et c'est un pas qu'on ne peut pas éviter. Ok. Si on l'évite alors on s'empêche de comprendre. Clarisse tu voulais prendre la parole ?

[>Clarisse] : Non, non

[>Le professeur] : Pour expliquer pourquoi tu penses que c'est faux. Vas-y !

[>Clarisse] : Dans les nombres réels il y a aussi les nombres décimaux. Les nombres à virgule.

[>Le professeur] : Tu vas parler plus fort parce que...

[>Clarisse] : Ben je ne sais pas.

[>Le professeur] : Ah tu as voté faux mais tu ne sais pas pourquoi tu as voté faux.

[>Clarisse] : Mais si je sais pourquoi j'ai voté Faux.

[>Le professeur] : Alors tu nous le dis si tu sais pourquoi.

[>Le professeur] : Il faut y aller à l'arrache-argument ! Allez, Faux, Clarisse, lâche-toi !

[>Clarisse] : Parce que dans les nombres réels il y a aussi les nombres décimaux donc on peut très bien avoir....

[>Le professeur] : Ben vous voyez qu'il y a un truc qui est extrêmement difficile, c'est quand on a le choix. On ne sait pas lequel prendre. Et là on se dit ...tu ne sais pas ?

[>Clarisse] : Ben je savais mais ...

[>Le professeur] : D'accord, excuse-moi.

[>Orlane] : Moi je suis dans Faux parce que ...là c'est dans l'ensemble des nombres réels et il y a les nombres décimaux, et ...entre deux et trois.... la distance c'est un et ....

[>Le professeur] : Louis je t'interdis de souffler.

[>Orlane] : Oui mais on a réfléchi ensemble.

[>Le professeur] : Oui mais maintenant c'est toi (Orlane) qui parle toute seule.

[>Orlane] : Entre deux et trois la distance et on pourrait avoir une distance de 0,5 et c'est plus petit que un.

[>Le professeur] : 0,5 c'est plus petit que un. Ouais c'est simple.

[>Orlane] : Vous avez inversé.

[>Le professeur] : Oui pardon tu as raison. 0,5 c'est plus petit qu'un, oui, et c'est pour cela que tu votes Faux. Oui. Qui dans la classe a voté faux pour cette raison-là ? La distance c'est un et un c'est plus grand que 0,5 ? Ok. Qui a voté encore pour une autre raison ? Personne. Oui?

[>Louis] : Je ne sais pas si elle a précisé mais c'est un contre-exemple et c'est pour cela qu'on vote Faux.

[>Le professeur] : D'accord. Contre-exemple. Elsa voilà la raison pour laquelle ils votent Faux. Tu as le droit de ne pas être convaincue par ça et je rajouterai même à ton crédit....

[>Elsa] : ????????

[>Le professeur] : Evann ?

[>Evann] : Moi je change je vais dans Autre parce que je me suis trompé.

[>Le professeur] : Ha !

[>Evann] : Je me suis trompé de case en fait.

[>Le professeur] : De case !

[>Evann] : Ouais, parce que j'ai une raison mais ce n'est pas la même case en fait.

[>Le professeur] : Ah! tu étais dans Faux et tu passes dans Autre. Tu nous expliques Evann.

[>Evann] : Moi je pense qu'il y en a pas.

[>Le professeur] : Tu dis qu'il n'y a pas ?

[>Evann] : Oui parce que je dis qu'il n'y a pas de nombre...

[>Le professeur] : Oui, oui, la question c'est est-ce que C3 est vrai ou non.

[>Evann] : Et ben non, moi je dis non, alors je passe dans Faux alors.

[>Le professeur] : Oui. Tu passes de Faux à Faux alors. On va arrêter là pour cette conjecture. Alors vous avez raison de penser que cette conjecture est fausse. Vous avez vu un petit peu le trajet qu'on a fait ? La première conjecture, vous ne saviez pas trop de quoi on parlait. Et maintenant de plus en plus facilement on se met d'accord. Alors pourquoi, juste cet argument suffit ? Parce que la définition de proximité maximale demande que la distance soit plus petite que n'importe quel élément de l'ensemble que l'on considère. Or on considère l'ensemble des réels. 0,5 fait partie de l'ensemble des réels et 0,5 n'est pas plus grand que la distance entre deux et trois. Autrement dit deux et trois ne vont pas pouvoir être qualifiés de nombres de proximité maximale. C'est bien un contre-exemple. Un contre-exemple au quel que soit qui est là-bas. Qu'est-ce que je voulais rajouter ? ...ah oui. Vous verrez que parfois il y a une difficulté des élèves à trouver un argument. Pourquoi ? Je vous explique pourquoi, parfois, vous avez du mal à trouver un argument parce que quand on veut démontrer que c'est faux, il faut trouver un contre-exemple. Trouver un contre-exemple c'est trouver un cas très particulier. Ici on choisit 0,5 on aurait pu prendre 0,6 ça aurait fait la même chose. C'est-à-dire qu'il faut choisir. En prendre un. Avoir

l'initiative. J'en prends un de mon propre chef. Personne m'a dit que c'était celui-là, c'est moi qui décide. Et ça vous n'êtes pas habitués. Vous n'êtes pas habitués à décider vous d'un truc pour lequel vous avez le choix. Je parle des maths, hein. Si c'est de la glace au supermarché, vous êtes habitués, ça il n'y a pas de problème. Mais pour ce qui concerne les maths, non, d'habitude vous faites ce qu'on vous dit de faire, alors là vous devez prendre une initiative. Je choisis un nombre. On a vu tout à l'heure combien c'était difficile à Clarisse. Mais ça le sera plus d'ici pas longtemps...Elle avait juste à choisir un nombre. Et en fait devant l'éventail du choix...En fait le problème c'est quoi ? En fait il n'y a pas que ça comme problème. Ça vient de la classe de quatrième. On vous a dit : "Vous ne pouvez pas démontrer avec des exemples". Alors maintenant vous vous interdisez de tout exemple, y compris si ces exemples s'appellent des contre-exemples. Parce que vous avez l'impression que ça ne vaut pas : il faut un argument général. Or 0,5 ce n'est pas un argument général. Mais pour démontrer que c'est faux on n'a pas besoin d'un argument général. Un argument très particulier suffit. Et 0,5 ici permet d'annuler la conjecture. Je vous laisse trois minutes de pause.

Deuxième partie de la situation après la récréation.

[>Le professeur] : Ok, la question suivante c'est … On vient de voir que dans N deux et six ne sont pas de proximité maximale. Deux et trois le sont par contre. On a vu que dans R deux et trois n'étaient pas de proximité maximale dans R. Ce que je vais vous demander maintenant c'est de trouver deux nombres de proximité maximale dans R. Dès que quelqu'un a une proposition je la prends. Je vous laisse deux trois minutes pour réfléchir à ça et ensuite vous donnerez vos propositions. Sinon, on va jouer à celui qui réfléchit le plus rapidement et ...

[>Juliette] : Et après ceux qui ne réfléchissent pas rapidement...

[>Le professeur] : Voilà et ça ce n’est pas marrant pour eux. Ok. [180.0] ….....Qui a des propositions dans la classe ? Evann ?

[>Evann] : Il n'y en a pas.

[>Le professeur] : Première proposition : il n'y en a pas. Qui a une autre proposition ? Oui ?

[>Louis] : Moi je voudrais compléter celle d'Evann, en disant que j'ai un argument parce que...

[>Le professeur] : Non, non, je ne veux pas d'argument. Je veux savoir s’il y a des propositions. Oui ?

[>Juliette] : Je ne sais pas s’il y en a.

[>Le professeur] : Oui tu ne sais pas, ce serait Autre ça. Est-ce qu'il y a d'autres propositions de nombres ?... Bon ben il n'y a que ça dans la classe. Donc je vais vous faire voter puisque vous devez savoir où vous en êtes par rapport à ça. Soit vous pensez qu'il n'y en a pas, c'est une des propositions. Soit vous êtes dans Autre parce qu'il n'y a pas d'autre proposition. Qui, dans la classe, "il n'y en a pas". Beaucoup on dirait. Ok. Qui est dans Autre ? Deux. Donc vingt-sept dans "il n'y en a pas". On va écouter les Autre en premier. Oui, Aya !

[>Aya] : Je ne sais pas si en fait il y en a ou pas. Si il y en a c'est lequel ?

[>Le professeur] : Tu dis : "je ne sais pas s’il y en a et s'il y en a c'est lequel.".

[>Élève] : Lesquels !

[>Le professeur] : Lesquels. Il y avait Caroline aussi.

[>Caroline] : Moi je pense qu'il y en a parce que... on n'a pas précisé dans la définition que l'ensemble R que ????

[>Le professeur] : Vous l'avez entendu ?

[>Les élèves] : Non !

[>Le professeur] : Des gens qui sont à quelques mètres de toi hein ! Caroline, existe !

[>Caroline] : Dans la définition ce n'est pas précisé que ça marchait pas dans R. (parle encore de manière inaudible)

[>Les élève] : De quoi ?

[>Le professeur] : Alors s'il vous plaît, on va faire un petit espace sonore pour Caroline, voilà. C'est tout douillet, tu y vas, et là tu hausses la voix, comme ça...

[>Le professeur] : La définition est générale (elle a haussé la voix) et elle s'applique forcément dans R. (La fin de la phrase est à nouveau à voix basse)

[>Les élèves] : Dans quoi ?

[>Le professeur] : Le Autre tu dis : "LA définition est générale, et..."

[>Caroline] : Et donc elle n'exclut pas R.

[>Le professeur] : Donc elle n'exclut pas R. Oui ce que tu veux dire c'est que là on a une définition des nombres de proximité maximale, ça exclut pas forcément R, or ici si on est dans la position "Il y en a pas" et clairement on est en train de dire que dans R, il n'y en pas de ces nombres-là. Or ce n'est pas écrit dans la définition que dans R il n'y en a pas, hein ? Ok. Evann tu as une explication pour ta proposition "il n'y en a pas"?

[>Evann] : En fait je me base comme le 2,9 à l'infini

[>Le professeur] : Oui et alors ?

[>Evann] : Et on avait dit qu'il n'y avait pas entre 2,999.... et 3.

[>Le professeur] : Entre ?

[>Evann] : 2,999... et 3

[>Le professeur] : Ah oui, il n'y a pas de nombre entre 2,999... et 3. Et du coup... quoi ?

[>Evann] : Ben là c'est pareil ! Il n'y a pas de nombres... deux nombres les plus proches il y aura toujours un nombre entre les deux.

[>Le professeur] : Deux nombres proches, il y aura toujours un nombre entre les deux, oui d'accord. Deux nombres proches...

[>Evann] : Si on fait la moyenne, il y aura toujours un nombre entre les deux.

[>Le professeur] : Il aura toujours un nombre entre les deux.

[>Evann] : Monsieur ?

[>Le professeur] : Oui.

[>Evann] : Deux nombres de proximité maximale, ils ne sont pas égaux ?

[>Des élèves] : C'est logique !

[>Le professeur] : Ben moi je n'ai rien dit. La définition elle est sous tes yeux.

[>Evann] : Ils ne disent pas que c'est pas égal. Ils ne disent pas que les deux chiffres sont différents. Ben, non. Ce n’est pas marqué.

[>Maxime] : Ben a doit être égal à b.

[>Evann] : Ouais voilà.

[>Le professeur] : Et alors Evann ?

[>Evann] : Et si a peut-être égal à b ça veut dire du coup que la proximité maximale elle existe mais sinon il n'y en a pas.

[>Le professeur] : Ah toi tu es en train de dire qu'il y a des nombres de proximité maximale.

[>Evann] : Si a et b sont égaux.

[>Le professeur] : Donc tu es dans … Où ?

[>Evann] : Je suis dans les deux en fait. Je suis dans le 1 (il n'y en pas) si a et b sont différents et je suis dans Autre s'ils sont égaux.

[>Le professeur] : Si a et b sont différents tu es dans 1, et si a égal b tu es dans ?

[>Evann] : dans 2

[>Le professeur] : Il n'y a pas de 2, tu es dans Autre.

[>Élève] : Moi c'est pareil.

[>Le professeur] : Donc il y en a deux qui changent d'avis suivant...

[>Élève] : On ne peut pas créer...

[>Le professeur] : Je veux bien moi créer un deuxième groupe. Alors position 1, il n'y en a pas, position 2, ça dépend si a égal b, et Autre. Si a égal b clairement il y en a , et si a n'est pas égal à b, clairement il n'y en a pas. C'est ça ? Alors je vais vous faire voter pour savoir où on se place les uns par rapport aux autres, par rapport à ces trois cases. Qui … vous avez eu le temps de vous positionner ?

[>Les élèves] : Non.

[>Le professeur] : Je vais un peu trop vite excusez-moi.

[>Le professeur] : Bon je vais vous faire voter pour voir où on en est.

[>Maxime] : Attendez, dix secondes ! … C'est bon !

[>Le professeur] : Qui est dans il n'y en a pas ? Sept. Il y en a moins que tout à l'heure, hein ? Qui est dans ça dépend ? dix-neuf. Qui est dans Autre ? Trois, ok. La nouvelle position c'est ça dépend, alors vous expliquez le "ça dépend". Dix-neuf qui sont dans ça dépend, qui est-ce qui veut expliquer ? Thomas tu es dans quoi ?

[>Thomas] : Ben je suis dans ça dépend mais je crois que je vais passer dans Autre.

[>Le professeur] : Ah, tu vas nous expliquer ce changement entre le vote et ma question.

[>Thomas] : Parce que comme on avait vu la dernière fois, il y avait toujours un nombre entre deux nombres.

[>Le professeur] : Oui ?

[>Thomas] : Et du coup ben je n'arrive pas trop à répondre à la question en fait.

[>Baptiste] : C'est comme les nombres consécutifs.

[>Le professeur] : Quel rapport ? Quel rapport Baptiste avec les nombres consécutifs ?

[>Baptiste] : Ben les nombres consécutifs, ils sont à côté. On n'arrivait pas à en trouver dans R parce qu'il y a toujours un nombre qui se met entre les deux.

[>Le professeur] : Oui.

[>Baptiste] : Là...

[>Le professeur] : Là tu as voté quoi, toi ?

[>Baptiste] : Ben, non mais en vrai je n'ai pas voté parce que je ne savais pas.

[>Le professeur] : Alors s'il te plaît dans ce cas-là mets-toi dans Autre.

[>Baptiste] : D'accord.

[>Le professeur] : Parce que c'est exactement là ta place pour l'instant. Après tu as le droit de changer d'avis, hein ?

[>Baptiste] : Ouais, ouais. Du coup proximité maximale ça entend qu'il doit y avoir un nombre qui ne peut pas s'intercaler entre les deux. Et moi cette définition elle sonne comme deux nombres consécutifs.

[>Le professeur] : Ah, pour toi ça c'est comme la définition de deux nombres consécutifs.

[>Baptiste] : Ce n'est pas exactement comme mais ça y ressemble.

[>Un élève] : Je veux passer dans il n'y en a pas.

[>Le professeur] : D'accord. Quentin qui a voté Autre va ajouter un peu de confusion ?

[>Quentin] : J'ai voté Autre pour dire, il y en a. Parce que dans la définition de proximité maximale, on ne dit pas que a et b sont distincts. Donc si on a trois et trois c'est deux nombres qui sont de proximité maximale.

[>Le professeur] : Alors toi tu es dans Autre et tu dis : "il y en a!". trois et trois par exemple. a égal trois et b égal trois. Oui? Maxime?

[>Maxime] : Ce que vient de dire Quentin est Faux. Enfin ça peut être vu comme ça, mais sachant qu'on a pas le droit, enfin, il faut que la différence soit forcément positive, enfin il ne faut pas que ce soit égal à zéro...

[>Le professeur] : Tu as voté quoi, toi ?

[>Maxime] : Il n'y en a pas.

[>Le professeur] : Il n'y en a pas et tu dis la différence a-b doit être différente de zéro. C'est ça ? Or ici, trois moins trois ça fait zéro. Est-ce que c'est ça ton problème ? Donc ça ne marche pas cet argument (a=b=3). Donc ça, ça ne marche pas. Maxime, c'est bien ça ? Oui, Quentin ?

[>Quentin] : Je contredis Maxime, dans la définition, il est dit que ... la distance ... Ce n'est pas écrit que la distance doit être différente de zéro, c'est écrit que le plus petit … Ah... je ne sais pas comment dire... ...

[>Le professeur] : Bon tu ne sais pas le dire ?

[>Quentin] : Ben je ne vois pas comment le dire.

[>Le professeur] : Ok, on avait Evann qui voulait prendre la parole. Oui ?

[>Evann] : Moi je contredis tout le monde. (Rire général) et je demande une définition plus approfondie pour... Que vous définissiez plus en profondeur la définition. (Rires)

[>Le professeur] : Que je définisse la définition. C'est quoi qui te gêne dans la définition ?

[>Evann] : C'est qu'il manque si a et b sont différents ou égaux.

[>Le professeur] : D'accord, alors je vais répondre tout de suite à cette question. Chut ! Je vais rajouter un élément. Si vous me posez la question, c'est que vous n'avez pas la réponse. Et ça pour moi ça veut dire que vous ignorez une règle assez importante en mathématiques. Ce n'est pas que toi Evann, hein. La règle qui est là, c'est que quand quelque chose n'est pas dit, ça veut dire que c'est libre. Autrement dit ici, je ne dis pas que a et b doivent être différents, je ne le dis pas, ce n'est pas écrit dans la définition. A partir de ce moment-là, ça veut dire qu'ils peuvent être égaux. Ok ? Donc j'ai répondu à ta question Evann, hein ? En fait je ne peux pas l'écrire, en fait si, je peux l'écrire mais il n'y a pas besoin de l'écrire puisque à partir du moment où on ne l'écrit pas c'est que c'est possible. Ok ? C'est ça la règle en mathématiques, implicitement. Margot ?

[>Margot] : J'étais dans la 1 (il y en a pas) et je veux passer dans la 2 (ça dépend).

[>Le professeur] : Ça dépend.

[>Margot] : Ça dépend, oui du coup a est égal à b, donc c'est possible parce que si a égal b la distance entre a et b serait zéro et le nombre...

[>Le professeur] : Il faut que tu parles plus fort parce que là-bas on ne t'entend pas.

[>Margot] : La distance, elle est censée être plus petite que n'importe quel nombre strictement positif de K qui ici est R, le nombre le plus petit strictement positif de R est plus grand que zéro. Donc du coup la distance entre a et b sera plus petite que ce nombre-là.

[>Le professeur] : Est-ce que tu es en train de dire que tu considères que a qui vaut trois et b qui vaut trois sont deux nombres de proximité maximale ?

[>Margot] : Oui.

[>Le professeur] : C'est pour cela que tu passes de la position il y en a pas à la position quoi ?

[>Margot] : Et ben...

[>Le professeur] : En fait tu n'es même pas dans la position ça dépend. C'est encore une autre.

[>Margot] : Oui.

[>Le professeur] : Et bien je vais rajouter pour Margot la position 3 : il y en a ! Et là ça m'oblige à faire un autre vote pour compter où vous vous placez tous les uns par rapport aux autres. Je vous fais voter dans une minute. Margot m'a fait rajouter une case donc il y en a peut-être qui veulent se mettre dans cette case ou changer d'avis, je n'en sais rien.

[>Le professeur] : It's good? Qui dans la classe vote 1 "il n'y en a pas"? Dix-huit. Qui vote "ça dépend"? Personne. Qui vote "il y en a ?" Cinq. Et qui se met dans Autre ? Le Autre s'étoffe. Cinq. On a à peu près le compte c'est bien. Curieusement le "il n'y en a pas" qui s'était vidé s'est rempli. Loïc, tu es dans quoi ?

[>Le professeur] : La position "il n'y en a pas".

[>Loïc] : Moi c'est pour contredire Margot.

[>Des élèves] : Hou là là !

[>Le professeur] : Vas-y!

[>Loïc] : C'est parce qu'elle dit que trois et trois sont de proximité maximale mais si on prend trois et trois, la distance est égale à zéro et ils disent que la distance entre a et b doit être plus petite ou égal à epsilon. Sauf qu'epsilon il est strictement supérieur à zéro.

[>Le professeur] : D'accord. Tu dis la distance entre a et b elle doit être inférieure ou égale à epsilon et epsilon est strictement supérieur à zéro donc trois n'est pas de proximité maximale avec trois, c'est ça ?

[>Loïc] : C'est ça !

[>Le professeur] : Ok ! Baptiste.

[>Baptiste] : J'approuve ce que dit Loïc et en fait quand on dit ça, ça veut dire qu'on ne peut pas intercaler deux nombres… à côté d'un autre...,on peut pas intercaler un nombre... on peut toujours intercaler un nombre entre deux nombres réels. Non mais deux nombres réels distincts. Ça revient à la définition des nombres consécutifs. Je sais que je répète mais...

[>Elsa] : Baptiste, tu es dans quoi ?

[>Baptiste] : Dans il n'y en a pas.

[>Le professeur] : Baptiste, quand ça sera ton tour et que je serai en train de retranscrire, à la place de ta parole je mettrai des points d'interrogation. (cela signifie que le professeur n'entend pas Baptiste et qu'il ne pourra pas retranscrire ses intervention, d'où les points d'interrogation)

[>Baptiste] : D'accord, c'est parce qu'il y a du bruit.

[>Le professeur] : Parce que pour l'instant tu ne parles qu'à tes potes. Alors là il faut que tu convainques tout le monde. Vas-y redis-le fort. Le Baptiste du fond de la classe, il est au fond de la classe, c'est lui qui a choisi cette place, donc il parle fort pour qu'on l'entende même de devant. Voilà. [1550.9]

[>Baptiste] : Je suis d'accord avec Loïc, et quand on dit qu'un nombre est strictement positif, il ne peut pas être égal à zéro, et si la différence ne peut pas être égale à zéro et bien on peut forcément intercaler un nombre entre deux nombres distincts. Quand je dis deux nombres distincts, ça revient à la définition de deux nombres consécutifs et on ne peut pas... on avait déduit qu'il n'y a pas de nombres consécutifs dans R.

[>Elsa] : Baptiste...

[>Le professeur] : Elsa !

[>Elsa] : Baptiste il est dans la position 1 (il n'y en a pas) et je trouve que ce n'est pas logique avec ce qu'il dit en fait.

[>Des élève] : Ben si !

[>Le professeur] : Ah bon, alors explique-lui que c'est pas logique.

[>Elsa] : Ce que j'ai compris de ce que Baptiste a dit, c'est qu'en gros, qu'on pouvait... Que ça existait en fait, qu'on pouvait mettre... qu'il y avait une proximité maximale entre deux nombres....

[>Baptiste] : Non j'ai dit que...

[>Elsa] : Ben j'ai compris ça donc…

[>Baptiste] : On peut toujours intercaler un nombre entre deux autres nombres réels distincts ce qui signifie que il y a toujours, toujours, toujours un nombre entre deux nombres réels à proximité maximale donc il n'y en a pas ! Il n'y a pas de nombres à proximité maximale.

[>Le professeur] : Alors on a ...

[>Margot] : Tu peux répéter s'il te plaît ?

[>Baptiste] : NON ! (Rire général)

[>Le professeur] : Il a fait un sacré effort là, hein ! Bon j'en ai plusieurs qui veulent prendre la parole. Alors une seconde... Les élèves ! Il y en a qui ne prennent pas trop la parole dans ce débat-là. Ça serait bien que ça tourne un peu au-delà des cinq six qu'on voit... Evann, vas-y !

[>Evann] : Moi je suis d'accord avec Loïc et Baptiste mais je voudrais ajouter que si a et b seraient égaux..

[>Le professeur] : étaient

[>Evann] : étaient égaux, on les appellerait des nombres égaux et pas des nombres de proximité maximale. Donc si a serait égal à b ce seraient des nombres égaux et pas des nombres de proximité maximale.

[>Le professeur] : Ah oui si tu dis trois et trois, ce ne sont pas des nombres de proximité maximale, ce sont des nombres égaux point barre. Ils ne peuvent pas être autre chose. Oui, ok ! Alors on a Margot.

[>Margot] : Du coup pourquoi dans la propriété on fait pas a et b distincts ?

[>Le professeur] : Bon alors moi je veux bien. On va clore ce débat comme ça. On va marquer différent dans la définition. C'est Margot qui le propose. Ici, soit a et b deux nombres distincts. On joue un autre jeu-là. Vous avez vu ? J'ai rajouté distinct. Maintenant ça interdit qu'ils soient égaux. On est bien d'accord. Alors là, je suis obligé de refaire un vote. Obligé puisque ce n'est plus le même jeu qu'avant. Donc je vous laisse réfléchir : est-ce que ça change? Est-ce que ça ne change pas ?

[>Le professeur] : Donc la question initiale c'est : trouve des nombres de proximité maximale dans R. Il y en a qui disent spontanément il n'y en a pas. Il y en a d'autres qui disent ah ben s'il y en a, d'autres diraient ça dépend, et enfin d'autres qui diraient ben moi je ne sais pas, ou je ne sais pas quoi, enfin ils voteraient Autre. Donc qui dit il y en a ? Deux. [1892.2] Qui dit il n'y en a pas ? Un paquet, d'accord. Qui dit ça dépend ? Personne. Qui dit Autre ? Deux. Dernière question : qui n'a pas voté? Baptiste tu as voté cette fois-ci ?

[>Baptiste] : Oui.

[>Le professeur] : Oui tout le monde a voté.

[>Maxime] : Moi j'hésite en fait.

[>Le professeur] : Je rêve ! Vous vous décidez de la case dans laquelle vous vous mettez.

[>Maxime] : Oui mais j'hésite entre deux cases.

[>Le professeur] : Et bien quand on hésite on se met dans Autre. Alors vas-y, tu as voté quoi toi ?

[>Loïc] : J'ai voté il y en pas

[>Le professeur] : Alors vas-y !

[>Loïc] : La question c'est de trouver deux nombres de proximité maximale. Pour les deux qui disent qu'il y en a, ils ont qu'à dire lequel ils ont trouvé. Il n'y en a pas.

[>Les élève] : Hou la la!

[>Le professeur] : Alors les 1 (il y en y en a) donnez-nous deux nombres ! Hein c'est ça ? Toi tu es dans ? Dans « il y en a »? Ok. Alors tu vas parler fort.

[>Caroline] : Je te repose la question Loïc : est-ce que tu peux montrer par un contre-exemple, Loïc, qu'il n'y en a pas.

[>Le professeur] : Ah super ! Allez vas-y, montre-nous qu'il n'y en a pas. (Rires dans la classe) Allez !

[>Louis] : Je voudrais changer.

[>Le professeur] : Oui tu as le droit.

[>Louis] : J'étais dans il n'y en a pas et je voudrais me mettre dans Autre. (Grands rires)

[>Le professeur] : De il n’y en a pas tu passes dans Autre, alors tu nous expliques pourquoi.

[>Louis] : Parce qu'en fait j'aimerais bien me mettre et dans il n'y en a pas et dans ça dépend, et comme ce n'est pas possible je me mets dans Autre.

[>Le professeur] : Ok. Tu nous expliques pourquoi tu hésites entre ces deux-là?

[>Louis] : Ce n’est pas que j'hésite. C'est que je veux me mettre dans les deux.

[>Le professeur] : Oui

[>Louis] : Par exemple, je voudrais me mettre dans ça dépend parce que je pense que tout est relatif, il y a toujours plusieurs manières de penser donc voilà et après dans il n’y en a pas, déjà la question qui est posée c'est trouver deux nombres de proximité maximale. Donc pour clore le débat il suffirait de trouver deux nombres et que tout le monde soit d'accord pour dire qu'ils sont de proximité maximale. Donc ça n'a rien à voir avec ce que dit Caroline, qu'il faut trouver un contre-exemple, parce que ce n'est pas la même chose quand on a les règles dans le cours d'avant où c'est "si ...alors". Le contre-exemple ici ce serait d'en trouver un.

[>Le professeur] : Ah oui, alors si je comprends bien ce que tu dis, en fait, tu dis que ceux qui disent qu'il y en a c'est à eux de prouver qu'il y en a. Caroline, elle répond ,vous, vous dites qu'il y en a pas, c'est à vous de prouver qu'il y en a pas.

[>Louis] : On n'est pas sur la même définition de la question alors.

[>Baptiste] : La question c'est d'en trouver deux nombres, ce n’est pas de dire s'il y en a ou s'il y en a pas.

