Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (version provisoire - prépublication)

22-23 janvier 2016

Édités par

Thomas Barrier et Christine Chambris

ARDM

université PARIS DIDEROT PARIS 7

Ldar Laboratoire de Didactique André Revuz
Mathématiques • Sciences expérimentales

IREM PARIS

PRESENTATION

Le séminaire national de didactique des mathématiques, organisé par l'ARDM, a pour but de permettre la diffusion régulière de recherches, nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

La quasi-totalité des interventions du séminaire fait l'objet d'un texte dans ce volume ; sinon nous avons inséré le résumé annonçant leur présentation.

La session de janvier 2016 s'est déroulée à Arras dans les locaux de l'ESPE Lille Nord de France, avec le soutien de l'Université d'Artois et du Laboratoire de Mathématiques de Lens.

SOMMAIRE

Séminaire des 22 et 23 janvier 2016

Etude du processus d’institutionnalisation dans les pratiques de professeurs des écoles expérimentés.

Francine Athias
Un usage de la géométrie dynamique en cycle 3 : expliciter en géométrie.

Christine Mangiante, Pascale Masselot, Édith Petitfour, Claire Winder
Proposition d’un cadre d’analyse de situations de formation de professeurs des écoles.

ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES PAR LES « CENTRES D'INTÉRÊTS ». LE CAS DES CLASSES DE FIN D'ÉTUDES PRIMAIRES ÉLÉMENTAIRES (1936-ANNÉES 1950)

Renaud D'ENFERT

Université de Picardie Jules Verne, CURAPP-ESS (UMR 7319)
renaud.denfert@u-picardie.fr

Résumé
Créées dans le cadre de la prolongation de la scolarité obligatoire de 13 à 14 ans (1936), les classes de fin d'études primaires élémentaires constituent alors, pour les mathématiques, le lieu privilégié d'une pédagogie « active » fondée sur l'étude de « centres d'intérêt » en relation avec la vie quotidienne des élèves, présente ou future. En se basant sur une étude des textes officiels, de manuels scolaires et de revues pédagogiques, cet article met en lumière les principales caractéristiques de l'enseignement mathématique dispensé dans ces classes, depuis leur création jusque vers 1960, ainsi que les inflexions dont il fait l'objet dès les années 1940.

Mots clés
Enseignement primaire ; classes de fin d'études ; arithmétique ; éducation nouvelle ; méthodes actives

Entre 1936 et 1938, le système scolaire français fait l'objet d'une réforme de grande ampleur, qui concerne aussi bien l'enseignement primaire que l'enseignement secondaire. En particulier, la prolongation en 1936 de la scolarité obligatoire de 13 à 14 ans conduit à la création, dans les écoles primaires, de nouvelles classes appelées « classes de fin d'études primaires élémentaires ». Constituant désormais l'année terminale des études primaires élémentaires (6-14 ans), elles ont pour mission de préparer à entrer dans la vie sociale et professionnelle les nombreux élèves qui ne continueront pas leurs études dans des établissements de type secondaire. En se basant sur une étude des textes officiels (d'Enfert, 2015)[1], de manuels scolaires et de revues pédagogiques, cette contribution s'attache à caractériser l'enseignement mathématique dispensé dans ces classes, depuis leur création jusque vers 1960. On montrera notamment qu'elles constituent lors de leur création un lieu privilégié pour la mise en œuvre de pédagogies actives en mathématiques, notamment par le recours aux « centres d'intérêts » en relation avec la vie quotidienne des élèves. On verra également que ce renouvellement pédagogique est de courte durée : la décennie 1940, tant sous le régime de Vichy (1940-1944) pendant la Seconde Guerre mondiale que dans les années qui suivent la Libération de la France, est caractérisée par un retour à un enseignement mathématique plus classique, tandis que dans les années 1950, son caractère pratique commence à être dénoncé.

1 Cet article, écrit en partie avant la publication de (d'Enfert, 2015), reprend certains développements de l'introduction de cet ouvrage.

Des classes de fin d'études primaires pour une « scolarité prolongée »

La création, au sein du système d'enseignement primaire français, des classes de fin d'études primaires élémentaires trouve son origine dans la loi du 9 août 1936 relative à l'obligation de l'enseignement primaire, qui porte de 13 à 14 ans l'âge de la fin de la scolarité obligatoire. Votée trois mois après la mise en place du gouvernement de Front populaire dirigé par Léon Blum et dont Jean Zay est le ministre de l'Éducation nationale, cette loi vise à rattraper le retard pris par la France par rapport à de nombreux pays et à se conformer aux conventions internationales relatives à l'âge d'admission au travail (Conférence internationale de l'instruction publique, 1934). La loi du 9 août 1936 trouve aussi sa raison d'être dans la conjoncture économique du milieu des années 1930. La résorption du chômage engendré par la crise économique – la France compte plus d'un million de chômeurs en 1935 (Borne & Dubief, 1989, p. 37) – constitue en effet l'un des principaux arguments en faveur de la prolongation à 14 ans de la scolarité obligatoire (Férin, 1936). Le maintien des élèves à l'école primaire, pour une année supplémentaire, doit permettre de réduire une main d'œuvre pléthorique en mettant fin à cette « concurrence prématurée » (Zay, 1936) que représentent, sur le marché de l'emploi, les enfants de moins de 14 ans. Il faut noter toutefois que la loi du 9 août entérine, en partie du moins, des pratiques scolaires déjà en vigueur : dès avant 1936, du fait notamment de la crise économique, de nombreux élèves, surtout en milieu urbain, demeuraient à l'école primaire jusqu'à l'âge de 14 ou 15 ans (Condevaux, 1938a, p. 7).
Par-delà ces considérations économiques, la prolongation de la scolarité obligatoire jusqu'à l'âge de 14 ans s'inscrit dans le projet scolaire du Front populaire qui prévoit une réorganisation générale du système scolaire français (d'Enfert, 2015). Celui-ci est alors essentiellement composé de deux « ordres » d'enseignement bien distincts, avec, d'une part, l'enseignement primaire élémentaire qui s'adresse aux enfants des milieux populaires et possède des filières de scolarisation prolongée (écoles primaires supérieures et cours complémentaires) pour les élèves âgés de plus de 11 ou 12 ans ; et, d'autre part, l'enseignement secondaire des lycées et collèges, qui s'adresse principalement aux enfants de la bourgeoisie. Si l'on prend en compte, en outre, l'enseignement technique de niveau « moyen » (écoles pratiques de commerce et d'industrie, écoles nationales professionnelles) qui s'est constitué à la fin du XIX^e^ siècle, c'est en réalité une organisation scolaire en trois « ordres » d'enseignement qui prévaut au milieu des années 1930.
Le projet de loi déposé par le ministre Jean Zay le 5 mars 1937 et les mesures réglementaires prises par ce dernier en 1937 et 1938 ont pour ambition de rapprocher les différentes filières de scolarisation post-élémentaire (primaire supérieur, secondaire, technique) dans un enseignement du « second degré ». Mais cet enseignement du second degré n'a pas vocation à accueillir la grande masse des enfants. La prolongation de la scolarité obligatoire vise donc à améliorer la formation des très nombreux élèves (7 élèves sur 8 selon Jean Zay[2]) qui ne poursuivront leurs études ni dans le second degré, ni même dans les cours complémentaires des écoles primaires[3], et qui quitteront tôt l'école – à 14 ans désormais – pour entrer dans la vie active. Plus précisément, comme l'indiquent les instructions officielles du 20 septembre 1938, cette année d'école supplémentaire « doit servir de transition entre l'école et la vie » (Ministère de l'Éducation nationale, 1938b, p. 87). Elle doit aussi les entraîner à s'instruire et

2 En 1938-1939, les écoles primaires élémentaires françaises réunissent 5 254 000 élèves, contre 850 000 pour les différentes filières post-élémentaires (lycées, collèges, écoles primaires supérieures, cours complémentaires, établissements techniques), et quelques dizaines de milliers pour les « petites classes » des lycées et collèges (7e, 8e, 9e, etc.).

3 Contrairement aux écoles primaires supérieures (transformées en collèges modernes en 1941) qui sont des établissements scolaires autonomes, les cours complémentaires, qui proposent un enseignement du même type que ces dernières mais sur un nombre d'années réduit, sont établis dans des écoles primaires élémentaires.

à se cultiver par eux-mêmes ou dans le cadre de l'enseignement post-scolaire prévu par le projet de loi Jean Zay pour les adultes et les adolescents de plus de 14 ans (Sorre, 1938).
Pour accueillir les élèves durant cette année supplémentaire, des classes spécifiques, appelées « classes de scolarité prolongée », sont ouvertes dès la rentrée 1936 dans les écoles primaires. Elles y constituent l'année terminale du cycle d'études primaires élémentaires, son dernier étage (voir le tableau en annexe). Si l'on en croît le ministre Jean Zay, plus de 5 000 de ces classes sont déjà créées en février 1937, qui accueillent environ 200 000 élèves de plus de 13 ans (Journal des instituteurs, 1937). En 1938, dans le cadre d'une réorganisation d'ensemble de la fin de la scolarité élémentaire, elles sont renommées « classes de fin d'études primaires élémentaires » et dotées d'horaires et de programmes spécifiques.

UN ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE FONDÉ SUR LES « CENTRES D'INTÉRÊTS » (1936-1940)

Telle qu'elle est conçue par Jean Zay et ses collaborateurs, la classe de fin d'études primaires « est une préparation directe à la vie » (Ministère de l'Éducation nationale, 1938b, p. 74). L'enseignement dispensé doit donc y être résolument pratique et s'accorder à l'activité économique et aux réalités locales, rurales ou urbaines. Il s'agit aussi de proposer « autre chose » que ce que les élèves ont connu dans les classes précédentes : non seulement ces derniers ne doivent pas avoir l'impression de redoubler en étant soumis aux mêmes exercices scolaires que leurs camarades plus jeunes, mais ils doivent ressentir, et leurs parents avec eux, l'intérêt et l'utilité d'entreprendre une année d'études supplémentaire.
Cette double ambition imprègne très largement l'enseignement mathématique des classes de fin d'études, tel qu'il est défini par les textes et les discours officiels, et décliné dans les revues pédagogiques et certains manuels scolaires de la fin des années 1930. « On souhaite que l'enfant y perde progressivement son esprit d'écolier pour s'initier aux problèmes concrets si variés que lui poseront dans la vie sa profession future et ses obligations de citoyen », indiquent ainsi les instructions de 1938 à propos de l'enseignement mathématique (Ministère de l'Éducation nationale, 1938b, p. 87).
Du point de vue des contenus, l'objectif n'est pas d'enseigner aux élèves de nouvelles connaissances mathématiques, mais de leur faire appliquer celles qu'ils ont antérieurement acquises aux diverses situations qu'ils rencontreront dans leur vie d'adulte. Pour définir les contenus d'enseignement, le ministère ne publie pas un programme détaillé énumérant les diverses notions à assimiler, comme pour les autres classes de l'école primaire, mais seulement un court paragraphe significativement intitulé « Application du calcul » et dont le libellé privilégie le réinvestissement des acquis :

> Utilisation des connaissances mathématiques déjà acquises à la résolution de problèmes concrets de la vie pratique relatifs : à la vie sociale et aux activités familiales, dans toutes les écoles ; à la vie rurale et aux activités agricoles, à la vie urbaine et aux activités industrielles, selon le milieu où vit l'enfant. (Ministère de l'Éducation nationale, 1938a)

Du point de vue des méthodes, la classe de fin d'études primaires constitue une expérience originale de mise en place d'une pédagogie active, dont l'ambition est de rompre avec une tradition scolaire jugée trop livresque et dogmatique, et qui est partie prenante d'une volonté de renouvellement pédagogique concernant l'ensemble du système d'enseignement (Prost, 2003 ; Condette, 2011). Pour ses promoteurs influencés par les courants de l'éducation nouvelle, la classe de fin d'études constitue une « page blanche pour y expérimenter à grande échelle quelques-unes des intuitions et des suggestions suscitées par le projet de réforme dans son ensemble » (Ory, 1994, p. 664). Les instructions ministérielles lient étroitement la finalité « utilitariste » des classes de fin d'études, c'est-à-dire leur rôle de « préparation à la vie », et la volonté d'y développer une pédagogie substituant aux recettes et aux automatismes un travail actif et réfléchi faisant appel à l'initiative des élèves. Les maîtres sont invités à renoncer aux leçons systématiques et, dans la mesure du possible, aux explications théoriques. Ceci au profit d'un enseignement concret et actif, basé sur l'étude de « centres d'intérêts »[4] en rapport avec des problèmes pratiques rencontrés dans la vie sociale ou familiale, dans les activités industrielles, agricoles ou ménagères, à la ville ou à la campagne : communications postales, épargne, assurances, constructions et réparations, banques, usines, salaires, engrais, cultures, comptabilité ménagère ou agricole, etc.

Cette nouvelle approche doit aussi conduire à décloisonner les disciplines : le maître « cherchera, autour de sujets particulièrement opportuns, à établir une liaison étroite entre les enseignements de tous ordres, littéraires et scientifiques, artistiques et manuels, et ces centres d'intérêt communs aux anciennes disciplines se substitueront à ces disciplines elles-mêmes » (Ministère de l'Éducation nationale, 1938b, p. 87). Non seulement les exercices et problèmes d'arithmétique peuvent trouver leur source dans les questions abordées en sciences, en géographie, en dessin ou en travail manuel, voire dans le cadre de l'« initiation à la vie civique » inscrite au programme, mais leur étude va bien au-delà de leur seule dimension mathématique : elle doit être « l'occasion d'exercices de toutes sortes, vocabulaire, lettres, demandes de renseignements aussi bien que calcul, devis, factures, études de prix de revient, projets d'itinéraires » (*Ibid*.).

Par rapport à l'enseignement prescrit pour les classes précédentes, la perspective pédagogique se trouve donc inversée. Il ne s'agit pas d'enseigner telle ou telle notion mathématique puis de faire des exercices d'application sur des sujets variés, mais de prendre comme point de départ un thème de la vie quotidienne ouvrant sur de « vrais » exercices pratiques basés sur l'exploitation de documents que les élèves auront à réellement utiliser dans leur vie d'adulte. L'inspecteur Georges Condevaux, l'un des principaux promoteurs des classes de fin d'études, écrit ainsi : « Nous voudrions qu'on habituât les élèves à travailler dans les mêmes conditions que les adultes, c'est-à-dire que les problèmes qu'on leur propose soient pratiques, c'est-à-dire encore qu'on n'y ait pas artificiellement rassemblé tous les nombres utiles, mais, au contraire, que les élèves soient obligés, pour les résoudre, de consulter un tarif, un barème ou tel document officiel » (Condevaux, 1938b, p. 32-33). Si le recours à une « vraie » documentation vise bien la « préparation à la vie », il est aussi une façon de rompre avec des pratiques enseignantes jugées routinières car trop exclusivement centrées sur la résolution quasi-mécanique des problèmes-types qui abondent dans les manuels d'arithmétique. Mettant généralement en scène des situations de la vie courante, ces problèmes sont en effet régulièrement critiqués pour leurs énoncés artificiels ou désuets, leurs données numériques factices, leurs solutions toutes faites qui demandent un effort de mémoire plutôt que de réflexion (Marijon & Leconte, 1930). La rupture avec la tradition scolaire semble d'autant plus aisée que l'âge de passage de l'examen du certificat d'études primaires, institué en 1880 pour sanctionner les études primaires élémentaires, reste fixé à 12 ans : l'enseignement des classes de fin d'études peut être dispensé sans souci d'examen et donc de préparation intensive des élèves à ses épreuves.

Parmi les rares manuels d'arithmétique qui paraissent à partir de 1936 pour les classes de scolarité prolongée puis de fin d'études primaires, celui d'Albert Châtelet et Georges Condevaux, publié par l'éditeur Bourrelier en 1937 (soit avant la parution du programme et des instructions officielles), est particulièrement emblématique du renouvellement

4 Notons qu'en 1912, la *Revue de l'enseignement primaire et primaire supérieur* publie un article intitulé « Les centres d'intérêts » (Laurin & Degouy, 1912), lequel sera suivi de plusieurs autres sur ce thème. Notons également que les textes officiels et para-officiels sur les classes de fin d'études que nous avons consultés ne font pas référence au pédagogue belge Ovide Decroly, qui fait pourtant de l'exploitation des « centres d'intérêts » un élément central de sa pédagogie. Une analyse approfondie de la presse pédagogique resterait à entreprendre afin d'évaluer l'influence de ce dernier sur la pédagogie des classes de fin d'études. Sur Decroly, voir notamment (Depaepe, Simon & Van Gorp, 2003 ; Wagnon, 2008).

pédagogique voulu par le ministère de l'Éducation nationale (Châtelet & Condevaux, 1937). Il est vrai que les deux auteurs sont fortement impliqués dans les réformes engagées par Jean Zay : mathématicien, recteur de l'académie de Lille à partir de 1924, Albert Châtelet a été nommé par Jean Zay à la direction de l'enseignement du Second degré du ministère de l'Éducation nationale en 1936 (Condette, 2009) ; dans les années 1930, il a publié des manuels d'arithmétique pour l'école élémentaire avec Georges Condevaux, un inspecteur primaire qui devient l'un de ses proches collaborateurs au ministère en 1937 (Caplat, 1997, pp. 219-223 ; Radtka, à paraître). Leur manuel d'arithmétique pour les classes de fin d'études, réalisé avec la collaboration d'instituteurs du département du Nord (Condevaux a été inspecteur primaire dans ce département), semble connaître un certain succès puisque le chiffre de 40 000 exemplaires est atteint en 1938, et celui de 225 000 en 1946.
L'organisation interne de ce manuel rompt radicalement avec celle des manuels ordinaires. À l'exception du chapitre consacré à la géométrie, les différents chapitres qui composent l'ouvrage ne portent pas, comme c'est traditionnellement l'usage, sur des notions mathématiques (la numération, l'addition, la soustraction, etc.), mais sur des questions relatives à la vie pratique : la construction et l'entretien de la maison, la vie ménagère, les industries, la vie sociale, les impôts et assurances, la vie à la campagne, le commerce, les transports et communications, les placements d'argent. Chacun de ces chapitres est subdivisé en « leçons », également thématiques. La vie ménagère est ainsi déclinée en 16 leçons, depuis le « loyer de la maison » jusqu'à la « comptabilité de la ménagère », en passant par « l'alimentation ». Chacune de ces leçons articule une partie documentaire comprenant informations pratiques, tarifs, barèmes, etc. (page de gauche), avec une série d'exercices et de problèmes visant à exploiter les informations fournies (page de droite). Par les renseignements qu'elles fournissent, celles-ci sont autant des leçons de science pratique, de législation ou d'économie, que des leçons de calcul. Une « Note pour les maîtres » suggère d'ailleurs que les élèves puissent emporter avec eux le manuel en quittant l'école primaire : « Ils y trouveraient, quelle que soit leur profession, nombre de renseignements utiles qu'ils pourraient difficilement trouver ailleurs sans de longues et difficiles démarches » (Châtelet & Condevaux, 1937, p. 6).