[>Le professeur] : Non, non qu'on soit clair. On ne peut pas jouer à des jeux les uns différents des autres. La question c’est : on veut savoir s'il y en a ou s’il n’y en a pas. On l'oublie "trouver deux nombres de proximité maximale" La question c'est est-ce qu'il y en a ? C'est est-ce qu'on peut les trouver ? Ou au contraire il n'y en a pas, ce n'est même pas la peine de les chercher. Donc il y en a qui pensent qu'il y en a, et d'autres qui pensent qu'il n'y en a pas. Dans les deux cas vous avez à prouver vos assertions. Ceux qui pensent qu'il y en a, moi je suis assez d'accord pour dire et bien vous pensez qu'il y en a, donnez-les-nous. Et ceux qui disent il n'y en a pas, ok vous dites il y en a pas mais donnez-nous des arguments pour nous expliquer pourquoi il y en a pas.

[>Juliette] : C'est ce que Baptiste a dit tout à l'heure.

[>Le professeur] : Ben oui, sauf que vous n'êtes pas d'accord ! Il y en a vingt-cinq dans la classe dans il n'y en a pas mais il n'y en pas vingt-neuf. Sébastien !

[>Sébastien] : Quand on va faire la distance a et b, il y aura toujours un nombre qui pourra se mettre entre cette distance et zéro.

[>Le professeur] : Alors toi tu es dans « il n'y en a pas », tu dis : "la distance a et b on peut toujours..."

[>Juliette] : Mais monsieur, ça change quoi par rapport à tout à l'heure ce qu'on vient de dire ?

[>Le professeur] : Une seconde Juliette, je finis avec l'argument de Sébastien. Vas-y Sébastien.

[>Sébastien] : On peut toujours trouver un nombre qui se met entre zéro et distance a, b.

[>Le professeur] : Entre zéro et la distance ?

[>Sébastien] : a,b

[>Le professeur] : a,b et alors?

[>Sébastien] : Il y a juste avec zéro que ce n'est pas possible avec le mot différent.

[>Le professeur] : Pourquoi zéro n'est pas possible ?

[>Sébastien] : Parce que c'est marqué deux nombres distincts.

[>Le professeur] : Ah a et b différents de zéro.

[>Maxime] : Non a moins b différent de zéro.

[>Sébastien] : C'est que ...

[>Matthieu] : Étant donné que a et b ne sont pas égaux, a- b ne peut pas être nul.

[>Le professeur] : Ah a différent de b donc la distance entre a et b est non nulle c'est ça?

[>Sébastien] : Oui c'est ça.

[>Le professeur] : Donc ?

[>Sébastien] : donc la distance entre a et b elle va toujours être différente de zéro et si on a … on aura toujours la possibilité de mettre un nombre plus petit que la distance a, b qui n'atteindra pas le zéro.

[>Le professeur] : Ah oui, tu dis

[>Sébastien] : Parce qu'on est dans les nombres réels.

[>Le professeur] : On peut toujours trouver un nombre ici qui sera plus petit que a, b. C'est ça ?

[>Juliette] : Moi je passe dans il n'y en a pas, par rapport à ce qu'a dit Sébastien.

[>Le professeur] : Tu étais dans quoi ?

[>Juliette] : J'étais dans Autre, je ne savais pas.

[>Le professeur] : Ça t'a convaincu donc tu passes de autre à « Il y en a pas ». Il y en avait deux qui étaient dans Autre. Ok. Oui ? Evann, tu es dans quoi ?

[>Evann] : Dans il n’y en a pas. Oui. Et moi je viens APPUYER la théorie de Sébastien. Vu que a et b sont deux nombres différents, si on fait la moyenne des deux ça fera un nombre entre les deux. Donc il n'y a pas...

[>Le professeur] : Pardon ?

[>Evann] : Vu que a et b sont deux nombres différents.

[>Le professeur] : a différent de b.

[>Evann] : Donc si on fait la moyenne des deux, a moins b sur deux, c'est ça, non c'est a plus b sur deux.

[>Evann] : Vu que c'est un nombre compris entre les deux. Ça veut dire qu'ils ne sont pas de proximité.

[>Le professeur] : Ah oui ça c'est compris entre... entre quoi ?

[>Juliette] : a et b

[>Le professeur] : Entre a et b, d'accord. Oui ? [2380.3]

[>Caroline] : Je dis encore qu'il y en a. Sinon il faut modifier la définition et dire que ce n’est pas possible dans R.

[>Le professeur] : Ah oui, c'est l'argument que tu avais avant. Une définition. Cette définition, a priori, elle marche dans R, pourquoi d'un seul coup on dirait qu'elle ne marche pas dans R ? Nathan ?

[>Nathan] : Elle marche dans R mais il n’y en a pas. Mais ce n’est pas parce qu'il y en a pas qu'elle marche pas dans R. Elle s'applique quand même à l'ensemble mais on ne peut pas trouver de nombres.

[>Le professeur] : Caroline, oui vas-y réponds.

[>Caroline] : Tu es en train de dire que cette définition, elle n'a pas d’utilité ?

[>Les élèves en chœur] : Dans R!

[>Le professeur] : Ok. Quentin.

[>Quentin] : Moi je suis d'accord avec ce qu'a dit Nathan. Et je veux dire que est-ce que c'est parce qu'on ne peut pas en trouver qu'il n'y en pas ? Parce que depuis tout à l'heure les arguments qu'on a dans il n’y en a pas, c'est parce qu'on ne peut pas en trouver. Est-ce que si on ne peut pas en trouver il n'y en a pas ?

[>Le professeur] : Il y a quelqu'un qui veut te répondre, Sébastien ?

[>Sébastien] : Dans les nombres consécutifs, on a fait la même chose, on a dit qu'on ne pouvait pas trouver de nombres consécutifs dans les réels donc on a dit qu'il y en avait pas.

[>Louis] : C'est tout simplement la logique mathématique qui est écrite sur le papier qu'on nous a distribué en cours.

[>Le professeur] : Ok. On va s'arrêter là pour cette activité. S’il y a une petite question mais qui ne va pas donner lieu à un débat. Oui Elsa ?

[>Elsa] : Je veux la réponse parce que ... on a passé trois heures là-dessus et on ne sait toujours pas.

[>Le professeur] : Orlane, tu m'empêches d'entendre Elsa et d'autres aussi. Je te ferai remarquer que chaque fois que tu as pris la parole j'ai fait en sorte qu'on puisse t'entendre.

[>Elsa] : On peut avoir la vraie réponse parce que...

[>Le professeur] : Oui bien sûr... Elsa d'abord on n’a pas passé trois heures mais deux et puis l'autre chose, bien sûr c'est mon boulot … je te donne la réponse. Je vous donne la réponse. La réponse c'est exactement ce qui vient d'être dit : imaginez deux secondes qu'on ait deux nombres a et b de proximité maximale. Imaginons ça. Donc forcément s’ils sont de proximité maximale, ils sont différents, c'est marqué là. Ok ? Autrement dit la distance entre les deux est non nulle et comme la distance est non nulle, je prends la moitié de cette distance. La moitié d'un nombre non nul c'est un nombre non nul. On est d'accord ? Ok. Et la moitié de la distance c'est forcément plus petit que la distance elle-même puisque la distance est un nombre positif. On est d'accord ? Autrement dit avec la démonstration qui est là, le nombre qu'on peut toujours trouver ce n’est pas la moyenne, c'est la moitié de la distance. Il est plus petit. Autrement dit, dans R, non il n'y a pas quand on veut que les nombres soient différents, il n'y a pas de nombres de proximité maximale. Alors juste avant j'ai entendu : mais finalement ça ne sert pas et même c'était contesté. Il y a une définition, elle doit s'appliquer à R et donc il doit exister. Non, la définition, elle existe, elle s'applique à R, et quand on l'applique on voit qu'il n'y a pas de nombre comme ça. Alors il y en a qui ont dit : elle est inutile. Alors je répondrai dans deux minutes à cette inutilité mais avant je voudrais vous poser une question. Avec tout ce qu'on a fait, je pense que vous allez pouvoir répondre à la question qui va venir, très facilement. Écoutez bien. Maintenant j'enlève ce différent, d'accord (celui de la définition de nombres de proximité maximale) ? Vous avez vu, je l'ai enlevé, qu'on soit bien clair. Je dis si a et b sont de proximité maximale dans R, alors qu'est-ce qu'on peut conclure ?

[>Les élèves en chœur] : Ils sont égaux.

[>Le professeur] : Hadrien ?

[>Hadrien] : Ils sont égaux.

[>Le professeur] : Alors a=b. Moi je dis que ça c'est la conclusion de tout le travail qu'on a fait. Et ça, ce n'est pas du tout inutile. Ça veut dire que si maintenant vous trouvez deux nombres dont la distance est inférieure à n'importe quoi de strictement positif alors ces deux nombres sont égaux, dans R. Autant la définition qui est là ne s'applique pas, elle s'applique mais elle dit qu'il n'y a pas de nombres de proximité maximale quand on marque « différent ». Autant quand maintenant on enlève le « différent » on peut dire maintenant que si deux nombres dont la distance entre les deux est plus petite que n'importe quoi de strictement positif alors on peut conclure que ces deux nombres sont égaux. Et ça c'est fondamental. Ça s'appelle même le principe fondamental de l'analyse. Deux nombres qui sont arbitrairement proches sont égaux. Voilà ce qu'on vient de mettre à jour ensemble, ok. Je réponds à la question de l'utilité là. Oui ?

[>Juliette] : Du coup dans la définition on enlève le différent.

[>Le professeur] : Oui on enlève le différent. Moi je l'ai mis tout à l'heure pour remettre un peu du sens à ce qu'on faisait. On était en train de se perdre. En mettant différent on se met d'accord. Regarde vingt-cinq, on a même une démonstration. Sébastien, bravissimo pour ta démonstration. Il reste que ça aurait été bien que tu nous dises quel était le nombre entre zéro et la distance entre a et B. C'est quoi?

[>Quentin] : C'est la moitié.

[>Le professeur] : C'est la moitié de cette distance-là. Tout simplement. Et là il y a une petite erreur parce que c'est entre a et b on peut mettre la moyenne bien sûr mais là ce n'est pas entre a et b, c'est entre zéro et la distance de a et b. Et oui là regarde, c'est marqué que la distance de a à b doit être plus petite que epsilon. Là ce qu'il arrive à prouver c'est que cette distance-là elle va être supérieure à un nombre, et ce nombre c'est la moitié de la distance de a à b. Donc ce n'est pas entre a et b, c'est entre zéro et la distance entre a et b. Ici epsilon va être égal distance de a à b sur deux, et donc la distance entre a et b va être plus grand que ce epsilon. Donc ça ne marche pas pour tout epsilon. Et donc il n'y en a pas. Pas de différents. Ok. Oui ?

[>Juliette] : Monsieur, c'est vrai sur l'ensemble des réels ça ?

[>Le professeur] : Oui. Super question ! Ça c'est vrai dans les réels, est-ce que c'est vrai ? Est-ce que c'est vrai dans les entiers ? Autrement dit si à la place de marquer "si a et b sont de proximité maximale dans N alors a=b" est-ce que ça c'est vrai ?

[>Plusieurs élèves] : Non !

[>Le professeur] : Pourquoi ? Pourquoi ça ne serait pas vrai ?

[>Quentin] : On a dit que deux et trois ils sont de proximité maximale.

[>Le professeur] : Oui deux et trois par exemple, ils sont de proximité maximale. Pourquoi dans N ça ne marche plus ? Parce qu'une fois que tu les as rapprochés à un près, tu ne peux plus continuer à les rapprocher puisque dans N des nombres différents de zéro, le plus petit c'est un. Donc tu peux plus continuer à rapprocher un de deux. Avec les entiers. Et donc deux et trois sont de proximité maximale mais qui ne sont pas égaux. Par contre dans R comme tu peux les rapprocher tant que tu veux ; et bien ça suffit, en les rapprochant autant qu'on veut ça suffit pour les rendre égaux. Yes?

11. Script de la situation Q^2

Situation Q² du 06 11 14 durée : 2h40

[>Le professeur] : Ce que je vous propose c'est de jouer, dans un premier temps, à un jeu, et je vais vous expliquer les règles de ce jeu. Donc je vous donne les règles du jeu sur un exemple. Vous avez une phrase comme ça, ici c'est "pour toute case rouge, il existe une case noire ayant le même symbole". Vous voyez ici vous avez une grille avec des cases, Ok, et il va il va y avoir deux joueurs. Un joueur avec un crayon noir, un joueur avec un crayon rouge. Il s'agira de colorier cette grille de manière à ce que pour ...ici c'est "Noir joue pour vrai"...Noir va colorier la grille de manière à ce que la phrase qui est ici soit vraie. Et Rouge, lui, il va essayer de contrer Noir. Il va essayer de faire le contraire, il va essayer de faire en sorte que la phrase soit fausse. Donc si au final, quand tout est colorié, la phrase qui est là est vraie, c'est Noir qui gagne. Si quand tout est colorié, la phrase qui est là est fausse, c'est Rouge qui gagne, Ok ? Alors je vais vous montrer ici, par exemple, un exemple de partie. Ici dans la consigne, ça va changer chaque fois, on dit qui joue pour vrai et qui commence. Ici Rouge commence. Le premier c'est Rouge, il entoure le H.

[>Hadrien] : Mais non s'il entoure le T...

[>Le professeur] : Ecoutez-moi. Là tu as l'impression qu'il entoure T ? (Sur le diaporama le H est entouré en rouge).

[>Hadrien] : Non mais...

[>Le professeur] : Moi je te dis qu'il entoure H. Voilà. Ce n'est pas Hadrien c'est quelqu'un d'autre.

[>Elsa] : On joue au hasard en fait ?

[>Hadrien] : Non !

[>Le professeur] : Non, la question après ça va être comment choisir les bonnes cases pour gagner. Evidement !

[>Elsa] : ????? (inaudible)

[>Le professeur] : Pour l'instant on ne se pose pas cette question, je vous montre comment il joue cette fois ci. C'est peut-être des mauvais joueurs mais voilà comment ils jouent. Ils entourent H. S'il vous plaît. Chaque fois que vous jouez, je vous demande ... (bruit) ...des consignes simples ça commence à être compliqué à donner, hein ! (Silence). Chaque fois que vous jouez, s'il vous plaît, dans les "coup joué" (ligne du tableau) vous mettez le coup que vous venez de jouer. Rouge vient d'entourer le H, il écrit H là, dans la grille qui est là. Ensuite, c'est au tour de Noir. Qui joue L, il écrit L ici, et puis et cetera ils jouent chacun leur tour .... Hop, hop, hop (il fait défiler à l'écran la suite des coloriages) . Et là on se pose la question : "maintenant qui a gagné ? Rouge ou Noir ?" Je vous laisse réfléchir deux seconde à ça. Et on fait un vote pour voir si vous êtes tous d'accord.

[>Le professeur] : Alors qui gagne ? Rouge gagne ou Noir Gagne ou Autre. Pour voir si on est d'accord sur cet exemple-là. Dans la classe, qui pense que c'est Rouge qui gagne ? Personne. Qui pense que Noir gagne ? Beaucoup. Qui se met dans Autre ?

[>Caroline] : Ah je me suis trompé.

[>Le professeur] : Tu veux voter quoi ?

[>Caroline] : Rouge gagne.

[>Le professeur] : Rouge, d'accord. Vingt-huit dans noir et un dans rouge. Alors tu vas nous expliquer, Caroline, pourquoi tu votes rouge.

[>Caroline] : Je ne sais pas je n'ai pas eu le temps.

[>Le professeur] : Tu n'as pas eu le temps, D'accord. Qui veut expliquer pourquoi Noir Gagne ? Alors on en a plein. (De mains en l'air). Matthieu ! Euh, non, non mister Mickaël ! (Qui prend rarement la parole)

[>Mickaël] : C'est parce que chaque case rouge possède le même symbole que le symbole d'une case noire. Enfin chaque case noire possède un symbole, non, chaque case rouge possède un symbole qui est dans les cases noires.

[>Maxime] : L'inverse !

[>Mickaël] : Non, non ! Chaque case rouge possède un symbole...

[>Le professeur] : Tu nous montre au tableau peut-être ?

[>Mickaël] : Le H, enfin les deux H, il y a un H qui correspond dans une case noire. Pour le U, il y a un U qui correspond dans une case noire. Et le L il y en a un qui correspond dans une case noire.

[>Le professeur] : D'accord. Est-ce que quelqu'un a quelque chose à rajouter pour cette démonstration du Noir gagne...Non ? Ça t'a convaincu, oui ? Caroline est convaincue. Donc maintenant chacun d'entre vous, vous êtes par deux a priori, vous prenez un stylo rouge et un stylo noir. Vous allez jouer Huit parties, vous entourez s'il vous plait celui qui gagne pour vous. Là on entoure Noir parce que c'est Noir qui a gagné pour vous. Ok ?

2 - 09:53 > 30:23 <Les élèves jouent les huit parties>

3 - 30:23 > 30:53

[>Le professeur] : Bon on laisse les deux dernières tables qui ont à finir leur jeu et nous pendant ce temps je vous pose une question. Normalement, a priori, ce ne devrait pas être très dur. Donc pour le jeu, je vous propose la phrase :" Pour toute case noire, il existe une case rouge qui a le même symbole". Avec Rouge qui commence et joue pour vrai. Et je vous demande quelles sont toutes les grilles gagnantes pour Rouge ? Donc vous essayez de trouver toutes les grilles gagnantes pour Rouge possible.

4 - 30:53 > 35:05 <temps de recherche des grilles gagnantes>

[>Le professeur] : Vous comprenez la phrase ? Je vous laisse réfléchir, vous avez le temps.

[>Le professeur] : Je ne comprends pas.

[>Juliette] : C'est la phrase là ?

[>Le professeur] : Oui, nous ce qu'on cherche c'est pour ce jeu quelles sont les grilles qui sont gagnantes pour Rouge. Pour celui qui joue pour vrai.

[>Loïc] : Monsieur c'est les grilles qu'on avait ?

[>Le professeur] : Une grille c'est quoi ? C'est comme ça.

[>Loïc] : N'importe quelle grille ?

[>Le professeur] : Je vous en montre une. Voilà ça c'est une grille (il dessine une grille 3 par 3). A, B, C, D, il y a des symboles dedans. C'était des lettres que je vous ai mis. O, P, Q, K, L.

[>Juliette] : Mais gagnante ça veut dire quoi ?

[>Le professeur] : C'est comme vous voulez. Il y a cette question qui est posée. Vous pouvez très bien dire : on ne peut pas répondre à cette question. Moi ça ne me dérange pas, Vous le savez très bien. Par exemple, si celle-là est gagnante pour ce jeu-là, alors il faudrait la compter comme une grille gagnante. Une grille c'est une grille trois par trois.

5 - 35:05 > 38:20 <Récupération des propositions>

[>Le professeur] : Il y a peut-être des propositions ? Ok, il y en a là et par là. On va prendre Caroline.

[>Caroline] : J'en fait combien ?

[>Le professeur] : Tu en fait plusieurs si tu penses qu'il y en a plusieurs. (Caroline vient tracer ses grilles au tableau)

[>Le professeur] : Est-ce que quelqu'un a une autre grille gagnante ? On en a déjà cinq. Alors qu'on soit d'accord. Si on remplace...si on à la place des B on met des A et à la place des A on met des B. Cen'est pas les lettres qui comptent. Ce qui compte c'est qu'il y a ici que les mêmes lettres sauf sur une case. Ok. Rien d'autre ?

[>Hadrien] : Monsieur ?

[>Le professeur] : Oui. (Hadrien vient au tableau) .

[>Le professeur] : Bon Ok. On va s'arrêter là pour les propositions, il y en a déjà six au tableau. Si il y en a d'autres, après on les prendra mais on va déjà discuter de celles-là.

6 - 38:20 > 47:17 <discussion sur les grilles>

[>Le professeur] : La quelle vous paraît la plus simple à discuter ?

[>Les élèves en chœur] : La 1. (Grille uniforme)

[>Le professeur] : La 1. Conjecture : "la grille 1 est une grille gagnante." Vrai Faux Autre.

[>Elsa] : Est gagnante pour Rouge ?

[>Le professeur] : Pour Rouge. Oui je ne vais pas écrire chaque fois pour Rouge. Par simplification. Pour Rouge, Ok. Qui pense que c'est vrai ? Faux ? Autre ? Personne. (Tout le monde dans Vrai) . Qui veut expliquer pourquoi c'est vrai ? Hadrien.

[>Hadrien] : C'est obligé que les cases noires aient même symbole parce qu'il n'y a que des A.

[>Le professeur] : Vrai parce que les cases noires sont du même symbole. C'est ça ? Ok. Vous avez autre chose à rajouter là pour la justification de ce vrai ? Ok. Vous pensez que lequel est ensuite le plus facile à discuter ?

[>Les élèves] : P2 (grille uniforme en B sauf une case A)

[>Le professeur] : Et bien dans l'ordre, P2. "P2 est gagnant". Vrai, Faux, Autre. Je vous laisse réfléchir une seconde à ça. C'est bon, déjà ? Ok ! Qui, dans la classe pense que P2 est gagnante ? seize. Qui pense que c'est faux, ce n'est pas une grille gagnante ? Un. Qui se met dans Autre ? Neuf dans dans Autre, Ok. Hadrien, tu as voté quoi ?

[>Hadrien] : Non mais c'est juste pour demander. Quand vous dites gagnantes, c'est gagnante à tous les coups ou pas ? Ou juste quelle peut être gagnante ?

[>Le professeur] : Juste je te pose une question : pourquoi tu commences ta question par "non" ?

[>Hadrien] : J'ai commencé par "non" ?

[>Le professeur] : Oui.

[>Le professeur] : Quand vous marquez gagnant ça veut dire gagnant à tous les coups ou qui peut gagner ?

[>Le professeur] : C'est la raison pour laquelle tu es dans Autre. Tu n'as pas de réponse à cette question là ?

[>Hadrien] : Ouais.

[>Le professeur] : Donc tu dis gagnant à tous les coups ou gagnant…ou gagnant quoi tu as dit?

[>Hadrien] : Gagnant à tous les coups ou qui peut être gagnant.

[>Le professeur] : Ou peut être gagnant. Alors il y en a qui sont dans Autre pour cette raison-là? Cinq. Cinq sur les neuf Autre. Vous êtes dans Autre pour une autre raison ?

[>Orlane] : En partie pour cette raison mais aussi c'est parce que pour nous ça dépend de qui entoure la case A en fait.

[>Erika] : Oui voilà c'est ça.

[>Orlane] : Si c'est Rouge qui entoure la case A, et bien ce sera Faux, mais si c'est Noir, ce sera juste.

[>Le professeur] : Si Rouge entoure A c'est faux, sinon c'est vrai. C'est ça ? ...Elsa ?

[>Elsa] : Je suis dans Autre, c'est en fait un peu pour ces deux-là. En fait on peut dire rouge joue pour vrai, ça veut dire quoi ?"

[>Le professeur] : Pour que la phrase soit vraie.

[>Elsa] : Du coup Rouge il ne peut pas perdre, du moins il jouera toujours pour vrai, Il ne peut pas entourer le A par exemple ?

[>Le professeur] : Il faut que Rouge joue de manière à ce que la phrase soit vraie.

[>Elsa] : ça veut dire que là elle ne peut pas se tromper, elle peut pas entourer le A. Plusieurs élèves répondent. Oui mais elle ne peut pas se tromper puisque c'est rouge qui joue vrai.

[>Juliette] : Elle peut.

[>Loïc] : Des fois tu joues pour vrai et tu te trompes (beaucoup de discussions fusent).

[>Le professeur] : Ok. Juliette.

[>Juliette] : Moi j'ai voté vrai mais ... (encore un peu de bruit)

[>Le professeur] : Chut, on n'a pas encore entendu les vrais dans cette classe.

[>Juliette] : On dit que c'est Rouge qui commence, et il joue pour vrai. Donc s'il est un minimum intelligent il est sûr de gagner puisque s'il coche A, il est sûr que sa grille est gagnante.

[>Le professeur] : Si Rouge est intelligent, il joue A...

[>Juliette] : Et il gagne.

[>Le professeur] : Et il gagne.

[>Orlane] : Oui mais s'il est bête ?

[>Le professeur] : Hadrien.

[>Hadrien] : Oui mais là on peut se mettre dans Faux parce que s'il est un minimum bête alors il perd.

[>Le professeur] : Alors tu passes de Autre à Faux ?

[>Le professeur] : Non, non, c'est pour répondre à l'argument de Juliette.

[>Le professeur] : Il y en a qui ont changé d'avis dans ce petit débat là ? non, Ok. Ici on a un problème de...

[>Loïc] : Définition.

[>Le professeur] : De définition. Vous l'avez posé la question : "qu'est-ce que ça veut dire gagnant ?". Est-ce que gagnant c'est gagnant à tous les coups, est-ce que c'est gagnant peut-être ? Est-ce qu'il est bête, intelligent ? Alors on va dire qu'il est intelligent, ils jouent tous les deux intelligemment. Ok ?

[>Elsa] : Oui mais à ce moment-là ils jouent tous les deux pour Vrai.

[>Le professeur] : Non, non, ils jouent tous les deux intelligemment. Il y en a un qui joue pour Vrai, pour rendre la phrase vraie, et l'autre pour rendre la phrase Fausse. Ça s'appelle un jeu partisan. C'est à dire qu'ils n'ont pas le même objectif tous les deux. Il y en a un qui veut que la phrase au final soit vraie et l'autre qui veut qu'elle soit fausse. Donc il fait tous pour qu'elle soit fausse et l'autre fait tout pour qu'elle soit fausse. Donc ils jouent vraiment l'un contre l'autre. Ok

? Je vous montre le problème de la définition de grille gagnante. On va commencer par dire qu'ils sont tous les deux intelligents et puis on va dire qu'une grille pour un joueur s'il existe une stratégie gagnante pour ce joueur. Qu'est-ce que ça veut dire ? Je vous montre mathématiquement ce que ça veut dire, il existe une stratégie gagnante pour ce joueur. Alors on joue exactement ce qu'on vient de jouer à l'instant et je vous montre l'arbre des coups possibles. D'abord, c'est Rouge qui joue. Après c'est Noir, après c'est Rouge... Alors qu'est-ce que ça veut dire dans cet arbre là que Rouge a une stratégie pour gagner. Ça veut dire la chose suivante : parmi tous ses coups possibles, il en existe un tel quel que soit les coups que joue l'autre, Noir donc, quel que soit les coups de Noir, il existe un coup pour rouge....C'est à dire que pour tous les coups de Noir il existe un coup de Rouge et vous avez compris....tel que quelque soient les coups que Noir va jouer après il existe un coup de Rouge et cetera... Tel qu'au final la phrase est vraie. Donc finalement qu'est -ce qu'on dit là ? On dit que Rouge a tout le temps une manière de jouer telle que quelque soient les coups de Noir il a gagné, c'est à dire la phrase est vraie à la fin. Récréation...

<Suite de la situation Q2 après la récréation 06 11 14 : 32 minutes>

[>Le professeur] : Donc tout à l'heure tout le monde était d'accord sur le fait que p1 était une grille grille gagnante. Par contre pour P2, on appelle ça un singleton, ça veut dire... ça c'est la grille uniforme (P1) c'est à dire il y a partout la même lettre. Ça c'est la grille uniforme sauf un singleton, un singleton ça veut dire qu'il est tout seul. Donc pour P2 on n'était pas d'accord. Il y en a qui demandaient est-ce qu'il joue intelligemment ou bêtement ? Qu'est-ce que ça veut dire gagnant ? Et ils se sont mis dans Autre, tandis qu'une bonne partie de la classe était dans vrai. Alors je ferai remarquer la chose suivante : ceux qui sont dans vrai, dans ce cas-là, ont dans leur tête, une définition de grille gagnante mais ils n'ont pas vérifié que cette définition de grille gagnante elle est collective. Et ceux qui sont dans Autre, ils sont en train de dire : "Ben nous on est pas d'accord avec vous parce qu'on ne sait pas ce qu'est la définition de grille gagnante. On ne sait pas si les joueurs jouent intelligemment ou pas, on ne sait pas tout un tas de trucs... si bien qu'on ne peut pas dire que c'est vrai. Et bien maintenant on s'est mis d'accord là-dessus. Maintenant les deux joueurs jouent intelligemment, les deux pour gagner. Donc l'un pour rendre vraie la phrase et l'autre pour rendre fausse la phrase. Et une grille est gagnante pour Rouge, c'est à dire celui qui veut la rendre vraie, s'il existe une stratégie gagnante pour lui. C'est à dire une manière de jouer qui va le faire gagner peu importe les coups de l'autre joueur. Evidemment la grille va être perdante pour lui si l'autre a une stratégie gagnante pour lui. C'est à dire une stratégie qui va permettre de rendre fausse la phrase. Ok, ça c'est la règle du jeu. Ok, donc une fois qu'on a cette règle-là, cette définition de grille gagnante, alors va pas refaire P1, on était déjà d'accord, avec la P2 est-ce que vous êtes d'accord pour dire que P2 est une grille gagnante ou pas. P2 est une grille gagnante. Vrai, Faux Autre. Et la définition de grille gagnante c'est : il existe une stratégie pour gagner. Alors soit vous pensez que Oui c'est une grille gagnante, soit que non, soit vous vous mettez dans Autre. Est-ce que je dois interpréter votre silence comme vous avez déjà une réponse à ça ?

[>En chœur] : Oui.

[>Le professeur] : J'ai vu des gens qui disaient non de la tête, je leur laisse une minute. Bon, c'est bon ? Ok. Je vous fais voter. Qui dans la classe pense que cette grigne P2 est gagnante ?

Beaucoup d'entre vous. Qui pense que non elle n'est pas gagnante, Faux ? Personne. Qui vote Autre ? Un, Loïc. Vingt-huit dans Vrai et un dans Autre, Loïc on t'écoute.

[>Loïc] : Ben je suis d'accord avec la définition comme quoi il existe une stratégie pour gagner pour que rouge gagne. Que la phrase soit vraie. Mais il en existe une aussi pour que Noir gagne.

[>Le professeur] : Oui tu nous la...oui voilà. Tu dis il existe une stratégie pour Noir.

[>Loïc] : Ah non je vais dans vrai, je me suis trompé de grille.

[>Le professeur] : Ah, d'accord tu passes dans vrai, Ok. Alors tu passes dans Vrai, tu peux nous expliquer, pour toi, pourquoi P2 est gagnante pour Rouge ?

[>Loïc] : Parce que Rouge commence et comme il joue pour gagner il joue la case A et le...

[>Le professeur] : Attends, tu dis « Rouge joue A en premier », d'accord ? Oui, ensuite ?

[>Loïc] : Ensuite Noir il va que cocher des cases B.

[>Le professeur] : Noir prend que des cases B. Et donc au final, pourquoi c'est gagnant pour Rouge ?

[>Loïc] : Parce que ... ?

[>Hadrien] : Parce que Noir a que des B.

[>Le professeur] : Parce que Noir a que... ? C'est gagnant parce que Noir aura... ?

[>Loïc] : Toujours le même symbole.

[>Le professeur] : Gagnant parce que Noir a toujours le même symbole. Ok, est-ce que tout le monde est d'accord avec cette raison-là ? ...Donc tout le monde pense que c'est gagnant parce que Noir a toujours le même symbole ? ... (Un élève répond Ouais) ...Ok... Pardon ?

[>Quentin] : Et que Rouge l'a aussi.

[>Le professeur] : Et que Rouge l'a aussi.

[>Hadrien] : Ben non, il a A et B.

[>Le professeur] : Quentin, toi tu penses que c'est important de rajouter que Rouge a aussi même symbole que noir ? (plusieurs élèves:" ben non")

[>Quentin] : Oui. Moi je pense qu'il faudrait juste rajouter qu'il existe une case rouge.

[>Le professeur] : Mais de toute façon ils jouent chacun leur tour donc...

[>Le professeur] : Il existe une case rouge, c'est une phrase pour toi Louis, hein ?

[>Louis] : Ben ouais !

[>Le professeur] : D'accord.

[>Maxime] : Sujet verbe.

[>Le professeur] : Oui c'est vrai, d'accord.

[>Louis] : Pour vérifier la...

[>Le professeur] : Alors il existe une case rouge, je marque « vrai parce qu'il existe une case rouge » ?

[>Louis] : Il existe bien une case rouge et puis la phrase d'avant. Noir ne prend que des B. C'est gagnant parce noir ne prend que des B.

[>Le professeur] : D'accord, Ok. Bien alors, tout le monde est d'accord avec ça ?

[>Maxime] : Ben moi je ne comprends pas pourquoi il dit qu'il faut qu'il existe une case rouge.

[>Le professeur] : Oui mais là il faut que tu le dises à quelqu'un d'autre que le professeur. Apparemment on n'est pas si d'accord que ça.

[>Fabio] : Moi je pense que ce qu'il a rajouté...

[>Le professeur] : Attends, une seconde Fabio. Je te donne la parole après Maxime.

[>Maxime] : Je ne comprends pas pourquoi tu dis qu'il y a une case rouge, qu'il existe une case rouge.

[>Louis] : C'est parce que en fait je veux juste vérifier pour qu'une proposition soit juste : il existe une case rouge telle toute case noire a le même symbole. Il faut que et la proposition, et l'hypothèse soient vérifiées et je précise juste que la proposition est vérifiée, c'est à dire qu'il existe une case rouge.

[>Maxime] : Oui mais ça peut mal être interprété. Moi je dirais plus il y a une case B qui est entourée en rouge.

[>Louis] : Oui mais là tu précises mais...

[>Maxime] : Oui mais dans l'exemple c'est ça.

[>Louis] : Si tu veux je peux dire : il existe bien une case rouge.

[>Maxime] : C'est pareil ! (Rires)

[>Le professeur] : Ah oui je comprends en fait votre différent. Toi Maxime tu es en train de dire qu'il faut absolument dire la case rouge en question c'est une case B et toi Louis, tu dis: peu importe ce que c'est, il y a bien une case rouge qui est coloriée.

[>Louis] : Oui.

[>Maxime] : Oui mais si c'est la case rouge ça ne marchera pas.

[>Louis] : De toute façon le rouge joue plus d'une case et de toute façon moi je pense que l'hypothèse est indépendante de la proposition mais après c'est chacun comment il comprend la proposition.

[>Le professeur] : Tu penses que le " il existe" et "tel que toute case noire a même symbole" sont indépendants.

[>Louis] : Ouais.

[>Le professeur] : C'est ça que tu dis, hein ?

[>Louis] : Oui.

[>Le professeur] : Il y avait Fabio. Qui voulais prendre la parole tout à l'heure.

[>Fabio] : Moi je pense que ce qu'a rajouté Quentin, et bien en fait on s'en fout.

[>Le professeur] : Ce qu'il a rajouté, quoi ? Il a rajouté : "Et que Rouge a le même symbole", ça pour toi ce n'est pas important.

[>Fabio] : Parce qu'on essaie de démontrer que Noir a toujours le même symbole.

[>Le professeur] : D'accord. Alors moi...Faut qu'on se mette d'accord là-dessus parce que j'ai l'impression que dans la classe il y a plusieurs façons de penser. Il y a la façon de penser où, en fait, Noir a le même symbole B partout. Ok ? Et puis...donc ça suffit pour que la phrase soit vraie. Ça suffit (il écrit). Ca suffit pour dire que, je vais l'appeler C2, que la conjecture 2 est vraie, et Non ça ne suffit pas. Une seconde, je vais te donner la parole juste après mais je voudrais qu'on se positionne par rapport à "ça suffit" ou "ça ne suffit pas". Donc il y en a dans la classe qui expriment qu'il suffit que les noirs aient même symbole pour que la grille soit gagnante, que la phrase soit vraie quoi, et d'autres qui disent ça ne suffit pas et ils rajoutent même des trucs sur le fait que ça soit rouge, d'autres même précisent qu'il faut dire que c'est un B ou pas, peu importe, en tout cas l'autre camps dit : non, non ça ne suffit pas. Vous avez déjà votre opinion là-dessus, je peux vous faire voter ? Alors qui dans la classe pense que Noir ça suffit qu'il ait le même symbole ? Vingt et d'autres : qui pensent que ça ne suffit pas ? Quatre. Et qui se met dans Autre ? Quatre. Ok ! Donc ce n'est pas clair. Hadrien, tu es dans quoi ?

[>Hadrien] : Dans Vrai. Euh en fait dans juste Noir ait même symbole.

[>Le professeur] : Vous précisez votre position parce que sinon on ne va pas réussir à suivre.

[>Hadrien] : C'est juste pour dire à Louis, il dit qu'il faut au moins une case rouge. Et dans ce qui est marqué dans ???? c'est Rouge joue A. Donc ça montre que le Rouge joue déjà une case rouge. …Toi tu dis qu'Il faut qu'il y ait au moins une case rouge, qu'il existe au moins une case rouge...

[>Louis] : Ouais

[>Hadrien] : Et bien ???c'est marqué rouge joue A; Et ça prouve que...

[>Le professeur] : Ah oui, Hadrien il dit vu que Rouge commence à jouer, il entoure une case et il en existe bien une qui est rouge.

[>Louis] : C'est pour cela que je me suis mis dans la première case : A le même symbole.

[>Hadrien] : Oui parce que tu as rajouté ça...

[>Louis] : Oui mais ça veut pas dire que je ne peux pas me mettre dans la première case (le ça suffit) parce que pour moi en fait c'est ...

[>Le professeur] : Louis tu étais dans quoi ? Dans "il suffit que ce soit le même symbole pour noir. » ?

[>Le professeur] : Ouais. En fait ça suffit parce qu'il y aura toujours un rouge.

[>Hadrien] : De toute façon il va jouer stratégiquement donc il va jouer A et après pour ceux qui veulent l'autre symbole il va être obligé de jouer B et dans ce cas-là il y aura aussi l'autre symbole.

[>Le professeur] : Ok, moi j'ai l'impression qu'on ne se comprend pas dans la classe, franchement. Quand je vous écoute. Pourquoi ? Ce que j'ai dit là, il y le jeu et tout ça mais ce que je dis ici-moi si on voit ...s'il y avait des noirs... par exemple ça ... (il trace une figure avec que des A en noir et un B en rouge). Est-ce qu'on est d'accord que cette situation correspond à cette colonne là (Le ça suffit) ? (Les élèves répondent oui. Il y a que des noirs et dans ce cas, la phrase "il existe une case rouge telle que toute case noire a même symbole", si on pense comme ça, ça rend cette configuration vraie, d'accord ? Et si on pense comme ça, c'est à dire, "non ça ne suffit pas", ça rend cette configuration fausse. On est d'accord, c'est le sens de ce qui est écrit au tableau. Ok ? Non parce que il ne faudrait pas qu'on se dise aussi, il suffit qu'ils aient même symbole parce que de toute façon comme les autres symboles, Rouge va forcément en prendre un. On ap as besoin de rajouter quoique ce soit parce qu'il va en prendre un de toute manière. Ici on est en train de se dire, est-ce qu'il suffit seulement regarder les noirs pour prouver la phrase ou pas ? Certain dans la classe disent : "a priori oui" ça suffit et d'autres disent " ça ne suffit pas de regarder que les noirs" il faut regarder aussi les rouges. C'est ce que j'ai compris hein.... Oui Caroline ?

[>Caroline] : Dans le jeu...enfin en général ils vont jouer chacun leur tour ?

[>Le professeur] : Oui dans ce jeu-là ils jouent chacun leur tour.

[>Caroline] : Donc forcément le Rouge il entoure cinq cases et le noir quatre.

[>Le professeur] : Oui. [1122.0]

[>Caroline] : Et on sait qu'il commence par B et on sait qu'il reste des A, donc ça ne sert à rien de préciser quoique que ce soit.

[>Le professeur] : Oui, toi tu étais dans la première case. (Ça suffit) Oui ?

[>Quentin] : Moi j'étais dans "ça ne suffit pas".

[>Le professeur] : Alors tu expliques pourquoi, Quentin.

[>Quentin] : Je peux dessiner ?

[>Le professeur] : Oui. (Quentin dessine une grille avec quatre A noirs et cinq B rouges) .

[>Caroline] : Ce n'est pas la configuration du jeu ça ? (d'autres disent hors sujet!)

[>Quentin] : Je le considère comme ça parce que pour moi la propriété est indépendante de l'exemple qui est là-bas. (Brouhaha)

[>Le professeur] : Evann? [1198.1]

[>Evann] : Il a levé la main avant moi.

[>Le professeur] : Oui mais c'est toi qui parle le moins de vous deux et ça c'est mon critère de choix.

[>Evann] : On n'avait pas dit au début que les deux joueurs jouent intelligemment ?

[>Le professeur] : D'accord. Juste pour qu'on soit bien sûrs qu'on parle de la même chose, on va laisser deux secondes le jeu et on va se poser la question : "est-ce que cette grille-là, rend

vraie ou pas cette phrase-là ?". Comment dire…Euh avec cette grille rend cette phrase A1 est vraie fausse Autre ?

[>Hadrien] : Monsieur ?

[>Le professeur] : Oui ?

[>Hadrien] : J'ai une question.

[>Le professeur] : Tu la poseras juste après.

[>Le professeur] : C'est juste pour faire mon choix.

[>Le professeur] : Alors vas-y !

[>Hadrien] : C'est par rapport à la grille ou par rapport au résultat juste ?" (Certains élèves répondent "la phrase")

[>Le professeur] : Bon je vais préciser. Je précise : la question qui vous est posée là, maintenant c'est, elle est écrite : "pour cette grille qui est là" j'entoure parce qu'il y en a plein, comme ça on ne se trompe pas. Pour cette grille, la phrase A1, c'est à dire cette phrase là (il la montre) , elle est vraie, elle est fausse ou Autre, ça marche?

[>Le professeur] : Allez je vous fais voter. Dans la classe qui pense que pour cette grille l'affirmation A1 est vraie ? Douze. Qui pense que pour cette grille, A1 est fausse ? Dix. Qui se met dans Autre ? Six. Alors là je vous dis : vraiment il va falloir qu'on s'explique parce que vous voyez le fossé qui existe dans la classe. Le questionnement est simple et vous n'êtes clairement pas d'accord. On a plein qui sont dans Autre encore et moitié moitié dans Vrai et Faux. Alors on va commencer par Sébastien."

[>Sébastien] : La phrase, comme elle est écrite, je pense que le problème c'est le "LE" dans tout "toute case noire a LE même symbole", Le même symbole, je pense que ça se rapporte au symbole de la case rouge.

[>Le professeur] : Le LE se rapporte au symbole de la case rouge, pour toi ?

[>Sébastien] : Oui. Si c'était toutes les cases noires, ce serait "ont le même symbole".

[>Le professeur] : Sinon c'est "ont le même symbole".

[>Sébastien] : Là c'est au singulier, là. Alors vous ne répondez pas tous à la fois, qui veut répondre ? Evann? [1532.1] (En fait une discussion de fond de salle entre quatre ou cinq élèves a lieu avec Sébastien) Evann? Tu veux dire quoi ?

[>Evann] : ????

[>Le professeur] : Attends une seconde (toujours du bruit avec cette discussion au fond). Oh, oh Nathan !

[>Evann] : Là ce que je veux dire c'est la phrase elle n'est pas écrite entièrement.

[>Le professeur] : Ah si elle est écrite entièrement là.

[>Evann] : Ah bon !

[>Le professeur] : Je peux mettre un tampon là si tu veux : "écrite entièrement."

[>Evann] : On aurait pu marquer : "Il existe une case rouge telle que toutes les cases noires aient le même symbole."

[>Le professeur] : Non, non, c'est écrit entièrement là. (Cela déclenche des interventions partout). Il y en a plein qui veulent prendre la parole. Il y a Fabio, après Mickaël. Vas-y Fabio.

[>Fabio] : En fait moi je crois que la phrase, elle peut être interprétée comme on veut.

[>Le professeur] : La phrase elle peut être interprétée comme on veut ?

[>Fabio] : Différemment.

[>Loïc] : Il y a deux sens.

[>Le professeur] : Alors donne les deux sens que tu y vois.

[>Fabio] : Ben il y a des personnes comme moi, qui peuvent penser que "toutes les cases noires aient le même symbole" et d'autres comme Sébastien qui pense qu'il faut qu'une case rouge qui ait le même symbole que toutes les cases noires. (Plusieurs élèves acquiescent) .

[>Le professeur] : D'accord. Victor, non Mickaël, pardon.

[>Mickaël] : Moi je suis dans Faux, mais pour ceux qui pensent que toutes les cases noires doivent avoir le même symbole, c'est quoi la case rouge qui existe pour toute les cases noires ont même symbole.

[>Le professeur] : Ah, tu demandes en fait, tu dis "si toutes les cases noires ont le même symbole" ça sert à quoi le début de la phrase, c'est ça que tu dis ?

[>Mickaël] : Oui ! [1667.8]

[>Le professeur] : Alors on a des réponses là, Caroline et après Louis.

[>Caroline] : Moi j'ai compris comme Sébastien depuis le début et je ne comprends pas pourquoi on en vient là. On n'a même pas fini C2.

[>Le professeur] : Je vais répondre à ça parce que...

[>Hadrien] : C'est juste...

[>Le professeur] : Oui vas-y !

[>Hadrien] : Bien moi, en fait je passe, c'est Mickaël qui m'a convaincu, si ...on n'écrirait pas qu'il y a une case rouge si voulait mettre que les cases noires qui aient même symbole.

[>Le professeur] : Toi tu étais dans vrai.

[>Hadrien] : Moi je pensais qu'il fallait juste que les cases noires aient même symbole. Mais ils auraient marqué une autre phrase s'ils voulaient juste parler des noires. S'ils avaient marqué juste la phrase pour que les cases noires, et bien il n'y aurait pas la case rouge mais comme là il y a la case rouge, ça veut dire qu'il faut que tous les symboles de ceux des noires il faut qu'il y ait au moins une case rouge qui ait le même symbole.

[>Le professeur] : D'accord. Donc tu passes de quoi à quoi ?

[>Hadrien] : Noir a le même symbole, ...

[>Le professeur] : Non, non, ...

[>Hadrien] : De vrai à Faux.

[>Le professeur] : De vrai à Faux. Louis, tu as voté quoi, toi ?

[>Louis] : Vrai. Ben je pense que Fabio il a raison, et que Mickaël il a juste compris la question comme la première proposition de Fabio et les Autres, ceux qui sont dans vrai comme moi, ils ont compris la proposition comme la proposition de Fabio. Et du coup il y a deux camps, les vrais les faux. Et on est juste pas d'accord parce qu'on ne pense pas la même chose.

[>Le professeur] : Ok, vous ne lisez pas de la même manière…ce que Fabio a dit tout à l'heure.

[>Louis] : Voilà, tout à fait.

[>Le professeur] : Maxime tu voulais rajouter quelque chose ?

[>Maxime] : C'est exactement pour ça que depuis le début je suis dans Autre.

[>Juliette] : Moi aussi.

[>Le professeur] : Alors tout ceux qui sont dans Autre voient qu'il y a deux manières de regarder ça et ils hésitent. Vous êtes deux et il y en a six qui sont dans Autre. Ils sont où les...Toi aussi ? Toi aussi Caroline ? Toi aussi ? Ok. Bon on va s'arrêter là pour ce débat-là. En fait ...à vrai dire, je ne m'attendais pas à ce qu'il y ait cette difficulté-là, pour une raison précise. C'est que je vous ai donné des questionnaires et j'ai analysé ces questionnaires. Et en fait vous répondez assez bien. C'est à dire qu'en mathématiques, oui il y a une convention, c'est à dire il y a une seule lecture de cette phrase pas deux. Et en fait quand je vous donne les questionnaires et que vous y répondez, finalement les réponses que vous donnez, non seulement sont correctes, mais en plus les preuves que vous faîtes de vos réponses sont plutôt correctes, y compris pour ce type de phrase là. Alors curieusement quand on en discute là tous ensemble, il semble qu'il y ait plusieurs manières de regarder les choses dans la classe. Ça n'est pas grave, on a juste à se mettre d'accord. Mais la première chose à voir c'est qu'on n'est pas d'accord. Et la deuxième chose c'est comment en mathématiques on lit une phrase comme ça ? Eh bien, en mathématiques, on lit une phrase comme ça, on dit "il existe une case rouge telle toute case noire a le même symbole", il faut que toutes les cases noires aient le même symbole que la rouge. C'est comme cela que l'on lit ça. D'accord ? Donc quand on dit noir a le même symbole partout ça ne suffit pas. Evidemment là (il parle de la grille de Quentin) noir a tout le temps le même symbole mais pas le même symbole qu'une des cases rouges puisque les cases rouges c'est toutes des B et les cases noires toutes des A. Donc ici ça serait faux avec la lecture mathématique. Mais si clairement vous n'avez cette lecture là, vous ne pouvez pas dire faux, vous pouvez même dire vrai. Ok. Ça ne pose pas de problème. Mais une fois que c'est dit, a priori on l'utilise dans les autres cas. Ça va nous permettre, puisque maintenant vous êtes au fait de cette lecture-là, P3 va être lu facilement à mon avis. P3 est gagnante ou pas ? Je vous laisse réfléchir deux seconde à ça. P3 gagnante pour Rouge ou pas. Ah oui on n'a pas répondu à cette histoire (P2) ! Du coup vous aviez raison de penser que c'était vrai. Ça ne change pas le vote. Il y a vingt-huit personnes qui ont voté vrai mais par contre c'est en explicitant les raisons pour lesquelles vous aviez voté, on s'est aperçu que vous n'aviez pas tous voté pour les mêmes raisons. Et que même il y avait deux manières de regarder ça dans les classes totalement différentes qui sur

certains cas donnait des résultats totalement différents. Les uns pensant que c'est vrai, les autres pensant que c'est faux. Donc P3 on va se poser la question si c'est gagnant pour rouge.

2 - 34:39 > 57:54

[>Le professeur] : La grille P3 est gagnante vrai ou faux ? Ok je vous fais voter pour P3. Qui dans la classe...Amaury c'est bon tu as une idée ?

[>Amaury] : Encore trente secondes.

[>Le professeur] : Ok. Allez c'est bon. Dans la classe, qui pense que P3 est gagnante pour Rouge. Trois. Qui pense que P3 est non gagnant donc perdant pour Rouge. Beaucoup d'entre vous. Qui se met dans Autre ? Un. Ok. Donc là vingt-quatre dans Faux, trois dans Vrai et un dans Autre. Alors on va commencer par ceux qui pensent que c'est vrai. Il y en a trois. Léa si tu veux commencer ?

[>Léa] : Ben je ne sais plus du coup.

[>Le professeur] : Tu ne sais plus du coup. Baptiste ?

[>Baptiste] : Ben en fait je ne saurai pas trop comment dire.

[>Le professeur] : Ok. On va essayer avec Mickaël qui a voté vrai lui aussi.

[>Mickaël] : En fait elle peut être gagnante si Noir joue mal. (Plusieurs élèves répliquent en même temps que Noir doit bien jouer. "La définition ce n'est pas ça")

[>Le professeur] : Ah toi tu dis la définition ce n'est pas ça. C'est quoi pour toi la définition ?

[>Orlane] : C'est la définition que vous avez donné tout à l'heure, c'est s'il y a une solution qu'il gagne.

[>Juliette] : Une stratégie.

[>Orlane] : Voilà une stratégie.

[>Le professeur] : Oui, et là pour toi Léa ?

[>Léa] : Pour moi si le Rouge il entoure B et le Noir il entoure C et que...

[>Le professeur] : Attend, attend, attend...tu dis pour P3 qui entoure B ? Rouge ?

[>Léa] : Oui !

[>Le professeur] : Rouge, d'accord !

[>Lea] : Si Noir entoure C et Rouge entoure le A et bien il aura gagné.

[>Le professeur] : Ah, Rouge aura gagné.

[>Lea] : Ben oui, (discussion avec Maxime pas audible)

[>Le professeur] : Loïc ? [2262.5]

[>Loïc] : Ben là, en faisant ce qu'elle a dit celui qui joue le noir, il ne joue pas stratégie, parce que lui il a une solution pour gagner, c'est entourer soit A, soit B.

[>Le professeur] : Tu parles du joueur Noir ?

[>Loïc] : Oui. [2283.0] Si celui qui a le rouge entoure le A ou entoure le B, le Noir aura gagné.

[>Le professeur] : D'accord. Louis ?

[>Louis] : Moi je pense que dans ce style de jeu, il y a que seul le Noir, seul le Rouge qui peut avoir une stratégie gagnante. Ce n'est pas possible que les deux aient une stratégie gagnante. Et je pense que Noir a une stratégie gagnante, donc dans ce cas-là...

[>Le professeur] : La stratégie gagnante de Noir c'est quoi ?

[>Louis] : Le rouge commence. Si le Rouge se place dans C le noir se place dans A ou B. En fait la stratégie gagnante du Noir c'est de se mettre soit dans A soit dans B. Et dans ce cas-là il sera obligé de gagner parce qu'on ne pourra pas vérifier qu'il existe une case rouge telle toute case noire a le même symbole puisque le Noir se mettra dans B et après il sera obligé de mettre une case dans C. Et dans ce cas-là, toute case noire ne pourra pas avoir le même symbole pareil qu'une case rouge.

[>Le professeur] : D'accord. Ils y en trois qui étaient dans Vrai. Là on a entendu surtout ceux qui étaient dans Faux. Oui ?

[>Baptiste] : Moi je passe dans Faux.

[>Le professeur] : Tu passes dans Faux baptiste.

[>Le professeur] : Toi aussi Carla ? Toi aussi Léa ?

[>Léa] : Moi aussi je passe dans Faux.

[>Le professeur] : Oui Hadrien

[>Hadrien] : Vous aviez dit que Rouge il a une stratégie mais si l'autre a une stratégie et qu'ils jouent tous les deux intelligemment. Donc ça montre que si Noir joue intelligemment donc comme Léa dit que si Noir fait une erreur alors vous nous avez dit que les deux jouent intelligemment avec la stratégie.

[>Le professeur] : Donc ici on s'arrêter là. Vous êtes pour l'essentiel d'accord. Ici clairement ne peut pas jouer C en deuxième parce que s'il joue C en deuxième il joue bêtement et s'il joue A quand Rouge a joué B en premier ou qu'il joue B quand Rouge a joué A, et bien Noir va gagner. Pour les raisons qu'a donné Louis tout à l'heure. Parce qu'après il va être obligé de jouer un C et que qu'il y aura un A et un C soit un B et un C, en tout cas, dans tous les cas Noir n'aura pas que des cases du même symbole qu'un rouge puisqu'il n'aura déjà pas les cases identiques lui-même. Ok ? Bien donc voilà pour ça. P4 c'est le même pour les mêmes raisons. P5 c'est le même, P6 c'est le même voilà. Est-ce que quelqu'un a d'autres grilles gagnantes que les deux premières ? Pour l'instant il y a les deux premières qui ont été retenues comme des grilles gagnantes. Oui ? Donc Quentin nous propose une grille dont il pense qu'elle est gagnante. Toujours pour la même phrase, la phrase A1, donc la question est cette grille est-elle gagnante pour Rouge ? (La grille de Quentin est composée de lettres en double exemplaire sauf une en un seul exemplaire.).

[>Loïc] : Il peut expliquer pourquoi il dit ça ? (Beaucoup d'élèves acquiescent à cette demande)

[>Le professeur] : Vas-y tu peux convaincre les autres que c'est bien gagnant, comme ça on va gagner du temps peut-être. Vas-y.

[>Quentin] : Au départ rouge va jouer A pour pas que Noir la prenne (C'est le seul singleton) . Et après il va jouer tout le temps en fonction de ce que va jouer Noir. Quand Noir va jouer une couleur il va prendre la même.

[>Nathan] : Et alors ?

[>Maxime] : Ce sera toujours vrai.

[>Le professeur] : Maxime oui.

[>Maxime] : On va faire Rouge et Noir (il écrit deux colonnes). Rouge il va jouer A parce que sinon si Noir...

[>Le professeur] : Attends Maxime, pour qu'on comprenne ce que tu vas nous dire tu penses toi aussi que c'est gagnant, c'est ça, hein ?

[>Maxime] : Ouais.

[>Le professeur] : Ouais d'accord, donc Maxime soutient que c'est gagnant.

[>Maxime] : Parce qu'en fait si Noir il prend A alors ce sera directement faux, donc Rouge il a intérêt à jouer A, vu qu'il commence il joue A. Ensuite Noir va jouer n'importe quel truc, par exemple C. Et pour que Rouge, pour que Noir ne prenne pas une autre lettre du coup Rouge serait coincé. En gros si Noir reprend C alors Rouge serait coincé, donc il va forcément reprendre C. Prendre le C opposé. Donc après le noir il prend un truc aléatoire, c'est pareil (Il entoure le E en noir). Et après c'est toujours pareil jusqu'au bout.

[>Le professeur] : Vas-y, fais-le jusqu'au bout s'il te plaît.

[>Maxime] : Après le E rouge qui est là. Après tu as le D noir et après le D rouge. Après il y a le B noir. Et après le B rouge. Et du coup... À chaque fois que Noir choisit une couleur, enfin une lettre, Rouge va toujours choisir la même en fait la paire.

[>Juliette] : Et alors ?