Le retour à un « ordre arithmétique » (années 1940-1950)

Ce renouvellement pédagogique initié sous le Front populaire est toutefois de courte durée. La décennie 1940, tant pendant la Seconde Guerre mondiale, sous le régime de Vichy (1940-1944), que dans les années qui suivent la Libération, est caractérisée par un retour à un enseignement mathématique plus traditionnel, qui donne la priorité à l'acquisition des mécanismes fondamentaux du calcul. Cette réorientation de l'enseignement mathématique, qui concerne l'ensemble de l'enseignement primaire, est motivée par diverses considérations. Certaines sont d'ordre idéologique : en rendant l'enseignement « attrayant », les méthodes actives promues avant-guerre auraient fait oublier qu'à l'école primaire comme dans la vie réelle, rien ne s'acquiert sans effort et sans travail[5]. D'autres invoquent la transformation du public des classes de fin d'études, désertées par les bons élèves qui préfèrent poursuivre leurs études dans les lycées et collèges ou dans les cours complémentaires. N'y restent donc que les élèves dont le niveau scolaire ne permet pas de pousser leurs études au-delà de l'obligation scolaire. En 1943, par exemple, l'inspecteur d'académie de Paris note ainsi que ces élèves constituent un « résidu médiocre » qui ralentit l'étude du programme[6]. Au lendemain de la

5 Archives nationales [désormais AN], F/17/14300 : conférences pédagogiques de 1944. Voir également (Le Lay, 1946).

6 AN, F/17/13357 : papiers du cabinet d'Abel Bonnard. Entre 1941 et 1944, la classe de fin d'études est intégrée dans un « deuxième cycle » accueillant les enfants de 11 à 14 ans. Voir également (Béchet, 1950).

guerre, la classe de fin d'études n'est donc plus seulement une « préparation à la vie » comme le voulait Jean Zay : elle est aussi une classe de remise à niveau pour des élèves qui ne possèdent pas suffisamment les mécanismes et le sens des opérations. En outre, la réforme du certificat d'études primaires, dont l'âge est repoussé à 14 ans en 1941, n'est pas sans conséquence sur les objectifs de la classe de fin d'études : celle-ci devient *aussi* une classe de préparation à cet examen. Reconnaissant la faiblesse en calcul (calcul écrit et calcul mental) des élèves des classes de fin d'études, le ministère doit d'ailleurs intervenir à plusieurs reprises par voie de circulaire pour que les sujets des épreuves d'arithmétique ne soient pas hors de portées des candidats (Ministère de l'Éducation nationale, 1947, 1949).

Concrètement, le nouveau programme publié en 1947 privilégie, comme c'est déjà le cas dans les autres classes, une organisation notionnelle plutôt que thématique de l'enseignement mathématique, et accorde une large place aux révisions des connaissances acquises antérieurement. Ce nouveau programme, qui restera valable jusqu'à l'extinction des classes de fin d'études au tournant des années 1960, fournit ainsi la liste des connaissances mathématiques qui devront être passées en revue et appliquées à des problèmes concrets relatifs aux diverses activités de la vie économique et sociale : la numération et les quatre opérations, les pourcentages, les fractions « usuelles », la mesure du temps, les échelles et les graphiques, le système métrique, les notions élémentaires de la géométrie. Si les instructions de 1938 restent toujours valables, le programme de 1947 s'en éloigne par son esprit. Son organisation, par notions mathématiques, apparaît en effet comme une incitation à délaisser la méthode des « centres d'intérêt » promue avant la guerre. Un inspecteur primaire résume bien le renversement de perspective qui est alors opéré :

> Sans doute, calcul et vie pratique doivent être intimement liés. Mais au lieu de « faire du calcul » à propos de la vie sociale, de la vie familiale, des activités locales, on se préoccupera de ces activités, de la vie familiale et de la vie sociale à l'occasion de leçons de calcul systématiquement organisées. En somme, l'ordre des termes est inversé : ce n'est plus la vie pratique qui provoque, suivant un ordre qu'elle impose, l'intervention de notions variées de calcul, c'est l'étude méthodique du calcul, le plus souvent sous forme de révision d'ailleurs, qui conduit à aborder, dans un ordre « arithmétique », des applications variées à la vie pratique. (Godier, 1955, p. 178)

C'est bien, d'ailleurs, une telle orientation qu'adoptent après 1940 les auteurs des manuels d'arithmétique pour les classes de fin d'études. Leurs préfaces rappellent la nécessité de revoir, confirmer, préciser les connaissances mathématiques élémentaires étudiées antérieurement mais superficiellement acquises. Leur organisation interne marque le retour à une conception « disciplinaire » de l'enseignement du calcul, centrée sur les contenus mathématiques. Ce que signale l'alternance, dans des proportions variées, ou même la répartition en deux parties bien distinctes, de « vraies » leçons d'arithmétique, de système métrique ou de géométrie d'une part, et de leçons consacrées à l'étude de problèmes pratiques d'autre part. Certains auteurs se démarquent d'ailleurs franchement des conceptions qui prévalaient sous le Front populaire : « Il faut se demander, s'il ne faut pas considérer l'enseignement de l'arithmétique comme étant précisément l'occasion par excellence où l'on peut s'efforcer d'échapper à l'influence excessive ou dominante de l'activité globale, c'est-à-dire des centres d'intérêts » (Marijon, Masseron & Delaunay, 1949, p. 5) ; « [les auteurs] ont pris soin de ne pas substituer des leçons de choses ou des leçons de sciences à des leçons d'arithmétique » (Franck, 1952, p. 5). Même le manuel de Châtelet et Condevaux, dont on a vu plus haut le caractère novateur à la fin des années 1930, est l'objet d'une telle évolution puisqu'il comporte, à partir de l'édition de 1948 (alors intitulée *J'apprends à résoudre les problèmes de la vie pratique*), « une révision méthodique et approfondie des notions acquises au cours moyen, poursuivie de concert avec l'étude de leurs applications » (Condevaux, 1952, p. 3). Les cinq leçons consacrées aux divers services postaux (envois de lettres et paquets, poste aérienne, télégraphe, téléphone, envois et recouvrements d'argent) ont été réduites à une seule. De façon significative, une édition remaniée, comportant des « énoncés simplifiés et plus étroitement adaptés à l'acquisition des notions fondamentales d'arithmétique » est publiée à partir de 1954 sous le titre *J'apprends l'arithmétique et ses applications*, la leçon sur le bureau de postes étant désormais sous-titrée « Problèmes d'addition » (Condevaux, 1954).

Ce retour à un enseignement mathématique plus traditionnel signifie-t-il pour autant l'abandon des méthodes de l'éducation nouvelle dans les classes de fin d'études ? En réalité, certains manuels font appel, explicitement ou implicitement, aux « méthodes actives ». Ils proposent par exemple, en ouverture de chaque leçon, des exercices de réflexion et d'observation ou des petites enquêtes à faire seul ou équipe. L'exploitation de documents, qu'ils soient à recueillir à l'extérieur de l'école ou qu'ils figurent en bonne place dans le manuel, vise alors à mettre les élèves en contact avec les réalités qui les attendent au sortir de l'école, mais aussi à favoriser la collaboration entre le maître et ces derniers (Pugibet, Adam & Gason, 1943, p. 2). Il est vrai que la réglementation du certificat d'études primaires prône ce type de démarche. Sous Vichy, l'épreuve de calcul du certificat d'études comprend « un problème comportant, autant que possible, l'utilisation de documents (plans, séries de prix, tarifs, barèmes, catalogues, documents officiels, etc.) et se rapportant à la vie pratique » (Secrétariat d'État à l'Éducation nationale et à la Jeunesse, 1941). Elle revient ensuite à une forme plus traditionnelle, mais une circulaire de 1946 encourage ce « souci de réalisme » qui consiste « à faire rechercher par les candidats eux-mêmes certains des éléments numériques dont ils ont besoin dans des documents placés sous leurs yeux » (Ministère de l'Éducation nationale, 1946)[7]. Toutefois, la faible fréquence de ce type de problèmes (environ 5 %) à l'examen du certificat d'études au milieu des années 1950 semble indiquer qu'une telle pratique, pour autant qu'elle ait été réellement adoptée par les maîtres, est rapidement tombée en désuétude au profit d'énoncés plus traditionnels (Vuibert, 1957 ; Godier & Donnet, 1954).

L'orientation pratique de l'enseignement mathématique remise en question (années 1950)

Contre l'exclusivité des centres d'intérêts prônée sous le Front populaire, c'est donc une sorte de compromis entre une approche disciplinaire traditionnelle et l'emploi de certaines méthodes actives (enquêtes, utilisation de documents, etc.) qui s'établit à partir de la décennie 1940. Pour autant, le recentrage sur les contenus mathématiques n'invalide pas l'objectif premier des classes de fin d'études, qui est « d'informer les élèves et de les préparer méthodiquement aux difficultés qu'ils pourront rencontrer ultérieurement dans leur vie individuelle, familiale, sociale ou même professionnelle » (Ministère de l'Éducation nationale, 1947, p. 1110). Toutefois, au cours des années 1950, cet objectif fait l'objet d'une sérieuse remise en question, qui s'inscrit dans le cadre plus général d'une critique des programmes des dernières années de l'école primaire.

Cette remise en question se cristallise lors des conférences pédagogiques d'instituteurs organisées par le ministère de l'Éducation nationale en 1955, sur le thème de l'enseignement du calcul[8]. L'orientation pratique de l'enseignement mathématique dispensé dans les classes de fin d'études y est alors massivement – et vivement – dénoncée. Les nombreuses applications pratiques inscrites au programme concentrent les critiques : elles sont accusées d'être trop éloignées des préoccupations des élèves, considérés à tort comme des adultes, et de leur environnement immédiat ; de simplifier arbitrairement des situations qui sont en réalité complexes et que, de surcroît, les élèves n'auront probablement pas l'occasion d'affronter

7 À partir de 1947, la réglementation n'encourage plus l'emploi de documents, comme si cet objectif était abandonné.

8 AN, F/17/17839 : formation professionnelle des instituteurs - conférences pédagogiques (1954-1955).

dans leur vie future ; de mobiliser des connaissances nombreuses et un vocabulaire spécialisé, au point de transformer les contenus d'enseignement en « une encyclopédie de science pratique », un « monstrueux savoir ». De plus, dans les années 1950, les élèves des classes de fin d'études sont de plus en plus nombreux à poursuivre leur scolarité au-delà de l'âge de 14 ans, en intégrant des établissements d'enseignement technique, notamment les centres d'apprentissage créés à partir de 1945 (Sido, 2011). Le faible niveau mathématique de ces élèves, déjà souligné dans la décennie 1940, apparaît ici comme une circonstance aggravante :

> Les enfants du CFE [cours de fin d'études] ont surtout besoin de faire du calcul, de l'arithmétique et non des applications qui, le plus souvent, sont des simulacres, voire des hérésies si on se réfère à la vie réelle. […] pourquoi proposer au CFE tant de problèmes soi-disant pratiques comportant des barèmes, des relevés de compteurs, des prix de revient d'une charpente compliquée, etc., alors que les élèves ne connaissent pas encore suffisamment les mécanismes de base, les simples opérations arithmétiques ; qu'ils ignorent la plupart du temps le sens du vocabulaire technique qui est employé dans les énoncés de problèmes ? (Ayméric, 1955)

Cette orientation pratique de l'enseignement est donc accusée de porter préjudice à l'acquisition de bases solides. Elle est aussi dénoncée pour sa faible contribution à la formation de l'esprit et au développement d'une véritable éducation mathématique. Le rôle de l'école primaire, pense-t-on alors, n'est pas de faire résoudre aux élèves toutes les difficultés qui pourront se présenter dans la vie : elle doit plutôt « exercer l'esprit de l'enfant sur des thèmes de réflexion, souvent plus schématiques que les situations de la vie réelle, mais qui par les habitudes de pensée claire et rigoureuse dont ils sont le support, sont, sans doute, la plus efficace des préparations aux difficultés plus ou moins imprévisibles que lui réserve l'existence » (Canac, 1955, p. 117). Les classes de fin d'études deviennent ainsi partie prenante d'une conception de l'enseignement primaire où la dimension éducative de l'enseignement doit primer sur la dimension pratique.

Cette volonté de transformation de l'enseignement des classes de fin d'études ne trouvera toutefois pas sa traduction dans de nouveaux programmes. La réforme de l'enseignement, menée en 1959 par le ministre de l'Éducation nationale Jean Berthoin, transforme fondamentalement le système scolaire français en prolongeant à 16 ans l'âge de la scolarité obligatoire et en décidant que tous les élèves de l'école primaire ayant acquis une « formation élémentaire normale » pourront suivre des études secondaires à partir de l'âge de 11 ans (décret du 6 janvier 1959). Désormais, l'école primaire, réduite à la tranche d'âge 6-11 ans, constitue un premier degré à l'issue duquel les élèves iront suivre un nouveau cycle d'études au collège ou au lycée. Dans ce nouveau contexte, les classes de fin d'études primaires, dont l'échec est unanimement reconnu (Fouchet, 1963, p. 3553), sont progressivement supprimées jusqu'à leur disparition totale au tournant des années 1960-1970.

CONCLUSION

Sans nul doute, le recours aux « centres d'intérêts » constitue un épisode singulier de l'histoire de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire française. Promue par le ministère de l'Éducation nationale dans la seconde moitié de la décennie 1930 pour les classes de fin d'études primaires élémentaires nouvellement créées, cette pédagogie originale ne s'est pas imposée sur le long terme. La volonté ministérielle de revenir à un enseignement primaire des mathématiques plus traditionnel au lendemain de la Seconde Guerre mondiale, les contraintes pédagogiques induites par le faible niveau scolaire des publics concernés comme par la préparation à l'examen du certificat d'études primaires, la contestation par les instituteurs de sa dimension pratique, la suppression progressive des classes de fin d'études primaires liée aux transformations structurelles du système scolaire, sont autant de facteurs qui peuvent expliquer cet insuccès.

On notera cependant que le recours à une approche thématique pour enseigner les mathématiques ne disparaît pas entièrement avec l'extinction des classes de fin d'études. On en retrouve la trace dans les classes dites « de transition » créées au début de la décennie 1960 pour accueillir les élèves dont le niveau est insuffisant pour suivre des études secondaires (et qui disparaissent avec la réalisation du « collège unique » en 1975). Celles-ci sont en effet promues comme le lieu d'une pédagogie couplant le réapprentissage des mécanismes de base et l'étude de thèmes transversaux issus de l'actualité ou de la vie de tous les jours. Pour ce qui est des mathématiques, il s'agit « d'introduire à des situation qui justifient et motivent le calcul » (Ministère de l'Éducation nationale, 1964). La revue mensuelle *Thèmes*, créée spécialement pour ces classes en 1964 par l'éditeur Armand Colin/Bourrelier (le même éditeur que celui du manuel de Châtelet et Condevaux évoqué plus haut) et publiée jusqu'en 1974, est emblématique de cette orientation pédagogique. Mais contrairement à ce qui a été observé pour les classes de fin d'études primaires, les thèmes d'étude proposés par cette revue ne sont pas centrés sur la vie sociale ou familiale : ils abordent des questions en prise sur l'actualité et le monde contemporain comme les jeux olympiques, l'homme et l'animal domestique, la montagne en hiver, ou encore la conquête de l'espace. En mathématiques comme dans les autres disciplines, il s'agit alors moins de « préparer à la vie » que de redonner aux élèves de ces classes le goût du travail scolaire et de combler leurs lacunes (Bishop, d'Enfert, Dorison & Kahn, 2011).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AYMÉRIC (1955). Compte-rendu de la conférence pédagogique de la circonscription d'Arles, 22 décembre 1955 (signé Ayméric, inspecteur départemental de l'enseignement primaire). *Archives nationales*, F/17/17839.

BÉCHET, A. (1950). L'enseignement du calcul dans la classe de fin d'études primaires. *Bulletin de la Société Alfred Binet*, 394, 141-155.

BISHOP, M.-F., D'ENFERT, R., DORISON C. & KAHN, P. (2011). Réformes du système éducatif et rénovation pédagogique dans les années 1960 : le cas des classes de transition. In R. d'Enfert & P. Kahn (Eds.), *Le temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Cinquième République : les années 1960* (pp. 99-119). Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble.

BORNE, D. & DUBIEF, H. (1989). *Nouvelle histoire de la France contemporaine, tome 13 : La crise des années 1930*. Paris : Seuil.

CANAC, H. (1955). Les problèmes dits « pratiques ». In F. Brachet, H. Canac & E. Delaunay (Eds.), *L'Enfant et le nombre. Éléments pour une pédagogie du calcul élémentaire* (pp. 11-118). Paris : Didier.

CAPLAT, G. (1997). *L'inspection générale de l'Instruction publique au XX^e siècle. Dictionnaire biographique des inspecteurs généraux et des inspecteurs de l'Académie de Paris, 1914-1939*. Paris : INRP/Economica.

CHÂTELET, A. & CONDEVAUX, G. (1937). *Arithmétique. Applications. Usages du calcul dans la vie pratique. Cours supérieur. Classes de scolarité prolongée*. Paris : Bourrelier.

CONDETTE, J.-F. (2009). *Albert Châtelet. La République par l'école (1883-1960)*. Arras : Artois Presse Université.

CONDETTE, J.-F. (2011). Les loisirs dirigés dans les collèges et les lycées (1937-1939). *Histoire de l'éducation*, 129, 5-38.

CONDEVAUX, G. (1938a). Le problème de la prolongation de la scolarité ». In G. Condevaux (Ed.), *La prolongation de la scolarité. Classe de fin d'études primaires et ateliers-écoles* (pp. 7-13). Paris : Bourrelier.

CONDEVAUX, G. (1938b). L'enseignement scientifique. In G. Condevaux (Ed.), *La prolongation de la scolarité. Classe de fin d'études primaires et ateliers-écoles* (pp. 32-36).

Paris : Bourrelier.
CONDEVAUX, G. (1952). *J'apprends à résoudre les problèmes de la vie pratique*. Paris : Bourrelier.
CONDEVAUX, G. (1954). *J'apprends l'arithmétique et ses applications*. Paris : Bourrelier.
CONFÉRENCE INTERNATIONALE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE (1934). *Recommandation n° 1 concernant la scolarité obligatoire et sa prolongation.* http://www.ibe.unesco.org/policy/34_77_f/R01.pdf
D'ENFERT, R. (2015). *L'enseignement mathématique à l'école primaire, de la Révolution à nos jours. Textes officiels. Tome 2 : 1915-2000*. Limoges : Presses universitaires de Limoges.
DEPAEPE, M., SIMON, F. & VAN GORP, A. (2003). The Canonization of Ovide Decroly as a "Saint" of the New Education. *History of Education Quarterly*, 43(2), 224-249.
FÉRIN, R. (1936). Rapport fait au nom de la Commission de l'enseignement et des beaux-arts chargée d'examiner le projet de loi modifiant la loi du 28 mars 1882 relative à l'obligation de l'enseignement primaire, par M. Raymond Férin, député. *Journal officiel de la République française. Documents parlementaires - Chambre*, annexe n° 441, séance du 25 juin 1936, 1028-1029.
FOUCHET, C. (1963). Problèmes de l'Éducation nationale. *Journal officiel de la République française. Débats parlementaires – Assemblée nationale 67*, 20 juin 1963, 3550-3557.
FRANCK, R. (1952). *Arithmétique. Classe de fin d'études primaires. Préparation au certificat d'études*. Paris : Larousse.
GODIER, A. (1955). Le calcul en classe de fin d'études (Arithmétique – Système métrique – Géométrie). In A. Châtelet & M. Bompard (Eds.), *Enseignement de l'arithmétique* (pp. 177-190). Paris : Bourrelier.
GODIER, A. & DONNET, A. (1954). *L'arithmétique au certificat d'études, à l'usage : des classes de fin d'études, des centres d'apprentissage, des écoles pratiques*. Paris : Gedalge.
JOURNAL DES INSTITUTEURS (1937). La classe de scolarité prolongée. L'Union fédérale des combattants chez M. Jean Zay. *Journal des instituteurs*, 26, 378.
LAURIN, M. T. & DEGOUY, A. (1912). Les centres d'intérêts. *Revue de l'enseignement primaire et primaire supérieur*, 1, 1-3 [6 octobre 1912].
LE LAY, J. (1946). À propos des nouveaux horaires et programmes des CP, CE, CM des écoles primaires élémentaires. *L'Éducation nationale*, 18, 6-7 [21 mars 1946].
MARIJON, A. & LECONTE, T. (1930). Rapport sur les conférences pédagogiques de 1928 (L'arithmétique et la géométrie à l'école primaire). *L'Enseignement public. Revue pédagogique*, 93(1), 1-29.
MARIJON, A., MASSERON, R. & DELAUNAY, E. (1949). *Nouveau Cours d'arithmétique. Arithmétique, Géométrie, Cours supérieur, classe de fin d'études, certificat d'études primaires*. Paris : Hatier.
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1938a). Arrêté du 23 mars 1938 fixant les programmes du cours de fin d'études primaires élémentaires (13 à 14 ans). *Journal officiel de la République française*, 76, 3732-3734 [30 mars 1938].
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1938b). Instructions du 20 septembre 1938. In Ministère de l'Éducation nationale (Ed.), *Plan d'études et programmes des écoles primaires élémentaires* (pp. 36-139). Paris : Vuibert.
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1946). Circulaire du 13 mai 1946 sur le certificat d'études primaires – Remarques sur la nature des épreuves écrites (ancien régime), session de 1945. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, 26, 762-765 [25 mai 1946].
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1947). Instructions du 30 octobre 1947 sur le certificat d'études primaires. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, 31, 1109-1111 [6 novembre 1947].
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1949). Circulaire du 16 avril 1949 sur l'organisation

du certificat d'études primaires. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, 21, 1399-1400 [28 avril 1949].
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1964). Instructions du 18 septembre 1964 concernant les classes de sixième et de cinquième de transition. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* 36, 2178-2185 [1er octobre 1964].
ORY, P. (1994). *La belle illusion. Culture et politique sous le signe du Front populaire, 1935-1938*. Paris : Plon.
PROST, A. (2003). Les instructions de 1938. In A. Prost (Ed.), *Jean Zay et la gauche du radicalisme* (pp. 193-208). Paris : Presses de SciencesPo.
PUGIBET, C., ADAM, A. & GASON, P. (1943). *Arithmétique. Deuxième cycle 1re et 2e années. Certificat d'études primaires. Conforme aux programmes du 16 août 1941 et aux instructions du 5 mars 1942. Livre du maître*. Paris : A. Colin.
RADTKA, C. (à paraître). Renouveler l'enseignement des mathématiques au primaire dans les années 1930 en France : le *Cours d'Arithmétique Albert Châtelet* aux Éditions Bourrelier et son élaboration. In R. d'Enfert, M. Moyon & W. Valente (Eds.), *Les mathématiques à l'école élémentaire (1880-1970). Études France-Brésil*. Limoges : Presses universitaires de Limoges.
SECRÉTARIAT D'ÉTAT À L'ÉDUCATION NATIONALE ET À LA JEUNESSE (1941). Arrêté relatif au diplôme d'études primaires préparatoires et au certificat d'études primaires. *Journal officiel de l'État français*, 244, 3715-3716 [2 septembre 1941].
SIDO, X. (2011). *Les mathématiques dans l'enseignement professionnel. Genèse et évolution d'un enseignement, 1945-1985*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
SORRE, M. (1938). Sur le sens des programmes de la classe de scolarité prolongée. In G. Condevaux (Ed.), *La prolongation de la scolarité. Classe de fin d'études primaires et ateliers-écoles* (pp. 14-15). Paris : Bourrelier.
VUIBERT (1957). *Annales du certificat d'études primaires. Livre de l'élève. Année 1956*. Paris : Vuibert.
WAGNON, S. (2008). Ovide Decroly, un programme d'une « école dans la vie » aux accents leplaysiens ? *Le Télémaque*, 33, 129-138.
ZAY, J. (1936). Projet de loi modifiant la loi du 28 mars 1882 relative à l'obligation de l'enseignement primaire, présenté au nom de M. Albert Lebrun, président de la République française, par M. Jean Zay, ministre de l'Éducation nationale – Exposé des motifs. *Annales de la Chambre des députés. Documents parlementaires*, 869 [séance du 11 juin 1936].