[>Maxime] : Parce que si Noir prend une lettre qui toute seule comme A, et bien Noir va gagner. Du coup dans cette stratégie-là, Noir non Rouge ne peut pas perdre.

[>Le professeur] : Bon Ok. Alors je vais vous donner la parole mais il faut qu'on fasse un truc ensemble, il faut qu'on vote, parce que sinon on ne sait pas où on est dans la classe. Donc il y en a un qui vient d'expliquer pourquoi cette grille est gagnante. Je voudrais savoir, moi, qui pense que ça c'est vrai, c'est à dire qu'elle est gagnante, ou que c'est faux, c'est à dire qu'elle n'est pas gagnante, ou Autre. Vous avez déjà une idée là-dessus ? Qui a besoin de deux minutes pour réfléchir ? Vous levez la main rapidement. Voilà. Je vous laisse réfléchir deux minutes. Oui toujours la même phrase A1. Bon allez. Evann c'est bon ? Qui dans la classe pense que cette grille est gagnante pour Rouge pour la grille qui est là-bas. Quatre. Qui pense que c'est faux, elle n'est pas gagnante ? Beaucoup d'accord, baissez votre main. Qui se met dans Autre ? Personne d'accord. Donc on en a vingt-quatre dans Faux. Et bien on va écouter, on a déjà écouté une raison pour laquelle c'était vrai... Tu as une autre raison Hadrien. Parce tu as voté vrai.

[>Hadrien] : Non mais parce vous avez donné l'exemple de l'équation, là c'est marqué une case rouge, et en fait ça peut être toutes les cases rouges et il faut que toutes les cases noires aient le même symbole qu'une case rouge mais sauf une case rouge c'est toutes les cases rouges. Donc en fait il faut que toutes les cases noires (Grand éclat de rire collectif spontané dans la classe) .

[>Le professeur] : Je ne sais pas comment noter ce que tu viens de dire. Toi tu dis que cette phrase là, ce serait comme "s'il existe toutes les cases rouges..."

[>Hadrien] : Il faut en fait que chaque case noire il faut qu'il y ait une case rouge pareille.

[>Le professeur] : D'accord, chaque case noire a son identique rouge. Alors Fabio et Loïc vous passez dans Autre, vous étiez dans ?

[>Loïc] : Dans faux.

[>Le professeur] : Faux. Alors vous expliquez pourquoi vous passez dans Autre.

[>Loïc] : Parce que nous on a une façon de penser sur la phrase...

[>Le professeur] : Vas-y, explique !

[>Loïc] : On a compris que pour qu'il faut que toutes les cases noires aient le même symbole qu'une seule case rouge.

[>Le professeur] : Oui ça c'est ta deuxième compréhension ou la première ?

[>Loïc] : La première. Et la deuxième c'est celle que Hadrien pense. C'est pour cela que...

[>Le professeur] : Vous mettez dans Autre parce que vous ne savez plus. Ah. Erika que je n'entends pas souvent.

[>Erika] : Moi c'est pareil que Loïc, je pensais pareil et maintenant je ne sais plus.

[>Le professeur] : Ah il y en a d'autres qui suivent comme Erika. Qui suit Loïc et Fabio. Un deux trois...

[>Caroline] : Non, non moi ce n'est pas pour ça, c'est pour contredire.

[>Le professeur] : Ah...trois quatre. Donc ils y en six qui passent de Faux à Autre pour la raison qui a été donnée par Loïc. Alors, on en a plein qui veulent prendre la parole. Caroline en premier.

[>Caroline] : Imaginons que c'est vrai. Est-ce que vous avez le A dans le noir ?

[>Hadrien] : Mais c'est ...il faut que chaque case noire ait le même symbole que ...Il faut que ...enfin si tu as un C noir tu as un C rouge.

[>Maxime] : Alors que si tu as un A rouge tu n'es pas obligé d'avoir un A noir.

[>Caroline] : Oui mais de toute façon ça ne marche pas. (Grand rire collectif dans la classe).

[>Le professeur] : Miss Orlane.

[>Orlane] : Ben si ...en fait on prend à partir des cases noires donc on regarde d'abord les cases noires et on cherche un identique en rouge. Et vu qu'on a pas de A noir, on s'en fiche qu'il n'y ait pas de A rouge. C'est comme ça que ça va être vrai.

[>Le professeur] : Oui, toi tu es passée carrément de Faux à vrai ?

[>Orlane] : Ben non je ne sais pas, vu qu'il y a deux interprétations justement...

[>Le professeur] : D'accord. Mickaël ?

[>Mickaël] : Ben moi je suis dans Faux. Parce que ce qu'on nous demande c'est une seule case rouge parmi toutes les cases rouges, il faut qu'il y en ait une pour que toutes les cases noires aient le même symbole que celle-là.

[>Maxime] : Ce n'est pas écrit une seule.

[>Mickaël] : Une des cases rouges quoi, une parmi toutes les cases rouges.

[>Le professeur] : Juliette tu dis ?

[>Juliette] : Moi je pense comme Mickaël.

[>Le professeur] : Alors il y en a plein qui veulent prendre la parole. Sébastien !

[>Sébastien] : En fait la consigne qu'a donné Hadrien, elle a été donnée différemment. C'était la première consigne que vous aviez donnée dans votre diapo. Vous l'aviez donnée différemment. Donc si ce n'est pas la même...

[>Maxime] : Deux fois trois et trois fois deux c'est bien pareil.

[>Sébastien] : Dans la feuille qu'il nous avait donnée, il avait fait expret de mettre deux consignes différentes. (Plusieurs élèves acquiescent) Il y avait cette consigne et celle qui voulait dire exactement ce Hadrien a dit là.

[>Loïc] : Pour toute case noire, il existe une rouge. (Des élèves acquiescent).

[>Sébastien] : Je pense que c'est faux.

[>Le professeur] : Bien ...Quentin !

[>Quentin] : Tout à l'heure Louis a posé une question au prof qui consistait au fait que si on voulait dire qu'il y avait qu'une seule case rouge ce serait précisé dans l'énoncé. Or là on ne nous dit pas qu'il y a qu'une seule case donc il peut y en avoir plusieurs. C'est ce que le professeur a répondu à Louis.

[>Le professeur] : Marine.

[>Marine] : Je passe de Faux à Autre.

[>Le professeur] : Tu passes de Faux à Autre. Ok. Alors pourquoi Marine ?

[>Marine] : Ben en fait Hadrien il m'a un peu persuadée.

[>Le professeur] : Il t'a persuadée ? De quoi ?

[>Marine] : Que ????

[>Le professeur] : D'accord. Alors Margot ! Désolé (à Louis) mais mon critère de choix c'est ceux qui parlent le moins en premier.

[>Margot] : Moi je suis dans faux parce que dans la phrase A1 on dit que toute case noire a même symbole. Ce serait l'ensemble des cases. Mais là ce n'est pas ça. Vu que ????

[>Le professeur] : Margot tu répéter plus fort parce sinon on ne peut pas utiliser ton argument.

[>Margot] : Dans A1, on dit que toute case noire a même symbole. C'est l'ensemble des cases qui ont, par exemple, A comme symbole commun, mais pas D, C, D et E...

[>Le professeur] : Ok. Matthieu ?

[>Matthieu] : En réalité le toute englobe les cases noires dans leur ensemble. Donc il faut qu'elles aient le même symbole dans leur ensemble mais pas individuellement.

[>Le professeur] : Ok. Oui, vous voulez rajouter des choses, Evann!

[>Evann] : Tout à l'heure il y avait Sébastien qui en gros la phrase là c'est toutes les cases noires elles devaient être la même qu'une seule case rouge. (Brouhaha de réponses à Evann).

[>Le professeur] : Finis ta phrase s'il te plait. Non, non Hadrien, s'il te plaît. Moi je me vois dans quelques jours essayer de retranscrire ça, je me tire des plombs. Tu ne réponds pas comme ça. Sinon je fais comment moi te transcrire ? Je mets Hadrien points d'interrogations ? Alors s'il te plaît Evann tu finis tes phrases et Hadrien tu ne coupes pas Evann et après tu prends la parole. Il n'y a pas de problème pour que je la donne la parole. Mais chacun son tour.

[>Evann] : Je suis obligé de tout refaire ?

[>Le professeur] : On n'est pas obligé de tout refaire mais qu'on comprenne.

[>Evann] : En gros Sébastien tout à l'heure il a joué sur la phrase en disant que toutes les cases noires devaient être la même qu'une rouge au minimum.

[>Le professeur] : Oui !

[>Evann] : Et là ce n'est pas du tout le cas.

[>Le professeur] : Toi tu as voté quoi ?

[>Evann] : Moi j'ai voté dans Faux.

[>Le professeur] : Tu as voté Faux et tu restes dans Faux ?

[>Evann] : Oui.

[>Le professeur] : Et Sébastien il a voté la même chose que toi je te signale. Ah oui tu es d'accord avec Sébastien. Vu d'ici ça n'avait pas l'air aussi clair que ça. Louis et peut-être qu'on va finir ?

[>Louis] : Moi j'aimerais bien, Quentin est-ce que tu pourrais répéter ce que tu as dit à propos de "une"?

[>Le professeur] : Louis, tu as voté quoi ?

[>Louis] : Pardon, Faux !

[>Quentin] : Donc tout à l'heure le prof a dit que s'il y en avait une seule comme a dit aussi Evann, ce serait précisé dans la propriété A1. Là il n'y a pas le "seul" dans la propriété donc il peut y avoir plusieurs cases rouges.

[>Louis] : Moi je pense que ce que tu dis et l'exemple que tu as pris par rapport à moi ça n'a rien à voir, en fait le "une" ou le "une seule", nous on parle de l'ensemble des noires qui doit

être pareil qu'une ou une seule case rouge et que ça n'a rien à voir avec le problème du "une seule".

[>Le professeur] : Bon...Oui ?

[>Sébastien] : Est-ce que je peux ...

[>Le professeur] : Non, je suis obligé d'arrêter à un moment donné parce que... Sébastien, si je te donne la parole il y aura quelqu'un qui voudra te répondre et on n'arrivera pas à se mettre d'accord d'ici ce soir. Donc ce que je vous propose, c'est... S'il vous plaît. On va arrêter là ce débat et je vais vous expliquer pourquoi. Parce que vous avez dit en gros.... (Une élève demande une pause) oui je vais vous raconter des choses et vous allez arrêter de réfléchir, ça va vous faire une pause. S'il vous plaît vous m'écoutez ? Donc vous avez repéré qu'il y a deux manières de lire cette phrase. Tout à l'heure, on est déjà tombé sur cette chose-là : il y a deux manières de lire cette phrase. Et là, on retombe sur ces deux manières de lire la phrase. Il y a un moment où il faut trancher. Tout à l'heure, je vous ai donné des éléments pour trancher mais manifestement ça ne suffit pas. Donc je vais, maintenant, vous expliquer comment le mathématicien s'occupe de ça. Et après vous allez voir, normalement on devrait se mettre d'accord assez facilement.

3 - 57:54 > 1:26:05

[>Le professeur] : Donc je vous ai fait ça sur un diaporama. Je vais vous expliquer comment on fait pour trancher ce genre de chose là.

[>Le professeur] : Alors première choses. Ça va nous faire un peu de vacances, vous allez voir, c'est moi qui vais parlez. Ça en fera un peu moins pour moi, mais pour vous un petit peu. Un petit mot de vocabulaire, trois mots pas plus. Des mots que vous connaissez d'ailleurs. Pour ce jeu que j'appelle Q^2, le défenseur c'est celui qui affirme que l'énoncé est vrai, il défend la phrase. C'est lui qu'on appelle le défenseur.

[>Elsa] : Par exemple là ça serait rouge.

[>Le professeur] : Ici ça serait rouge. Rouge joue pour vrai donc ça serait le défenseur. D'accord ? Et l'attaquant c'est celui qui affirme que .... Qui affirme que la phrase est fausse. Carla tourne toi franchement vers moi s'il te plait. Et pas à moitié vers moi et à moitié vers Amaury avec qui tu veux tant partager. Voilà. [3574.5] Donc je disais, il y a le défenseur, l'attaquant, et la dernière chose la relation qu'il faut vérifier. Alors par exemple, dans notre cas, comme Elsa l'a très bien dit, si c'est rouge qui joue pour Vrai, alors c'est rouge le défenseur, Noir va être l'attaquant, et la relation là, c'est "avoir le même symbole". Ok ? Juste "avoir le même symbole". Alors .... Voilà. Il y a deux types de phrases : les phrases que j'appelle de type AE. Alors pourquoi je les appelle de type AE parce qu'en anglais c'est All Exists, en français ce n'est pas All Exists, c'est pour tout il existe, donc pour tout quelque chose, il existe autre chose tel qu'une relation, ça c'est une phrase de type AE. Ok ? Bon a pas besoin de retenir que c'est AE, moi je l'écris mais...Et les autres, celles de type EA, c'est à dire Exists All, c'est à dire "il existe un t de A tel que pour t' de B, on a R (t,t') ". Ok ! Donc il y a ces deux phrases, et elles ne se gèrent pas de la même manière. Et ces deux phrases correspondent exactement aux deux interprétations que

vous aviez tout à l'heure. Alors je vais vous les donner. Je vais vous dire enfin la quelle correspond à la quelle. Et après normalement il ne devrait plus y avoir de problème d'interprétation entre vous puisqu'on aura convenu d'une convention. Donc première chose : pour comprendre ces phrases, nous allons apprendre à les prouver par un dialogue entre un attaquant et un défenseur. C'est pour cela qu'on a appris attaquant et défenseur. Alors on va commencer par les phrases AE....c'est à dire pas celle...Non on va commencer par l'autre. Voilà. Pour une phrase EA, c'est celle qu'on vient de voir. C'est à dire c'est celle qui commence par il existe. Ici : "il existe une case rouge" telle que pour toute case noire. Comment on fait ? Le défenseur fait des propositions et l'attaquant répond. Exactement comme dans le jeu où il y a noir qui colorie, rouge répond par un autre coloriage, etcetera... Il y a en a un qui fait…ici le défenseur fait des propositions et l'attaquant répond. Donc je vous explique la règle du jeu. Comment on va jouer à ce jeu-là. Jouer au jeu d'interpréter et de prouver cette phrase ? Le défenseur, celui qui affirme que c'est vrai, il dit qu'il existe une case qui vérifie pour toutes les cases de B….il existe un éléments de A qui pour tous les éléments de B qui vérifie une relation R. Lui il dit que c'est vrai. Il en existe un. Alors l'autre lui dit : "tu dis que ça existe Ok. Prouve-le-moi. Donne-le-moi ce truc qui existe." Alors qu'est-ce que fait le défenseur ? Il en choisit un, il choisit un t. Il dit puisqu'il existe j'en choisit un. Maintenant qu'est-ce que va faire l'attaquant ? L'attaquant, je vous rappelle, il veut montrer que la phrase est fausse. Comment il va répondre ? Il va répondre par un choix t'qui vérifie pas la relation. Il va dire : "ben toi tu me donnes t, tu dis que celui-là marche pour tous mais moi je peux t'en trouver un de t'qui ne vérifie pas la relation. Donc ton t que tu m'as donné ça marche pas…Et s'il n'arrive pas à faire ça ? Et s'il n'arrive pas l'attaquant un t'qui ne marche pas, cela veut dire quoi pour la phrase ? Ça veut dire qu'elle est vraie. Si par contre B arrive à trouver un t ' tel que la relation est fausse. Ça veut dire quoi pour la phrase ? Rien du tout. Pourquoi ? Parce que peut-être que A n'a pas choisi le bon élément. Donc A, à nouveau, va reproposer un élément. Il va dire : "Ah ben je me suis trompé la première fois, c'est vrai tu as raison il ne marche pas celui que je t'ai donné. Je t'en donne un autre. " . Il en redonne un autre. Et bien B se retrouve dans la même situation qu'avant. Ben moi je peux faire un choix tel que la relation n'est pas vérifié. Dans la proposition de A dans ce cas est encore une mauvaise proposition. Mais si par contre cette fois ne peut pas donner quelque chose qui ne marche pas pour la relation alors la phrase sera vraie. Etcetera, etcetera...Donc j'écris ça comme ça : La phrase est fausse si chaque fois que A fait une proposition t l'attaquant peut trouver un t' tel que la relation n'est pas vérifiée. Et elle est vraie, si l'attaquant ne peut pas faire autrement que de répondre par un t'qui vérifie la relation. Ça marche pour tout le monde, cette phrase ? Donc je vous ai expliqué. Donc on va jouer avec cet exemple-là. (La situation du débat). J'en avait quatre mais on plus fait de vote, je ne sais plus où on était là. Il y en a plein qui sont passé dans Autre. Qui veut faire l'attaquant et qui veut faire le défenseur ? Attaquant, quelqu'un qui pense que c'est faux ? Louis d'accord fait l'attaquant. Qui veut faire le défenseur, quelqu'un qui pense que c'est vrai ? Quentin allez hop, Ok. Donc ici celui qui pense que c'est vrai, c'est ... ? (Réponse des élèves : Quentin). Alors il faut qu'on soit bien clair ensemble. On est en train de dire que ça, cette grille, rend A1 vraie. C'est ça ? Alors vas-y Quentin, fais ta proposition. Puisque tu dis que ça existe, tu vas donner...suivez bien parce que vous allez comprendre comment interpréter ça. Vas-y. Tu fais une proposition, tu as le droit de te tromper de toute façon. Donc tu choisis un des éléments...toi tu es le il existe est de quelle couleur ici,..rouge;.. Donc tu choisis un des rouges s'il te plaît.

[>Quentin] : Moi je choisis A.

[>Le professeur] : Quentin a choisi A. Donc vas-y, c'est à toi. Louis. Tu peux répondre. …Donc il existe une case rouge telle que toute case noire a le même symbole. Toi tu dois rendre ça faux.

[>Louis] : Je prends toute case noire.

[>Le professeur] : Ah, non. Tu n'as le droit que d'en prendre qu'une seule.

[>Louis] : Ah ! Ben je prends B alors.

[>Le professeur] : Est-ce que B est le même symbole que le A qu'a pris Quentin tout à l'heure ? (Réponse en chœur : non). Donc la proposition de Quentin ne marche pas. Elle ne permet pas de justifier sa phrase. Vas Quentin, tu as le droit à d'autres possibilités.

[>Quentin] : Je prends B alors.

[>Le professeur] : Tu prends B. Quentin prends B. Donc il vient de prendre B. L'attaquant qui est Louis va répondre.

[>Louis] : Je prends C.

[>Le professeur] : Il prend C, il a le droit puisque C est noté en noir. Ok. Ça marche. C'est attaqué ça. Tu viens dire Louis que le B qu'a choisi Quentin, ça ne marche pas. Ça ne prouve pas que c'est vrai parce que toi tu as une réponse qui prouve que ça marche pas. Vas-y, continue Quentin.

[>Quentin] : De toute façon...Je prends C.

[>Le professeur] : Oui, tu prends C en rouge.

[>Louis] : Moi je prends B en noir.

[>Le professeur] : Toi tu prends B en noir, on est toujours dans la même situation. C'est Quentin n'a pas encore réussi à coincer Louis, c'est à dire à lui donner ...écoutez bien...il n'a pas réussi à coincer Louis, c'est à dire à lui donner une case où Louis est obligé de répondre par la même chose. Et il ne va pas y arriver. Vous voyez pourquoi il ne va pas y arriver. Donc au final tu défends toujours ta position (s'adressant à Quentin).

[>Quentin] : Oui !

[>Le professeur] : Alors propose encore à Louis...vas-y continue !

[>Quentin] : D

[>Le professeur] : D oui vas-y (s'adressant à Louis).

[>Louis] : Je prends B encore.

[>Le professeur] : Tu reprends B. Le B rouge...non ...

[>Louis] : Il donne son D rouge et moi je donne mon B noir.

[>Le professeur] : Ah oui. Tu les as tous faits là ?

[>Quentin] : Non, pas le E.

[>Le professeur] : Vas-y fais le E.

[>Quentin] : E

[>Louis] : Moi je prends mon B noir.

[>Le professeur] : Donc tu n'as pas réussi à lui donner une situation ou...Oui ?

[>Orlane] : On a le droit de prendre deux fois la même case ?

[>Le professeur] : Ben oui si on veut. Alors là je vais vous donner un exemple où ce sera plus facile de jouer...

[>Loïc] : Alors Pour P2 c'est faux alors. Parce que si on prend deux fois plusieurs fois la même case. Quentin aussi il n'arrivera pas à bloquer...

[>Louis] : Ben moi je veux bien faire l'attaquant sur P2 (P2 est la grille quasi uniforme avec un seul singleton)

[>Le professeur] : Alors vous voulez jouer à P2. Mais P2 il faut la colorier du coup. Qui veut la colorier ?

[>Des éleve] : Ah oui !!

[>Le professeur] : Et oui, il faut la colorier. Et quand on la colorie c'est comme ça. Rouge commence, hein ? (il colorie) Rouge, rouge, rouge, rouge, rouge et les autres cases c'est du noir. Alors d'après vous ?

[>Des élèves] : Ben oui !

[>Le professeur] : Ça c'est vrai ?

[>Les éleves] : Ben oui !

[>Le professeur] : Ok, bien, oui alors...

[>Hadrien] : Donc le une ça voulait bien dire une seule ?

[>Le professeur] : Non, le une veut dire, il y a une case au moins, il peut y en avoir plusieurs, il y a une case au moins qui est ...telle que toutes les cases noires aient le même symbole que cette case-là. Alors je vous donne un exemple, on va voir si on va réussir à se mettre d'accord. Donc je vous donne deux ensembles, G et H, (G= {4 ;6 ;9} et H= {2 ; 8 ; 7}) et la phrase c'est : "il existe un nombre x de G tel que pour tout nombre y de H, x + y est un nombre pair." Est-ce que cette phrase est vraie ou fausse ?

[>Le professeur] : Allez, je vous écoute. Qui pense que... C'est bon ? C'est un petit exemple, normalement ça va vite. Qui dans la classe pense que c'est Vrai ? Un. Qui pense que c'est faux ? Beaucoup on dirait. Qui se met dans Autre ? Personne. Donc vingt-sept dans Faux. Alors tu penses que c'est vrai donc tu es le défenseur. Et les autres sont les attaquants. Qui veut jouer l'attaquant ? Hadrien ?

[>Hadrien] : Choisis un nombre (à Maxime).

[>Maxime] : Hein ? C'est à toi de choisir !

[>Des élèves] : Mais non, c'est toi le défenseur.

[>Maxime] : Ah ! Je ne sais pas. Moi je pensais...Pour moi si je prends quatre de l'autre côté il y a deux. Ça fera un nombre pair.

[>Les élèves] : brouhaha sous forme de réponse.

[>Maxime] : Ouais si je prends un pair il prend un impair, et si je prends un impair il prend un pair. Ouais ben non alors...

[>Juliette] : Allez adieu.

[>Le professeur] : Là tu es passé dans Vrai.

[>Maxime] : Non là je suis dans Vrai.

[>Le professeur] : A Faux je veux dire.

[>Maxime] : Non je me mets dans Autre.

[>Le professeur] : Bien alors qui veut expliquer pourquoi c'est faux. Amaury ?

[>Amaury] : Il y a un nombre x, de l'ensemble G qui fait que pour tout y de H x+y ça va faire un nombre pair. Sauf que dans H on trouvera toujours. Il y a des nombres pairs et impairs...donc ça pourrait toujours être un nombre pair pour n'importe quel nombre, en fait. Parce que si je prends quatre par exemple, quatre plus deux ça fait un nombre pair, quatre plus huit ça fait un nombre pair, quatre plus sept ça fait un nombre impair. Et si je prends un nombre impair dans G ben ça fera pareil mais avec deux parce que deux il est pair.

[>Le professeur] : D'accord, voilà. Ça marche. Ce que vient de faire ici Amaury c'est qu'il vient d'expliquer, de jouer à ce dialogue, il a fait tout seul dans sa tête attaquant et défenseur. Si l'attaquant donne quatre, et lui Amaury, il donne sept. Il dit que ça marche donc il s'arrange pour que ça fasse un nombre impair. Si on donne six, Amaury va répondre sept, et si on donne neuf, là on ne va plus utiliser sept mais deux. Ça fera un résultat impair aussi. Voilà, on n'a pas besoin de deux personnes pour jouer à ce jeu-là. C'est ce qu'a fait Amaury. Donc je vous explique l'autre phrase. Voilà. Alors vous avez repéré qu'il y a eu un petit souci quand Maxime a pris la parole parce que en fait il ne savait pas qui commençait. La règle du jeu pour qui commence et qui dit vrai, je vous la donne là. Qui commence, c'est dans l'ordre. Par exemple ici c'est A qui va commencer : pour tout ..., tout à l'heure c'était il existe là c'est lui qui commence, c'est dans l'ordre de lecture. Par contre celui qui affirme que c'est vrai, c'est le il existe. Ok ? Donc ici je vous explique c'est l'autre, on vient de de voir la EA et là c'est la AE. Le existe cette fois ci, il n'est pas en premier il est en deuxième. Celui qui pense que c'est vrai, il dit : "moi je suis capable pour tous les proposition de A, de donner une proposition de B qui correspond à la proposition donnée par A, je prétends qu'il existe chaque fois que A va me donner quelque chose, je suis capable de répondre à cette proposition. Donc, au final, la phrase, elle est fausse si le défenseur, c'est à dire, ici c'est A, arrive donner ...La phrase est fausse si le défenseur n'arrive pas à trouver, ne peut pas répondre à l'attaque de A, c'est à dire trouver un t ' tel qu'on a R (t, t ') et la phrase est vraie si chaque fois que l'attaquant propose quelque chose, le défenseur est capable de trouver un nombre qui correspond. Un objet qui correspond à la relation. Ok ? Donc je vais vous donner une phrase et on va voir ...se mettre d'accord ensemble pour voir si... Alors soient E et F deux ensemble de nombres entiers (E= et F= {1 ; 2 ; 10}) A1: "pour tout

nombre x de E, il existe un nombre y de F tel que x + y est un nombre pair" A1 est vraie ou fausse?

[>Le professeur] : Vrai, Faux, Autre. Qui pense dans la classe que ça c'est vrai, que A1 est vraie ? Vous levez la main. Ok. (27) Qui pense que c'est faux ? Un. Qui se met dans Autre ? Il y en a qui n'ont pas voté là-bas. Ça serait bien que vous évaluiez cette phrase.

[>Marine] : Moi je pense que c'est Vrai.

[>Le professeur] : Ben explique pourquoi tu penses que c'est vrai.

[>Marine] : En fait parce que si on prend deux par exemple. Si on prend six...

[>Le professeur] : Alors celui qui prend six, c'est l'attaquant ou le défenseur ?

[>Marine] : et bien si fait deux plus quatre ça fait un nombre pair, si je fais ????

[>Le professeur] : Tu peux répéter plus fort parce que d'ici on n'entend pas.

[>Marine] : Et bien si je prends dans F deux, ...

[>Le professeur] : Pour tout x de E, tu prends quoi comme nombre x, là c'est l'attaquant qui envoie des...

[>Marine] : Ben, n'importe quoi.

[>Le professeur] : Ben dis le.

[>Marine] : Et bien soit quatre, soit six, soit huit.

[>Le professeur] : Oui mais soit ça ne nous dit pas lequel.

[>Marine] : Ben je prends quatre par exemple.

[>Le professeur] : Voilà, quatre ! Le défenseur va répondre, il répond ce que tu viens de dire, il répond deux. Ok ? Quatre plus deux ça fait bien un nombre pair. Maintenant l'attaquant il n'est pas content parce que tu as réussi à le contrer. Donc il va choisir autre chose. Vas-y.

[>Marine] : Six.

[>Le professeur] : Et toi tu réponds en tant que défenseur deux. Et ensuite tu vas prendre le dernier huit. Et tu réponds en tant que défenseur deux. C'est dans ce sens-là qu'il faut le dire.

[>Marine] : D'accord.

[>Le professeur] : Si tu le lis dans le sens contraire, tu risques d'avoir le problème de tout à l'heure c'est à dire au bout d'un moment ne plus savoir quelle interprétation faire.

[>Marine] : Ouais.

[>Le professeur] : Et oui. Oui Evann?

[>Evann] : Ça change quoi de ????

[>Le professeur] : Je n'entends pas. C'est quoi ta Le professeur

[>Evann] : Tout à l'heure on avait un truc pareil avec des nombres et des trucs comme ça. Et on avait exactement le même truc en fait. Et on avait dit faux alors je ne sais plus.

[>Le professeur] : Alors là, Evann, je réponds...Oui Marine ?

[>Marine] : En fait tout à l'heure ce n'était pas tout à fait pareil parce que si on prenait un nombre pair d'un côté ça marchait pas pour les nombres de l'autre côté. Ça marchait que pour deux cas et il y avait un cas qui ne marchait pas en fait. (Discussion inaudible entre Marine et Hadrien)

[>Le professeur] : Alors tout à l'heure on avait une phrase, qui était le contraire de …Evann tout à l'heure on avait une phrase qui était «il existe x tel que pour tout y, x + y est pair". Evann est ce que cette phrase-là elle est vraie ou fausse avec les deux ensembles qui sont là ? x appartient à E et y appartient à F ? C'est Faux, alors tu dis pourquoi ?

[>Evann] : Parce que si on prend x égal à quatre et F est égal à un, c'est impair.

[>Le professeur] : Alors si on prend x qui vaut quatre et F qui vaut…et y qui vaut un c'est impair, je suis d'accord avec toi. Sauf qu'ici c'est écrit "il existe" ça veut dire que celui-là ne marche pas, mais ça veut pas dire que ça rend faux la phrase. Parce qu'il se pourrait très bien qu'il y en ait un autre qui marche. Six ne marche pas non plus. Et huit ne marche pas non plus. Alors là on peut dire que la phrase est fausse. Mais en utilisant qu'un seul ça suffirait pas du tout. Parce que imagine qu'il ne marche pas le quatre, mais que d'autres marchent. Dans ce cas-là, il en existerait bien un autre qui marcherait, ça ne serait pas quatre, ce serait un autre, Yes ?

[>Evann] : oui mais techniquement c'est un contre-exemple.

[>Le professeur] : Techniquement ce n'est pas un contre-exemple. Quand tu me dis quatre et un ce n'est pas un contre-exemple. Justement c'est ce que je suis en train de te dire. Il y en a beaucoup qui me réponde comme ça et en fait ils ne savent pas lire les phrases. Je te répète : pour que cette phrase soit fausse, il faut qu'il n'existe aucun nombre x tel que x + y fasse ça. Aucun. Toi tu me dis que quatre ne marche pas, tu ne m'as pas démontré qu'il en existe aucun. Tu as juste montré que ça ne marche pas pour quatre. Donc il faut que tu le montre aussi pour six et aussi pour huit. ET une fois que tu as fait ça c'est bon, on peut dire, non il n'y en a aucun. Ça marche ? Bien, alors dernière chose qu'on va faire pour vérifier que tout le monde est d'accord parce que là, franchement on vient de faire deux conjectures sur des cas assez simples et ça ne poses plus de problème d'interprétation, j'ai 'l'impression. Vérifions cela sur des cas un cran plus compliqué. Et on aura fait un bon travail ensemble.

4 - 1:26:05 > 1:53:01

[>Le professeur] : "Pour tout réel x, il existe un réel y tel que x=y".

[>Le professeur] : Ok, on va voir si on est d'accord avec ça ? Qui dans la classe pense que ...On va essayer d'accélérer. Qui pense que c'est vrai dans la classe ? Beaucoup. Qui pense que c'est faux ? Personne. Qui se met dans Autre ? Deux. Deux dans Autre, vingt-six dans vrai et zéro dans faux. Qui veut expliquer pourquoi il pense pourquoi c'est vrai ? Non, on va d'abord demander pourquoi vous êtes dans Autre. Fabio ? Fabio ?

[>Fabio] : En fait c'est lui qui m'a convaincu.

[>Le professeur] : Oui mais alors tu as été convaincu par quoi ?

[>Fabio] : Parce qu'en fait, on pense que c'est pour tout x réel, c'est à dire un deux trois quatre cinq six sept et bien il faut qu'il y ait un nombre y pour que…qui est égal à un mais aussi à deux trois.

[>Le professeur] : Ah oui, tu dis : si on prend x c'est pour tout x réel, x il peut valoir un deux trois quatre cinq six sept il faudrait qu'il y ait un seul y qui soit égal à tous ces nombres-là. Et ça pour vous ce n'est pas possible. Mais alors pourquoi vous êtes dans Autre ? Du coup c'est faux, non ?

[>Fabio] : Ouais mais je ne sais pas...

[>Le professeur] : Bon oui y a quand même la pression sociale.

[>Fabio] : Voilà

[>Le professeur] : Ouais. Ok. Vous êtes....

[>Hadrien] : ... Fragiles !

[>Le professeur] : C'est ceux qui le disent qui le sont, en général. Du moins c'est ce que j'ai remarqué. Maxime !

[>Loïc] : Quand on dit pour tout réel on ne les prend pas tous d'un coup on les prend un par un. Par exemple si on te dit deux virgule huit. Et bien dans les réels il y aura deux virgule huit aussi. Ce sera égal

[>Fabio] : Oui mais ce que je n'arrive pas à comprendre c'est ce que le y doit toujours être le même nombre que tout à l'heure quand cherchait les nombres impairs, euh les nombres pairs, on prenait le même nombre...

[>Le professeur] : Deux

[>Loïc] : Oui voilà, on prenait toujours le même nombre deux, avec quatre six et huit. On prenait toujours deux et vu que ça marchait tout le temps on arrivait à faire un nombre pair avec le nombre pair.

[>Maxime] : Mais c'est parce qu'il y avait des raisons. Je peux faire un dessin monsieur ?

[>Le professeur] : Oui.

[>Maxime] : Tout à l'heure on avait quatre six et huit et on avait un deux et dix. Loïc ! Tout à l'heure on avait ça. On prenait toujours pour que ce soit pair donc on prenait deux. Mais on aurait pu prendre dix.

[>Loïc] : Oui mais il faut toujours que ce soit le même nombre à droite. Qu'on prenne toujours le même nombre à droite.

[>Maxime] : Mais ça ce n'est pas grave. Parce si par exemple dans les réels tu as un tu as deux tu as trois.

[>Loïc] : Oui.

[>Maxime] : etcetera, ici tu auras ton y, pour un et bien on va prendre y égal un. Et après pour deux, on va essayer avec y égal un on voir que ça ne va pas marcher, on va essayer avec y égal

deux qui aussi dans les réels. Après pour trois on va essayer avec y égal un ça ne va pas marcher, avec y égal deux ça va pas marcher, avec y égal trois ça va marcher.

[>Loïc] : Donc on n’est pas obligé de prendre tout le temps le même y. Donc si c'est vraiment ça je suis dans vrai.

[>Le professeur] : Bien alors je suis d’accord avec vous, on va s'arrêter là, ah oui il y avait Matthieu qui voulait prendre la parole.

[>Matthieu] : Je voulais juste ajouter que le problème de Loïc c'est le problème qu'avait dit Mickaël avec la lecture des types EA et AE. Le "pour tout" et « il existe » si c'était en quelque sorte un ???? alors là la problématique serait comme disait Loïc. Mais dans ce cas-là y peut changer.

[>Le professeur] : Donc Matthieu tu réponds à Loïc en disant "Loïc toi lis ça à l'envers", si j'ai bien compris.

[>Matthieu] : Oui. [5609.0]

[>Le professeur] : Voilà, tu lis "il existe pour tout". Ok. On s'arrête là. Je suis d'accord avec vous. En fait chaque fois l'attaquant qui est en premier, pourquoi en premier, on se souvient, c'est le il existe qui est le défensseur, tout le temps. Donc c'est l'attaquant qui est en premier, il fait une proposition, il fait un comme proposition. Et bien le défenseur pour que x égal y, il fait la même proposition, si l'attaquant fait deux, le défenseur fait deux, etcetera, etcetera. Ok ? C'est à ce jeu-là qu'on joue. Bien maintenant, donc vous avez raison de penser que c'est vrai. Celle-ci maintenant : "pour tout réel x il existe un réel y tel que le carré de y est inférieur à x". (écrit en fait $y^2 < x$) . Vrai, Faux, Autre.

[>Hadrien] : Monsieur zéro c'est un réel.

[>Le professeur] : Les réels c'est tous les nombres hein ?

[>Hadrien] : Et zéro ?

[>Le professeur] : TOUS les nombres ! D'après toi zéro c'est un nombre ?

[>Hadrien] : Oui.

[>Le professeur] : Bien, c'est bon ? Je peux vous faire voter ? Dans la classe qui pense que C2 est vraie ? sept. [5779.4] Qui pense que c'est faux ? Beaucoup. Qui se met dans Autre ? Un. Donc vingt dans Faux, et sept dans Vrai et un dans Autre. Elsa ?

[>Elsa] : Je pensais que c'était vrai mais Margot elle m'a dit que c'était faux. (Rires dans la classe)

[>Le professeur] : Je suis dans Autre parce que Margot m'a troublée.

[>Elsa : [5811.6] Mais je pensais que c'était vrai.

[>Le professeur] : M'a troublé. Alors c'est un Autre plutôt vrai.

[>Elsa] : Ouais.

[>Le professeur] : D'accord. Sébastien ?

[>Sébastien] : Si on prend x égal moins un, aucun carré...enfin les carrés sont forcément positifs...

[>Le professeur] : Les carrés sont forcément positifs...

[>Sébastien] : donc n'importe quel nombre positif est supérieur à moins un. Donc ...

[>Le professeur] : Et alors ?

[>Sébastien] : Et bien vu qu'on demande que y soit inférieur à x, y au carré soit inférieur à x, n'importe quel nombre positif c'est supérieur à moins donc la proposition elle est fausse.

[>Le professeur] : Donc y au carré inférieur à x est faux. C'est ça que tu dis ? Ok. Qui est dans Faux pour cette raison-là par exemple ? Ou plutôt qui est dans Faux pour une autre raison on va dire autrement ? Tout le monde est dans Faux pour cette raison-là. Alors maintenant on va écouter les vrais. (plusieurs élèves: je suis dans Vrai et je passe dans Faux.) . Vous êtes dans Vrai ...Qui passe de Vrai à Faux ? Six, d'accord, et bien tout le monde est passé dans Faux. ...Le dernier dans Vrai c'était Baptiste ? Thomas ? Oui bon il y a quelqu'un qui s'est perdu en cours de route je ne sais pas où il est. Et je suis d'accord avec vous, ici c'est faux. Et vous n'avez pas mis longtemps à vous mettre d'accord là-dessus : vous devenez des champions. Alors "il existe un réel u tel que pour tout réel m, on a m +u = 2".

[>Le professeur] : J'ai besoin que tout le monde se fasse vraiment une idée, Orlane, c'est bon ? Pour ça ?

[>Orlane] : Non.

[>Le professeur] : Non alors je te laisse une minute. Evann c'est bon tu as une idée ?

[>Le professeur] : Allez. [6111.3] Je vous fais voter. Je monte les enchères. Qui met sa tête à couper que C3 est vrai ? Un. Qui met sa tête à couper que C3 est fausse. Il y en a beaucoup. J'espère pour eux qu'ils la garderont, parce que sinon je vais perdre beaucoup de têtes. Qui se met dans Autre ? deux. [6196.3] Donc vingt-cinq dans Faux. On va écouter les Autres. Elsa ?

[>Elsa] : Je ne sais pas.

[>Le professeur] : Je ne sais pas, Elsa, d'accord. Ensuite Marine ?

[>Marine] : Pour moi ça dépend si on peut considérer que u est égal à m. Si on peut considérer que u est égal à m, alors c'est vrai.

[>Le professeur] : Attends tu as dit si on peut considérer que u est égal à m. D'accord et pourquoi ça change quelque chose pour toi quand u peut être égal à m. Tu ne sais pas ?

[>Marine] : J'ai vu qu'il y avait beaucoup de personnes dans faux donc...

[>Le professeur] : Ok. Alors Evann va nous expliquer pourquoi il pense que c'est vrai. Pardon, tu passes dans Faux ? Qui va expliquer pourquoi il est sûr que c'est faux ? On pourrait changer un petit peu. Hadrien on l'a entendu super souvent, ainsi que Maxime. Je les aime bien mais... L'histoire qu'on entende deux trois personnes qu'on entend rarement. Juliette ?

[>Juliette] : Il existe un réel u, par exemple on choisit quatre, pour que tout réel m, si on prend deux ou quatre c'est le même, enfin il faut que ça vérifie pour tous les réels. Donc par exemple si on prend un autre réel, par exemple un. Donc quatre plus un ça va faire cinq.

[>Le professeur] : Fabio, tu voulais rajouter quelque chose. Non ? Marine ?

[>Marine] : ????

[>Le professeur] : Ah tu passes dans faux. Louis ?

[>Louis] : Je vais essayer d'expliquer pourquoi je suis dans Faux. Pour que cette phrase soit vrai, il faut trouver un réel u, donc on en prend un, pour lequel pour tous les autres réels en fait m + u marcherait pour tous les réels, c'est à dire on en prend un, et après m + u=2 ça marche à chaque fois. Et on ne change pas ce u mais m on le change. Parce qu'en fait à chaque fois il y en a un quand prend et un qu'on teste en fait. Et là celui qu'on prend c'est u et celui qu'on teste c'est m et on ne peut pas en trouver qui fonctionne pour tous les même.

[>Le professeur] : Sébastien tu veux rajouter quelque chose ?

[>Sébastien] : Ouais, je suis dans faux et je peux donner un contre-exemple en fait.

[>Le professeur] : Vas-y!

[>Eleve] : Si on prend m=1 et u=1 ça va faire deux.

[>Le professeur] : Attends j’écris : contre-exemple. m = 1 u = 1 m + u = 2 ça fait deux.

[>Sébastien] : On peut avoir deux seulement avec u égal un.

[>Hadrien] : Non u = 2 et u = - 8 et u = 25

[>Sébastien] : Si m égal à un, pour faire deux, il faut forcément que u soit égal à un. Donc on garde u on change m. On prend m = 2 par exemple.

[>Le professeur] : m = 2. [6449.3]

[>Sébastien] : et u = 1 et ce sera égal à trois. Donc avec ça on voit que pour m = 1, il n'y a que u = 1 qui marche mais u = 1 ne marchera pas pour un autre m. Donc ça ne marche pas.

[>Le professeur] : D'accord. Maxime !

[>Louis] : Je voulais répondre à Sébastien.

[>Le professeur] : Oui je sais mais j'espère que Maxime va répondre aussi.

[>Maxime] : Non je passe de Faux à Autre.

[>Le professeur] : De Faux à Autre. Alors tu nous expliques pourquoi.

[>Maxime] : Parce qu'en fait j'ai des arguments vrais et j'ai des arguments Faux. Et je ne sais pas trop...

[>Le professeur] : Vas y donne les arguments vrais puisque c'est les arguments qui n'existent pas trop dans la salle, les argument Faux ils vont être d'accord avec toi.

[>Maxime] : Les arguments vrais, il y a, ben comme il a mis m = 1 et u = 1, ça pourrait être vrai. Mais si on prend u = 1 et m = 500000, ça ne marchera pas.

[>Le professeur] : D'accord. Marine veut répondre.

[>Marine] : On a vu en maths que si c'est vrai deux fois mais c'est faux une fois alors c'est faux.

[>Louis] : Marine, ça marche c'est vrai que pour les conjectures, c'est à dire que pour les questions ...ça ce n’est pas une conjecture. En fait ce qu'il a fait Sébastien c'est un contre-exemple.

[>Sébastien] : C'est marqué "quelques conjectures".

[>Louis] : Ah ben (Rires dans la classe).

[>Le professeur] : Oui mais elles n'ont pas toutes la même forme.

[>Louis] : Oui voilà. Elles n'ont pas toutes la même forme et dans ce cas-là, ce qu'il a fait Sébastien ça ne prouve rien du tout. Ça prouve juste que ça ne fonctionne pas pour u=1 mais peut-être qu'il n'a pas trouvé le bon contre-exemple.

[>Sébastien] : Oui c'est dans l'autre sens qu'il faut le dire. Il n’a peut-être pas trouvé le bon exemple, le bon réel u.

[>Sébastien] : Non mais je l'ai dit dans le mauvais sens en fait.

[>Orlane] : Il y a qui dans Vrai maintenant ?

[>Le professeur] : Il n'y a plus Vrai. Il y a Maxime d'un seul coup qui...En fait vous n'êtes pas d'accord avec les raisons pour lesquelles vous pensez tous que c'est faux. Ce n'est pas que vous êtes en désaccord sur la phrase, en gros tout le monde est d'accord, mis à part trois, mais par contre vous n'êtes pas du tout d'accord sur les raisons. Alors on n’a pas le temps de regarder plus loin les raisons. Si j'ai le temps je vous donnerai ...je clarifierai le débat qui a eu lieu sur C3 mais là je voudrais juste qu'on regarde la dernière avant qu'on ait plus le temps. "Il existe x tel que pour tout réel y on a $y^2 - 1 > x$ ». Je vous signale que pour l'instant vous faîtes pratiquement du 100% d'interprétation correctes.

[>Le professeur] : Allez ...C4 "il existe ..." qui pense que c'est vrai, qui pense que c'est faux, personne, qui se met dans Autre quatre. Qui a un argument pour finir C4. Hadrien ? Si on prend $x = - 2$ et bien le plus petit carré c'est 0 et moins un ça fera moins un et x sera plus petit. Vous êtes tous d'accord avec cette proposition-là ?

[>Les élèves en chœur] : Oui.

[>Le professeur] : Ok, merci bon travail !

12. Déroulement de la situation sur la limite

Nous décrivons, ici, le déroulement des cinq phases de la situation des limites.

a) Déroulement de la Phase I

Voici les trois conjectures étudiées lors de cette phase :

C0 : « Si f est une fonction définie sur R et $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$ alors elle a une limite quand x tend vers + infini »

C0' : « Si une fonction f est strictement croissante sur R alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ »

C0" : « Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f est une fonction croissante sur R »

Voici certains des arguments qui illustrent certaines des connaissances au début de l'étude de la conjecture C0 :

Hadrien propose pour C0 la fonction sinus comme contre-exemple mais n'est pas certain d'avoir raison, autrement dit ne sait pas si cette fonction a une limite ou pas quand x tend vers l'infini. Il explique d'ailleurs qu'il connait la sinusoïde de la fonction sinus mais n'est pas certain que ça dure jusqu'à l'infini. La fonction sinus est bien un contre-exemple de C0 mais un peu plus tard sous la demande de Nathan, Hadrien va expliquer sa conception de la limite, conception de type borne avec non prise en compte de la condition sur x. On peut alors comprendre que la fonction sinus n'est pas un contre-exemple pour Hadrien pour les raisons standards :

> [>Hadrien] : Et bien c'est quand la fonction se termine. Quand elle ne peut pas aller plus loin que la limite. Il va dessiner un graphe pour expliquer sa conception de la limite :

Figure 46 : La limite selon Hadrien

> En expliquant : [>Hadrien] : Comme ça ! Sa limite c'est zéro !
>
> Et il rajoute :
>
> [>Hadrien] : Et si la limite juste avant elle faisait comme le sinus, sa limite ça n'aurait pas été moins un ici, quoi. Ça aurait été zéro.
>
> [>Le professeur] : D'accord. Tu dis là elle s'arrête donc c'est sa limite, c'est zéro.
>
> [>Hadrien] : Ouais. Et ce n'est pas moins un car elle descend jamais en dessous de moins un.

Marine, toujours pour C0 confond variable et fonction en expliquant que lorsque x tend vers l'infini alors la limite est l'infini, mais se demande si on peut considérer que plus l'infini est bien une limite. Ce à quoi, Baptiste va répondre : « Dans son nom, en lui-même, l'infini ça ne peut pas être une limite. ».

Evann a un peu la même conception de la limite comme borne :

> [>Evann] : Parce que je ne sais pas si la limite c'est forcément que ça finit sur un nombre ou que ça a besoin de... par exemple, qu'elle longe un nombre mais sans jamais le dépasser.

Il prend alors l'exemple de la parabole en zéro et se demande si la limite c'est zéro.

Le vocabulaire qui est utilisé dans un premier temps est emprunté au domaine des suites, ainsi Maxime explique :

> [>Maxime] : Parce que la fonction 1/x quand x va vers l'infini, alors la fonction converge vers zéro.

Mais au fur et à mesure de la situation, les connaissances sont régulées autours d'arguments contradictoires entre pairs et les institutionnalisations du professeur. Ainsi, Matthieu va décrire pourquoi la limite de la fonction inverse est zéro en l'infini :

> [>Mathieu] : Ben au fur et à mesure que x devient de plus en plus grand, 1 / x se rapproche de plus en plus de zéro.

Et Loïc explique ce qu'est pour lui la limite de la fonction x^2 en zéro en réponse à la proposition de Evann au sujet de la parabole, en utilisant une formulation mixte (limite/converger) mais aussi mettant en avant, lui aussi, la conception pragmatique visée « se rapproche de » :

> [>Loïc] : Pour moi elle n'a pas de limite parce que plus x devient grand, on n'a pas la fonction qui converge... qui se rapproche de... là ça sera zéro je pense. Enfin plus x devient grand, la fonction ne se rapproche pas de zéro.

Ce passage des suites aux fonctions se perçoit aussi dans les dessins. Par exemple, quand Carla vient au tableau tracer un contre-exemple à la conjecture C0', elle commence par tracer ce dessin :

Figure 47 : Premier contre-exemple de Carla à la conjecture C0'

Puis elle se ravise car elle prétend avoir tracé le graphe d'une suite et propose un nouveau

dessin :

Figure 48 : Deuxième contre-exemple de Carla à la conjecture C0'

Pour ce qui est de la légitimation du dessin, de nombreux dessins sont effectués par les élèves pour illustrer leurs arguments et on peut penser que le dessin acquiert droit de citer au terme de

cette situation. On voit certains questionnements cependant à propos des fonctions censées être données par dessin, ce qui ne convient pas à certains qui se demandent comment sont définies ces fonctions. Ainsi, par exemple, Caroline s'interroge au sujet de la fonction sinus qui a été tracée par Hadrien.

> [>Caroline] : Oui. Et puis je pense que la fonction sinus, elle est bien plus compliquée que ça en fait.
>
> [>Le professeur] : Autre. Elle est plus compliquée que quoi, en fait ?
>
> [>Caroline] : Que... enfin par exemple... Les fonctions on peut trouver x en faisant l'équation. Mais là on ne connaît pas la fonction sinus, en fait.

Ainsi, pour Caroline, la fonction sinus n'est pas comme une fonction habituelle, elle ne correspond pas à une équation. Nous pensons qu'elle parle là de formulation algébrique. Le dessin n'est pour elle pas adapté pour concevoir une fonction dans le contexte de cette conjecture. Maxime va en réponse venir au tableau lui tracer le cercle trigonométrique pour montrer comment on obtient la fonction sinus mais cela ne convaincra pas Caroline qui a une idée des fonctions sous forme de formule :

> [>Caroline] : Oui justement, pour moi ce n'est vraiment pas une fonction c'est pas une fonction affine, par exemple.

De la même façon, quand Carla vient dessiner son contre-exemple pour C0', Marine va se demander si cette fonction correspond à une fonction connue, c'est-à-dire, pour elle, définie :

> [>Marine] : C'est la fonction racine carrée ?
>
> [>Le professeur] : Ah, non... je ne sais pas Carla elle n'a pas dit. Est-ce que c'est la fonction racine carrée ? Carla ?
>
> [>Carla] : Non ce n'est pas racine carrée.
>
> [>Le professeur] : Ça te sert à quoi Marine de savoir si c'est la fonction racine carrée ou pas ?
>
> [>Marine] : Ben c'est parce que du coup ?????juste pour dire que c'est une fonction.
>
> [>Le professeur] : Juste pour dire que c'est Faux ?
>
> [>Marine] : Que c'est une fonction !
>
> [>Le professeur] : Oui mais tu doutes parce que ça, ce n'est pas forcément une fonction pour toi ? (il montre le dessin).[1:02:18] Si je comprends bien ce que tu dis?
>
> [>Marine] : Si, c'est faux mais je ne sais pas si elle est définie.

Nathan, s'interroge, lui, sur la définition de la limite :

> [>Nathan] : Je disais que j'étais dans Autre parce que je ne savais pas trop comment définir exactement la limite, et je me dis pourquoi une fonction n'aurait pas deux limites. Et sur la fonction sinus, ce serait -1 et 1. Elle aurait une limite positive, une limite négative, mais elle aurait quand même une limite.

b) Déroulement de la Phase II

La phase II est prévue pour commencer à donner un sens à certains formalismes liés à la notion de limite, ici celui du voisinage de l'infini. Le scénario consiste à étudier consécutivement les conjectures suivantes :

C1 : « Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ alors $f(x) < g(x)$ pour tout x de R »

C2 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors $f(x) < g(x)$ *du côté de + infini* » (ou tout autre formulation des élèves destinée à « réparer » C0 en modifiant sa conclusion)

C3 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors il existe un nombre A tel que pour tout $x > A$ on a $f(x) < g(x)$ »

L'étude de la conjecture C1 commence par l'argument proposé par Erika pour montrer que la conjecture est fausse :

> [>Erika] : Alors là, on voit que la limite de f(x) elle est... ici, et elle est inférieure à celle de g(x) donc là (la conjecture). Par contre on voit qu'ici, g(x) est inférieur à f(x).

Figure 49 : Argument d'Erika pour la fausseté de C1

Cet argument correspond à la recherche de la limite d'une suite définie par récurrence en prenant l'intersection de la fonction f qui la définie avec la droite x = y. Il y a là une persistance des limites de suites dans l'étude de celle des fonctions. Aussi, Amaury demande des explications :

> [>Amaury] : Pourquoi tu utilises les suites, c'est un peu hors-sujet.
>
> [>Erika] : Ben pour moi c'est une fonction... enfin...
>
> [>Amaury] : Voilà c'est ça... peut-être je l'ai mal dit mais... explique-moi un peu parce que moi je ne comprends pas trop.
>
> [>Erika] : Ben, pour moi ce n'est pas une suite.
>
> [>Le professeur] : Donc, pour toi Erika, ça, ce n'est pas une suite, c'est une fonction ?
>
> [>Erika] : Oui.
>
> [>Amaury] : Pourquoi u0 alors ?
>
> [>Erika] : Ah oui, non ah ben là je ne sais plus.
>
> [>Baptiste] : Pourquoi la limite de f(x) c'est le point d'intersection de y = f(x) et y = x ?
>
> [>Erika] : Parce que, initialement, j'avais fait une suite, ouais c'est vrai. J'avais fait droite courbe donc ça ne marche pas.
>
> [>Le professeur] : Ah oui, tu crois que c'est une confusion en fait ?
>
> [>Erika] : Oui, non mais oui, en fait je l'ai confondu.

Dès que Amaury demande des explications, et pose des questions, elle se met à douter de sa proposition et comprend progressivement qu'elle parle de suite et non de fonction contrairement à ce qu'elle croyait. Ensuite, Marine vient tracer au tableau le contre-exemple qui fait l'unanimité et C1 est déclarée fausse.

> [>Le professeur] : Bon, Marine ça fait un moment qu'elle voulait venir au tableau. Marine, Marine ! Tu as ce tableau-là. (Marine vient au tableau pour dessiner).

Figure 50 : Le contre-exemple de Marine pour la conjecture C1

Le professeur demande alors de réparer la conjecture C1, c'est-à-dire de modifier la conclusion pour qu'elle soit vraie tout en gardant l'idée que cette conjecture contient : l'ordre des limites donne l'ordre des fonctions. La première conjecture qui est proposée est C2 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors $f(x) < g(x)$ en au moins un x ». Mais Victor qui a proposé cette conjecture y renonce quand Hadrien lui suggère que « Victor il nous dit que comme la limite de *f* est plus petite de *g* et bien la limite de *f* est plus petite que la limite de *g*. » en ajoutant que : ce n'est pas utile mais c'est vrai ». Vient ensuite une autre proposition, celle de Sébastien C2' : « Si la limite de $f(x)$ est inférieure à la limite de $g(x)$ alors $f(x)$ est majorée par la limite de $g(x)$. ». Cette conjecture convainc la moitié de la classe tandis que l'autre la pense fausse. Nous allons maintenant étudier comment une proposition de contre-exemple est progressivement aménagée par les élèves eux même pour convaincre finalement de la fausseté de C2.

Figure 51 : Le contre-exemple d'Hadrien à la conjecture C2

[>Hadrien] : Et on voit que la limite de g(x) elle ne majore pas f(x).

Maxime n'est pas d'accord avec le contre-exemple de Hadrien et vient montrer au tableau que selon son dessin, la limite de *f* est inférieure à celle de g, et que *f* est bien majoré par la limite de *g*, en rajoutant sur le dessin des traits manifestant la hauteur de la limite. En adoptant la même conception qu'Hadrien mais « de l'autre côté » il montre à Hadrien, involontairement, l'insuffisance de son dessin.