Annexe

<table>
<tr><th></th><th>1923</th><th>1938</th><th>1945-1947</th></tr>
<tr><td>14 ans</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Classe de fin d’études</td><td>CEPE</td></tr>
<tr><td>13 ans</td><td rowspan="2">Classe de fin d’études</td></tr>
<tr><td>12 ans</td><td>Cours supérieur 2e année</td><td>Cours supérieur 2e année</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">CEPE</td><td rowspan="2">Cours supérieur</td></tr>
<tr><td>11 ans</td><td>Cours supérieur 1re année</td><td>Cours supérieur 1re année</td></tr>
<tr><td>10 ans</td><td colspan="3">Cours moyen 2e année</td></tr>
<tr><td>9 ans</td><td colspan="3">Cours moyen 1re année</td></tr>
<tr><td>8 ans</td><td colspan="3">Cours élémentaire 2e année</td></tr>
<tr><td>7 ans</td><td colspan="3">Cours élémentaire 1re année</td></tr>
<tr><td>6 ans</td><td colspan="3">Cours préparatoire</td></tr>
</table>

CEPE : certificat d’études primaires élémentaires

L’enseignement primaire élémentaire selon les plans d’études de 1923, 1938 et 1945-1947

TRADITIONS ET REFORMES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A L'EPOQUE DES « MATHEMATIQUES MODERNES » : LE CAS DE LA HONGRIE ET DE LA FRANCE

Katalin **GOSZTONYI**

Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris-Diderot
& Institut Bolyai, Université de Szeged

katalin.gosztonyi@gmail.com

Résumé

L'œuvre de Tamás Varga est considéré en Hongrie comme un représentant particulièrement pertinent d'une tradition d'enseignement des mathématiques centrée sur la résolution des problèmes, gardant son actualité jusqu'à aujourd'hui. Dans ma thèse, je compare la réforme d'enseignement dirigée par Tamás Varga dans les années 1960 et 1970 à la réforme française dite des « mathématiques modernes ».

Je suis pour cette comparaison une approche double, à la fois historique et didactique. Après l'étude de leur contexte historique et de leur arrière-plan épistémologique, je caractérise les réformes à l'aide de divers outils théoriques de la didactique : la structure et le contenu de leur programme à l'aide de l'approche écologique et la notion de paradigmes, les pratiques pédagogiques envisagées par les concepteurs des réformes à l'aide de la Théorie des Situations Didactiques.

L'analyse des deux réformes révèle quelques points communs pouvant découler des échanges internationaux de l'époque, mais montre également des différences importantes. Je propose d'interpréter les deux réformes comme les réalisations, chaque fois particulièrement cohérentes, de deux épistémologies mathématiques différentes : « bourbakiste » dans le cas français et « heuristique » dans le cas hongrois, proche des conceptions de Pólya et de Lakatos.

La comparaison des projets d'enseignement de Brousseau, dans les années 1970, et de Varga en utilisant les termes de la TSD contribue à une meilleure caractérisation de la conception de Varga, mais amène aussi à poser des questions sur la transmissibilité des théories didactiques d'un contexte à l'autre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

D'ENFERT, R. & GISPERT, H. (2011). Une réforme à l'épreuve des réalités: le cas des mathématiques modernes au tournant des années 1970. *Histoire de l'Éducation, 131*, 27–49.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

GOSZTONYI, K. (2015). *Traditions et réformes de l'enseignement des mathématiques à l'époque des « mathématiques modernes » : le cas de la Hongrie et de la France*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot - Paris 7 et Université de Szeged.

Les mathématiques dans l'enseignement professionnel
Genèse et évolution d'un enseignement
(1945-1985)
Perspectives historiques, enjeux didactiques

Xavier SIDO

Univ. Lille, EA 4354 – Théodile-CIREL – Centre Interuniversitaire de Recherche en Éducation de Lille, F59000 Lille, France

xavier.sido@gmail.com

Résumé

En 1945, avec la création de l'Enseignement Technique Court, qui marque la scolarisation d'une partie de la formation des ouvriers qualifiés, est élaboré et structuré un enseignement mathématique. Ma recherche s'intéresse à la genèse et aux évolutions de cet enseignement jusqu'en 1985, date de la mise en place du baccalauréat professionnel. L'étude des mouvements sur les trois pôles des références, des tâches et des visées contribue à discuter les cohérences qui s'installent au cours des quarante ans de cette histoire. Je montre alors qu'entre 1945 et 1985 l'enseignement mathématique dans le Technique Court est élaboré et évolue d'un enseignement de type Primaire, celui de 1945, et proche des disciplines professionnelles vers un enseignement de type Secondaire qui s'autonomise vis-à-vis de la formation professionnelle. La genèse et les évolutions de cet enseignement répondent alors aux transformations internes de la discipline et à trois critères constitutifs de l'identité du Technique Court : l'inscription de cette filière dans le système éducatif, les qualifications et leurs mutations et le public scolaire.

Mots clés

Mathématiques ; enseignement professionnel ; 1945-1985 ; histoire et didactique ; curriculum

Introduction

Ma recherche porte sur un enseignement mathématique particulier, celui dispensé dans la formation professionnelle scolarisée entre 1945 et 1985. 1945 est une borne « naturelle » car c'est à cette date qu'est élaboré et structuré un enseignement mathématique dans les centres d'apprentissage dont la mise en place marque la création de l'Enseignement Technique Court, actuellement désigné par enseignement professionnel. Les centres s'inscrivent dans la perspective d'un enseignement post-Primaire. Ils sont destinés à former des ouvriers et des employés qualifiés et préparent ainsi en 3 ans au Certificat d'Aptitude Professionnelle (CAP). C'est donc un Enseignement Technique Court, l'Enseignement Technique Long préparant globalement aux postes de technicien dans les collèges techniques (CT) ou les écoles nationales professionnelles (ENP). 1985 correspond à la création des lycées professionnels et

du Baccalauréat Professionnel. Ce diplôme permet de décloisonner la filière professionnelle en offrant aux élèves la possibilité d'une poursuite d'étude, suggérant ainsi l'inscription de l'enseignement mathématique dans une perspective curriculaire. Ainsi, plus précisément, ma recherche se focalise sur les enseignements de mathématiques prescrits pour les sections préparant au Certificat d'Aptitude Professionnelle et au Brevet d'Études Professionnelles (BEP), dans les centres d'apprentissage créés à la Libération et transformés ensuite en collèges d'enseignement technique (CET) en 1959, puis en lycées d'enseignement professionnel (LEP) en 1976.
À la fois l'objet et la période de cette étude marquent son originalité dans le champ des recherches en histoire de l'enseignement mathématique. En effet, dans ce domaine, les travaux s'intéressaient jusqu'alors essentiellement au Primaire et au Secondaire (*cf.* Belhoste, 1990, 1995 ; d'Enfert, 2003, 2006, 2010, 2011 ; Gispert, Hulin & Robi, 2007). La question de l'enseignement mathématique dans la formation professionnelle scolarisée dans la seconde moitié du 20e siècle était de fait un domaine peu voire pas exploré par la recherche. Une remarque similaire peut être effectuée en didactique des sciences. Martinand, en 1985, puis Caillot, en 2002, soulignent en effet que les chercheurs universitaires en ce domaine ont peu investi l'enseignement professionnel, « *comme si cet enseignement n'existait pas* » (Caillot, 2002, p. 5). Soulignons toutefois que, dans le champ de l'Enseignement Technique, notre recherche, de type disciplinaire, n'est pas totalement isolée. Citons par exemple la thèse de Maryse Lopez (2015) sur l'enseignement du français dans la filière professionnelle (1930-1985) ou encore celle de Nathalie Auxire (2015) sur l'interdidactique de l'enseignement mathématique en lycée professionnel.

Un double enjeu didactique et historique

Je l'ai indiqué précédemment, ma préoccupation centrale porte sur l'enseignement prescrit, c'est-à-dire le curriculum prescrit et non pas le curriculum effectif ou réalisé. Il ne s'agit pas non plus d'une recherche centrée sur les apprentissages. Ainsi, mon questionnement concerne essentiellement les choix programmatiques, les contenus et leur organisation dans le contexte particulier de l'enseignement professionnel, ainsi que son opérationnalisation. Plus précisément, cette recherche vise à répondre à trois questions majeures.
La première est celle de l'élaboration et de la structuration d'un enseignement mathématique dans ce segment scolaire particulier. Au milieu des années 1950, sur quel modèle cet enseignement se structure-t-il ? S'agit-il de celui de l'enseignement Primaire avec ses classes de fin d'études et ses cours complémentaires ? De celui du Secondaire ? Et plus particulièrement du Secondaire Technique avec les collèges techniques et les écoles nationales professionnelles ? Ou alors, s'agit-il d'un modèle original du fait des particularités du public auquel il s'adresse et des spécificités du diplôme préparé dans les centres d'apprentissage ?
La deuxième question est celle des cohérences de cet enseignement dans ce segment scolaire qui s'installent au cours des quarante premières années de son histoire. C'est-à-dire des relations entre les visées de l'enseignement, ses références et les tâches des élèves (Lebeaume, 2000). Cette deuxième question focalise sur les évolutions internes de l'enseignement mathématique dans l'enseignement professionnel après sa mise en place. L'enjeu est alors d'identifier et de caractériser les transformations des contenus et des méthodes d'enseignement entre 1945 et 1985.
La troisième est celle des facteurs d'évolution de cet enseignement entre 1945 et 1985. La période étudiée est en effet celle de la construction du système éducatif unifié (Berthoin,

1959[1] ; Haby, 1975[2]), des dynamiques réformatrices de l'enseignement mathématique (notamment la réforme dite des mathématiques modernes) et de l'évolution des moyens de production. Il s'agit ainsi de décrire et d'interpréter les évolutions des mathématiques à enseigner dans l'enseignement professionnel.
Ces questions, rendent compte de l'ancrage de ma recherche à l'intersection des perspectives didactique, historique et curriculaire. En effet, elle contribue à l'histoire des disciplines scolaires et répond à des enjeux didactiques d'identification des principes constitutifs, de la structure et de l'organisation de cet enseignement particulier dans la formation professionnelle scolarisée. Cette double préoccupation répond alors à mon ambition de proposer un cadre d'analyse pour rendre intelligibles les évolutions d'autres enseignements ou disciplines dispensés dans l'Enseignement Technique Court à la fois sur la période de mon étude, mais aussi pour la période contemporaine.

Un cadre d'analyse spécifique pour un enseignement mathématique spécifique

La recherche en histoire de l'enseignement et en didactique propose des modèles pour interroger les disciplines scolaires et leur histoire. Ainsi, Chervel (1988) suggère d'examiner tous les enseignements, ou presque, au travers de l'étude de quatre caractéristiques qu'il affecte à ces derniers : un enseignement d'exposition, des batteries d'exercices, des pratiques d'incitation et un appareil docimologique. Develay (1993), dans une approche historique et épistémologique des disciplines scolaires, propose quant à lui « d'analyser tout savoir à enseigner avec les mêmes lunettes, quelles que soient les disciplines concernées » (Develay, 1993, p. 38). Il définit alors les éléments qui caractérisent les disciplines : une matrice disciplinaire identifiée par des objets d'enseignements, des tâches qu'elle permet d'effectuer, des connaissances déclaratives et des connaissances procédurales, qui constituent les savoirs et pratiques associés propres à la discipline. Pour l'analyse de l'évolution du travail manuel à l'école puis de la technologie au collège, Lebeaume (2000) ne reprend pas le modèle de Develay. Dans la continuité des travaux menés par Martinand (1983) sur la notion de référence, il construit un schéma de questionnement (*cf.* figure 1) afin d'identifier et de caractériser des figures historiques de ces enseignements. Il centre ce schéma de questionnement sur les situations d'enseignement-apprentissage prototypiques, mettant en relation trois pôles et en étudiant leur cohérence : visées, tâches et références. Les visées de l'enseignement fixent les tâches des élèves, lesquelles se définissent aussi en référence à des pratiques et réciproquement. La spécificité de la formation professionnelle scolarisée est d'être à l'articulation entre les mondes éducatif et économique. L'intérêt de l'investigation de l'enseignement mathématique inscrit dans l'enseignement professionnel réside dans la mise en évidence des évolutions liées à la fois aux changements des savoirs savants, mais aussi des pratiques sociotechniques. En raison de la prise directe sur les emplois et les activités techniques, la notion de référence introduite et discutée par Martinand (1983, 2003) est donc centrale dans notre analyse. Ainsi, dans notre recherche, nous utiliserons le schéma d'analyse élaboré par Lebeaume (2000) afin de saisir les mouvements sur les trois pôles des références, des tâches et des visées pour discuter les cohérences des situations prototypiques d'enseignement-apprentissage de l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court entre 1945 et 1985.

1 Décret n°59-57 du 6 janvier 1959 : Réforme de l'enseignement public. JO du 7 janvier 1959, pp. 422-430.
2 Loi n°75-620 du 11 juillet 1975 relative à l'éducation. JO du 12 juillet 1972, pp. 7180-7182.

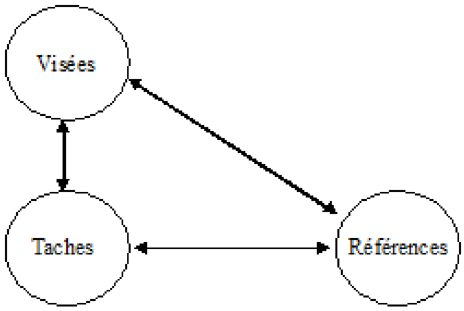


Figure 1 : schéma Visées, Tâches, Références (Lebeaume, 2000)

Une enquête historique

La méthodologie de ma recherche est celle de l'enquête historique. Les sources de l'analyse sont celles susceptibles de mettre au jour la structure et les principes organisateurs de cet enseignement et d'en discuter la cohérence au fil du temps. Sont alors valorisés les textes prescriptifs relatifs à l'enseignement qui fixent les contenus, les recommandations qui précisent ou discutent les orientations de l'enseignement et son opérationnalisation et les manuels qui explicitent les principes pédagogiques. En raison de la spécificité de l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court qui est de devoir préparer les élèves à répondre à des exigences certificatives dont les acteurs du monde économique participent à l'élaboration, ces sources sont insuffisantes. En effet, en raison des enjeux de formation professionnelle et des relations État–Patronat, le second type de sources est constitué des programmes et épreuves d'examen. De plus, afin d'interpréter voire d'expliquer les évolutions de l'enseignement mathématique, il est aussi nécessaire d'étudier : les discours des acteurs qui contribuent à fixer et à discuter les choix programmatiques et les orientations de l'enseignement et participent à sa mise en œuvre, c'est-à-dire, les discours des politiques, des inspecteurs, des formateurs et des enseignants mais aussi des acteurs du monde économique et plus particulièrement le Patronat. À cet effet, l'étude porte aussi sur les archives relatives aux commissions ou groupes de travail en charge de l'élaboration des programmes d'enseignement et d'examen, et des publications plus générales relatives aux qualifications et à leurs évolutions, ainsi qu'aux missions et aux orientations du Technique Court.

Afin de répondre aux trois questions majeures de ma recherche et préciser les apports scientifiques de ce travail de thèse, je vais maintenant vous présenter les analyses que j'ai menées.

La genèse et les évolutions de l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court

Trois périodes structurent cette histoire. La première s'étend de 1945[3], date la mise en place d'un enseignement mathématique dans la filière Technique Courte, à 1953 qui marque la parution de programmes et de recommandations[4] en vigueur jusqu'en 1967 pour cet enseignement dans ce segment scolaire. Quels sont alors les principes fondateurs de cet enseignement ? Quelles tensions suggèrent-ils ? Dans le contexte d'une formation qui prépare

3 Circulaire du 9 août 1945 : programmes. BOEN n°43 du 30 août 1945, pp. 3079-3080.

4 MEN (1958). *Centres d'apprentissage. Enseignement industriel. Garçon. Enseignements généraux*. Brochure 407 Pg/TE. Paris : institut pédagogique national (réédition de 1953)

au CAP, quelles influences ont les exigences certificatives sur l'enseignement mathématique ? Quelle opérationnalisation de l'enseignement pour un public issu des classes de fin d'études au profil particulier ?
La deuxième période, 1967-1972, est celle de l'évolution des profils d'entrée et de sortie dans l'Enseignement Technique Court. La question traitée est celle de l'impact sur l'enseignement mathématique de la modification des exigences de qualification, du niveau de recrutement et de la mise en place de poursuites d'études.
Enfin, la troisième période est celle de la transformation de l'enseignement mathématique dans la filière Technique Courte induite par les réformes du début et de la fin des années 1970. Dans le contexte de la rénovation des programmes de CAP et BEP, respectivement en 1972[5] et 1973[6], consécutivement à la réforme des mathématiques modernes, puis d'une modification de ceux de CAP en 1980 suite à la contre-réforme, quel est l'impact du bouleversement et de l'évolution globale de l'enseignement mathématique sur celui dispensé dans l'Enseignement Technique Court ? Quelle opérationnalisation de l'enseignement mathématique rénové dans une filière à vocation professionnelle pour un public orienté par l'échec ?