Figure 52 : La modification par Maxime du contre-exemple d'Hadrien

Ce à quoi Hadrien répond :

> [>Hadrien] : Alors je l'avais dit à l'oral, mais je ne l'avais pas dessiné, la limite, pour moi, elle était au bout.

Mais Louis ne semble plus comprendre ce qui est dessiné :

> [>Louis] : J'ai voté... euh... Faux. Mais là je suis un peu perdu mais c'est pour répondre à Hadrien. Là dans son contre-exemple, g(x) il majore f(x).
>
> [>Hadrien] : Non la limite...
>
> [>Louis] : Oui la limite de g(x)... f(x) est majorée par la limite de g(x). Donc, c'est plutôt un exemple.

Hadrien est revenu au tableau pour compléter son dessin :

Figure 53 : Modification par Hadrien de son contre-exemple de C2

> [>Hadrien] : Tu vois bien où est la limite de g(x) ?
>
> [>Louis] : Ouais !
>
> [>Hadrien] : Et tu vois que la fonction... et tu vois que le trait bleu il est au-dessus de cette limite ?
>
> [>Louis] : Le trait bleu ?
>
> [>Hadrien] : Là, tu as la limite de g(x) et tu vois bien que la fonction elle est au-dessus.
>
> [>Louis] : Ouais d'accord !

Cette ultime modification entraine l'adhésion de ceux qui pensaient vraie la conjecture qui changent et la déclarent fausse. Comme ensuite aucune autre proposition correspondant au questionnement (établir que l'ordre des limites donne l'ordre des fonctions de manière valide) n'est faite pour réparer C1, c'est le professeur qui propose C3 : « Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors il existe un nombre A tel que pour tout $x > A$ on a $f(x) < g(x)$ ». Le même phénomène va se produire pour cette conjecture C3 qu'avec C2. Il y a de nombreux élèves qui se sont mis dans Autre parce qu'ils ne comprennent pas la conjecture. Evann vient au tableau pour expliquer pourquoi la conjecture est vraie en dessinant un exemple. Cet exemple est cor-

rect sauf pour l'emplacement du A qui va donner lieu à une longue discussion et des modifications qui vont essentiellement convaincre le tiers de la classe qui était dans Autre et ne comprenait pas la conjecture. Initialement, Evann pour expliquer à ceux qui ne comprennent pas la conjecture va tracer le dessin suivant :

Figure 52 : Exemple de C3 d'Evann

On peut voir que Evann place le A sur l'axe des ordonnées. Puis Evann se ravise :

> [>Evann] : Du coup, là c'est faux. Parce que du coup, x il est inférieur à A et f(x) il est aussi inférieur à g(x).

Ainsi Evann exprime une conception du quantificateur existentiel comme l'endroit à partir duquel la propriété doit être vérifié. Il modifie alors son dessin en conséquence :

Figure 53 : Exemple de C3 modifié par Evann

Et il explique :

> [>Evann] : Là on voit que, à partir de A, quand x est supérieur à A, on voit que la courbe elle devient... que f devient inférieur à g. Alors que quand A est inférieur à x, g est inférieur à f.

Mais baptiste n'est pas d'accord avec l'emplacement du A :

> [>Baptiste] : Vu que c'est un point, il faudrait que tu le mettes... enfin moi je le mettrais sur l'axe... non sur le point d'intersection de f et g.

Figure 54 : Exemple de C3 de Baptiste

Le A de Baptiste est maintenant à l'intersection des deux courbes. Puis Baptiste se ravise :

> [>Baptiste] : Il faut que pour tout x, il y ait un point A euh... Ah non, en fait, ce n'est pas un point A, moi je le mettrais plus là (sur l'axe des abscisses).

Et il dessine :

Figure 55 : Exemple de C3 modifié par Baptiste

Mais Maxime n'est pas d'accord avec le fait que le A doit se positionner forcément à l'abscisse de l'intersection, on peut le placer après.

> [>Maxime] : Ben pour moi, en fait, entre les trois schémas, le point A est bien positionné de partout parce qu'en fait il suffit juste que g(x) soit supérieur à f(x), en fait. Et pour le premier schéma, même s'il n'y a pas d'intersection, on s'en fout, on a jamais demandé que avant A g(x) soit inférieur à g(x). Enfin même si elle est au-dessus, on peut mettre un point n'importe où, ce n'est pas grave.

Ce à quoi Nathan répond que A n'est pas un point mais une valeur et qu'il n'est pas important de placer A :

> [>Nathan] : C'est juste pour dire que dans la conjecture on parle pas de point, on parle juste de A, et donc, pour moi, c'est une valeur, ce n'est pas forcément un point. C'est une valeur et on compare la valeur de x avec la valeur de A. [>Nathan]: Ben, c'est-à-dire on se fiche de la place du point A, ce qu'on veut savoir, c'est la valeur de A, pas le point A à placer.

Marine explique qu'un point donne une valeur :

> [>Marine]: A partir du moment où il y a un point il y a une valeur avec ce point.

Caroline insiste sur le fait qu'il faut le placer sur l'axe des abscisses :

> [>Caroline]:Il faut que soit égal à x, donc, il faut qu'il soit sur l'axe des abscisses. (plusieurs élèves: ouais)

Baptiste répond à alors à Maxime :

> [>Baptiste]: Oui Maxime, je l'ai placé au point d'intersection, parce que c'est le premier des A, comme dirait Nathan, il y en a plein, mais oui c'est sûr qu'il peut être... en fait le point A il est plutôt sur l'intervalle... le point A en rouge que j'ai mis, entre le point A que j'ai mis et + infini.

Et Hadrien se ravise et commence à douter en proposant le dessin :

Figure 57 : Hadrien propose un emplacement problématique du A

> [>Hadrien]: Et ici par exemple... ici le x est ici et je ne sais pas si la fonction f(x) est plus grande que la fonction g(x).

Et maxime lui répond :

> [>Maxime]: Ben je pense que son schéma, il ne marche pas.[40:06] Parce que le A, il doit être à droite de l'intersection.[40:11] Enfin il faut que g(x) soit supérieur à f(x) et on peut très bien placer un point. Si on le place à droite, plus à droite. Est-ce qu'on peut placer... il existe un point A? Donc, oui on peut faire un point A qui serait à droite de l'intersection.

L'essentiel de la classe est maintenant convaincu de la vérité de C3. Seuls trois élèves restent dans Autre. Une institutionnalisation est réalisée l'heure suivante pour faire le point sur les différents aspects étudiés lors des trois premières conjectures, en particulier la problématique locale/globale, la notion de voisinage de l'infini et enfin les règles d'interprétation du quantificateur existentiel. Puis la conjecture C3 est redonnée au vote, cette fois-ci avec des règles claires sur la quantification existentielle. Tout le monde vote vraie la conjecture et seuls trois restent dans Autre (les même qu'à la séance précédente).

c) Phase III

Cette troisième phase a pour objectif de déstabiliser la conception de limite des élèves afin de laisser de la place à la notion de limite formalisée par sa définition en epsilon/alpha. En particulier, on donne des fonctions dont la limite parait de plus en plus difficile à évaluer avec les seules conceptions des élèves, ce qui devrait conduire à l'émergence d'un doute les concernant.

i. Description globale

Décrivons d'abord globalement la phase III et commençons par donner les résultats aux votes aux conjectures successives, votes significatifs du déroulement.

	Conjecture Lim en + infini=2,9	Vrai	Faux	Autre	Durée
Le « monstre »	Cf	0	29	0	35->46
Hauteur H des pics décroissante	Cf_1 (vote initial)	17	0	11	1 :00->1 :21
	Cf_1 (Vote final)	15	4	6	
H strictement décroissante	Cf_1' (vote initial)	22	0	7	1 :24->1 :34
	Cf_1' (vote intermédiaire)	0	23	6	1 :34->1 :40
H tend vers 0	Cf_2	23	1	5	1 :44->1 :46

Tableau 46 : résultats aux votes successifs phase III

Le vote initial sur le « monstre » (Cf : « limite de f en + ∞ est 2,9) intervient après que son statut (Exemple, Contre-Exemple, Hors-Sujet) pour la conjecture C3 (« Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x)$ alors il existe un nombre A tel que pour tout $x > A$ on a $f(x) < g(x)$ ») ait été discuté. Cette discussion a déjà fortement mis en cause la limite en l'infini du monstre. Ce vote sur Cf est catégorique : le « monstre n'admet pas de limite de 2,9 en + ∞. Les raisons qui vont être avancées sont nombreuses. En particulier, certains pensent que la limite ne peut pas être dépassée, d'autres ont une conception « borne » de la limite et pour eux la limite est 3,1 (le sommet des pics), d'autres soutiennent que la limite « c'est quand ça se rapproche et que là ça se rapproche ni de 2,9 ni de 3,1 » et d'autres encore qu'une fonction ne peut pas être égale à sa limite. On remarque que bien que les élèves soient d'accord sur la fausseté de Cf, ils discutent âprement

la validité des arguments donnés pour le prouver et utilisent des réfutations (nous verrons cela en détail plus tard).

La conjecture Cf_1 est alors étudiée, le vote initial est réparti entre Vrai et Autre. Certains élèves ayant voté Autre se demandent si la hauteur des pics « tend » vers 2,9 et d'autres se demandent s'il y a des pics jusqu'à l'infini, si c'est le cas alors il n'y a pas de limite et si ce n'est pas le cas alors il y a une limite. Enfin, certains ayant voté Autre expriment la difficulté de statuer sur une fonction non monotone car ils prétendent que leurs seules connaissances des limites reposent sur des fonctions monotones. Louis vient alors au tableau essayer de proposer sa vision de la limite pour répondre à toutes les conceptions qui ont vu le jour, proposition qui bat en brèche la plupart d'entre elles (Nous détaillons cela plus tard). C'est alors que Quentin demande à changer d'avis en passant de Vrai à Faux et explique que le fait que la hauteur des pics soit décroissante ne signifie pas que cette hauteur n'est pas constante (il faudrait pour éviter ce cas qu'elle soit strictement décroissante). Or, si cette hauteur est constante, l'étude de ce cas particulier de Cf_1 revient à étudier Cf, qui a été jugée fausse. Cette proposition est peu prise au sérieux car le professeur avait dit « les pics deviennent de plus en plus petits ». Le vote qui clôt cet épisode est marqué par un léger changement vers Faux. Le professeur ajoute « la stricte décroissance » pour une nouvelle variante de Cf_1 que l'on nommera Cf_1'. Cette fois le vote initial donne une grande majorité de Vrais. Survient un coup de théâtre quand Hadrien propose une situation où la hauteur des pics est bien strictement décroissante mais a une limite non nulle. On se retrouve alors quasiment dans la situation de Cf. La classe bascule alors pour le Faux.

Enfin, la conjecture Cf_2 est proposée, elle reprend Cf_1 mais avec une hauteur des pics qui a pour limite zéro. Cette conjecture est déclarée vraie par la grande majorité et sera peu discutée. Mais Caroline qui garde un doute, rappelle que bien que les pics soient très étroits, il y a infinité de points où la fonction s'écarte de sa limite.

ii. Description locale : une forme de réfutation

Pour l'étude de Cf, Caroline exprime une conception de non dépassement de la limite pour expliquer pourquoi elle pense que Cf est fausse (toute la classe a voté Faux), et Maxime qui lui répond aussitôt.

> [>Caroline] : Pour moi f n'admet pas de limite en 2,9 parce qu'elle est croissante... elle est strictement... enfin elle dépasse 2,9. Avec le sommet des pics c'est 3,1.
>
> [>Maxime] : Je pense que ce n'est pas parce qu'elle dépasse 2,9 qu'elle n'a pas de limite. Et je pense que la limite c'est 3,1.

Loïc immédiatement enchaine pour témoigner son désaccord avec la proposition de Maxime en témoignant ainsi de deux conceptions de la limite, celle de « se rapprocher » et celle de l'impossibilité que f(x) égale sa limite :

> [>Loïc] : Pour moi ce qu'a dit Maxime c'est faux. Parce qu'une limite, c'est un nombre vers lequel la fonction fait que de se rapprocher. Et la fonction déjà elle est égale à 3,1 donc ça ne peut pas être une limite 3,1 et tous les... tous les dix puissance six, la fonction s'éloigne de 3,1 aussi.

Loïc précise sa pensée en se fondant sur une forme prototypique de la sinusoïde et cherche ainsi à sortir de sa propre subjectivité :

> [>Loïc] : C'est se rapprocher pour tout x alors que là, pour tout x des fois ça se rapproche, des fois

ça s'éloigne. C'est comme la fonction sinusoïdale. Il n'y a pas de limite.

Loïc exprime la conception « se rapprocher » de manière explicite, il s'agit d'une fonction qui a pour propriété que sa distance à sa limite est une fonction décroissante[79]. Et puis Sébastien qui va réfuter chacune des conceptions précédentes en se fondant, non sur la théorie puisqu'elle est indisponible, mais sur les éléments reconnus collectivement du concept de limite. Le débat commence à se durcir :

> [>Sébastien] : C'était juste pour dire que, en fait, je n'étais pas d'accord avec la plupart des arguments.
>
> [>Le professeur] : Ah ouais, carrément ! Alors tu vas nous expliquer pourquoi.
>
> [>Sébastien] : Donc, pour l'argument de Caroline, le tout premier, je ne suis pas d'accord parce qu'il y a des fonctions décroissantes, on l'avait fait pour contrer... pour contrer la conjecture deux je crois, c'était si la limite de f est inférieure à la limite de g alors limite de g majore f.
>
> [>Le professeur] : Ah oui, on avait fait des fonctions qui étaient comme ça (il dessine une fonction décroissante qui a une limite). C'est ça ?
>
> /…./
>
> [>Sébastien] : Ensuite c'est l'argument de Maxime, j'avais envie de dire que la fonction, elle est du même genre que la fonction sinus. Or la fonction sinus, elle n'a pas de limite. Donc, on ne peut pas dire...
>
> [>Le professeur] : Ah oui tu dis : là, la limite c'est 3,1 un c'est ça l'argument, et tu dis, moi je ne suis pas d'accord parce que la fonction qui est là c'est comme une fonction sinus. Or la fonction sinus n'a pas de limite. Donc, tu ne vois pas pourquoi celle-ci aurait une limite.
>
> [>Sébastien] : Oui.
>
> [>Le professeur] : D'accord.
>
> [>Sébastien] : Et ensuite la première chose qu'a dit Loïc c'est faux parce que pour une fonction constante sa limite c'est la constante donc f (x) peut être égale à la limite.

On voit que Sébastien n'utilise pas, essentiellement, ses propres conceptions pour expliquer son désaccord, comme l'ont fait les précédents, mais choisi des cas reconnus contradictoires avec chaque conception exprimée pour invalider celles-ci. Il est entré dans une forme de réfutation. Quentin va continuer sur cette lancée en exprimant son désaccord avec l'argument de Caroline :

> [>Quentin] : C'était son tout premier Faux pour Caroline, je vais prendre comme exemple la fonction 1/x. La fonction 1/x où au départ la fonction est en dessous de zéro. Quand on passe zéro elle est au-dessus de zéro. /…./ Elle est des deux côté de zéro. Alors que zéro c'est la limite. Pourtant ça revient au même que là-bas.

Aussitôt, Caroline révise sa formulation, changeant le type de conception que l'on peut lui attribuer, il semble maintenant s'agir d'une conception où f(x) ne peut être égal à la limite.

> [>Caroline] : Enfin, je ne sais pas si c'est parce qu'il ne comprend pas ce que je veux dire mais en gros, enfin, pour moi on ne peut pas entraver la limite. On ne peut pas passer dessus, quoi.

Conception qu'elle confirme ensuite, mais avec une nuance de « se rapprocher » :

> [>Caroline] : Toi, tu as compris comme Sébastien : dépasser sa limite dans le sens de la hauteur. Mais c'est, peu importe que la limite soit au-dessus ou en dessous, tu ne peux pas la couper... et revenir.

[79] Pour les fonctions continues cela implique que la fonction soit monotone.

Louis n'est pas d'accord avec cette conception et veut s'assurer du désaccord, alors il demande :

> [>Louis] : Je ne sais pas vraiment si... donc par exemple imagine une limite comme ça et une fonction qui ferait comme ça. C'est... je ne sais pas ce que tu en penses ?

Figure 55 : Dessin de Louis à propos des limites qui sont coupées

Ce à quoi Caroline répond et Louis peut alors exprimer son désaccord :

> [>Caroline] : Dans ce cas ce serait la limite mais sur un intervalle.
>
> [>Louis] : Ah, tu penses que ce n'est pas la limite de la fonction f ?
>
> [>Caroline] : Non.
>
> [>Louis] : Ben moi je pense que si.

Vient ensuite l'étude de la conjecture Cf_1 sans que le professeur n'ait donné son avis pour la première conjecture Cf. Le vote réparti la classe entre f_1 a une limite ou Autre. Ce sont les Autres qui s'expriment en premier. Aya se demande si les pics continuent d'exister jusqu'à l'infini car dans ce cas pour elle, il n'y a pas de limite, sinon il y en a une :

> [>Aya] : Ben je ne sais pas si vers + infini, au bout d'un moment on va quand même avoir un pic ou on ne va pas en avoir. Parce que si on ne va pas avoir de pic, ça veut dire que la limite est deux virgule neuf. Et si on en aura quand même et bien il n'y aura pas de limite.

Caroline, elle, commence à réaliser son manque de connaissances et l'insuffisances de ses propres conceptions pour le cas proposé. Au passage, on remarquera la persistance d'un vocabulaire concernant les suites, mais celui-ci devient rare :

> [>Caroline] : Pour l'instant les limites que je connais, pour moi, c'est une fonction qui est strictement croissante et qui converge vers la limite ou alors c'est décroissant. Alors que là, c'est croissant, décroissant, et je ne sais pas si du coup c'est la limite ou pas.

Et Maxime lui exprime un autre manque, celui des informations nécessaires pour résoudre cette conjecture :

> [>Maxime] : Moi je voudrais juste savoir si le fait qu'elles soient décroissantes ça décroît par proportionnalité ou pas. Et c'est tout. Enfin pour moi c'est comme si on demandait : "Quelle est la couleur". On ne demande pas la couleur de quoi. Il manque une information en fait. Enfin, personnellement, je n'ai pas assez d'élément pour résoudre cette conjecture.

Et Juliette, elle, explique que sa position dépend de si les pics tendent ou pas vers 2,9. Elle devance ainsi (ou initie) le contre-exemple de Cf_1 qui sera donné beaucoup plus tard :

> [>Juliette] : En fait je serais dans Vrai si les pics tendaient vers 2,9. S'ils sont décroissants. Ils peuvent être décroissants et avoir une limite aussi.

Enfin, Louis qui pense vraie Cf_1 intervient, apparemment pour mettre de l'ordre (« Moi j'aimerais bien apporter... enfin il y a pleins de gens qui sont Autre et aimeraient avoir des informations, moi je veux bien apporter... ») dans ce qui apparait comme une confusion générale et des conceptions contradictoires :

> [>Louis] : Alors problème de limite, il y a plusieurs cas. Alors tout d'abord on a le cas genre comme la sinusoïde. Où on a une fonction qui fait comme ça, à peu près. Et là on dit qu'il n'y a pas de limite. Vous êtes d'accord ? (Les élèves mollement : oui !). Ensuite il y a un autre cas, c'est le cas où la fonction elle fait comme ça. Comme ça. Et donc là je ne sais pas si vous êtes tous d'accord, mais la limite pour moi c'est cette valeur-là. Elle est des fois au-dessus, des fois en dessous mais elle se rapproche de cette valeur. Donc, pour moi la fonction comme ça, la limite c'est comme ça. Ça ne représente pas encore ça mais j'ai une troisième fonction.

Figure 56 : Les trois (non) limite de Louis

> [>Louis] : Et qui représente plus cette fonction-là. C'est qu'est-ce que vous pensez de la fonction qui fait comme ça ? Donc, les pics rétrécissent mais en gros les pics rétrécissent et descendent vers le bas. Et là ce serait la limite de celle-là. Et en fait c'est exactement comme si on avait une limite qui ferait comme ça, sauf qu'il y a des pics et qu'ils rétrécissent. (Rires dans la classe) Et donc pour moi, cette fonction-là, elle a pour limite... elle a pour limite la droite qui est là. Et donc pour moi ici, c'est pareil parce que les pics ils rétrécissent et que ce soient les valeurs qui sont là, ou les valeurs qui sont là, elles se rapprochent toutes de deux virgule neuf à chaque fois. Voilà c'est comme ça.

Quentin va déstabiliser finalement la position Vrai avec son argument sur la simple décroissance qui autorise la hauteur des pics à être constante. La classe ne le suit pas complètement dans la mesure où son message initial apparemment contradictoire laissait supposer que la hauteur était strictement décroissante (les pics sont de plus en plus petit). Le professeur va proposer la réparation de Cf_1' avec « strictement décroissante » en déclarant Cf_1 fausse pour la raison de la simple croissance, sans information supplémentaire.

Vient ensuite l'étude de Cf_1' où la hauteur des pics est donc strictement décroissante. Quasiment toute la classe pense vraie la conjecture, autrement dit que la fonction f_1' a bien pour limite 2,9. Mais quand Hadrien se souvient d'un problème impliquant un saut de puce et qu'il vient dessiner ce qui pourrait s'avérer selon lui un contre-exemple, cela va faire changer des avis.

[>Hadrien] : Moi je suis dans Autre en fait mais c'est un peu bizarre, comme on avait vu le cas d'une puce qui sautait et elle faisait à chaque fois la moitié de sa distance en saut. Et c'était pour savoir si les pics ça pouvait être pareil mais au lieu qu'ils finissent à 2,9, ils tendent vers 3, mais toujours en étant décroissants mais en augmentant les décimales après.

Figure 56 : Le contre-exemple « puce » d'Hadrien

Louis, qui pensait vrai cette conjecture change d'avis et va expliquer pourquoi selon lui, il s'agit bien d'un contre-exemple, en prenant appui sur une minoration et majoration particulières de la fonction, en traçant d'abord une minoration :

Figure 57 : La minoration de Louis

Puis, il va tracer la fonction hauteur des pics et s'explique :

[>Louis] : Je pense que là, la fonction d'Hadrien, elle est minorée ici... ouais les points qui sont là sont minorés en bas et les points qui sont en haut ils peuvent très bien être minorés par 3. Majorés par... non, non, les points sont minorés par 3. Parce que là c'est écrit que la hauteur des pics est décroissante. C'est dit que la hauteur des pics est décroissante. Ici la hauteur des pics peut être décroissante en faisant, en fait... si ça c'est 3, et bien la hauteur des pics peut très bien faire comme ça et ne jamais dépasser trois virgule zéro.

Figure 58 : la fonction hauteur des pics selon Louis

Alors ça finirait un peu comme, pas vraiment mais un peu comme la fonction sinus. Et en fait, elle change entre ici et ici, elle serait pas du tout...elle n'aurait pas de limite en fait. Et donc ça ferait que la conjecture est fausse.

Cependant, Juliette doute quand même qu'une fonction comme celle donnée par Hadrien existe vraiment. S'ensuit une longue discussion sur les raisons pour qu'une telle fonction puisse bien exister. Finalement la grande majorité de la classe déclarera sans limite la fonction f_1'.

La conjecture Cf_2 sera rapidement traitée car une grande majorité la pense vraie. Caroline continuera à avoir des doutes, en particulier la persistance des pics fait que la courbe s'éloigne une

infinité de fois de sa limite. C'est d'ailleurs Caroline qui, lors de l'institutionnalisation, répondra au professeur à propos des raisons des difficultés à concevoir des réponses sûres sur les questions que posent la limite :

> [>Le professeur] : Ben oui. Moi je dis qu'en l'état actuel des choses, dans la classe, il n'y a aucune réponse sûre et certaine à ces questions et je dis donc que ça pose problème puisque ce sont des questions qui se posent évidemment sur la notion de limite. Et même on pourrait dire ça autrement. Ça vient de quoi qu'on ne peut pas répondre à ces questions ? D'après vous ?
>
> [>Caroline] : On n'a pas la définition de limite.

d) Phase IV

La phase IV a pour objectif d'aboutir à la formalisation en epsilon/alpha de la définition de limite. On utilise pour cela l'étude d'une conjecture correspondant au principe fondamental de l'analyse appliqué aux fonctions : « Si f vérifie P1 alors pour tout x > 50 on a $f(x) = 2$ » avec P1 : « Il existe A réel tel que si x est plus grand que A avec x réel, on a pour tout epsilon strictement positif, $f(x)$ est comprise entre deux moins epsilon et deux plus epsilon ». Lorsqu'ensuite on inverse les quantificateurs de la propriété P2 cela donne une propriété P3 et une nouvelle conjecture qui est étudiée et correspond au formalisme de la limite. Nous commençons par une description globale puis présentons un extrait significatif du point de vue de notre modèle d'apprentissage.

i. Description globale de la phase IV

La phase IV commence par un appel à conjecture aux élèves. On leur demande ce qu'on peut conclure sur une fonction f quand celle-ci vérifie la propriété P1: « si x est plus grand que cinquante avec x réel, on a pour tout epsilon strictement positif, $f(x)$ est comprise entre deux moins epsilon et deux plus epsilon ». Plusieurs conjectures sont proposées :

- C1.1 : « Si f vérifie P1 alors f est bornée »
- C1.2 : « Si f vérifie P1 et a une limite alors sa limite est comprise entre deux plus epsilon et deux moins epsilon. »
- C1.3 : « Si f vérifie P1 alors f est bornée par deux moins epsilon et deux plus epsilon à partir de 50. »

Les conjectures C1.1 et C1.2 sont étudiées et résolues. Le professeur demande alors un exemple de fonction qui vérifie P1. Trois exemples sont alors proposés et résolus successivement sous forme de conjectures :

- C1.4 : « Si $f(x) = 2$ alors f vérifie P1. »
- C1.5 : « Si $f(x) = 2 + 1 / x$ alors f vérifie P1. »
- C1.6 : « Si $f(x) = 2$ à partir de 50 alors f vérifie P1 »

Le professeur demande alors d'étudier la réciproque C1.7 de C1.6. Cette conjecture est longuement débattue et finit par être résolue, puis elle est généralisée sans difficulté avec l'étude $C\varepsilon_5$: « Si f vérifie P2 alors $f(x) = 2$ à partir de A » où P2 est la propriété « Il existe A tel que pour tout x supérieur à A on a pour tout epsilon strictement positif, $f(x)$ est compris entre deux moins

epsilon et deux plus epsilon ». Vient ensuite le retournement des quantificateurs avec la conjecture « Si *f* vérifie P3 alors il existe B tel que pour tout x supérieur à B on a $f(x) = 2$ » où P3 est « Pour tout epsilon strictement positif, il existe un réel A tel que pour tout réel x supérieur à A, on a $f(x)$ qui est compris entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. », en demandant si la fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ est un exemple, un contre-exemple ou un hors-sujet de $C\varepsilon_5$. Mais la difficulté du problème pour les élèves oblige le professeur à procéder autrement que prévu pour leur faire comprendre le questionnement. Il demande si la fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ vérifie P3. Il propose alors successivement différentes valeurs d'epsilon tandis que les élèves de trouver le A correspondant. Finalement, il donne à étudier la conjecture : « la fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ vérifie P3 ». S'ensuit un débat où l'interprétation de P3 est très longuement discutée, en particulier son rapport à l'ordre des quantificateurs. Les élèves mobilisent alors les règles de la logique dialogique mais peinent à trouver un consensus pour les adapter au cas particulier étudié. La conjecture est finalement résolue quand pour départager les interprétations, les élèves conscients que deux ordres de quantifications correspondent à deux interprétations possibles font appel aux références issues de la situation du chapitre VII. Les élèves prennent alors conscience que la propriété P3 ne force pas la fonction à être égale à 2 à partir d'un certain nombre. Et lorsqu'ensuite vient la question de savoir ce qu'on peut conclure sur une fonction qui vérifie P3, la réponse des élèves est immédiate : elle a pour limite deux. Le vote qui a lieu à ce moment-là montre que beaucoup adhèrent à cette proposition. Un élève vient au tableau et dessine avec des bandes ce que signifie P3 en terme graphique et pourquoi la fonction qui la vérifie a pour limite deux. Là l'institutionnalisation sur la définition formalisée de la notion de limite est réalisée.

ii. Description détaillée de la phase IV

Dans ce paragraphe, nous commençons par décrire brièvement l'étude des premières conjectures afin de comprendre le contexte dans lequel va être étudié la conjecture correspondant au principe fondamental appliqué aux fonctions. Nous analyserons finement alors le script en termes de niveaux de rationalités.