1945-1953, la genèse de l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court

En 1945, l'élaboration de l'enseignement mathématique dans les centres d'apprentissage répond à la fois à des enjeux utilitaires et éducatifs. Il s'agit de préparer l'élève à « sa vie d'homme, d'ouvrier et de Français » (Direction de l'enseignement technique, 1945, p. 12). En effet, en intégrant à la Libération ces établissements dans l'Enseignement Technique, l'État Français les destine à donner une éducation à la fois professionnelle et humaine à un public issu de l'enseignement Primaire qui n'avait pas accès jusque-là à une formation à la fin des études obligatoires. Ces élèves, âgés de 14 ans et issus majoritairement des classes de fin d'études, se caractérisent par une origine sociale plus modeste que ceux des autres établissements techniques. De plus, en raison de l'absence de sélection à l'entrée de la plupart des centres (Pelpel & Troger, 2001, p. 172), contrairement aux autres écoles techniques, ce sont des élèves d'un niveau inférieur en mathématiques qui intègrent ces établissements. L'enseignement mathématique, composé d'un enseignement du calcul et de la géométrie, s'inscrit dans les missions de la filière Technique Courte. Il présente alors deux facettes que je vais expliciter en présentant les deux situations d'enseignement-apprentissage auxquelles elles renvoient.

Un enseignement mathématique à deux facettes : concret et utilitaire / formateur de l'esprit

D'un côté, l'enseignement vise à transmettre des connaissances mathématiques utiles, pratiques et usuelles, c'est-à-dire dont l'usage est avéré dans la pratique professionnelle et la vie de tous les jours. En ce sens, la résolution de problèmes concrets occupe une place importante dans l'enseignement, prenant plus d'ampleur au fil des trois années d'études. Notons que l'étude de situations *réelles* est aussi l'occasion de donner des connaissances utiles au futur citoyen, par exemple sur les escomptes, les impôts ou les valeurs immobilières.
Tout d'abord, en référence aux problèmes courants et professionnels que l'élève est susceptible de rencontrer dans et hors le centre, le programme reprend celui des classes de fin d'études qui, pour les milieux économiques[7] et éducatifs (Auriac, 1946), contient les

5 Circulaire n°72-242 du 21 juin 1972 : enseignement des mathématiques dans les CET. BO n°26, p. 1785.
6 Circulaire n°73-283 du 6 juillet 1973 : enseignement des mathématiques dans les CET. BO n°28, p. 2180.
7 Compte rendu de la 9e réunion du 27 septembre 1950 de la CNPC de la métallurgie. CAC, 19810225-art 1,

connaissances indispensables que nul ne peut ignorer. Les élèves, dont peu possèdent le certificat d'études primaires, revoient ainsi les opérations sur les nombres entiers ou décimaux, le système métrique, les calculs de surface et de volume ou encore la règle de trois. En référence à un usage courant des mathématiques, l'étude de l'arithmétique est préférée à celle de l'algèbre qui est absente des programmes. Ensuite, ce programme est complété par des connaissances utiles à la résolution de nombreux problèmes professionnels comme les calculs de PGCD et PPCM ou la trigonométrie. Enfin, les premières instructions des centres laissent explicitement la possibilité aux professeurs d'inclure dans leur enseignement des connaissances plus spécifiques nécessaires à la pratique professionnelle comme les additions type banque de France pour le CAP Comptabilité ou la géométrie descriptive pour la formation de CAP traceur de coque.
Si l'enseignement mathématique vise à transmettre des connaissances pratiques, il ne doit pas pour autant s'y réduire. L'enseignement ne doit pas consister en un catalogue de recettes, mais, pour citer un inspecteur de l'Enseignement Technique, procurer « des connaissances d'une nécessité moins évidente qui assurent une meilleure compréhension de la pratique professionnelle » (Bataillon, 1954, p. 252).
Ainsi, de l'autre côté, il s'agit de donner aux élèves à la fois une culture désintéressée et des connaissances et une formation de l'esprit qui favoriseront leur intégration dans la société et la pratique intelligente de leur futur métier. D'une part, l'enseignement ne doit pas faire uniquement référence au métier, mais aussi à l'histoire, l'architecture ou encore les arts. D'autre part, comme le précisent les Instructions (Direction de l'enseignement technique, 1945, p. 41), il s'agit d'enseigner le calcul et la géométrie « sans jamais négliger les nécessités du raisonnement ». De façon assez classique, les prescripteurs considèrent que la géométrie contribue de façon privilégiée à la formation de l'esprit et les programmes indiquent que c'est principalement au travers de son enseignement que les élèves doivent acquérir les bases du raisonnement. Par exemple, les manuels et les leçons-types publiées dans les revues para-officielles mettent en avant l'usage de la démonstration dans l'étude des cas d'égalité des triangles semblables.

Une pédagogie concrète et active pour articuler les deux facettes de l'enseignement

Dans les textes prescriptifs, l'articulation entre ces deux facettes repose sur la démarche pédagogique préconisée pour l'enseignement mathématique. Au moment de la mise en place de l'enseignement, inspecteurs, formateurs et professeurs des centres s'opposent aux méthodes traditionnelles, qu'ils perçoivent comme expositives, dogmatiques, et fondées sur l'abstraction. Ils militent en faveur d'une pédagogie concrète (partant du concret pour revenir au concret) fondée sur l'activité des élèves et leurs centres d'intérêts. D'une part, il s'agit d'éviter une perte de sens des notions mathématiques étudiées pour un public des centres qui se caractériserait par un goût pour le concret et une curiosité naturelle pour tout ce qui touche au métier. D'autre part, en référence à la psychologie et la psychopédagogie, il s'agit de proposer une démarche qui respecte les stades de développement des élèves. Cette démarche pédagogique préconisée articule deux temps (Matray, 1952). Tout d'abord, il s'agit à partir d'observations, de manipulations et d'expérimentations sur une multitude de problèmes concrets d'amener les élèves à énoncer une propriété mathématique. Si cette démarche intuitive et inductive peut à certains égards rappeler une pédagogie inspirée des classes de fin d'études (d'Enfert, 2010), elle vise à préparer le passage à l'abstraction. Ainsi, dans un second temps, les élèves sont amenés, en mettant en œuvre une démarche déductive, à démontrer la propriété mathématique constatée. Prendre pour point de départ de l'enseignement le concret ne signifie donc pas qu'il faille se limiter à l'observation, la manipulation et

CNPC de la Métallurgie.

l'expérimentation, mais plutôt attirer l'attention des élèves sur des problèmes dont ils peuvent saisir pleinement le sens, qui les intéressent et qui doivent amener à une solution rationnelle, une explication mathématique.
Deux éléments participent à favoriser la mise en place d'un enseignement mathématique actif et concret : d'une part, la défense de l'idée que le métier est porteur de valeurs culturelles et, d'autre part, les liens qu'entretiennent les cadres de l'enseignement technique avec le mouvement des pédagogies nouvelles comme Roger Gal, secrétaire général en 1947 du Groupe Français d'Éducation Nouvelle ou Fernand Canonge formateur et membre de la commission Langevin-Wallon.

Un enseignement en tension

L'enseignement mathématique prescrit en CAP se caractérise par une séparation entre les situations d'enseignement-apprentissage à finalité utilitaire et celles visant la formation de l'esprit. Dans le cadre d'une formation professionnelle destinée à un public d'un faible niveau mathématique, cette configuration de l'enseignement crée des tensions à la fois sur les objectifs (utilitaire / formateur de l'esprit), les références (pratique avérée des mathématiques / théorie) et les tâches des élèves (résolution de problèmes concrets / démonstration). Ces tensions sont exacerbées par deux éléments structurants de l'identité de cet enseignement dans la filière Technique Courte : les exigences certificatives et les spécificités du public (Lopez & Sido, 2015).
En effet, les épreuves de mathématiques au CAP s'inscrivent dans les enjeux professionnels de ce diplôme et l'examen vise à attester la capacité des élèves à mettre en œuvre une démarche professionnelle dans laquelle ils prendraient appui sur les mathématiques pour résoudre un problème d'atelier comme le ferait un professionnel.

> *Une machine à percer tourne à 600 tr/mn. Quel sera le diamètre maximum des trous que l'on pourra percer sur cette machine si l'on ne veut pas dépasser une vitesse de coupe de 35 m/mn ?* (CAP Tourneur, 1958)

Les recommandations qui accompagnent les règlements d'examen incitent alors les professeurs à délaisser les démonstrations abstraites au profit de la maîtrise des techniques mathématiques utiles et avérées dans la vie courante ou la pratique professionnelle.

> On évitera avec soin les démonstrations abstraites pour chercher, en application des théorèmes usuels, la solution de problèmes intéressant le métier. (CAP Cuir industriel, sellerie, équipement militaire, 1957)

À la fois, la nécessité de former des employés qualifiés pour reconstruire le pays, le poids de l'examen dans le système éducatif (Bourdieu & Passeron, 1968) et le recours des maîtres aux problèmes-types CAP pour entraîner les élèves à l'examen, contribuent au pilotage, au moins en partie, de l'enseignement par les exigences certificatives. Fortement attachés aux finalités éducatives des centres, les professeurs sont confrontés au problème d'opérationnaliser un enseignement mathématique qui soit à la fois utilitaire et éducatif mais dont la visée centrale serait la préparation des élèves à un examen.
En référence au mouvement de la pédagogie nouvelle, les cadres de l'Enseignement Technique, les formateurs, les inspecteurs et les professeurs des centres insistent sur la nécessité d'adapter l'enseignement aux caractéristiques sociales et psychologiques des élèves. Pour Paul le Rolland, premier directeur de l'Enseignement Technique, la pédagogie dans les centres d'apprentissage est commandée par une donnée générale :

> Leurs aptitudes manuelles sont plus grandes que leur capacité d'abstraction. Ils sont naturellement plus portés vers les réalisations concrètes que vers les spéculations intellectuelles. [De ceci] découle une certaine méthode pédagogique. (Le Rolland cité par Avenir, 1959, p. 137)

Cette citation illustre les discours principalement portés par les inspecteurs et les professeurs des centres qui perçoivent les élèves comme « incapables d'abstraction » (Direction de l'enseignement technique, 1945, p. 13), possédant une intelligence « concrète » (Cercelet, 1949, p. 52), et « d'âge intellectuel très faible ou encore retardés » (Alphand, 1946, p. 726). Dans les revues, un glissement de sens peut être constaté dans les articles directement liés à l'opérationnalisation de l'enseignement comme les leçons-types : le concret ne fait plus seulement référence au point de départ de la démarche pédagogique, à ce qui fait sens et intéresse les élèves, mais aussi à leur tournure d'esprit. Ainsi, dans la perspective d'adapter l'enseignement aux élèves et en référence à leurs difficultés présumées à comprendre les choses abstraites, mais aussi à leur faible niveau scolaire et leur profil social, les recommandations engagent les maîtres des centres à mener un enseignement efficace, c'est-à-dire axé sur l'acquisition et l'utilisation d'outils mathématiques utiles pour la formation professionnelle et la préparation des élèves au CAP.
C'est donc un enseignement mathématique éminemment pratique et utilitaire qui est mis en place durant cette période dans les sections préparant au CAP. Proche du modèle de l'enseignement dispensé dans le Primaire élémentaire, il prépare les élèves à la vie courante et professionnelle. Il s'en distingue toutefois par les liens qu'il entretient avec les enseignements professionnels.

1967-1972, l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court et les évolutions des profils d'entrée et de sortie

Passé ce moment fondateur, à partir du milieu des années 1960, les conditions dans lesquelles a été élaboré l'enseignement mathématique pour la formation des employés qualifiés changent. Les années 1960 sont en effet les témoins de réformes de structuration d'un système éducatif unifié et de prolongations de la scolarité (Berthoin, 1959 ; Fouchet-Capelle, 1963-1966[8]). L'orientation dans les collèges d'enseignement technique (CET), anciennement centre d'apprentissage, s'effectue à partir de 1967 à l'issue des classes de troisième. De plus, à partir de 1969, des classes de première adaptation permettant aux élèves du Technique Court de rejoindre le Technique Long sont mises en place. Ces années sont aussi celles d'une mutation des moyens de production marquant un passage des qualifications de la monovalence pratique à la polyvalence technique et l'adaptabilité professionnelle. L'évolution de l'enseignement mathématique dans la filière professionnelle est alors le fruit d'enjeux spécifiques liés aux transformations des exigences certificatives et aux conditions de recrutement des élèves de l'Enseignement Technique Court. Cette évolution s'opère au moment de la création d'un nouveau diplôme, le brevet d'études professionnelles (BEP). Elle s'opérationnalise par le biais des programmes d'examens et des manuels, l'écriture des programmes d'enseignement étant repoussée en vue de la réforme des mathématiques modernes qui va se mettre en place au cours de la prochaine décennie.

Harmoniser l'enseignement mathématique avec les évolutions de la culture technique

Le BEP, diplôme plus polyvalent que le CAP vise à former un employé qualifié capable d'évoluer avec les techniques, de s'adapter à des types d'industries différents et de bénéficier de promotion ou d'un reclassement ultérieur. L'analyse technique, fondée sur l'étude

8 Décret n°63-793 du 3 Août 1963 : modification de certaines dispositions du décret n°59-57 du 6 janvier 1959 portant réforme de l'enseignement public. JO du 4 août 1963, p. 7264.

méthodique des principes technologiques et le raisonnement scientifique remplacent l'apprentissage empirique du geste professionnel. L'étude des programmes des disciplines professionnelles montre alors qu'en BEP, l'apprentissage du métier repose sur l'acquisition d'une culture technique, et par incidence mathématique, plus théorique et plus large que celle nécessaire dans le cadre du CAP. En BEP, l'objectif n'est plus d'enseigner un corpus de connaissances mathématiques circonscrites à une utilisation particulière, mais de donner aux élèves des outils suffisamment généraux et sophistiqués pour répondre aux besoins des disciplines professionnelles et susceptibles d'une multitude d'applications. Ceci se traduit par l'apparition de nouveaux contenus nécessaires à la modélisation des situations techniques dans les programmes d'examen comme l'algèbre ou la notion de nombre dérivé. L'enseignement s'oriente alors vers un cadre plus réflexif. Dans les manuels, l'approche théorique des connaissances et les démonstrations occupent une place importante dans les différents chapitres. Il s'agit d'apporter aux élèves les éléments de raisonnement et de logique nécessaires aux étapes d'analyse et de synthèse techniques et au processus de mathématisation. Au BEP, les épreuves de mathématiques jugent alors le candidat d'un double point de vue : application du calcul à la technique professionnelle et formation de l'esprit. Afin d'illustrer notre propos, nous reportons ici un extrait de l'épreuve de mathématique proposée au BEP électromécanicien en 1972.

> Un circuit est constitué d'un potentiomètre et d'une résistance fixe. Il est alimenté sous une intensité constante $I = 4$ A. La résistance fixe est égale à la résistance totale du potentiomètre : R. On pose $x = R_1/R$ (fraction utilisée du potentiomètre).
>
> a) Calculer et représenter graphiquement en fonction de x le courant i traversant la résistance fixe. La courbe représentative sera tracée pour x variant de moins l'infini à plus l'infini. On indiquera la portion de courbe correspondant à une réalité physique. On justifiera ce choix.
>
> b) Calculer en fonction de x la puissance P dissipée dans la résistance fixe. Application numérique : calculer P pour $R = 100\ \Omega$ et $x = 1$ puis pour $R = 50\ \Omega$ et $x = 1/4$.
>
> (BEP électromécanicien de Nantes, 1972)

Les recommandations qui accompagnent les programmes d'examens précisent les critères de notation pour l'épreuve de mathématiques. Ils portent sur trois éléments. Le premier est le contrôle de l'acquisition par les candidats des connaissances du programme d'examen et de leur « aptitude à conduire avec sureté des calculs exploitables » (Installations sanitaires et thermiques, 1971, p. 12). Les élèves sont alors jugés sur l'exactitude, l'expression et la présentation pratique des réponses. Par exemple, ils seront notés sur les calculs effectués aux questions a et b ainsi que sur la représentation graphique. Durant les examens, les élèves doivent aussi montrer qu'ils sont capables de « passer d'une opération mathématique à sa signification physique ou technologique » et qu'ils connaissent « le sens réel des résultats obtenus et leurs limites de validité » (*Ibid.*). Il s'agit ici de vérifier si les candidats, après avoir mené la résolution du problème, sont capables de recontextualiser les réponses que leur a apportées l'étude mathématique. C'est, par exemple, l'objet de la dernière partie de la question a, et l'on peut supposer que des points seront retirés si les élèves n'indiquent pas dans leur réponse l'unité de la puissance lors de la dernière question. Enfin, les critères de notation portent aussi sur l'aptitude des candidats « à raisonner clairement en se défiant des automatismes de pensée et des opérations de mémoire » (Cuirs et peaux, 1971, p. 13). Il s'agit ici de vérifier qu'ils sont capables, d'une part, de décontextualiser le problème technique pour le ramener à un exercice de mathématiques, et d'autre part, qu'ils savent faire la synthèse de leurs connaissances pour le résoudre. Dans l'exemple proposé, ils doivent poser une équation, se ramener à partir de celle-ci à la fonction i(x). Ils sont alors amenés à dresser un tableau de valeurs et calculer les limites de la fonction en plus et moins l'infini.

Ainsi, l'examen évalue davantage la capacité des candidats à mathématiser une situation et à la résoudre à l'aide des outils appropriés que l'utilisation de recettes de calcul. L'élève doit désormais être capable de décontextualiser le problème auquel il est confronté afin de le ramener à un exercice de mathématique, plus général et commun à un ensemble de situations concrètes, qu'il saura résoudre grâce à une formation théorique appropriée.

La mise en cohérence de l'enseignement mathématique avec le parcours scolaire des élèves

Les premiers projets de programme d'examen de mathématique, établis en concertation entre professionnels et inspection technique, sont repris par l'inspection de mathématiques. Son intervention vise à mettre en continuité l'enseignement mathématique dispensé dans les collèges d'enseignement technique avec ceux des classes de troisième et de première d'adaptation. Ils rappellent ainsi dans les textes prescriptifs des différentes spécialités de BEP, la nécessité d'harmoniser l'enseignement avec celui reçu par les élèves avant leur entrée au CET. En outre, ils complètent les programmes d'examen avec les connaissances nécessaires à la poursuite d'étude, à l'école ou en formation continue, par exemple l'étude des fonctions carré et inverse, la géométrie dans l'espace ou encore les statistiques. Ils s'appuient pour cela sur les programmes de mathématique des secondes techniques.
Les nouvelles exigences en matière de culture mathématique et les contraintes liées au nouveau mode de recrutement et à la poursuite d'étude marquent un changement sur les pôles références et tâches de l'enseignement mathématique dans les sections préparant au BEP. Il prend désormais modèle sur celui dispensé dans le second cycle du secondaire, tant sur le plan des contenus que des méthodes. Si les liens que doit entretenir l'enseignement mathématique avec la formation professionnelle sont toujours mis en avant, il doit aussi répondre à des objectifs qui lui sont propres : la maîtrise de l'outil mathématique et l'apprentissage du processus de mathématisation. Cette évolution conduit à une autonomisation relative de l'enseignement mathématique vis-à-vis des exigences de la formation professionnelle.

1972-1985, l'impact des réformes mathématiques sur l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court

Cette période est marquée par une permanence des profils de sortie dans l'Enseignement Technique Court, l'achèvement du processus d'unification du système éducatif avec la création du collège unique (Haby, 1975)[9] et un bouleversement de l'esprit de l'enseignement mathématique, c'est-à-dire la façon dont on apprend et on enseigne les mathématiques. En effet, à la fin des années soixante et au début des années soixante-dix l'enseignement mathématique est l'objet d'une importante réforme, dite des « mathématiques modernes », qui traverse l'ensemble du système éducatif. Dans le contexte d'une modernisation des sciences et des techniques dans l'industrie et dans la société, cette réforme vise à promouvoir les mathématiques contemporaines qui, selon les réformateurs, grâce à l'efficacité de la notion de structure sont devenues un langage universel, indispensable pour appréhender le réel (Bkouche, 1996). Fortement influencés par les travaux de Piaget et Bourbaki, les promoteurs de la réforme inscrivent l'enseignement dans l'univers structuraliste des mathématiques. Il s'agit, au travers de l'activité des élèves, de les amener à élaborer eux-mêmes les connaissances mathématiques à partir des fondements ensemblistes. Dès sa mise en place, cette réforme est l'objet d'une certaine défiance de la part des professeurs de mathématiques et de certains mathématiciens. Dans une période marquée par la mise en place du collège unique, les critiques dont cette réforme est l'objet conduisent à ce qui est communément appelé la contre-réforme des mathématiques modernes. Elle s'appuie sur une nouvelle conception des mathématiques, différente de celle portée par les zélateurs de la réforme des

9 Loi n°75-620 du 11 juillet 1975 relative à l'éducation. JO du 12 juillet 1975, pp. 7180-7182.

mathématiques modernes. Les mathématiques ne sont plus perçues comme un univers de structures mais relevant d'une activité humaine. En ce sens, leur finalité est de résoudre des problèmes issus des mathématiques ou d'autres domaines scientifiques (Artigue, 1996). Dans l'enseignement, la place de l'algèbre et des théories ensemblistes est remise en cause. En réponse à la critique d'une mathématique sélective car trop abstraite, les aspects théoriques sont minimisés. L'objectif est l'appropriation progressive des principes et concepts mathématiques au travers leur fonctionnement au sein de problèmes.
Dans ce contexte, entre 1972 et 1985, les évolutions de l'enseignement mathématique dans la filière Technique Courte ne répondent plus à une transformation des qualifications et des exigences certificatives, mais à une mutation de l'enseignement mathématique dans le secondaire, et plus généralement de la culture mathématique que doit posséder tout citoyen.