<u>Première partie</u> : le principe fondamental de l'analyse appliqué aux fonctions

Le début de la phase IV consiste donc à étudier les propositions de conjecture des élèves à propos de fonction qui vérifient P1 : « si *x* est plus grand que cinquante avec *x* réel, on a pour tout epsilon strictement positif, $f(x)$ est comprise entre deux moins epsilon et deux plus epsilon ». Si le vote sur C1.1 : « Si *f* vérifie P1 alors *f* est bornée » donne une grande majorité de Vrai, Aya explique pourquoi elle pense que C1.1 est fausse et rapidement cela convainc toute la classe. Elle reprend l'exemple dessiné par le professeur où epsilon vaut 0,01 et le complète :

Figure 58 : Contre-exemple de Aya à la conjecture C1.1

> [>Aya] : Parce que comme on peut voir dans l'exemple, la fonction, elle peut dépasser deux virgule zéro un ou un virgule quatre-vingt-dix-neuf avant.

Vient ensuite l'étude de C1.3 : « Si f vérifie P1 alors f est bornée par deux moins epsilon et deux plus epsilon à partir de 50. ». La conjecture C1.3 fait appel à la notion de fonction bornée, or, ce concept n'a pas encore été enseigné pour les fonctions mais seulement pour les suites. La présence de ce concept n'avait pas été prévu dans l'analyse a priori. Le professeur décide de proposer la conjecture sans explication supplémentaire. La grande majorité pense vraie cette conjecture. Seulement quatre élèves ont voté Autre : Erika pense que c'est vrai mais sans véritable raison, Evann se demande pourquoi f serait borné par deux moins epsilon et deux plus epsilon et pas autre chose, enfin Margot se pose une question :

> [>Margot] : Oui, en fait parce qu'à la limite ça va être comme l'exemple d'Aya, je ne sais pas si ça peut être borné seulement à partir d'un certain nombre.

Cette intervention fait changer d'avis certain qui passent dans Autre et Quentin va expliquer pourquoi C1.3 est vrai :

> [>Quentin] : Moi ce que j'ai remarqué, c'est que, en fait, il met dans sa conclusion son hypothèse. Et si P1 est vrai ça veut dire que $f(x)$, à partir de cinquante, est comprise entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. Donc, ça revient exactement au même. Donc, il dit : si P1 alors P1. C'est vrai !

Ce faisant, il force Margot à expliquer sa réticence, réticences qu'on n'aurait pas devinées avec sa première intervention sans ces nouvelles explications :

> [>Margot] : Ben pour moi non parce qu'on n'a jamais dit ce que c'était borné dans R

Maxime, l'auteur de la conjecture, s'insurge :

> [>Maxime] : Oui mais c'est forcément... Si $f(x)$… il est forcément entre deux moins epsilon et deux plus epsilon.

Aussi Caroline va légitimer les réticences de Margot :

> [>Caroline] : Est-ce qu'on a vu le terme borné par rapport aux fonctions ? On l'a vu par rapport aux suites mais pas par rapport aux fonctions.

S'ensuit une longue discussion entre les élèves qui va servir à préciser ce que signifie bornée et particulièrement bornée sur un intervalle puisque c'est la spécificité des fonctions par rapport aux suites. Le professeur conclut par une institutionnalisation en précisant ce que signifie borné pour une fonction sur un intervalle.

Le professeur va ensuite demander des exemples de fonctions vérifiant P1. La première, la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2$ est rapidement déclarée vraie par les élèves. Ensuite, Maxime proposera la fonction f(x) = 2 + epsilon. Le professeur expliquera alors que la fonction doit être exprimée en fonction de x et non d'epsilon. Ce problème de dépendance de la fonction à epsilon ressurgira plus tard. Vient ensuite la proposition de la fonction définie sur **R** *, $f(x) = 2 + 1 / x$.

Pour cette conjecture (C1.5 : « $f(x) = 2 + 1 / x$ vérifie P1 ») une seule élève pense qu'elle est vraie, quinze élèves pensent qu'elle est fausse et onze ont voté Autre[80]. Baptiste va produire un contre-exemple en choisissant une valeur pour epsilon et une valeur de x. Aussitôt la classe est convaincue de la fausseté de C1.5. Un nouvel exemple de fonction vérifiant P1 est donné sous forme de graphe par Quentin et la conjecture C1.6 : « la fonction tracée vérifie P1 » est adoptée comme vraie immédiatement dans la classe :

Figure 59 : L'exemple de fonction vérifiant P1 de Quentin

Le professeur alors propose d'étudier la réciproque de C1.6 avec C1.7 : « Si f vérifie P1 alors pour tout $x > 50$ on a $f(x) = 2$ ». Nous allons focaliser notre description sur l'étude de cette conjecture qui correspond au principe de l'analyse appliqué aux fonctions car elle représente un des moments cruciaux de la phase IV.

Le premier vote sur C1.7 donne douze Vrais, cinq Faux, et neuf Autre. Parmi ceux qui ont voté Autre, cinq pensent que C1.7 est fausse mais ne trouvent pas de contre-exemple :

> [>Fabio] : Moi je pense que c'est faux mais je ne trouve pas de contre-exemple. (beaucoup de Autre: « moi aussi »)

Valentin, qui a voté Autre aussi, explique qu'il pense avoir un contre-exemple mais n'en est pas certain. Comme le contre-exemple en question est une fonction dépendant d'epsilon, le professeur explique à nouveau le type de fonction souhaitée :

> [>Valentin] : Je suis dans Autre et je penche plutôt vers Faux.
>
> [>Le professeur] : Valentin tu es plutôt vers Faux, pourquoi ?
>
> [>Valentin] : J'ai un contre-exemple, mais je ne suis pas sûr il est …
>
> [>Le professeur] : Tu nous le montres ? Vas-y !
>
> [>Valentin] : C'est si on définit la fonction en fonction de x et epsilon.
>
> [>Le professeur] : Ah oui tout à l'heure on s'est interdit ça. (référence à l'épisode de la proposition de Maxime)
>
> [>Valentin] : Ah ben non alors.
>
> [>Le professeur] : Parce qu'une fonction, il y a des x dedans, il n'y a pas des epsilons, ou alors epsilon tu lui donnes une valeur.
>
> [>Valentin] : Ben oui mais elle change en fonction de...
>
> [>Le professeur] : Ah oui là, tu vas changer la fonction en fonction de epsilon. Non, non c'est une fonction "normale", ce n'est pas une fonction avec plusieurs variables, une seule !

Cette dépendance de la fonction à epsilon, qui correspond en fait à une transformation des quantificateurs portant sur epsilon et f, va réapparaitre aussitôt sous une autre forme mais cette fois-ci le professeur ne va pas intervenir. S'ensuit une discussion sur l'ordre d'instanciation des variables. Erika ensuite vient donc proposer un contre-exemple sous forme de graphe :

[80] Les comptes sont parfois approximatifs car ils servent surtout, pour le professeur, à représenter les forces en présences.

[>Erika] : La fonction elle est entre deux plus epsilon et deux moins epsilon et elle n'est pas forcément égale à deux.

Figure 60 : Le contre-exemple d'Erika à C1.7

Cinq élèves pensent fausse la conjecture pour cette raison. Le contre-exemple proposé correspond bien, à une manipulation illicite des quantificateurs. En effet on peut modéliser la conjecture P1 par « $\forall f$ (Si $\forall \varepsilon$ *on a* $R(f,\varepsilon)$ alors C(*f*)) » est interprété comme (Si $\forall \varepsilon\, \exists f$ *tel que* $R(f,\varepsilon)$ alors C(*f*)), autrement dit Erika introduit une dépendance de *f* à epsilon. C'est Baptiste qui va le premier en parler :

[>Baptiste] : Je m'étais trouvé un contre-exemple mais après ce que vous avez dit à Valentin, ça ne marchait pas. C'était epsilon fois sinus de x plus deux. Le truc c'est qu'on ne peut pas exprimer avec epsilon. Et cette fonction, elle marche dans ce cas-là, mais si on prend epsilon vraiment très, très petit, la fonction elle va pas changer en fait. C'est sûrement juste mais ça me paraît super bizarre parce que là on trace la fonction...

On remarque que Baptiste indique la clef de d'interprétation de la propriété P1 : il faut prendre epsilon petit. Puis Matthieu va montrer, en utilisant un graphique qu'un choix judicieux d'epsilon invalide le contre-exemple d'Erika, puisque la fonction utilisée ne vérifie pas P1 :

[>Mathieu] : En fait epsilon, c'est pour... dans P1 on a pour tout epsilon, on a le droit de changer epsilon. Et si on trouve un epsilon pour lequel la fonction en certains x est inférieure à deux moins epsilon ou supérieure à deux plus epsilon, la fonction ne correspond pas, enfin, ne vérifie pas P1. Donc, j'ai mis un epsilon tel que certains pics de la fonction soit au-dessus de deux plus epsilon.

[>Le professeur] : Alors pour toi si ce n'est pas un contre-exemple, c'est quoi ?

[>Mathieu] : Ben c'est un hors-sujet parce que ça ne vérifie pas P1.

Figure 61 : L'invalidation du contre-exemple d'Erika par Matthieu

Aussitôt, Louis réagit en soutenant le contre-exemple d'Erika, s'ensuit un long échange dont voici les passages principaux. Louis commence par expliquer qu'on ne peut pas avoir deux fois epsilon avec des valeurs distinctes sur le même schéma :

[>Louis] : Ben moi je ne suis pas d'accord avec ça. (Avec le fait que cette fonction ne vérifie pas P1) Parce que là c'est quelque chose d'impossible parce qu'en ordonnée on a deux fois deux plus epsilon, c'est pas possible.

Mathieu répond en insistant sur le quantificateur universel. Mais Louis continue d'affirmer qu'on ne peut pas avoir deux epsilons différents.

[>Mathieu] : Epsilon, Louis, epsilon, c'est pour tout réel, donc deux plus epsilon, on peut avoir n'importe quelle ordonnée en fait.

[>Louis] : Quand tu as une variable, quand c'est écrit deux fois la lettre, à l'intérieur, il y a la même chose à un instant présent. Si on choisit deux plus epsilon égal dix, enfin, epsilon égal dix, on ne peut pas écrire au même instant epsilon égal et epsilon égal vingt.

L'intervention de Baptiste va donner un autre éclairage, car il utilise la métaphore du zoom pour décrire les manipulations de Louis sur la fonction, ce que Louis est obligé d'accepter :

[>Baptiste] : Ce que tu dis Louis c'est que la fonction si on modifie comme on dit avec le zoom, ça veut dire que la fonction elle est écrite en fonction d'epsilon.

[>Louis] : Ouais. (Plusieurs élèves : c'est interdit, pas possible). Oui !!! (Rires dans la classe).

Comme Louis accepte que sa fonction soit dépendante d'epsilon et qu'en outre, la classe est, elle aussi, convaincue que l'exemple d'Erika introduit cette dépendance, le professeur intervient :

[>Le professeur] : Vous vous fabriquez des fonctions qui ne sont pas les fonctions que l'on regarde.

Mais cette intervention qui devrait conduire à l'abandon de la proposition de Erika n'aura pas de grandes conséquences, si bien que Thomas va alors tenter de résoudre le problème avec la syntaxe :

[>Thomas] : Tu peux rajouter un prime à côté du epsilon comme ça c'est différent.

Et Louis continue de défendre son interprétation :

[>Louis] : Non mais ce que je veux dire c'est que quand on écrit deux plus epsilon sur un graphique. Si on écrit deux plus epsilon, ça veut dire qu'on prend n'importe quel epsilon. Mais ce n'est pas une constante epsilon, sur le graphique.

Ce long échange préfigure la distinction fondamentale entre l'égalité entre deux nombre fixes par le principe fondamental, et l'égalité d'un nombre fixe avec un nombre mobile qui est la définition de la limite. En effet, lorsqu'on définit la limite en l'infini, il faut sans arrêt chercher plus loin les x qui vont vérifier la condition portant sur la distance entre $f(x)$ et cette limite. Autrement dit, on change en permanence, non la fonction comme le fait Louis, mais la partie de la fonction que l'on regarde pour s'adapter au nouvel epsilon. Le professeur est contraint d'abréger cette discussion car l'ensemble de la classe semble avoir saisi la distinction. C'est alors que Quentin entreprend un début de démonstration par l'absurde :

[>Quentin] : Pour montrer que c'est vrai je vais montrer que f (x) ne peut pas être différent de deux. Si ce n'est pas différent de deux, ça veut dire que c'est égal à deux, on est d'accord. Donc, si f (x) est différent de deux, il y a forcément une valeur comprise entre f (x) et deux. Donc, il y a

forcément une valeur de deux plus epsilon comprise entre f (x) et deux. Et donc P1 ne sera plus vérifié. Donc, l'exemple sera faux, f(x) différent de deux.

Figure 62 : début de démonstration par l'absurde de C1.7 par Quentin

Quentin utilise une démonstration par l'absurde et le principe qu'entre deux réels distincts on peut mettre un troisième réel. Mais sa démonstration manque de quantificateurs pour être explicite et convaincante. Ainsi, une vague d'incompréhension se soulève :

[>Aya] : Tu peux ré-expliquer parce que je n'ai pas très bien compris en fait.

[>Elsa] : Quentin, tu es dans Vrai ?!!

[>Quentin] : Oui je suis dans Vrai.

[>Elsa] : Il y a un souci là !

[>Nathan] : Tu dis que c'est faux en fait ? Tu es dans Vrai mais tu dis que c'est faux.

[>Elsa] : Oui j'ai l'impression que c'est un argument du Faux.

Margot semble comprendre le projet de Quentin :

[>Margot] : Oui en fait ce qu'il dit c'est que le Faux est faux.

Nathan va interpréter ce raisonnement par rapport au contre-exemple d'Erika :

[>Nathan] : Donc, tu montres que l'exemple que Erika a fait au tableau est faux ?

[>Quentin] : Aussi oui par la même occasion. (Rires dans la classe). Vu que je suis dans Vrai, c'est faux !

Nathan révèle là une clef du processus qui a mené à cette proposition. Ceux qui étaient convaincus que le contre-exemple était faux, ont cherché à l'invalider. Or, ce qui est justement difficile à réaliser dans un raisonnement par l'absurde consiste à faire l'hypothèse de la fausseté de la conclusion, les réactions précédentes en attestent. Et finalement, en produisant son faux contre-exemple, Erika a précisément matérialisé cette hypothèse. Ne reste plus qu'à prouver que ce contre-exemple est bien faux. C'est ce qu'a fait Matthieu. Quentin n'a alors qu'à rassembler les morceaux pour proposer cette démonstration. Mais la classe n'est pas encore convaincue. Louis va proposer de compléter la démonstration de Quentin, en particulier, il va être plus explicite sur la quantification :

[>Louis] : Si on prend la première fonction qu'on avait f (x) =2, donc celle-là. C'est ce qu'on essaie de dire là. En fait je vais partir comme Quentin : si la fonction f (x) est différente de deux, ça veut dire qu'à un moment elle fait au moins entre guillemet "un soubresaut" comme ça, elle est au moins pour une valeur de x différente de deux. Donc, par exemple, là.

Figure 63 : le dessin de Louis pour sa démonstration

[>Louis] : On peut la faire petite ou on peut la faire bien plus grande. Ici elle est en dessous de deux plus epsilon. Et si on prend pour valeur ici h, et bien on pourra toujours trouver une valeur d'epsilon qui sera plus petit que h qui sera en fait le plus, on va dire le plus haut pic de la fonction qui se rapprocherait de deux en fait.

Après cette intervention de Louis, la classe est convaincue, seuls quatre élèves restent dans Autre. La conjecture suivante sert à généraliser le résultat avec l'introduction d'une variable à la place du cinquante, C2.1 : « Si f vérifie P2 alors il existe B[81] tel que pour tout $x > B$ on a $f(x) = 2$ » avec P2 : « Il existe un réel A, tel que pour tout réel x supérieur à A, pour tout epsilon strictement positif, la distance entre 2 et $f(x)$ est inférieure à epsilon ». Cette conjecture est résolue très rapidement : « C'est comme P1 avec A à la place de 50 ».

Deuxième partie : la définition formelle de la limite

Dans cette partie, les quantificateurs de la conjecture concernant le principe fondamental de l'analyse appliqué aux fonctions sont inversés, ce qui va donner le formalisme de la limite. Concrètement on demande d'abord aux élèves le statut de la fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ pour la conjecture $C\varepsilon_5$: « Si f vérifie P3, alors il existe B tel que pour tout x réel avec $x > B$, $f(x) = 2$. », où P3 est : « Pour tout epsilon strictement positif, il existe un réel A tel que pour tout réel x supérieur à A, on a f (x) qui est compris entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. ». Le vote donne huit dans hors-sujet et vingt-et-un dans Autre. Loïc qui a voté Autre hésite à voter hors-sujet depuis qu'il s'est aperçu que la table de la calculatrice montre que la fonction égale à deux à partir de vingt-mille. Trois autres élèves ont voté Autre pour la même raison. Mais Victor n'est pas d'accord avec cette raison :

> [>Victor] : C'est pour répondre à Loïc. C'est juste la limite de la calculette mais ce ne sera jamais égal à deux. Par exemple, pour vingt-mille, c'est égal à 2 + 1 / 20 000.

Et Caroline ajoute :

> [>Caroline] : Moi je suis dans Hors-sujet parce que justement la fonction elle n'est jamais égale à deux.

Il y en a dix-huit à ce moment qui sont d'accord sur cette raison du hors-sujet mais Maxime pense que le problème est ailleurs :

> [>Maxime] : (il est venu au tableau) En fait je pense que Caroline ce qu'elle veut expliquer par le... c'est différent de deux, ça veut expliquer ça, en fait. (La conclusion) Et dans hors-sujet, ce qui fait que c'est un hors-sujet, c'est que c'est ça qui ne va pas (L'hypothèse). Et dans ce cas-là ce ne serait pas un hors-sujet en fait. En fait ce qui se cache derrière ces deux trucs, c'est qu'on se demande "Est-ce que ça (P3) ça revient à dire ça (la conjecture). En fait c'est ça qui se cache derrière ces deux conjectures en fait.

Et rajoute :

> [>Maxime] : Ensuite je suis d'accord avec le fait que ce soit jamais égal à deux, pour cette raison toute simple c'est que ça, ça ne sera jamais égal à zéro (1/x). Et on aura beau mettre le x qu'on veut ça ne sera pas égal à zéro. Donc, dans ce cas-là, on pourra toujours caler un epsilon en dessous, donc ça, ça ne marchera pas (P3) et c'est de là que vient le hors-sujet et ça ne vient pas de là (f (x) différent de 2) en fait. Enfin je ne sais pas trop comment rédiger ça mais je trouve que l'exemple n'est pas complet.

Ceux qui ont déclaré que f est un hors-sujet car f est différent de 2 cherchent alors à se justifier :

> [>Louis] : En fait, moi quand j'ai levé la main pour dire que j'étais d'accord avec ce qui était écrit au tableau, c'est parce que si f (x) c'est un hors-sujet c'est effectivement parce que f (x) est différent de deux mais en fait il faut un peu plus expliquer. Il faut aussi dire que parce que c'est différent

[81] Ici la variable B a été préférée au A initial qui avait l'inconvénient de pouvoir provoquer des confusions inutiles avec la variable A de la propriété P2.

> de deux ça ne vérifie pas P3. Et donc c'est un hors-sujet. Parce que f (x) différent de deux donc on pourra toujours trouver un epsilon qui fait que f (x) ne peut pas être deux moins epsilon et deux plus epsilon donc ça ne vérifie pas P3 et donc c'est un hors-sujet. Mais, en fait, il fallait expliquer à partir de ce qui était écrit au tableau, ça ne suffisait pas juste de dire, je suis d'accord, juste de dire que f (x) est différent de deux. On ne se référait pas à la conclusion.

Ils finissent par dire que la conjecture correspond à « si A alors A ». On peut constater que le scénario tel que conçu initialement masque le vrai problème de l'inversion des quantificateurs en attirant l'attention davantage sur le statut de la fonction f. Déterminer le statut de f signifie évaluer deux choses : déterminer si f vérifie la conclusion et si f vérifie l'hypothèse. De manière imprévue, même la conclusion semble poser des difficultés du fait de l'interprétation des résultats de la calculatrice, cela a pour conséquence de centrer la question d'abord sur cet aspect qui est finalement résolu. Ensuite, même en sachant que la conclusion n'est pas respectée par *f*, il faut néanmoins aussi se demander si l'hypothèse l'est, car cela est discriminant pour différencier contre-exemple de hors-sujet. Manifestement l'hypothèse P3 ressemble trop à l'hypothèse précédente P2 pour que la distinction soit faite dans ce contexte. Devant le blocage manifeste, le professeur improvise et leur propose :

> [>Le professeur] : S'il vous plaît, je vais vous poser une autre question qui sera peut-être plus compréhensible que celle-ci. OK. Bien. Ce que j'aimerai vous poser comme question si là... ça, ça doit être vrai pour tout epsilon cette phrase (pour que f vérifie P3). Donc, la fonction f en question doit vérifier "pour tout epsilon, il existe un nombre à partir duquel la fonction doit être entre deux plus epsilon et deux moins epsilon, on est d'accord ? Donc, ce que je vous demande c'est, imaginons qu'epsilon égal à un. Existe-t-il un A tel que quel que soit x supérieur à A, 2+1/x est comprise entre deux plus epsilon et deux moins epsilon. Oui ou non ? Là ça peut être oui ou non ! ou Autre.

Ce faisant le professeur offre une clef d'interprétation de P3. Pour epsilon égal à un, Marine propose de prendre A égal à quinze-mille car :

> [>Marine] : Oui parce qu'en fait ça va donner un nombre qui va se rapprocher de 2 sans jamais l'atteindre et comme l'intervalle c'est compris entre 1 et 3.

Le professeur propose ensuite de prendre une valeur plus petite pour epsilon, en proposant un centième puis dix puissances moins vingt-quatre. Les élèves prennent A égal cent pour epsilon à un centième et pour l'epsilon égal à dix puissances moins vingt-quatre ont compris que « c'est la même chose ». A ce moment-là, le professeur repose la question initiale plus précisément : « La fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ vérifie P3, Oui ou Non ou Autre ? ». Il y a douze élèves qui pensent que la fonction f vérifie P3, six qui pensent que ce n'est pas le cas et neuf qui votent Autre. Victor commence par expliquer pourquoi il a voté Autre. Il se trouve devant un dilemme, s'il prend une valeur fixe pour epsilon, ça marche toujours, mais s'il prend une valeur variable alors ce n'est plus le cas :

> [>Victor] : Là dans ce qu'on a expliqué epsilon il était fixe et on en a pas trouvé qui ne marche pas. Mais si, par exemple on prend, epsilon égal 1 / x / 2 alors ça ne marche pas.

Loïc demande à Victor des explications, et Victor réexplique c'est alors que Sébastien intervient :

> [>Sébastien] : En fait je voudrais demander à ceux qui pensent que c'est vrai de choisir un A, n'importe quel A et je pourrais à chaque fois trouver un contre-exemple en fait.

Thomas alors répond que Sébastien interprète selon une inversion de quantificateur :

[>Thomas] : Mais en fait lui, je pense, qu'il comprend la question dans le sens, il existe pour tout alors que la question en ce moment elle est écrite pour tout, il existe. Donc, ça serait à lui de nous proposer un epsilon et a nous de lui trouver un A.

[>Le professeur] : Ah oui, alors tu dis : on ne joue pas le même jeu. Toi tu es en train de jouer le jeu de...ça c'est le jeu de "il existe pour tout", c'est-à-dire ce qu'on avait appelé EA, et nous notre jeu, c'est "pour tout il existe", c'est-à-dire AE et dans ce cas-là c'est à lui de... c'est qui qui propose dans ce cas-là ?

[>Thomas] : Sébastien.

[>Le professeur] : Sébastien propose un quoi ?

[>Maxime] : Sébastien il faut qu'il propose un epsilon et nous on trouve un A qui marche.

[>Thomas] : C'est Sébastien qui doit proposer un epsilon et nous on trouve un A qui marche.

[>Maxime] : Ouais.

Mais Sébastien a une autre interprétation du jeu, ce qui déclenche une discussion :

[>Sébastien] : En fait, moi je pense que pour chaque A qu'ils choisiront, j'ai le droit de prendre tous les nombres qui se situent entre 0 et plus l'infini. Pour epsilon.

[>Le professeur] : Donc, tu dis que ceux qui pensent que c'est vrai donnent un A et toi tu choisis l'epsilon qui va faire un contre-exemple.

[>Sébastien] : Oui.

[>Le professeur] : D'accord.

[>Sébastien] : C'est toujours celui qui défend le « il existe » qui défend en premier parce que celui qui "a pour tout" il peut choisir justement tout (plusieurs élèves répondent : je ne suis pas d'accord avec toi).

[>Thomas] : Moi je ne suis pas d'accord avec toi.

[>Baptiste] : Tu voudrais choisir un seul epsilon ?

[>Sébastien] : Je peux choisir tout et j'ai le droit d'en choisir qu'un.

[>Thomas] : Tu en choisis qu'un et après c'est au défenseur d'en choisir un.

[>Mathieu] : Et l'attaquant avec un autre epsilon. (Là beaucoup d'élèves répondent à la fois).

Pour sortir de cette impasse, Fabio alors invoque un argument d'autorité :

[>Fabio] : Ben oui, c'est ce qu'on a fait tout à l'heure.

[>Loïc] : C'est ce qu'on a fait tout à l'heure quand on a cherché...

[>Le professeur] : Fabio tu as voté Vrai ?

[>Fabio] : Oui. Enfin, ce qu'il propose c'est ce qu'on a fait tout à l'heure en fait.

[>Le professeur] : Qui "IL" ?

[>Fabio] : Thomas.

Mais pour Louis cet argument d'autorité ne fait pas loi :

[>Louis] : Fabio, ce n'est pas parce qu'on a fait quelque chose tout à l'heure que c'est ce qu'il fallait faire...

[>Fabio] : Oui mais enfin...

[>Louis] : Déjà voilà et après je voudrais répondre à Thomas : c'est écrit : "il existe un réel A" donc tu as le droit de prendre un seul réel A et après c'est écrit : "pour tout epsilon", et donc a droit à tous les epsilon (immédiatement plusieurs élèves répondent en même temps : c'est dans l'autre

sens).

S'ensuit une longue discussion (un quart d'heure sans interruption) entre les élèves pour savoir quelle est la bonne interprétation et cette question sera tranchée lorsque Margot utilisera les références sur la logique dialogique données lors de la situation de la double quantification. Après cela quasiment toute la classe est d'accord sur la même interprétation et pense que la fonction f vérifie P3, autrement dit dissocie P3 de la nécessité d'égalité de f à deux. Cette dissociation est d'autant plus manifeste quand ils déterminent le A en fonction de epsilon, ce qui permet bien à chaque epsilon d'associer une valeur de A qui réalise la condition pour $f(x)$ d'être comprise, à partir de A, entre deux moins epsilon et deux plus epsilon.

La suite du scénario est assez rapide, le professeur demande à nouveau de voter à propos du statut de la fonction $f(x) = 2 + 1 / x$ pour la conjecture $C\varepsilon_5$: « Si f vérifie P3, alors il existe B tel que pour tout x réel avec $x > B$, $f(x) = 2$. ». Les élèves s'accordent immédiatement pour déclarer que c'est un contre-exemple. Le professeur demande comment on pourrait réparer cette conjecture, ce à quoi quelques élèves répondent qu'on peut remplacer $f(x) = 2$ par $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$. On peut voir dans cette réponse un premier indice qui tend à montrer que certains liens se sont réalisés entre la conception « se rapproche » et le formalisme de P3. La nouvelle conjecture $C\varepsilon_6$ « Si f vérifie P3, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ » est alors soumise au vote, vote qui recueille la quasi-unanimité de Vrais. C'est Maxime qui vient expliquer pourquoi il pense vraie la conjecture. Il vient au tableau pour dessiner et expliquer, c'est à ce moment-là qu'Aya qui est la seule à avoir voté Autre, pose une question fondamentale, le lien entre « se rapproche » et « limite » :

Figure 64 : L'illustration de P3 par Maxime

[>Maxime] : Si tu as une fonction... en fait chaque fois qu'on va choisir un A l'epsilon il va... enfin tout ce qui sera au-dessus de A en fait, ce sera entre deux moins epsilon et deux plus epsilon.

[>Maxime] : Tu parles à tout le monde, pas seulement à Aya.

[>Mathieu] : Mets bien deux plus et deux moins (il n'avait qu'écrit epsilon et moins epsilon)

[>Maxime] : Ouais (il rajoute deux). En fait ta fonction elle sera toujours entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. Et on aura beau raccourcir l'epsilon, la fonction elle se rapprochera toujours de deux en fait. Du coup ça fera que la limite ça sera deux.