Inscrire l'enseignement mathématique dans une culture moderne

Si la commission de réforme de l'enseignement mathématique, mise en place en 1967 et menée par le mathématicien Lichnerowicz, ambitionne de proposer à tous les élèves un accès aux mathématiques modernes, elle ne se préoccupe pas de la rénovation de l'enseignement dans les filières Techniques Courtes. La question de l'application de la réforme pour le Technique Court n'a été soulevée qu'une seule fois lors de la séance du 22 avril 1967 par un des membres de la commission en disant « faut-il enseigner des mathématiques désuètes à des enfants moins intelligents ? »[10].
Les programmes de mathématiques pour les CET sont en fait élaborés hors commission lors de deux séminaires qui se sont tenus en Décembre 1970 et Février 1971 par des inspecteurs de l'Enseignement Technique et formateurs des enseignants de mathématiques et d'autres disciplines. Ces séminaires se font avec l'accord de Lichnerowicz et les programmes élaborés reçoivent son assentiment. Définies comme « polyconcrètes » (Lichnerowicz, cité par Trabal, 1996, p. 186), c'est-à-dire capables d'une multitude d'application, par Lichnérowciz ces mathématiques modernes rencontrent l'adhésion des patrons des grandes industries. Ils y voient la possibilité de former les futurs ingénieurs aux nouvelles techniques et de les préparer à leurs évolutions. Les dirigeants des petites entreprises et les artisans sont quant à eux plus circonspects. Les mathématiques modernes, caractérisées par l'abstraction, la formalisation et l'axiomatisation détourneraient selon eux les élèves de l'apprentissage des procédés de calculs pratiques, c'est-à-dire utilisés lors de l'exercice de leur profession. Ils regrettent par exemple la disparition de la règle de trois. Malgré ces réserves, les programmes qui permettent selon les inspecteurs de « munir les élèves de moyens qui leur permettraient par la suite d'utiliser des techniques professionnelles »[11] sont adoptés et de nouveaux textes pour les sections préparant au CAP et au BEP paraissent respectivement en 1972 et 1973 consécutivement à la mise en place de nouveaux programmes dans les classes de cinquième et troisième des collèges[12].
Ces réticences montrent que la rénovation des programmes de CAP et BEP ne s'inscrit pas dans un réel enjeu économique. En fait, elle répond à la double nécessité de mettre les élèves en contact avec une culture mathématique actuelle et d'harmoniser l'enseignement avec celui qu'ils ont reçu au collège afin de ne pas créer de rupture. La rénovation des programmes de CAP en 1980[13] dans le cadre de la contre-réforme répond aux mêmes enjeux. Les deux

10 CAC, 19870205. Archives de la commission Lichnerowicz.
11 CAC, 19870547-Art 8. Séance de la commission de l'enseignement général et technologique. Examen des projets de programmes concernant les enseignements généraux dispensés dans les CET (CAP et BEP). PV du 14 mars 1973.
12 Circulaire n° 71-370 : programme de mathématiques de 4^{e} et 3^{e}. BO n° 45 du 22 novembre 1971, p. 2867.
13 Arrêté du 13 novembre 1980 : programmes d'enseignement général applicables dans les lycées d'enseignement professionnel et établissements assimilés (sections de préparation aux certificats d'aptitude

premières années de préparation au CAP sont transformées en classes de 4e et 3e préparatoires intégrées au collège unique. Les transformations programmatiques et pédagogiques pour l'enseignement mathématique en CAP accompagnent celles des classes de 5e, 4e et 3e générales[14] et répondent alors à la volonté d'actualiser la culture mathématique dispensée dans les collèges d'enseignement technique en fonction des évolutions de la discipline et de l'esprit de l'enseignement. Elles sont ainsi une conséquence à la fois des enjeux de démocratisation de l'enseignement et des transformations qui affectent les programmes de mathématique du collège.

Une opérationnalisation fondée sur le processus de mathématisation

Ces transformations disciplinaires, structurelles et organisationnelles s'accompagnent d'une évolution du recrutement des professeurs de mathématique dans le Technique Court (Tanguy, Poloni & Aghulon, 1987). Le corps des professeurs d'enseignement général (PEG), majoritairement constitué d'instituteur durant les premières années des centres, intègre peu à peu entre 1956 et 1975 des enseignants qui sont passés par l'université, sans toutefois avoir obtenu de licence. À partir de la moitié des années 1970, les trois quarts des PEG des LEP ont une licence. Cette élévation du niveau de recrutement des professeurs de mathématique du Technique Court accompagne, et rend possible dans une certaine mesure la secondarisation de cette discipline. À partir de 1973, corrélativement aux transformations de l'enseignement par la réforme des mathématiques modernes et à l'élévation du niveau de recrutement des professeurs de mathématiques des collèges d'enseignement technique, les travaux issus de praticiens se multiplient. Ces acteurs rappellent la nécessité de mener un enseignement adapté au profil des élèves de ce segment scolaire, qu'ils perçoivent comme « concrets » et en froid avec les mathématiques, et aux nécessités de la formation professionnelle. Afin de minimiser les tensions suscitées par la mise en place d'un enseignement abstrait où les applications sont quasiment absentes, ils revendiquent un enseignement centré sur l'apprentissage du processus de mathématisation et l'étude de situations concrètes, empruntées à la pratique professionnelle.

En conséquence de ces différents enjeux, il apparait que les changements qui affectent l'enseignement mathématique dans la filière Technique Courte au début des années 1970 et 1980 sont le fruit d'un effet domino lié aux transformations de l'enseignement dans les autres classes du second degré. Dans les CET, l'enseignement prend alors comme référence les besoins induits par une culture mathématique détachée de tout contexte productif et non plus sur ceux de la formation professionnelle. L'objectif est désormais de donner aux élèves des connaissances mathématiques ressources, susceptibles d'une multitude d'applications et dont la fonction est d'éclairer l'utilisation qu'ils peuvent faire des mathématiques lors de la résolution de problèmes. Les textes prescriptifs et les manuels sont alors marqués par une faible proportion de références au domaine professionnel et à une utilisation avérée des mathématiques dans le métier. L'ensemble de ces facteurs indique la poursuite du processus de secondarisation et d'autonomisation de l'enseignement, engagé lors de la mise en place des BEP.

---

professionnelle). BO n°43 bis, novembre 1980, p. 3469. Annexe III de la note de service n°81-298 du 3 août 1981 : instructions pédagogiques relatives aux programmes d'enseignement général applicables dans les LEP (section de préparation au CAP). BO n° 32 bis, août 1981, p. 2571

14 Circulaire n°77-157 du 29 avril 1977 : Enseignement des mathématiques dans les collèges. BO n°22 du 9 juin 1977, p. 1568.

RÉPONSES AUX QUESTIONS DE RECHERCHE

Ainsi menée, l'analyse de mon corpus me permet de répondre à mes trois questions de recherches et de préciser les apports scientifiques de mon travail.

Un modèle spécifique

Ainsi, en réponse à la première question portant sur l'élaboration et la structuration d'un enseignement mathématique dans ce segment scolaire particulier, j'ai montré qu'en 1945, dans l'Enseignement Technique Court nouvellement créé, l'enseignement mathématique se structure selon un modèle original proche de celui de l'enseignement primaire, à la fois dans ses méthodes et dans ses contenus, mais spécifique par les liens qu'il entretient avec les enseignements professionnels et la certification. À mon sens, la mise au jour d'un modèle spécifique pour l'enseignement mathématique dans le Technique Court contribue à repenser pour les recherches portant sur l'enseignement mathématique la dualité scolaire (Primaire, Secondaire) en une triade scolaire (Primaire, Secondaire et Technique). C'est-à-dire réexaminer les propositions pour l'enseignement mathématique dans la seconde moitié du vingtième siècle, non plus seulement en opposant ou en articulant Primaire et Secondaire, mais aussi en articulant Primaire et Technique Court et Secondaire et Technique Court. En didactique ce résultat participe si ce n'est à une meilleure appréhension, du moins à considérer et à interroger le système des enseignements de mathématique, à la fois d'un point de vue historique, mais aussi actuel.

Un processus de secondarisation et d'autonomisation vis-à-vis des exigences professionnelles

En réponse à la deuxième question qui portait sur les cohérences de cet enseignement, les mouvements des pôles des visées, des tâches et des références de l'enseignement au cours de la période étudiée indiquent un processus d'évolution, d'un enseignement de type Primaire, celui de 1945, spécifique à cause des enjeux de formation professionnelle auxquels cet enseignement doit répondre, à un enseignement de type secondaire, éloigné des exigences des enseignements professionnels. En effet, en 1945 les tâches des élèves, fondées sur la résolution de problèmes concrets, sont fixées en référence à une pratique avérée des mathématiques des ouvriers et répondent à la visée d'un enseignement utilitaire qui prépare à la vie courante et professionnelle. En 1967, les mutations des pratiques sociotechniques, et par incidence de la culture technique à dispenser dans la filière professionnelle, induisent un changement de référence dans l'enseignement mathématique. L'enseignement ne peut plus être défini selon un gamme de problèmes professionnels spécifiques à la spécialité préparée, mais doit préparer les élèves à résoudre des problèmes techniques variés. L'inscription de l'enseignement dans un cadre plus réflexif, moins procédural, et l'apprentissage du processus de mathématisation répondent à l'objectif de former des ouvriers polyvalents susceptibles de se reclasser. À partir des années 1970, les réformes de l'enseignement au niveau global conduisent à un changement de référence de la culture mathématique à transmettre dans la filière professionnelle. Il ne s'agit plus dans l'enseignement de valoriser une culture mathématique professionnelle fondée sur la pratique mathématique de l'ouvrier qualifié, mais une culture mathématique détachée des contingences professionnelles, fondée sur l'activité du mathématicien pour la résolution de problème.

Trois points cruciaux pour l'étude de la genèse et des évolutions de l'enseignement

Enfin, en réponse à la troisième question de ma recherche, qui portait sur la détermination des facteurs de l'évolution de cet enseignement, la mise au jour de ce processus de transformation me permet d'élaborer un cadre d'analyse pour l'étude de l'enseignement mathématique dans l'enseignement professionnel. Ce cadre d'analyse, que je vais présenter maintenant (c*f.* figure 2), s'appuie sur l'étude de trois points : Les élèves, les pratiques sociotechniques et les mathématiques, sous-entendu ici les mathématiques savantes et la façon dont on enseigne et on apprend les mathématiques au niveau global. À notre sens, ce cadre d'analyse, non spécifique aux mathématiques, est susceptible d'être utilisé dans des travaux visant à rendre intelligible les évolutions d'autres enseignements de la filière professionnelle, par exemple les sciences physiques ou le français.
Sur le schéma, le cercle en noir représente l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court, il s'agit donc d'interroger :

- l'adaptation des méthodes pédagogiques aux spécificités du public scolaire auquel est destiné l'enseignement mathématique (Zone 1)
- l'influence des exigences certificatives et de formation professionnelle sur l'enseignement mathématique (Zone 3)
- l'inscription de l'enseignement dans les évolutions globales des mathématiques (Zone 5)

Mais il s'agit aussi de questionner plus finement :

- l'adaptation de l'enseignement au devenir professionnel des élèves et à leur profil d'entrée (Zone 2)
- l'adaptation des contenus d'enseignement aux exigences de certification et de formation (par exemple l'inscription au programme des connaissances spécifiques au domaine d'activités du diplôme préparé, mais aussi la question des contributions des autres disciplines à la formation mathématique des élèves) (zone 4)
- la mise en cohérence de l'enseignement avec le passé et le devenir scolaires des élèves, c'est-à-dire avec la formation mathématique que les élèves ont reçue avant d'intégrer l'Enseignement Technique Court et celle qu'ils sont susceptibles de recevoir à la fin de leurs études (Zone 6)

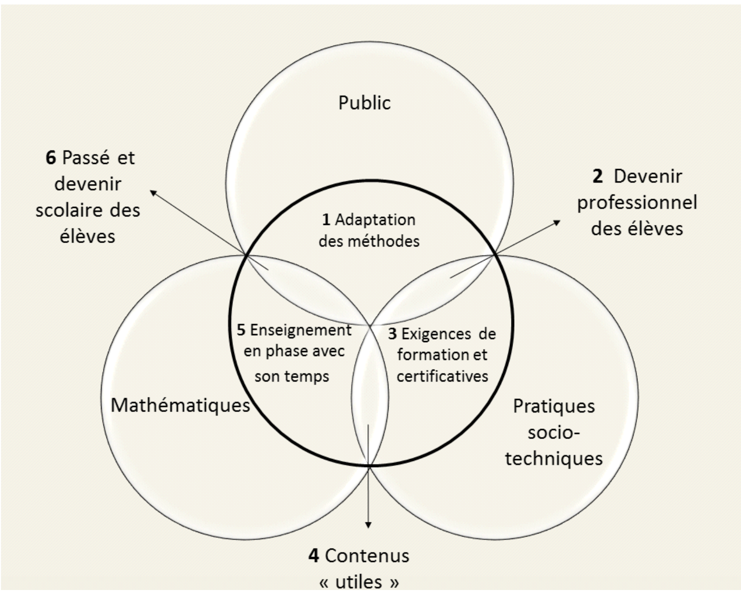


Figure 2 : Cadre d'analyse de l'enseignement mathématique dans l'enseignement professionnel

Pour conclure cette communication, je reprendrais quelques mots de l'Habilitation à Diriger des Recherches (HDR) de Marie France Bishop : « cette approche historique est inséparable de la didactique puisqu'elle lui permet de mettre en contexte les différents modèles et configurations disciplinaires » (Bishop, 2013, p. 8) en contribuant notamment à une réflexion sur les spécificités de cet enseignement dans cette filière (notamment en termes de fonction, d'épistémologie des savoirs enseignés etc.) et à la prise en charge de ces spécificités dans les recherches didactiques, ce qui à mon sens reste encore largement à explorer.

Références Bibliographiques

ALPHAND, J. (1946). Arithmétique. *Apprentissage*, 9, 726.

ARTIGUE, M. (1996). Réformes et contre-réforme dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994). In B. Belhoste, H. Gispert & N. Hulin (Eds.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger* (pp. 197-217). Paris : Vuibert.

AURIAC, O. (1946). Culture et travail manuel. *Technique, Art, Science*, 2, 5–6.

AUXIRE, N. (2015). *Interdidactique de l'enseignement des mathématiques dans trois disciplines de la filière productique usinage en lycée professionnel*. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis.

AVENIR (1959). Les carrières de l'Enseignement Technique. *Avenir*, 103/104, 137–154.

BATAILLON, R. (1954). Le but et l'esprit des enseignements scientifiques. In Ministère de l'Éducation Nationale, *Encyclopédie générale de l'éducation française* (pp. 250-255). Paris : Rombaldi.

BELHOSTE, B. (1990). L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XXe siècle. La réforme de 1902 des plans d'étude et des programmes. *Revue d'histoire des sciences,* 43, 371–400.

BELHOSTE, B. (1995). *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, textes officiels (1789-1914)*. Paris : INRP et Économica.

BISHOP, M-F. (2013). *Statut et fonctions de la mise en perspective historique dans la didactique du français*. Note de synthèse en vue d'une Habilitation à Diriger des Recherches, Université Lille 3.

BKOUCHE, R. (1996). La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France : de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes. In B. Belhoste, H. Gispert & N. Hulin (Eds.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger* (pp. 121-137). Paris : Vuibert.

BOURDIEU, P. & PASSERON, J-C. (1968). L'examen d'une illusion. *Revue Française de sociologie,* IX (numéro spécial), 227–253.

CAILLOT, M. (2002). Sciences, techniques et pratiques professionnelles. *Aster*, 34, 3–8.

CANONGE, F. (1948). Les bases psychologiques de notre enseignement. *Technique, Art, Science*, 3, 5–8.

CERCELET, R. (1949). Une leçon de mathématiques dans les Centres d'Apprentissage masculins et féminins. *Technique, Art, Science*, 6, 52–55.

CHERVEL, A. (1988). Histoire des disciplines scolaires : réflexion sur un domaine de recherche. *Histoire de l'éducation*, 38, 59-119.

D'ENFERT, R. (2003). *L'enseignement du dessin en France. Figure humaine et dessin géométrique (1750-1850)*. Paris : Belin, collection histoire de l'éducation.

D'ENFERT, R. (2006). L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Troisième république aux années 1960 : enjeux sociaux et culturels d'une scolarisation « de masse ». *SMF gazette*, 108, 67-81. Consultable en ligne (dernière consultation le 25/12/2015) :

http://smf.gazette.emath/fr/publications/Gazette/2006/108/smf_gazette_108_67-81.pdf
D'ENFERT, R. (2010). Mathématiques modernes et méthodes actives : les ambitions réformatrices des professeurs de mathématiques du secondaire sous la Quatrième république. In R. d'Enfert & P. Kahn (Eds.), *En attendant la réforme. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la IVe République* (pp. 115-129). Grenoble : PUG.
D'ENFERT, R. (2011). Une réforme Ambiguë : l'introduction des « mathématiques modernes » à l'école élémentaire (1960-1970). In R. d'Enfert & P. Kahn (Eds.), *Le temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Ve république. Les années 1960* (pp. 53-73). Grenoble : PUG.
DEVELAY, M. (1993). Pour une épistémologie des savoirs scolaires. *Pédagogie collégiale*, 7, 35-40.
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE (1945). *Instructions sur les programmes et les méthodes des centres d'apprentissage de garçons.* Lyon : France-empire.
GISPERT, H., HULIN, N. & ROBIC, M-C. (2007). *Science et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XXe siècle*. Paris : INRP-Vuibert.
LEBEAUME, J. (2000). *L'éducation technologique. Histoires et méthodes.* Paris : ESF éditeur.
LOPEZ, M. (2015). *Formation littéraire et formation professionnelle de 1930 à 1985*. Thèse de doctorat, Université Cergy-Pontoise.
LOPEZ, M. & SIDO, X. (2015) L'enseignement des mathématiques et du français dans l'enseignement technique court de 1945 à 1985. Identité singulière, dynamique et temporalité spécifiques ? In R. D'ENFERT & J. LEBEAUME (Dirs), *Réformer les disciplines*, *Les savoirs scolaires à l'épreuve de la modernité 1945-1985* (pp. 137-154). Rennes : PUR.
MARTINAND, J.-L. (1983). Questions pour la recherche : la référence et le possible dans les activités scientifiques scolaires. In G. DELACÔTE & A. TIBERGHIEN (coord), *Recherche en didactique de la physique : les actes du premier atelier international* (pp. 227-249). Paris : Éditions du CNRS.
MARTINAND, J.-L. (1985). Réflexions de Mr Martinand de l'université Paris-Sud. *Bulletin de liaison des professeurs maths-sciences de lycées professionnels*, 1, 4–6.
MARTINAND, J.-L. (2003). La question de la référence en didactique du curriculum. *Investigaçoes em ensino de ciências*, ,8, 125–130.
MATRAY, F. (1952). *Pédagogie de l'enseignement technique*. Paris : PUF.
PELPEL, P. & TROGER, V. (2001). *Histoire de l'enseignement technique*. Paris : L'harmattan.
TANGUY, L., POLONI, A., & AGULHON, C. (1987). Les institutions d'enseignement technique court en France : Genèse et évolution. *Revue française de pédagogie*, 78, 43-64.
TRABAL, P. (1996). La réforme des mathématiques modernes, discours, polémiques et réalités. In B. Belhoste, H. Gispert & N. Hulin (Eds.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger* (pp.179-195). Paris : Vuibert.

INGENIERIE DIDACTIQUE DE DEVELOPPEMENT EN GEOMETRIE AU CYCLE 3 DANS LE CADRE DU LEA VALENCIENNES-DENAIN

Christine **MANGIANTE-ORSOLA**

Laboratoire de Mathématiques de Lens, Université d'Artois, ESPE Lille Nord de France

christine.mangiante@espe-lnf.fr

Marie-Jeanne **PERRIN-GLORIAN**

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot, Université d'Artois

marie-jeanne.perrin@univ-paris.diderot.fr

Résumé

Nous revenons dans ce texte sur la notion d'ingénierie didactique pour le développement et la formation (IDD, Perrin-Glorian, 2011) et sur les problèmes méthodologiques liés à sa mise en œuvre (Mangiante & Perrin-Glorian, 2016). Dans le cas de l'enseignement de la géométrie plane à l'école élémentaire, nous tentons de préciser le questionnement de niveau 1 (lié au contenu à enseigner, Perrin-Glorian & Godin, 2014) et de niveau 2 (lié aux pratiques ordinaires des enseignants et à leurs conditions d'évolution). Prenant appui sur le dispositif de travail mis en place dans le cadre du LéA de Valenciennes-Denain, nous précisons comment notre dispositif de travail et de recherche nous permet de tester à la fois des hypothèses concernant l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (G) et des hypothèses concernant les pratiques des enseignants (P). Nous questionnons également la notion de ressource et ses implications à chacun des niveaux de l'IDD ainsi que les conditions de fonctionnement d'une instance de conversion bidirectionnelle entre le monde de la recherche et le monde de l'enseignement ordinaire.

Mots clés

Ingénierie didactique ; géométrie plane à l'école primaire ; évolution des pratiques et formation des enseignants ; collaboration chercheurs - formateurs de terrain - enseignants.

INTRODUCTION

Cet exposé prend appui sur les derniers développements d'une recherche qui a commencé au début des années 2000 avec le soutien de l'IUFM Nord Pas-de-Calais et se prolonge dans le cadre d'un LéA sur l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 à Valenciennes-Denain. Notre intention dans ce texte est d'apporter des précisions à propos de l'ingénierie didactique pour le développement et la formation (IDD) (Perrin-Glorian, 2011) en mettant l'accent sur les problèmes méthodologiques et les moyens de contrôle théoriques. Nous reviendrons tout d'abord sur la démarche d'IDD pour mieux la situer à l'intérieur de l'ingénierie didactique. Nous présenterons ensuite la mise en œuvre de cette démarche dans le cadre du LéA et nous terminerons par une discussion autour de certains points plus théoriques.

PRECISIONS A PROPOS DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE POUR LE DEVELOPPEMENT ET LA FORMATION DANS LE CAS DE LA GEOMETRIE

Ingénierie didactique pour le développement et la formation comme méthode de recherche : quelles sont les questions ?

La question des relations entre recherche et enseignement n'est pas nouvelle. Le développement de la didactique des mathématiques et de ses cadres théoriques s'est fait contre l'idée d'une recherche-action qui proposerait directement des solutions aux problèmes d'enseignement et d'apprentissage. Le projet était de développer une recherche fondamentale et des cadres théoriques qui permettraient d'étudier les phénomènes didactiques et, plutôt que de donner aux enseignants des solutions toutes faites, leur donner des outils qui les aident à gérer les problèmes d'enseignement et d'apprentissage qu'ils rencontrent dans leur quotidien. Outre les outils qui permettent l'étude des phénomènes, les recherches en didactique ont produit des résultats qui pourraient contribuer à améliorer l'enseignement et la formation des maîtres, par exemple l'élucidation de contenus mathématiques et des organisations possibles de ces contenus en lien avec d'autres, les difficultés d'apprentissage des élèves sur ces contenus, l'impact des choix institutionnels et didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage de ces contenus, les pratiques des enseignants et leurs possibilités de développement. Comment ces résultats peuvent-ils se traduire pour un enseignant qui a besoin de préparer et gérer sa classe, d'organiser le travail de ses élèves pour assurer leur apprentissage, pour un formateur en prise directe avec les demandes pressantes des enseignants ? Un enseignant a besoin d'intégrer ces résultats à son fonctionnement ordinaire et la prise en compte de résultats de recherche, portant sur certains aspects de son travail à l'exclusion des autres, risque de déstabiliser plus que d'améliorer sa pratique d'où la résistance des enseignants et les effets parfois négatifs de la diffusion des recherches dans l'enseignement. Pour que les travaux de recherche puissent contribuer à améliorer l'enseignement et la formation des maîtres, il faut qu'ils prennent en compte le fonctionnement réel des classes et les besoins des enseignants.

Dès le début, l'ingénierie didactique a la volonté de prendre en compte le fonctionnement réel des classes et le souci de diffuser les résultats de recherche. Ainsi, dans plusieurs textes, notamment assez récents (Brousseau (2006), Brousseau (2013), Brousseau & Brousseau (2006), cité par Bessot (2011)), Brousseau donne les raisons qui placent l'ingénierie didactique au cœur de la didactique : comme indispensable instrument de confrontation de la science didactique à la contingence mais aussi comme moyen de mise en œuvre et de diffusion des résultats de didactique vers les enseignants et le public. L'ingénierie didactique produit des situations qui peuvent en effet être des ressources pour l'enseignement mais la diffusion de ces situations ne va pas de soi. Les ingénieries issues des recherches, surtout les ingénieries longues, sont difficilement reproductibles dans l'enseignement ordinaire. Dans les années 90, il devient évident qu'il faudrait mieux connaître le fonctionnement ordinaire des classes et les besoins des enseignants. Se développent alors des recherches appuyées sur l'observation de classes ordinaires, par exemple par le biais d'une caméra au fond de la classe, et des cadres théoriques comme la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) qui, à la suite de Vergnaud, mettent davantage l'accent sur le développement des individus via la théorie de l'activité.

L'expression « ingénierie didactique pour le développement et la formation (abrégée en IDD) » est peut-être mal choisie parce que ce n'est pas « une ingénierie de production et de développement qui vise uniquement l'enseignement » comme la caractérise Bessot (2011), en citant Brousseau et Brousseau (2006). Dans l'IDD, la production de situations d'enseignement n'est pas le but unique : il s'agit d'étudier leur adaptation aux conditions ordinaires d'enseignement et aux besoins des enseignants, de prendre comme objet d'étude la diffusion de ces situations dans l'enseignement ordinaire via la production de ressources et les besoins de formation et d'accompagnement des enseignants qu'elles nécessitent pour que ceux-ci puissent les utiliser efficacement pour améliorer l'apprentissage de leurs élèves. Il s'agit donc de mettre à l'épreuve les conditions qui permettent de définir ces situations. L'IDD est en fait une ingénierie didactique de recherche particulière qui se distingue par le type de questions qu'elle aborde, questions qui posent des problèmes méthodologiques et théoriques particuliers.

Qu'une étude préalable ait été effectuée ou non, il s'agit en même temps d'élaborer une proposition de transposition didactique et d'en étudier les conditions de diffusion dans l'enseignement ordinaire, sur un contenu assez large, ici l'enseignement de la géométrie plane au cycle 3, c'est-à-dire, en termes de niveaux de codétermination (Chevallard, 2005) qu'on se situe au moins au niveau du secteur si ce n'est du domaine. Le questionnement est triple :

- sur le contenu lui-même et sa possible transposition didactique. Cela suppose la recherche d'une organisation mathématique conforme aux programmes d'enseignement pour qu'elle soit acceptable par les enseignants, sans se soumettre à l'interprétation qui en est généralement faite et la recherche de situations permettant de mettre en scène cette organisation du contenu mathématique avec des contraintes sur le milieu matériel et l'organisation du temps, donc une réflexion de nature épistémologique, cognitive et didactique.
- sur les pratiques actuelles de l'enseignement de ce contenu et l'identification des besoins des élèves (difficultés d'apprentissage) et des enseignants (difficultés d'enseignement) en confrontant ceux qui sont identifiés par les chercheurs à ceux qui sont exprimés par les enseignants et par l'institution.
- sur le contenu des ressources à produire et leur mode d'élaboration.

Perrin-Glorian (2011) distingue deux niveaux de questionnement pour l'IDD :

- un premier niveau où il s'agit surtout de tester la validité théorique des situations au plan épistémologique et cognitif et de dégager les choix essentiels de l'ingénierie ;
- un deuxième niveau concernant les pratiques ordinaires des enseignants et leurs possibilités d'évolution en repérant les points sur lesquels ils ont besoin de soutien, points à prendre en compte dans les ressources et dans les formations.

Ces deux niveaux ne sont pas indépendants et le questionnement au deuxième niveau amène à reprendre le premier niveau pour mieux élucider ce qui relève du milieu et ce qui relève de la gestion du milieu par le maître dans la situation, par exemple dans le passage d'un niveau de milieu à un autre. En particulier, il est nécessaire de prévoir soigneusement les modifications à apporter dans le milieu pour la formulation et la validation, vu la difficulté souvent observée dans les classes à faire le lien entre l'activité des élèves et le savoir à retenir. Ainsi, dans le travail au premier niveau, on essaie d'anticiper le deuxième niveau et dans le travail au deuxième niveau, on remet aussi en question le premier niveau.

Dans tous les cas, une ingénierie didactique teste la validité théorique des situations par confrontation de l'analyse *a priori* et de l'analyse *a posteriori*. Dans le cas de l'IDD, des contraintes et des questions supplémentaires se posent dès l'élaboration des séances, par exemple : le milieu matériel demande-t-il un temps de préparation raisonnable à partir du matériel ordinaire des élèves ? La suite de situations peut-elle se réaliser en un temps raisonnable, compatible avec le temps total consacré aux mathématiques ? Quels sont les milieux et les choix de variables didactiques incontournables de la progression, lesquels peuvent être omis ou modifiés ?

Un appui sur des mises en œuvre précédentes dans des conditions expérimentales peut aider à prendre en compte ces contraintes supplémentaires. Cependant, le travail avec les enseignants sur un projet d'ingénierie didactique avant la mise en œuvre en classe et l'observation de cette mise en œuvre permettent de mieux connaître les pratiques ordinaires des enseignants, les

manques éventuels relatifs aux conditions qui devraient favoriser l'apprentissage des élèves mais aussi des enrichissements qui pourraient être apportés à l'ingénierie initiale en y intégrant des éléments qui font partie des pratiques ordinaires des enseignants.
Pour assumer le lien entre les deux niveaux, il est donc nécessaire d'itérer le processus. Ainsi, dans les modalités de travail que nous présenterons dans la deuxième partie, apparaissent plusieurs versions des ressources[1], retravaillées avec un groupe de formateurs dont des EMF[2] qui mettent en œuvre les situations dans leurs propres classes, avant d'être proposées à d'autres enseignants puis rediscutées après observations dans les classes. C'est dans ces allers et retours entre chercheurs, formateurs de terrain et enseignants que se tissent les liens entre les deux niveaux de questionnement de l'IDD. Nous y reviendrons.

Questions méthodologiques à propos des relations chercheurs/enseignants

L'IDD pose des questions méthodologiques particulières, notamment en ce qui concerne l'organisation des relations entre chercheurs et enseignants dans la mesure où on est dans une position un peu intermédiaire entre ingénierie didactique classique et observation de séances ordinaires.
Dans l'ingénierie didactique pour le développement et la formation, on cherche à avoir accès simultanément à un nombre assez important de classes ordinaires et on cherche à mettre au point une ressource utile pour le plus grand nombre possible de classes et susceptible d'améliorer l'apprentissage des élèves. L'accès aux classes ordinaires se fait par un intermédiaire institutionnel : dans notre cas, nous avons eu accès à une circonscription via un inspecteur ancien formateur de mathématiques de l'IUFM qui avait participé à des étapes antérieures de notre recherche sur l'enseignement de la géométrie. L'accès à la circonscription n'est donc pas ordinaire et cela influence sans doute les formateurs de terrain mais la circonscription est ordinaire et même dans un quartier plutôt défavorisé socialement.
La question de recherche doit prendre en compte les besoins ressentis par les enseignants et leurs questions sur le thème pour qu'ils puissent s'investir raisonnablement dans le travail demandé. Elle doit aussi prendre en compte les besoins identifiés par le chercheur qui ne coïncident pas nécessairement avec les précédents.
Les dispositifs de travail avec les enseignants sont soumis aux contraintes institutionnelles usuelles et ont donc besoin d'être formalisés un peu plus que dans une ingénierie didactique classique. Il reste des questions sur les rôles respectifs des chercheurs, formateurs de terrain et enseignants dans l'élaboration de la ressource et sur la formation à prévoir pour accompagner cette ressource.
Les problèmes méthodologiques à propos des choix concernant l'élaboration de la ressource sont d'autant plus importants que l'enjeu d'enseignement concerne un secteur large voire un domaine, comme c'est le cas pour la géométrie plane à l'école élémentaire. Sans pouvoir être exhaustif, ce qui demanderait d'établir une progression sur plusieurs années scolaires, et donc de gros moyens de suivi et d'observation, il faut élaborer des situations qui mettent en jeu de façon suffisamment cruciale les hypothèses concernant l'apprentissage de ce contenu.
De plus, les situations élaborées doivent pouvoir être mises en œuvre avec les pratiques ordinaires des enseignants tout en leur donnant l'occasion de réfléchir à ces pratiques en observant leurs élèves dans des situations inusuelles. Et bien sûr, la validité de la situation pour produire les connaissances visées chez les élèves ne peut être testée que via la mise en œuvre dans les classes. Or cette mise en œuvre n'est pas nécessairement celle qui était prévue dans la ressource (Gueudet & Trouche, 2010). D'où la nécessité de reprendre la ressource si

[1] Nous employons ressource dans le sens ordinaire de document à disposition des enseignants pour préparer leur classe.
[2] Enseignants Maîtres Formateurs

on s'éloigne trop de l'apprentissage prévu et la nécessité des boucles itératives.
Comme dans toute ingénierie didactique, nous exerçons un contrôle théorique sur l'analyse du savoir, sur la définition des situations, du milieu et sur les connaissances des élèves. Mais nous cherchons aussi un contrôle théorique sur la mise en œuvre de la situation en classe par les enseignants et même sur les échanges chercheurs - enseignants. Sur les trois premiers points, nous combinons des outils théoriques issus des mathématiques et de leur histoire, de la théorie des situations et de la théorie anthropologique du didactique. Sur la gestion de la classe par l'enseignant, nous combinons la théorie des situations avec la double approche didactique et ergonomique. Nous reviendrons en troisième partie sur les possibilités d'importation d'autres éléments théoriques.

Caractériser l'approche de la géométrie

L'approche de la géométrie dont nous étudions les possibilités d'implantation dans les classes ordinaires se caractérise à travers des hypothèses relatives à la possibilité de penser un enseignement cohérent sur la scolarité obligatoire, permettant de s'appuyer efficacement sur G1 pour introduire G2 plutôt que de le rejeter en mettant en avant la méfiance par rapport à la figure. Nous interprétons les paradigmes définis par Houdement et Kuzniak (Houdement, 2007 ; Houdement & Kuzniak, 2006), en considérant G1 comme la géométrie des figures matérielles qui permet la représentation de l'espace, des objets de l'espace et des actions dans l'espace ou sur les objets de l'espace, que nous appelons géométrie physique. Elle correspond à la situation fondamentale du charpentier dont parlait Brousseau (1983) ; le problème se pose dans l'espace sensible ou dans l'espace graphique[3] et la validation se fait dans cet espace. G2 est pour nous une théorie de l'espace, un modèle de G1, défini à partir d'objets premiers, les points, les droites et les plans et de relations entre ces objets dont certaines sont posées comme axiomes et les autres démontrées : c'est la géométrie d'Euclide, représentée par Brousseau (1983) par la situation de l'intersection des médiatrices d'un triangle, avec comme outil de validation la démonstration.
Nous faisons l'hypothèse que les figures planes tracées sur une feuille de papier avec des instruments constituent un milieu riche pour mettre en scène les savoirs de base de la géométrie élémentaire plane dans leur capacité à représenter les formes et grandeurs des objets plats de l'espace et leurs relations, sans passer par les nombres. Pour mettre à l'épreuve cette hypothèse, il nous faut rechercher des conditions pour que le contrôle par la vue soit insuffisant et le contrôle par les instruments, nécessaire. De plus, comme nous pensons que les grandeurs géométriques contribuent à fonder les nombres, les opérations sur ces grandeurs doivent avoir un sens indépendamment des nombres. Ainsi les reports de grandeurs (longueurs et angles) se font avec des instruments sans passer par les nombres.

Vision des figures

Pour éclairer la suite et expliciter nos hypothèses de départ, il nous faut rappeler les différentes visions des figures que nous avons définies en lien avec la déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) et aussi avec la capacité à voir des unités figurales non tracées mais qui pourraient se définir à partir de celles qui sont présentes sur la figure et permettraient d'engendrer tout ou partie de la figure.

3 Nous appelons espace graphique l'espace des figures tracées sur une feuille de papier ou sur un écran.

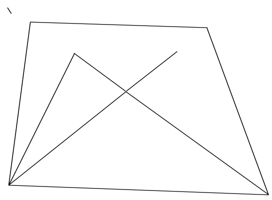


Figure 1

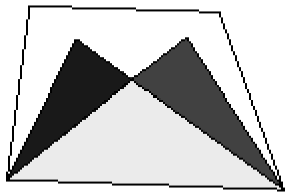


Figure 2

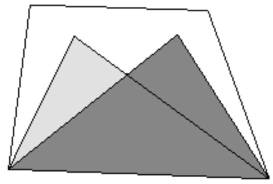


Figure 3

La vision naturelle des figures, que nous appelons vision « surfaces », est une vision en termes de surfaces juxtaposées ou, éventuellement, superposées. Ainsi, sur la figure 1, on peut voir trois triangles juxtaposés et superposés sur un quadrilatère (figure 2) ou bien deux triangles superposés sur un quadrilatère (figure 3). Le quadrilatère, surface fermée convexe, est perçu plus facilement que l'heptagone laissé en blanc. Les lignes sont seulement des bords de surfaces et les points des sommets de surfaces ou des intersections de lignes déjà tracées.
Dans une vision « lignes », la figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments : la règle pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments, le compas pour les cercles ou les arcs de cercle. Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes qu'on a déjà. On peut tracer des segments (voire des demi-droites ou des droites) qui relient des points qu'on a déjà. On peut obtenir de nouveaux points par intersection de lignes qu'on a prolongées mais on ne peut pas créer ces points pour obtenir de nouvelles lignes. Sur l'exemple (figure 4), on verra plus ou moins de lignes supports des côtés. Les lignes qui font sortir de l'enveloppe convexe de la figure initiale sont plus difficiles à considérer.
Dans une vision « points » de la figure, on peut créer des points par intersection de deux lignes et les points peuvent définir des lignes.
Sur l'exemple (figure 5), on peut identifier des points qui permettent de définir les lignes de la figure et de créer de nouveaux points : la donnée de A, B, C, D (le quadrilatère) détermine quatre droites (et même six) dont les intersections donnent deux nouveaux points E et F. Le choix de G sur (EF) détermine les petits triangles.

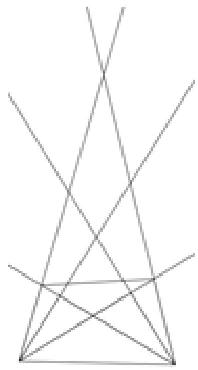


Figure 4

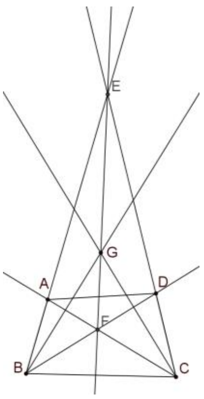


Figure 5

La vision géométrique des figures demande la mobilité entre ces différentes visions des figures. C'est nécessaire dans G2 parce que les objets géométriques sont définis à partir des notions premières de droites et de points. Or cet apprentissage n'est jusqu'à présent pas pris en compte dans l'enseignement.