[>Aya] : Oui mais quand une fonction se rapproche de deux c'est pas que la limite c'est deux ?

[Le professeur] : C'est quoi ? Aya c'est quoi que tu poses comme question ?

[>Aya] : Si la fonction se rapproche de deux, est-ce que la limite est forcément deux ou pas ?

[>Maxime] : Ben là en fait c'est la même distance entre deux plus epsilon et deux moins epsilon, la distance c'est epsilon en fait et du coup ça va réduire tout ça en même temps. Enfin si on réduit epsilon, ça va réduire tout ça en fait, ça ira vers deux, ça ne pourra pas aller vers autre chose en

fait. Enfin je ne sais pas si tu vois ?

La question d'Aya permet au professeur de commencer son institutionnalisation par les questions initiales qui avaient motivées l'étude : la question de la limite et son rapport à l'approche intuitive pleine de sens mais nécessitant une objectivisation par une définition idoine pour pouvoir discriminer les cas pathologiques et démontrer les propriétés.

> [>Le professeur] : OK. Aya tu n'es pas convaincue ? Non. OK. D'accord. Juste je vais arrêter là. C'est normal qu'Aya ne puisse pas être convaincue. Il y a une raison très précise pour laquelle elle ne peut pas être convaincue. Alors tout le monde dans la classe est convaincu pour la raison que vient de donner Maxime, j'imagine, c'est-à-dire que chaque fois qu'on diminue epsilon, on trouvera un A, un peu plus loin peut-être, mais on trouvera un A à partir duquel la fonction sera entre deux plus epsilon et deux moins epsilon. Et puis si on raffine le A (epsilon en fait) ce sera encore plus proche de deux, mais le A sera plus loin en fait. Et donc dans notre tête on voit que ça se rapproche. Mais Aya pose la question : mais est-ce que se rapprocher c'est la limite ? Et on était parti précisément de ça je vous signale. Est-ce que se rapprocher c'est être la limite ? Et bien la réponse, je peux vous la donner maintenant, je peux vous la donner en compréhension enfin : on ne peut pas répondre à cette conjecture puisqu'on a pas de définition de la limite. On ne sait pas « se rapprocher » ce que ça veut dire. On ne pourra donc jamais démontrer cette conjecture vu qu'on a pas de définition de la limite. Par contre, ça colle assez bien avec ce qu'on pense être une limite. Et en fait on va prendre ça comme définition de la limite : toute fonction qui vérifiera P3 aura une limite de deux par définition. Ça va être ça notre définition de la limite.

L'institutionnalisation s'achève avec la définition de la limite, du rôle spécifique d'epsilon et A dans la définition.

e) Phase V

L'objectif de cette phase est d'éprouver l'efficience du nouveau formalisme pour la démonstration : d'une part discriminer les limites finies en l'infini et les non limites finies en l'infini avec ce nouvel outil, d'autre part prouver des conjectures élémentaires. Ces deux aspects sont les significations fondamentales que nous avons retenues dans notre métaphore fondamentale de la notion de limite. Reste à vérifier si la situation a rendu possible finalement l'accès à ces significations.

i. Description globale de la phase V

<u>Description de la phase V.1</u> : discriminer les limites

La première partie de cette phase V commence avec l'étude de la fonction dite le monstre, étude qui consiste à appliquer le nouveau formalisme pour statuer sur la « bête » : y-t-il une limite de 2,9 en + ∞ ? La conjecture étudiée est donc « La limite en + ∞ de la fonction monstre est 2,9 ».

Figure 65 : La fonction dite « le monstre »

Toute la classe pense fausse la conjecture, et seuls quatre sont dans Autre. Ces derniers expliquent qu'ils ne saisissent pas le formalisme et comment l'utiliser. Ensuite, Juliette explique pourquoi elle pense que c'est faux en choisissant un epsilon adéquat et montre qu'on ne peut pas avoir la fonction comprise entre epsilon plus la limite et epsilon moins la limite à partir d'aucun A. Tout le monde est d'accord avec cette démonstration, et les quatre Autre se rallient au Faux pour la raison de Juliette. La deuxième conjecture étudiée concerne une fonction dont les pics sont, cette fois-ci, décroissants : la fonction vaut 3 partout sur R+ sauf en des pics qui sont de hauteur 2/n, où n est un entier non nul, espacés toutes les unités et de largeur 0,01. La conjecture étudiée est C5 : « la limite de f en + ∞ est 3 »

Figure 66 : Le « monstre » à pics décroissants

Le premier vote donne dix-huit Vrais, deux Faux et quatre Autres. Lucas qui a voté Autre explique que comme il y a toujours des pics quel que soit l'epsilon strictement positif, on arrivera toujours à mettre un epsilon sous la hauteur des pics. Aussitôt, Erika et Orlane changent d'avis et se mettent dans Autre pour cette raison. Caroline explique alors que la fonction inverse a pour limite zéro et pourtant on arrive toujours à mettre des epsilons sous la fonction. Loïc enchaine alors en expliquant que chaque fois qu'on prend un epsilon, on peut trouver un A à partir duquel la fonction (le monstre à pics décroissante) est sous epsilon. Maxime à son tour explique pourquoi il pense que c'est vrai. Il explique que la hauteur des pics a pour limite zéro et que lorsqu'on ajoute trois, la limite est trois. Cet argument convainc tous ceux qui s'étaient rangés dans Autre. Le professeur propose alors de mettre cette argumentation au débat en tant que démonstration de la conjecture. Maxime s'insurge en expliquant qu'il manque tout ce qu'il a dit à l'oral. Le professeur lui laisse rajouter puis après réflexion, quinze pensent la démonstration correcte, deux pas correcte et cinq se mettent dans Autre. Une longue discussion (quinze minutes) a lieu entre les élèves (nous détaillerons plus tard) qui invalide collectivement cette démonstration. Le professeur propose alors d'étudier l'autre démonstration qui reste au tableau, celle de Loïc : « Pour tout epsilon strictement positif, on peut trouver un A à partir duquel la fonction est entre trois plus epsilon et trois moins epsilon ». Quatre approuvent la démonstration, douze la jugent non correcte, et sept adoptent la position Autre. Il ressort de la discussion qu'il manque dans cette démonstration la preuve qu'il existe bien un A pour tout epsilon. Le professeur alors demande si on peut trouver le A correspondant à epsilon qui vaut 0,1. La réponse est vite trouvée. Il demande pour epsilon égal 0,01, la réponse est instantanée. Puis, il demande pour un epsilon général. Après quelques minutes, un élève propose deux sur epsilon. Cette conjecture « Si x > 2/epsilon alors f(x) compris entre deux plus epsilon et deux moins epsilon » est soumise au vote et recueille la quasi-unanimité. S'ensuit une longue discussion entre élèves sur la manière de déterminer cet epsilon. Nous détaillons cette discussion plus loin.

<u>Description de la phase V.2</u> : la démonstration de propriétés élémentaires

La deuxième partie de cette phase V commence avec l'étude de la conjecture "si la limite en plus l'infini de *f* est 1 alors il existe un réel A tel que pour tout *x* supérieur à A, *f* (*x*) est supérieur à 0,6". Toute la classe pense vraie cette conjecture sauf trois qui se mettent dans autre. Le professeur demande alors à chacun d'écrire sa démonstration. Sept élèves ont une démonstration à proposer. Un élève vient écrire la sienne qui est correcte et adoptée par tous immédiatement. Ensuite, vient l'étude d'une autre conjecture : « Si limite quand x tend vers plus l'infini de f (x) égal 1 et limite de g (x) quand x tend vers plus l'infini égal 4 alors il existe un réel A tel que pour tout x supérieur à A, on a f (x) qui est inférieur strictement à g (x) ». Tout le monde pense vraie la conjecture, le professeur demande à chacun d'écrire une démonstration. Dix-huit élèves déclarent avoir une proposition. Le professeur désigne un élève pour venir montrer sa démonstration. Celui-ci trace un exemple de la situation (figure 69). Cette proposition de démonstration est soumise au vote. Seul un élève la juge correcte. Ensuite, un élève explique qu'il faut rajouter le A sur le dessin. Onze élèves pensent cette proposition de démonstration pas correcte pour cette raison de l'absence du A. Un élève exprime alors qu'avec ou sans le A ce n'est pas une démonstration mais un exemple. Seize élèves estiment pas correcte cette démonstration pour cette raison-là. Finalement, toute la classe estime non correcte cette démonstration sauf quatre dont deux pensent correcte la démonstration et deux sont dans Autre. Ces quatre pensent la démonstration correcte car ils expliquent que le dessin prouve qu'il existe bien un A. Ce à quoi les autres répondent que ce A existe bien mais seulement pour les deux fonctions f et g dessinées. La proposition de la démonstration standard est effectuée, elle omet cependant la distinction du A pour chaque fonction. Tout le monde est d'accord avec cette démonstration.

ii. Déroulement détaillé de la phase V

Phase V.1 : discriminer les limites

Rappelons en préalable qu'aucune des démonstrations demandées n'a jamais été réalisée ou montrée à ces élèves. Leurs capacités ou incapacités à la réaliser sont donc directement la conséquence d'une compréhension du formalisme et de la possibilité de le mobiliser dans les démonstrations où il intervient. La première conjecture étudiée, est celle de la fonction monstrueuse, a-t-elle une limite ou pas de 2,9 ? Quatre élèves ne savent pas appliquer la définition de limite et sont dans Autre. Juliette propose alors de démontrer cette conjecture :

> [>Juliette] : Ben par exemple, là c'est marqué pour tout epsilon, alors si on prend epsilon égal 0,01 par exemple. On ne trouvera pas de A tel que pour tout x plus grand que A, elle sera comprise entre 2,91 et 2,89. Oui parce que les pics ils sont toujours de 0,2.

Aussitôt, les Autres déclarent vouloir passer à Faux. On voit dans ce court extrait que le formalisme a pris sens au point que Juliette prend l'initiative de choisir un epsilon adapté pour démontrer qu'il n'y a pas de limite.

Vient ensuite la deuxième fonction, *f* une fonction qui vaut 3 partout sur **R**+ sauf en des pics qui sont de hauteur 2 / *n*, où *n* est un entier non nul, espacés toutes les unités et de largeur 0,01, pour laquelle on formule le même type de conjecture : « la limite de *f* en + ∞ est 3 ». Dix-huit pensent que cette conjecture est vraie, deux la pensent fausse et quatre sont dans Autre. Lucas commence à expliquer pourquoi il vote Autre. On peut toujours trouver des epsilons en dessous des pics. Deux élèves déclarent alors changer d'avis et passent de Vrai à Autre. Cet argument témoigne d'une interprétation inversée des quantificateurs sur pour tout epsilon, il existe un A

lu comme pour tout A il existe un epsilon. Nous remarquons cependant que Lucas, bien qu'ayant une interprétation erronée, cherche à fonder sa conviction sur une interprétation de la définition de la limite et plus seulement sur l'intuition. Caroline n'est pas d'accord avec cet argument et l'explique en prenant la fonction inverse comme argument :

> [>Caroline] : Pour moi, en fait, la fonction, si on reprend l'argument du Faux, on peut toujours prendre, et celui de Lucas, on peut toujours trouver un epsilon qui passe sous le pic. C'est pareil pour la fonction 1/x. On pourra toujours trouver plus petit mais pourtant on dit bien qu'elle tend vers zéro.

Mais Loïc, lui, veut ramener la question de la limite à la définition même, il pointe alors implicitement l'inversion de quantificateur en comparant les deux interprétations et expliquant pour lui, ce qu'est la bonne interprétation de la définition :

> [>Loïc] : Par rapport à ce qu'a dit Caroline et pour répondre à Lucas, il pourra toujours trouver un epsilon qui passe sous la fonction mais à chaque fois qu'il va dire un epsilon, on pourra toujours trouver un nombre A et à partir de ce nombre A la fonction sera toujours en dessous d'epsilon.

A son tour Maxime donne ses raisons pour penser vraie la conjecture :

> [>Maxime] : Quand n va monter, enfin il va croître vers plus l'infini, sa limite ça va être zéro en

> fait. Pour x qui tend vers + infini. Sa limite ça va être zéro en fait parce que plus tu monteras plus en fait ce nombre (2/n) sera infiniment petit. Donc, du coup on dit qu'il aura une limite. C'est comme avec Caroline, avec 1/x, on dit qu'elle a la limite à zéro parce que ça va devenir de plus en plus petit, ça va se rapprocher de zéro. Après f (x) = 3 sa limite c'est trois. Donc, du coup je pense que la limite de cette fonction c'est trois.

Figure 67 : La proposition de démonstration de C5 par Maxime

Aussitôt, il convainc quasiment tous ceux qui avait voté Autre ou Faux. Le professeur va alors organiser un débat de démonstration où ce n'est pas la validité d'une conjecture qui est discutée mais celle d'une démonstration. Maxime demande de compléter dans ce cas ce qu'il avait dit à l'oral sans l'écrire au tableau. Le vote sur cette démonstration donne quinze élèves qui la pensent correcte, deux qui la pense non correcte et cinq sont dans Autre. Fabio commence à expliquer pourquoi pour lui ce n'est pas une démonstration :

> [>Fabio] : Ben moi je pense qu'il n'a rien prouvé avec sa démonstration. Ben en fait il montre ce qu'il observe mais il n'a rien démontré de plus, en fait.

Hadrien pense que la démonstration n'est pas correcte mais pour des raisons seulement de forme :

> [>Hadrien] :[35:14] Enfin il manque la conclusion en fait. Il dit ce qu'il faut mais après il manque par exemple de dire que la limite de 3+2n (en fait 3+2/n) est bien 3. Enfin une phrase qui réponde au problème. Parce qu'il dit limite de ça c'est zéro, limite de ça c'est trois donc c'est vrai.

Il rajoutera plus tard qu'il ne s'agissait qu'un complément des raisons de Fabio. Mais commence à se poser des questions au sujet de la fonction f évoquée par Maxime :

> [>Loïc] : 3+2/n, je voudrais savoir ce que c'est. Parce que ce n'est pas la fonction qui est représentée là, ça n'a rien à voir en fait.
>
> [>Fabio] : C'est la hauteur des pics. La hauteur des pics c'est 2/n et ça commence à 3.
>
> [>Caroline] : Je suis d'accord avec Loïc

En effet, d'autres questions de forme plus gênantes pour la démonstration de Maxime sont pointées : si on ajoute deux fonctions, ce sont les quelles ? Et clarisse va être encore plus précise :

> [>Clarisse] : Pour moi le fait qu'il écrive f (x) = 3 ça me perturbe parce que j'ai l'impression que ça marche que pour une partie de la fonction, là où elle est toute droite, et pas là où il y a des pics.

Nathan, lui a voté Autre, et se pose d'autres questions sur l'argumentation de Maxime :

> [>Nathan] : Parce qu'en fait je me demande... en fait dans ce cas ça marche, il y a une partie de la fonction qui tend vers zéro et une partie de la fonction qui tend vers trois. Donc, la fonction tend vers trois. Mais est-ce qu'on peut toujours additionner les limites comme ça ?
>
> [>Le professeur] : Est-ce qu'on peut additionner les limites ?
>
> [>Nathan] : Et quand on les additionne qu'est-ce que ça fait ?

Maxime va expliquer ce qu'il exprime avec cette démonstration, la limite d'une somme de fonction, le fait que la fonction *f* qu'il utilise, il devrait lui donner un autre nom. Et il finit par convaincre ses camarades mais ceux-ci persistent à dire que cependant la démonstration telle qu'elle est écrite n'est pas correcte. Plus personne ne trouve correcte cette démonstration, telle qu'elle est écrite au tableau, à la fin de la discussion. Le professeur propose ensuite d'étudier l'autre démonstration qui figure déjà au tableau, celle de Loïc :

Figure 68 : La proposition de démonstration de Loïc

Quatre qui la jugent correcte cette démonstration, douze incorrecte et sept sont dans Autre. Fabio pense la démonstration pas correcte car pour lui :

> [>Fabio] : Moi je pense que la démonstration qu'il y a au tableau, c'est une définition de la limite. Enfin ça peut aider à la démonstration mais ça ne suffit pas.

Juliette pense aussi que la démonstration n'est pas correcte mais pour une autre raison :

> [>Juliette] : Pas Correct. Ce n'est pas une démonstration, il dit "on peut trouver un A à partir duquel la fonction est entre" sauf que c'est pas démontré du tout, il dit juste...

Finalement, cette démonstration ne convainc pas beaucoup et le professeur va demander de réparer l'insuffisance pointée par Juliette, à savoir prouver qu'on peut trouver A. Et il commence par demander si quelqu'un peut trouver le A correspondant à un epsilon ayant pour valeur 0,1. Aussitôt on lui répond 20. Puis il demande pour une valeur d'epsilon de 0,01 et on

lui répond 200. Il demande alors pour n'importe quel epsilon. Après une recherche, Victor propose deux sur epsilon. La conjecture « Si x > 2/epsilon alors f(x) compris entre deux plus epsilon et deux moins epsilon » est soumise alors au vote et recueille la quasi-unanimité. Maxime va justifier son vote Vrai et s'ensuit une longue discussion :

> [>Maxime] : Ce qu'on nous demande c'est que les x qui sont supérieurs à A… soit en dessous d'epsilon. Du coup ça revient à dire que A est inférieur à x, ou n. Là en l'occurrence c'est n. En gros epsilon c'est égal à 2/n donc 2/A donc A égal deux sur epsilon.
>
> [>Maxime] : Du coup j'ai tout écrit puisque là-bas c'était mal écrit. Donc, le but c'est de chercher des n qui soient supérieurs au A qu'on... enfin il faut que les n soient supérieurs à A. Il faut que la fonction soit comprise entre trois moins epsilon et trois plus epsilon. Et du coup ça revient à dire que A = n et vu qu'epsilon égal 2/n, donc A égal deux sur epsilon.
>
> [>Fabio] : J'ai juste une question. Là tu dis que n est supérieur à A et tu remplaces n par A!
>
> [>Maxime] : Parce qu'en fait, c'est supérieur ou égal, parce qu'en fait on demande de chercher tous ceux qui sont au-dessus de n. C'est bon ? (Plusieurs élèves répondent non).
>
> [>Juliette] : Ah si moi j'ai compris.
>
> [>Loïc] : Comment tu sais qu'epsilon est égal à 2/n?
>
> [>Maxime] : Euh enfin pour moi ce que je comprends c'est ça parce que quand on a donné un epsilon, on a appliqué la fonction 2/n en fait. On a dit : est-ce que pour un epsilon, par exemple égal à 0,1, est-ce que 2/n ça rentre dedans en fait. C'est ça qu'on posait en gros comme question. Donc, epsilon est égal à deux sur n en fait. Tu m'as compris ou pas.
>
> [>Loïc] : Non mais oui.
>
> [>Juliette] : Moi j'ai compris.
>
> [>Léa] : Moi je ne comprends pas ton "Ça revient à dire que n = A".
>
> [>Maxime] : Que A = n?
>
> [>Léa] : Oui, tu dis que ce que tu as écrit avant, le but, ça revient à dire que A = n mais avant tu mets que...
>
> [>Maxime] : n supérieur ou égal à A.
>
> [>Léa] : Ben je n'ai pas compris.
>
> [>Maxime] : Là je montre que c'est supérieur ou égal à n. Enfin que n est supérieur ou égal à A. Et ici je montre que...enfin ici je montre qu'il faut qu'il soit compris entre le plus epsilon et le moins epsilon. Du coup ça revient à dire que tu ne peux pas être au-dessus de A. Non je m'exprime mal là...
>
> [>Léa] : Ton A=n, c'est toi qui a choisi un exemple ou...c'est...
>
> [>Loïc] : Non en fait il cherche, là A=n c'est premier x à partir duquel...
>
> [>Maxime] : Ouais.
>
> [>Léa] : C'est toi qui la choisit.
>
> [>Maxime] : Ben en fait c'est logique, enfin je trouve ça logique. Mais quand tu prends un A tu auras tous les n qui seront...
>
> [>Caroline] : Plus grands...
>
> [>Maxime] : Voilà et quand tu utilises 2/n tu fais 2/A après tu fais deux sur A plus un nombre... Donc, en gros ton n c'est ton A. Après c'est peut-être mal expliqué.

<u>Phase V.2</u> : démontrer les propriétés élémentaires

La phase V.2 commence avec l'étude de la conjecture "si la limite en plus l'infini de *f* est 1 alors il existe un réel A tel que pour tout *x* supérieur à A, *f* (*x*) est supérieur à 0,6". Toute la classe pense vraie cette conjecture sauf trois qui se mettent dans autre. Le professeur demande alors à chacun d'écrire sa démonstration. Sept élèves ont une démonstration à proposer. Matthieu vient écrire la sienne :

> [>Mathieu] : D'abord la définition de la limite : pour tout epsilon supérieur à zéro, il existe un A tel que pour tout x supérieur à A on a L moins epsilon inférieur à f (x) inférieur à L plus epsilon. Ici L c'est 1. Donc la limite de la fonction c'est 1. Donc, on a bien un A tel que, par exemple pour epsilon égal 0,3, on a f (x) compris entre 1-0,3 donc 0,7 et 1+0,3 donc 1,3. Donc f (x) à partir d'un certain A est toujours supérieur à 0,7 qui est supérieur à 0,6.

Cette démonstration est jugée immédiatement correcte par tous, y compris ceux qui avaient initialement voté Autre. Ensuite, vient l'étude de la dernière conjecture de la situation de la limite : « Si limite quand x tend vers plus l'infini de f (x) égal 1 et limite de g (x) quand x tend vers plus l'infini égal 4 alors il existe un réel A tel que pour tout x supérieur à A, on a f (x) qui est inférieur strictement à g (x)». Comme tout le monde pense vraie cette conjecture le professeur demande à chacun de réaliser sa démonstration. Dix-huit élèves ont réalisé une démonstration. Evann vient montrer la sienne :

Figure 69 : La proposition de démonstration d'Evann

> [>Evann] : En dessous de 0 g (x) est inférieur à f (x) et à partir de 0 f (x) est inférieur à g (x).

Cette proposition de démonstration est alors soumise au vote. Tout le monde pense non correcte cette proposition de démonstration sauf Evann qui la pense correcte et Mickaël qui est dans Autre et qui ne sait pas quoi en penser. Mais lorsque ceux qui pensent que la démonstration n'est pas correcte commencent à s'exprimer, de nouveaux arguments apparaissent :

> [>Carla] : Il faut rajouter A. Parce que là quand c'est inférieur à zéro...
>
> [>Le professeur] : Là attends, alors Carla tu es dans Pas Correct, il faut rajouter le A.
>
> [>Carla] : Sinon le reste c'est bon, mais là si on n'a pas le A ça veut dire que quand c'est inférieur à zéro c'est f (x) qui est plus grand que g (x).

En fait onze élèves jugent incorrect cette démonstration pour cette raison-là. Mais Aya n'est pas d'accord :

> [>Aya] : Alors moi je suis dans Pas Correct parce que même si on rajoute le A, pour moi c'est un exemple.
>
> [>Le professeur] : Même avec le A c'est un exemple. Pour toi. Et alors ?
>
> [>Aya] : Ben ce n'est pas une démonstration.

Ils sont seize élèves à penser comme Aya, qu'il s'agit d'un exemple et donc pas d'une démonstration. Hadrien change alors d'avis, il dit qu'il pense non correcte la démonstration parce qu'il

s'agit d'un exemple. Mickaël est aussi convaincu par cet argument. Seulement deux élèves, Léa et Evann, déclarent encore penser correcte cette proposition de démonstration lorsqu'on lui rajoute le A. Léa et Evann expliquent pourquoi ils attribuent encore leur crédit à cette proposition et d'autres vont leur expliquer pourquoi ils pensent qu'ils ont tort. Ceci donne lieu à un long échange qui montre à quel point les règles logiques ont été intégrées au point de pouvoir être explicitées :

> [>Léa] : Ben pour moi, il existe un réel A tel que pour tout x plus grand que A, tel que pour tout x plus grand que A f (x) plus petit que g (x)...
>
> [>Le professeur] : Ça marche...
>
> [>Léa] : Ben pour moi ça le démontre, ce n'est pas qu'un exemple.
>
> [>Le professeur] : OK, oui ?
>
> [>Evann] : Pour moi dans la conjecture, c'est marqué il existe. Donc, pour moi quand on donne un exemple ça veut dire qu'il y en a au moins un qui existe donc c'est juste.
>
> [>Le professeur] : D'accord. Tu dis" dans la conjecture c'est marqué il existe. Tu en donnes un, c'est bon, il existe !". Oui.
>
> [>Léa] : On a démontré que c'était vrai.
>
> [>Le professeur] : Alors Sébastien.
>
> [>Sébastien] : C'est vrai que c'est marqué il existe dans la conjecture sauf qu'on veut savoir pour toutes les fonctions qui ont pour limite 1. Or là tu l'as fait seulement pour une fonction f (x) et que pour une fonction g (x).
>
> [>Evann] : Non mais j'ai montré qu'il existe au moins 1.
>
> [>Mathieu] : Oui mais pour une seule fonction.
>
> [>Léa] : C'est ce qu'on nous demande.
>
> [>Evann] : Non mais il en existe au moins une.

Pour ces deux élèves, Léa et Evann, la compréhension du « il existe » semble acquise, mais pas celle des quantificateurs implicites qui portent sur f et sur g. Ensuite Caroline vient proposer sa démonstration :

On sait que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, il existe
donc un réel A tq. si $x > A$ on a
$1 - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.
de même que pour $g(x)$ on a
$4 - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant 4 + \varepsilon$.
Je choisis $\varepsilon = 1$.
on a : $1 - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant 1 + \varepsilon$
$1 - 1 \leqslant f(x) \leqslant 1 + 1$
$0 \leqslant f(x) \leqslant 2$
et $4 - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant 4 + \varepsilon$
$4 - 1 \leqslant g(x) \leqslant 4 + 1$
$3 \leqslant g(x) \leqslant 5$
$0 \leqslant f(x) < g(x) \leqslant 5$
Cela signifie donc qu'il existe un réel A
tq pour tout $x > A$, $f(x) < g(x)$

Figure 70 : Proposition de démonstration de Caroline

> [>Caroline] : En fait j'ai repris la même démonstration que la précédente sauf que cette fois je l'ai utilisée pour deux fonctions. Et donc on voit bien qu'en prenant epsilon égal 1, il existe un réel A tel que pour tout x supérieur à A on a f (x) compris entre 0 et 2 et g (x) compris entre 3 et 5. Donc, f (x) strictement inférieur à g (x). Enfin pour un réel A enfin... donc il existe un réel A tel que pour tout x supérieur à A, f (x) est inférieur à g (x).

Cette proposition est soumise au vote. Toute la classe pense correcte cette démonstration, sauf Maxime qui a voté Autre parce qu'il aurait bien rajouté que trois est supérieur à deux pour la conclusion finale. On remarque que le « il existe » du A a été factorisé en début de démonstration et cela empêche de distinguer que ce A dépend de la fonction et qu'il en existe deux, un pour chaque fonction. Lorsque le professeur met en évidence ce phénomène, cela n'est pas vraiment compris par Mathieu et Sébastien :

> [>Mathieu] : Mais g il est supérieur à 3. Donc, ça ne correspond pas avec la démonstration de Caroline.
>
> [>Sébastien] : C'est marqué : de même pour g.
>
> [>Mathieu] : De même pour g. g doit être...

Mais Caroline a saisi la subtilité :

> [>Caroline] : Du coup il faudrait distinguer le A pour les fonctions, enfin pour la limite et le A pour... enfin ce ne serait plus A du coup, pour lequel f (x) est inférieur à g (x).
>
> [>Le professeur] : Vous comprenez ce que...
>
> [>Caroline] : Enfin il faut prendre deux A différents. Il faut changer, c'est plus A, on peut prendre par exemple, un A et un B.

[>Le professeur] : Le A c'est pour quoi ?

[>Caroline] : Le A c'est pour f (x).

[>Le professeur] : Et le B c'est pour ?

[>Caroline] : Le B pour g (x).

Lors de son institutionnalisation le professeur dessine une situation où le A correspondant au f n'est pas la bonne valeur à partir de laquelle f est inférieur à g. Matthieu s'exclame alors :

[>Mathieu] : Mais g il est supérieur à 3. Donc, ça ne correspond pas avec la démonstration de Caroline.

Figure 71 : Dessin du professeur pour expliquer la dépendance du A à la fonction

Quand le professeur explique pourquoi il y a un problème :

[>Le professeur] : Là A, on l'a choisi pour *f*. (des élèves : non pour les deux !!).