Notre approche de la géométrie

Un des points forts de notre approche (Perrin & Godin, 2014) est de prendre en compte des éléments cognitifs concernant la différence entre le regard porté naturellement sur les dessins et celui qu'il faut porter sur les figures géométriques. Nous faisons l'hypothèse qu'un regard analytique sur les figures peut se construire dès la géométrie instrumentée en créant des milieux adéquats pour la reproduction de figures et en jouant sur les variables didactiques concernant les propriétés des figures et les instruments à disposition (nous entendons ici instrument en un sens large qui inclut par exemple les gabarits et le papier calque).
Un autre point que nous avons commencé à travailler plus récemment concerne le langage géométrique. La plupart des mots de la langue utilisée en géométrie élémentaire sont aussi des

mots de la langue courante où ils ont, en plus du sens proche de celui qu'ils ont en géométrie, d'autres sens qui s'en éloignent plus ou moins. De plus, la signification de ces mots et les moyens de reconnaissance et de justification évoluent, de qualités perceptives d'objets matériels en début de primaire à des propriétés d'objets théoriques établies par des définitions et des démonstrations en fin de collège, en passant par des propriétés que l'on produit et vérifie avec des instruments. Dans ce cas, la figure matérielle est l'objet même du travail et les propriétés sont rencontrées et établies par les contraintes de la construction. Les propriétés géométriques se confondent souvent avec le langage lié à la manipulation des instruments règle, équerre, compas, puisque ce sont ces instruments qui permettent de réaliser et de vérifier les propriétés. Edith Petitfour dans sa thèse (Petitfour, 2015) a fait un énorme travail pour clarifier les rapports entre langage géométrique et ce qu'elle a appelé langage technique géométrique qui est lié à la manipulation des instruments pour obtenir des propriétés géométriques des figures.
En résumé, notre approche de la géométrie vise à prendre en compte dans l'ensemble des activités géométriques trois aspects liés :
- Mobilité à apporter dans le regard porté aux figures matérielles tracées sur papier ou sur écran (en particulier surfaces, lignes, points) ;
- Rôle d'interface des instruments d'une part pour outiller la perception dans le travail sur les figures matérielles, d'autre part pour représenter des propriétés de la géométrie théorique ;
- Rapports entre langage courant, langage technique géométrique et langage géométrique.

Nos hypothèses à propos de la géométrie et à propos des pratiques

Hypothèses et objectifs sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (G)

Notre hypothèse générale à propos de l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie est qu'il est possible de travailler sur les figures dans la géométrie physique de façon à développer chez les élèves 1) une vision des figures qui sera nécessaire dans la géométrie théorique, 2) un rapport aux objets géométriques et à la notion de propriété qui prépare celui de la géométrie théorique, 3) un lien entre le langage géométrique et le langage technique géométrique.
Pour la mettre en œuvre, nous formulons les hypothèses suivantes :
- Pour que les instruments matériels puissent jouer le rôle d'interface entre la géométrie physique et la géométrie théorique, il est important que les élèves apprennent à en faire un usage que nous appelons géométrique parce qu'il respecte des règles qui correspondent au report des propriétés géométriques avec les instruments théoriques[4] correspondants.
- Le travail sur le report de grandeurs sans passer les nombres qui les mesurent est essentiel pour accéder à une vision géométrique des figures.
Enfin, nous y ajoutons une hypothèse de travail : la restauration de figures, par le jeu qu'elle permet sur les variables didactiques que sont notamment les propriétés de la figure à reproduire, de l'amorce et les instruments fournis, constitue un milieu qui permet de produire des situations de classe visant ces objectifs.
Une restauration de figure est une reproduction de figure mais avec des contraintes particulières : une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non) ; une partie de la figure à obtenir (amorce) est donnée ; les élèves disposent d'instruments variés ; soit l'amorce, soit des instruments permettant de reporter des informations de dimension 2 (D2) de la figure initiale mais sans donner toute l'information, c'est-à-dire qu'on peut démarrer la restauration avec une vision surfaces des figures ; la vérification se fait à l'aide d'un

[4] Par exemple, la règle et l'équerre théoriques ont des bords infinis, le compas théorique a un écartement aussi petit ou aussi grand qu'on veut. Voir Perrin-Glorian et Godin (soumis pour un livre édité par la Corfem).

transparent portant la figure à obtenir.
Dans le cadre du LéA, notre objectif est d'aider les élèves à passer d'une vision des figures comme surfaces juxtaposées ou superposées à une vision en termes de lignes et de points de construction, qu'on peut obtenir avec des instruments de tracé. Plus précisément, nous cherchons à ce que les élèves soient capables d'utiliser le support d'un segment en le prolongeant, d'obtenir un point par l'intersection de deux droites supports de segments de la figure, de reporter une longueur sur une droite déjà tracée, et de créer les extrémités d'un segment pour tracer ce segment.

Hypothèses sur les pratiques ordinaires en géométrie et leurs possibilités d'évolution (P)

Notre pratique de formatrices, un questionnaire réalisé dans les années 2000, au début de notre groupe de recherche, les discussions avec les formateurs de terrain et l'examen des manuels du primaire nous amènent à supposer que l'enseignement de la géométrie est centré sur l'acquisition du vocabulaire et de la maîtrise des instruments usuels ; qu'il relève principalement de pratiques ostensives ; que les concepts de droite, droites parallèles ou perpendiculaires sont enseignés sans beaucoup de lien avec la reproduction de figures ; qu'il n'y a pas de travail explicite sur le report des grandeurs indépendamment de leur mesure.
Nous formulons aussi des hypothèses à propos de ce qui est susceptible de favoriser l'appropriation des situations par les enseignants. Les recherches menées dans le cadre de la double approche attestent que les pratiques enseignantes constituent un système complexe, cohérent et stable (Robert, Rogalski, 2002). Il nous semble par conséquent tout à fait légitime de tenir compte de cette organisation des pratiques et d'interroger les possibilités d'une intégration progressive de pratiques nouvelles au sein de pratiques existantes (Leclercq & Mangiante-Orsola, 2014).
Nos précédentes analyses montrent que certains enseignants ont des difficultés à mettre en lien les situations proposées avec certains enjeux d'apprentissage de l'enseignement de la géométrie et que cela constitue un frein à l'enrichissement de leurs pratiques au-delà de la simple mise en œuvre de ces situations.
De même, nous estimons qu'il est important d'éviter de fournir des descriptions trop détaillées, des situations trop « clés en main », qui pourraient enfermer les enseignants dans un déroulement trop contraint mais en même temps de veiller à leur fournir les éléments d'analyse suffisamment précis pour éviter qu'ils dénaturent la situation proposée. Enfin, les situations produites par le groupe de recherche du Nord Pas-de-Calais visent un enrichissement des pratiques enseignantes qui ne va pas de soi car nos propositions sont généralement assez éloignées des pratiques ordinaires. C'est pourquoi nous devons au préalable mieux cerner les besoins ressentis par les enseignants, leurs préoccupations, leurs priorités… pour à terme mieux tenir compte des contraintes du métier qui pèsent sur eux.
Ainsi, nous retenons la nécessité de clarifier dans notre ressource les hypothèses et objectifs sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (caractériser l'approche de la géométrie développée) ; de prévoir dans la présentation des situations proposées la possibilité pour les enseignants d'investir une certaine marge de manœuvre tout en les aidant à cerner les éléments fondamentaux des situations ; de mettre en évidence en quoi nos propositions peuvent répondre aux priorités qui sont les leurs.

MISE EN ŒUVRE DE LA DEMARCHE D'IDD DANS LE CADRE DU LEA DE VALENCIENNES-DENAIN

Présentation générale du dispositif de travail

Depuis un peu plus de deux ans, nous travaillons à l'élaboration de ressources pour l'enseignement de la géométrie au cycle 3, avec l'équipe de circonscription de Valenciennes Denain et depuis septembre 2014, ce projet s'inscrit dans le cadre d'un LéA (Lieu d'éducation Associé à l'IFE). Au cours de l'année précédant notre entrée dans le réseau des LéA, des séances ont été testées dans les classes des maîtres formateurs associés au projet (année 0). En 2014-2015 (année 1), nous avons rédigé un document de travail présentant une séquence que des enseignants de la circonscription (bénéficiant de temps de formation continue) ont mise en œuvre dans leur classe, accompagnés par les formateurs du LéA. En septembre dernier (début de l'année 2), nous avons décidé de poursuivre le travail de conception et d'évaluation de ressources tout en élargissant notre réflexion (il s'agira d'inscrire nos situations dans une progression[5]) pour à terme (fin de l'année 3) rédiger et diffuser une ressource sur l'enseignement de la géométrie dont tout enseignant de cycle 3 pourrait éventuellement s'emparer.
Dans cette deuxième partie, notre intention est de présenter comment la démarche d'IDD décrite précédemment a été mise en œuvre dans le cadre de ce LéA et comment notre méthodologie de recherche s'est précisée au fur et à mesure des choix du groupe de travail et de l'évolution des questionnements.

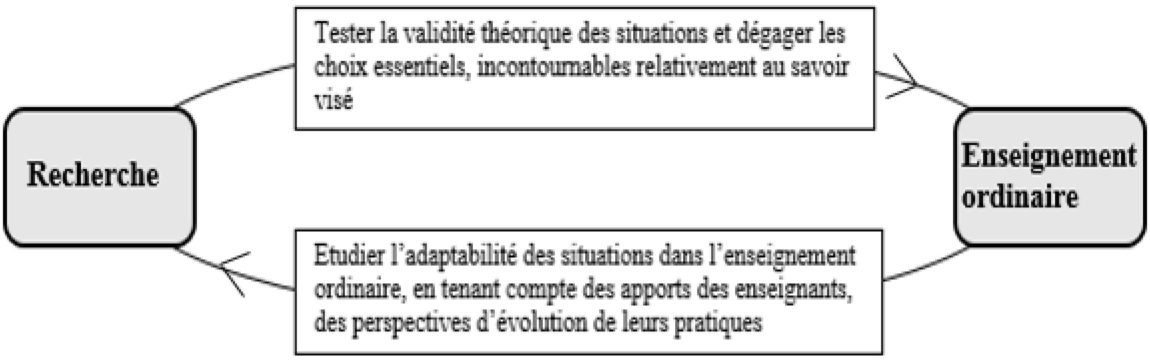


Figure 6

Le schéma ci-dessus (figure 6) présente de manière succincte la démarche d'IDD : les deux flèches correspondent aux deux niveaux de questionnement, l'aspect cyclique du schéma traduit le lien entre ces deux niveaux, le tout étant situé à l'interface de la recherche et de l'enseignement ordinaire. Nous allons l'enrichir au fur et à mesure de l'explicitation de notre méthodologie.
Le projet de conception de ressources du LéA est porté par une équipe constituée d'acteurs rattachés à des institutions différentes : nous travaillons en effet avec six formateurs de terrain, trois CPC[6] et trois EMF, et une dizaine d'enseignants (associés au projet dans le cadre des heures de formation continue). Même s'ils ne participent pas directement à l'écriture de la ressource, ces enseignants savent qu'ils contribuent à sa conception à travers leur participation à la préparation des séances testées et observées dans leurs classes ainsi que les entretiens et bilans organisés par le groupe restreint. C'est pourquoi, complétant le schéma initial (figure

[5] A ce stade de notre réflexion, nous n'avions pas encore déterminé sur quels apprentissages précis allait porter cette progression. Ce choix faisait partie du travail à accomplir ensemble.
[6] Conseiller pédagogique de circonscription

7), nous faisons apparaître au cœur du dispositif de recherche, un espace de travail créé par les acteurs eux-mêmes réunis autour d'une finalité commune : la production de ressources pour l'enseignement de la géométrie au cycle 3.

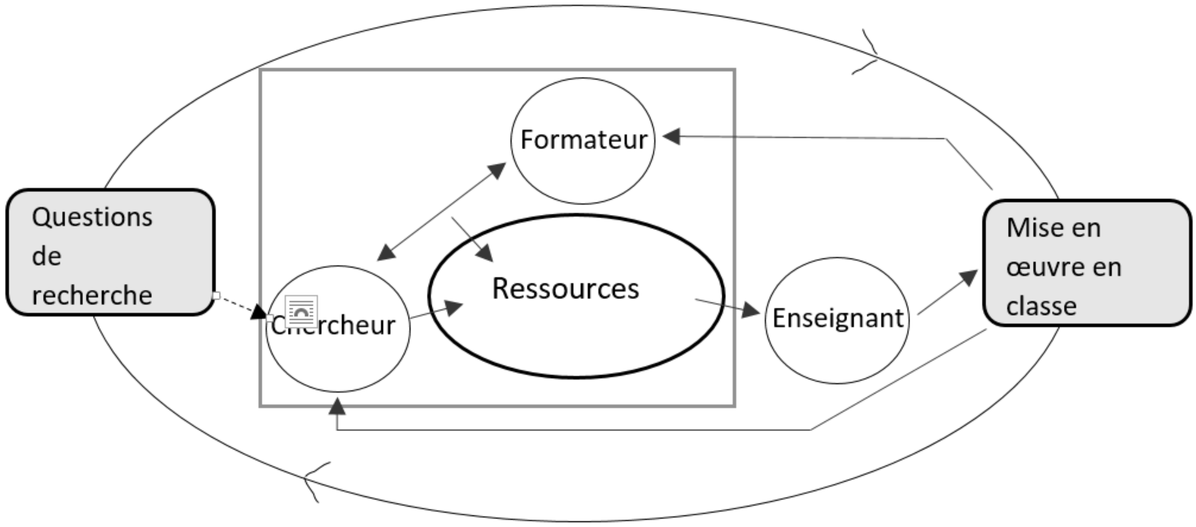


Figure 7

L'équipe restreinte (chercheurs et formateurs) pilote le dispositif, élabore des versions provisoires de la ressource (cadre rectangulaire) que les enseignants maîtres formateurs testent eux-mêmes dans leur classe. Les situations ainsi conçues sont ensuite proposées à des enseignants de la circonscription lors d'une première séance de formation continue de trois heures. Accompagnés par les formateurs de terrain, les enseignants participant à cette formation, testent à leur tour ces situations dans leur classe. Les séances mises en œuvre sont observées par des membres du groupe restreint, certaines sont filmées et un entretien « à chaud » est mené avec chaque enseignant. Une deuxième séance de formation continue de trois heures préparée par le groupe restreint sur la base des observations, enregistrements vidéos et entretiens menés dans les écoles permet de faire le bilan en grand groupe des expérimentations réalisées. Ainsi, la conception de ressources est organisée selon des boucles itératives (flèches en traits droits pleins) dont le but est de produire des séquences d'enseignement adaptées, utiles et diffusables dans l'enseignement ordinaire.
Au sein de ce dispositif, les modalités de travail sont diverses : les séances de formation continue en grand groupe alternent avec des séances de travail du groupe restreint. De plus, les formateurs de terrain se réunissent parfois en l'absence des chercheurs pour mener certaines analyses ou élaborer des propositions d'activités et de leur côté, les chercheurs échangent régulièrement par mail et se rencontrent pour préparer les séances de travail du groupe restreint. Ainsi, l'organisation du dispositif induit différents niveaux de collaboration et des degrés divers d'autonomie des uns et des autres selon les modalités de travail prévues.

Première année de travail (année 0)

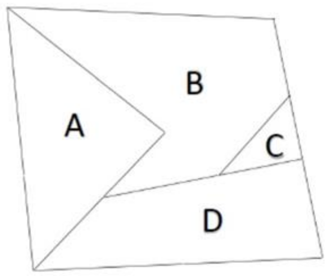


Figure 8

Comme cela a déjà été précisé, cette recherche s'inscrit dans une approche de la géométrie qui vise à accompagner le changement de regard des élèves sur les figures. Nous avons, dans cette perspective, conçu des situations de restauration de figures.
L'année précédant notre entrée dans le réseau des LéA (année 0), l'équipe restreinte a fait le choix de travailler sur une situation de restauration de figure destinée à différents niveaux de cycle 3 et de laisser les enseignants participant au projet fixer les différentes étapes de la séquence.
Lors de la première séance de formation continue les enseignants ont été invités à jouer sur les variables didactiques à disposition pour proposer une séquence composée de différentes activités de restauration de la même figure à partir d'amorces différentes. Certaines restaurations nécessitaient le tracé des diagonales du quadrilatère cadre pour y repérer des alignements de segments et de points (par exemple, restaurer la figure modèle en donnant pour amorce, le quadrilatère-cadre et les pièces C et D sous forme de gabarits).
L'équipe restreinte décide aussi de mettre à disposition des enseignants des activités à mener avant la séquence préparée ensemble dans le but d'installer un certain contrat didactique. Or, dans plusieurs de ces activités, les élèves étaient amenés à tracer des diagonales, comme dans l'exemple ci-après (figure 9).

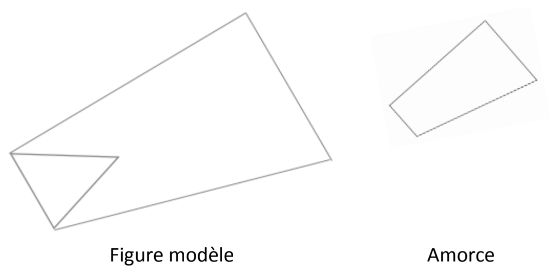


Figure 9

L'intention des formateurs était d'habituer les élèves à utiliser les diagonales comme support des côtés de triangles juste avant la situation de restauration de figure qui devait constituer l'essentiel de la séquence c'est-à-dire, le moment où les élèves devaient repérer des alignements sur la figure modèle grâce au tracé des diagonales du quadrilatère.

Suite à ce travail, nous avons réalisé des observations dans deux classes seulement. Néanmoins, l'analyse des vidéos recueillies a permis au groupe de prendre conscience que certaines activités insistaient trop sur le tracé de diagonales et les formateurs en ont conclu que « certaines activités préalables allaient trop loin » et « tuaient le problème » posé dans la séquence principale.
Situons à présent le bilan de cette première année par rapport aux deux niveaux de questionnement de l'IDD. Le groupe restreint a fait des choix : favoriser l'appropriation de la situation par les enseignants en les laissant jouer sur les variables didactiques et proposer un large éventail d'activités préalables. Ces choix ont eu un impact sur la manière dont nous avons investi les deux niveaux de questionnement ainsi que sur le lien entre eux.
Au niveau 1, le contrôle théorique s'est exercé *a minima* : une situation a été donnée avec des variables sur lesquelles jouer mais rien de plus.
Au niveau 2, une large part a été laissée à l'expérimentation et au travail des formateurs de terrain. C'était un choix de formation : il s'agissait de laisser les acteurs (formateurs et enseignants) expérimenter pour mieux s'approprier l'approche proposée.
Le lien entre les deux niveaux a lui aussi été impacté. En effet, il y a eu peu d'anticipation du

niveau 2 au niveau 1 et c'est le retour d'expérimentation qui a été privilégié.
Même si nous ne sommes pas allées au bout de l'expérimentation, nous avons appris des pratiques ordinaires et les EMF et CPC ont appris de l'approche développée par les chercheurs et de leurs propres pratiques. Nous avons aussi appris à travailler ensemble – ce qui est important – mais, pour l'année 1, nous avons pris un certain nombre de décisions.
Du côté du groupe restreint est apparue la nécessité de mieux organiser l'accompagnement des enseignants par les formateurs de terrain notamment en clarifiant le contrat passé avec eux : leur proposer davantage d'aide à la mise en œuvre mais en retour leur demander de s'engager à mettre en œuvre les situations proposées, à être éventuellement filmés, au moins observés et à participer au dispositif pendant deux ans.
En tant que chercheurs, nous avons aussi fait d'autres choix. Tout d'abord, nous avons décidé d'investir différemment les deux niveaux de questionnement, de renforcer le contrôle théorique du niveau 1 en proposant une situation davantage « clé en main », conçue par les chercheurs mais une situation suffisamment déstabilisante pour permettre aux enseignants d'entrer dans le questionnement souhaité (nous voulions leur donner une certaine sécurité par le côté clé en main tout en déstabilisant suffisamment leurs pratiques).
Ensuite, il nous fallait préciser notre méthodologie à travers un certain nombre de questions à mieux prendre en charge : quelle articulation penser entre le dispositif de travail et le dispositif de recherche ? Quelles sont nos hypothèses de travail ? Nos hypothèses de recherche ? Et quels cadres théoriques faisons-nous intervenir ?

Deuxième année de travail (année 1)

Précisions apportées à la méthodologie

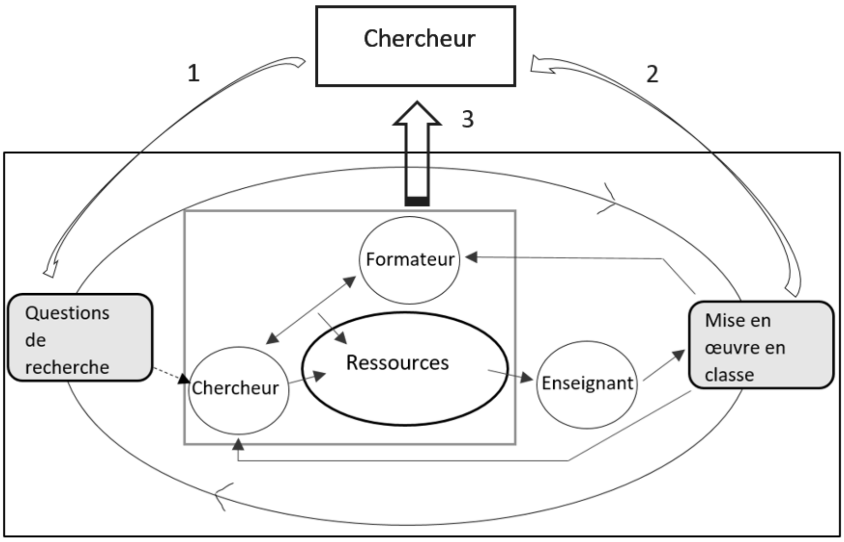


Figure 10

Nous avons clarifié notre méthodologie, en la pensant en termes d'espaces pour la recherche, avec un double positionnement du chercheur comme acteur du dispositif à l'intérieur de l'espace de travail et comme chercheur surplombant l'ensemble du dispositif (figure 10). Au cœur de cet espace de travail, nous retrouvons le groupe restreint, composé des chercheurs et des formateurs de terrain, qui pilote le dispositif et produit la ressource et le groupe élargi aux enseignants inscrits dans le stage de formation continue qui la met en œuvre et réagit à cette mise en œuvre.
Décrivons à présent plus précisément la chronologie induite par les modalités de travail.
A l'origine il y a des questions et des hypothèses de recherche identifiées par les chercheurs

en position surplombante. Elles concernent l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (hypothèses G) mais aussi les pratiques enseignantes et les possibilités d'enrichissement de ces pratiques (hypothèses P). Ces questions et hypothèses (représentées par la flèche 1**)** correspondent à des hypothèses de travail pour les chercheurs lorsqu'ils interagissent avec les autres acteurs au sein du dispositif de travail. En effet, c'est sur ces hypothèses que les chercheurs s'appuient pour concevoir une trame de situation qu'ils proposent au groupe restreint. Cette situation est mise au point à travers des échanges dans le groupe restreint représenté par le cadre rectangulaire intérieur de façon qu'elle puisse vivre dans l'enseignement ordinaire. Un document/ressource d'accompagnement de la situation est également rédigé dans le groupe restreint.
Les hypothèses de travail gardent la trace des hypothèses G et P qui se manifestent dans une double analyse : l'analyse *a priori* de la situation (hypothèses G) et l'analyse par anticipation de la tâche de l'enseignant (hypothèses P qui se traduisent par la formulation des besoins supposés des enseignants, des indications à leur donner etc.).
La situation ainsi conçue est transmise aux enseignants du groupe élargi via la formation et la mise à disposition d'une ressource (un document écrit). La mise en œuvre en classe, accompagnée par les formateurs, observée par les chercheurs et les formateurs, suivie d'un entretien, nourrit le travail du groupe restreint (cela correspond aux flèches internes). Une analyse *a posteriori* est menée dans le groupe restreint. Elle permet de préparer la deuxième séance de formation qui fait avec les enseignants le bilan de l'expérimentation en classe. Ces observations et analyses permettent aussi de mettre à l'épreuve les hypothèses de recherche et nourrissent ainsi le travail du chercheur en position surplombante (flèche 2).
De plus, à chaque étape, pendant l'action même et/ou après coup, le chercheur prend aussi des informations sur l'ensemble du dispositif de production de la ressource et de la formation et en observant comment les différents acteurs interagissent, ce qui est négocié entre eux (cela correspond à la flèche 3)[7].

Organisation du travail et choix effectués

Cette deuxième année de travail a débuté par une phase de préparation entre chercheurs puis entre chercheurs et formateurs du groupe restreint. Au cours de la première séance de formation continue nous avons présenté nos objectifs et donné un certain nombre d'arguments susceptibles de convaincre les enseignants de s'inscrire dans l'approche proposée. Nous les avons aussi accompagnés dans une analyse *a priori* d'une situation de restauration présentée plus loin et un premier document leur a été remis. L'accompagnement organisé par les formateurs (EMF et CPC) a permis d'aller dans les classes de tous les enseignants associés au projet, d'observer des séances et de recueillir des vidéos ainsi que des entretiens et notes sous forme de carnets de suivi. L'analyse de ces séances par les chercheurs, partagée ensuite au sein du groupe restreint, a permis de préparer la deuxième séance de formation qui a donné lieu à la rédaction d'un second document.
Partant du constat – appuyé sur des analyses précédentes (Leclercq & Mangiante-Orsola 2014) – que l'appropriation par les enseignants de situations issues de la recherche ne va pas de soi, tout particulièrement lorsque les propositions qui leur sont faites sont éloignées de leurs pratiques ordinaires, nous avions des choix importants à faire.
Dès le début de l'année, nous avons décidé de proposer une situation « déclenchante », c'est-à-dire susceptible d'amener les enseignants à faire évoluer leurs représentations à propos de l'enseignement de la géométrie et de ses enjeux, à travers d'une part l'analyse *a priori* menée lors de la séance de formation et d'autre part l'observation de leurs élèves. Nous avons

[7] Nous reviendrons dans la troisième partie sur les cadres théoriques qui guident la méthodologie mise en œuvre par le chercheur en position surplombante.

également choisi de faciliter la mise en œuvre de la situation, notamment à travers le déroulement en étapes qui fixe le jeu sur les variables didactiques. La marge de manœuvre porte principalement sur des routines de type 1, plutôt liées à l'installation et au respect d'attitudes de travail ou d'attitudes générales (Butlen, Masselot & Pezard, 2009).

Présentation de la situation de restauration

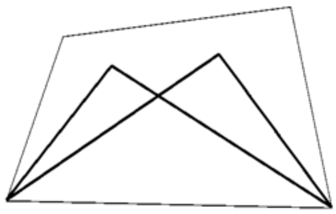


Figure 11

La situation de restauration évoquée porte sur une figure (figure 11) qui présente des alignements mais pas d'angle droit. Le déroulement de la situation prévoit quatre phases au cours desquelles il est demandé aux élèves de restaurer la figure modèle mais l'amorce donnée ainsi que les instruments mis à disposition diffèrent d'une phase à l'autre.

Phase 1 : Réaliser un assemblage par superposition / chevauchement puis tracer les contours des gabarits.

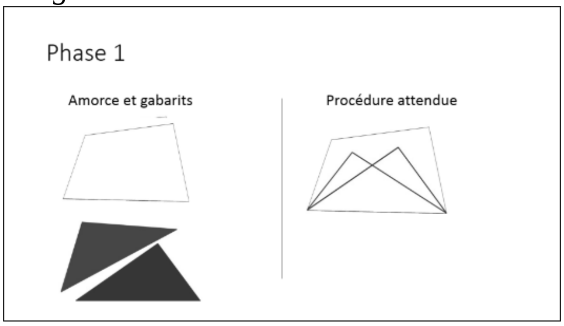


Figure 12

Au cours de cette première phase, les élèves ont à leur disposition les deux grands triangles sous forme de gabarits, ils doivent tout d'abord les positionner pour retrouver la figure modèle et ensuite organiser les tracés : placer un gabarit, tracer, placer l'autre gabarit, tracer. Ici, certains élèves peuvent avoir des difficultés à organiser la réalisation des tracés mais justement ces difficultés sont dues à la nécessité de se représenter mentalement des parties cachées par la superposition des gabarits et c'est précisément ce qui est visé ici.

Phase 2 : Commencer à prendre en compte certains alignements en utilisant le fait que certains côtés des petits triangles sont portés par une même droite.

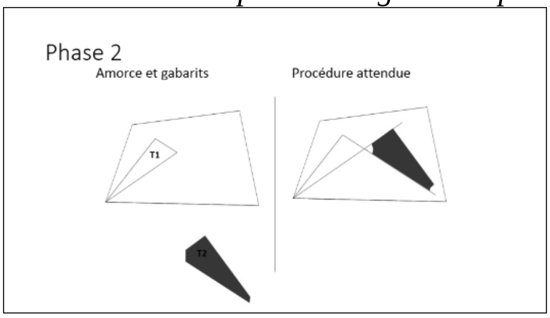


Figure 13

Dans cette deuxième phase, l'un des deux petits triangles est donné. Pour compléter la figure, les élèves doivent placer le gabarit grignoté du second petit triangle. Pour cela, ils doivent utiliser leur règle et prolonger les côtés du triangle T1. Or, ce n'est pas dans leurs habitudes de prolonger des traits au-delà de ce qui est nécessaire et de gommer ensuite "ce qui dépasse". De plus, lorsque les élèves placent le gabarit grignoté, ils doivent faire attention à ses deux côtés en même temps.

Cela ne peut pas être fait dans un seul mouvement, c'est comme lorsque les élèves doivent prêter attention aux deux côtés de l'équerre lorsqu'ils tracent une perpendiculaire. Soulignons le fait que dans cette deuxième étape, les élèves sont tenus de prolonger les côtés du triangle, mais rien ne les oblige à voir que ces côtés sont portés par les diagonales du quadrilatère.

Phase 3 : Prendre en compte les diagonales (alignement de segments et de points)

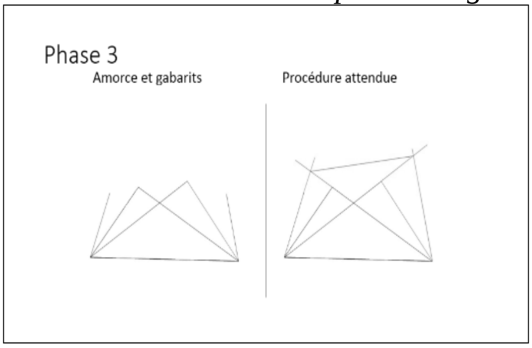


Figure 14

Il s'agit dans cette troisième phase de restaurer le quadrilatère à partir des deux triangles et du début des côtés du quadrilatère (les élèves doivent restaurer les deux sommets du haut). Signalons que cette étape est la plus importante dans la mesure où les élèves doivent prendre en compte les diagonales. Certains élèves peuvent avoir déjà remarqué cette propriété mais rien ne les y obligeait dans les étapes précédentes. La taille de l'amorce est réduite par rapport à la figure modèle pour empêcher les reports de longueur.

Phase 4 : Tracer les diagonales pour placer les gabarits (alignement de segments et de points)

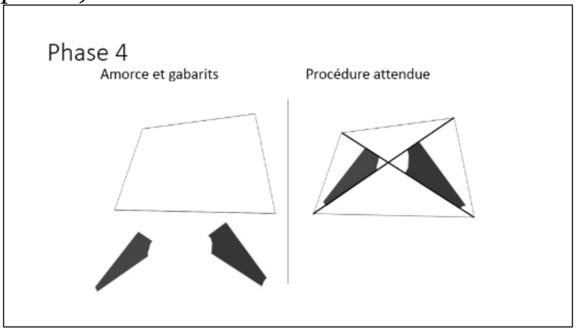


Figure 15

Cette dernière étape vise à réinvestir ce qui a été découvert par les élèves au cours des trois premières phases. Les élèves ont à leur disposition les gabarits grignotés des deux petits triangles et ils doivent en tracer les contours. Pour cela, ils doivent commencer par tracer les diagonales du quadrilatère pour pouvoir ensuite placer les gabarits et obtenir les côtés manquants.

Observations réalisées et bilan de l'année 1

Dans le document distribué aux participants à l'issue de la première séance de formation figuraient les différentes phases de cette situation, les procédures attendues, les difficultés spécifiques de chacune des phases mais aussi une rubrique « les mots pour le dire » afin de fournir aux enseignants une aide à l'institutionnalisation.

Nous avons analysé les modifications apportées par les enseignants au cours de la préparation des séances et de leur mise en œuvre. Nous avons relevé des modifications témoignant d'interprétations erronées montrant par exemple que certains enseignants n'avaient pas compris (ou avaient oublié) que le changement de taille du modèle dans la phase 3 permettait d'éviter le report de longueur. Mais, nous avons aussi relevé des modifications témoignant d'une réelle appropriation de la situation de la part des enseignants. Citons par exemple le choix d'ajouter un gabarit intrus obligeant les élèves à placer chaque gabarit sur la figure modèle pour identifier ceux à utiliser (figure 16) ou encore l'usage d'une ficelle pour rechercher des alignements (figure 17).

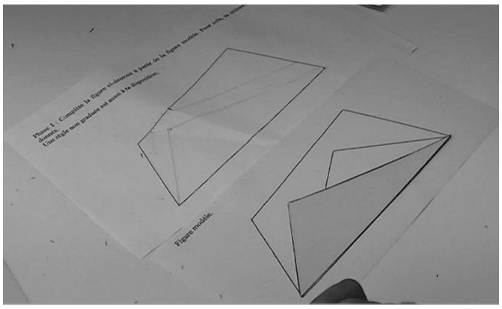


Figure 16

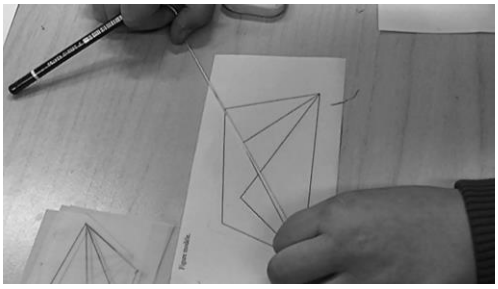


Figure 17

Suite à cette analyse *a posteriori*, nous avons organisé et mené la deuxième séance de formation continue. Nous avons demandé aux participants de prendre appui sur leurs observations pour compléter un tableau en trois colonnes en indiquant les procédures observées dans leurs classes, les difficultés rencontrées par les élèves et les aides apportées. La mise en commun de ce travail a débouché sur un document collectif (Annexe 1).

Comme à la fin de l'année 0, nous avons dressé le bilan de l'année écoulée dans l'équipe restreinte et aussi entre chercheurs dans le but non seulement de rendre compte des activités réalisées au sein du LéA auprès de l'IFE mais aussi pour fixer les orientations à donner à notre projet l'année suivante. Au cours de cette deuxième année de travail, nous avons appris sur l'utilisation de cette situation dans des classes ordinaires et la description qu'il serait pertinent d'en faire dans une ressource mais nous nous interrogeons encore à propos des indications à donner aux enseignants à propos de la dévolution (jusqu'où aller dans l'analyse collective de la figure modèle avant la phase de recherche ?), de la régulation (moyens d'étayage individuel, gestion de l'avancée du groupe), de l'institutionnalisation (indiquer les mots pour le dire dans la ressource ne suffit pas). Comment les aider dans la mise en œuvre de certains gestes professionnels ? Ne faudrait-il pas les aider à distinguer les moments d'institutionnalisation locale après chaque phase et l'institutionnalisation globale qui doit revenir sur les quatre phases de la situation ?

L'organisation à deux niveaux, entre groupe restreint et groupe élargi, semble satisfaisante et nous la poursuivons en 2015-2016 en veillant à prendre en compte les demandes émises par les enseignants. En effet, si la mise en œuvre de la situation proposée a permis aux enseignants de mieux comprendre l'approche développée par les chercheurs, la demande de penser une progression à l'année, en lien avec les programmes reste forte et nous conduit à élargir le travail à la recherche de repères pour une progression sur des notions des programmes scolaires : ces repères sont proposés sous forme de situations en accord avec notre approche de la géométrie et mettant en jeu les figures des programmes pour aider les enseignants à élaborer des séances pour leurs classes (avec accompagnement par les formateurs).

Du côté des chercheurs, les questions évoluent en conséquence : il s'agira d'interroger les possibilités d'intégration de ces repères dans les pratiques ordinaires (quelle est l'utilité de ces « outils » donnés aux enseignants ? Qu'est ce qui reste à la charge des enseignants ? Quel contrôle de cette appropriation par les enseignants ? Comment mieux cibler les « idées clés » de notre approche (à mettre en lien avec les nouveaux programmes pour plus de légitimité) ?

DISCUSSION

Le travail mené dans le cadre du LéA, nous a amenées à affiner notre méthodologie et à préciser le rôle de la ressource comme fin (objectif commun pour le groupe élargi) et moyen (objectifs différents pour chaque catégorie d'acteurs) ainsi que les hypothèses (G) et (P) mais des questions essentielles demeurent sur les moyens théoriques de contrôler les deux niveaux et le lien entre les deux. Dans cette troisième partie, nous revenons sur ces questions que nous commençons par préciser, en nous appuyant sur un premier bilan du LéA à mi-parcours.

Des questions à propos des deux niveaux et de leur lien

Avec quels outils tester la validité théorique des situations (niveau 1) ?

Nos hypothèses sur l'enseignement de la géométrie sont issues d'un questionnement épistémologique de la géométrie d'Euclide, d'hypothèses sur le fonctionnement cognitif lié à la visualisation des figures et d'observations par Marc Godin de procédures inattendues d'élèves de l'enseignement spécialisé dans les activités géométriques, notamment d'un détournement d'instruments comme des règles ou des équerres en carton. La théorie des situations nous a servi pour l'élaboration des situations et l'identification des variables didactiques. Leur mise en œuvre a été observée dans un petit nombre de classes mais elles ont souvent rencontré l'adhésion des enseignants à la fois parce qu'elles leur fournissaient des moyens d'aborder la géométrie par des résolutions de problèmes et qu'elles les aidaient à comprendre des difficultés de leurs élèves dans la manipulation des instruments classiques, en particulier de l'équerre. Cependant les observations de classe ont aussi montré les difficultés à mettre en place un contrat didactique adéquat et la difficulté pour les enseignants à faire le lien entre ces situations et l'enseignement des notions du programme. La validité des situations ne peut se tester que sur les apprentissages des élèves sur le long terme, et à condition que notre approche ait vraiment inspiré l'enseignement de la géométrie. Le travail dans le LéA a permis de davantage prendre en compte les besoins de l'enseignement ordinaire. Cependant, l'adaptabilité à l'enseignement ordinaire est testée dans un cadre encore assez protégé et très restreint : celui d'un stage de formation continue sur 2 ans en petit groupe (deux fois six heures plus un léger suivi dans les classes). Nous reviendrons sur nos hypothèses concernant l'enseignement de la géométrie et les moyens d'en extraire des éléments fondamentaux plus faciles à diffuser et à tester dans les classes.

Quelle dialectique entre les hypothèses de niveau 1 et de niveau 2 dans l'IDD ?

Nous avons pu voir que les niveaux 1 et 2 ne sont pas indépendants et qu'une dialectique doit s'exercer entre ces deux niveaux pour aboutir à la production d'une ressource utile pour l'apprentissage des élèves et utilisable efficacement par les enseignants. Cette dialectique s'exerce en particulier par le travail au sein du groupe restreint et par l'existence de boucles itératives entre la conception et la réalisation des séances sur le terrain. Faut-il intégrer, dans la définition même de l'IDD, une instance de conversion dans les deux sens entre recherche et enseignement ordinaire comme moyen de faire vivre une dialectique entre les deux niveaux de questionnement ?

Avec quels outils tester l'adaptabilité à l'enseignement ordinaire (niveau 2) ?

Plus généralement le niveau 1 concerne les hypothèses sur le contenu et l'organisation de milieux possibles pour l'apprentissage. Nos outils théoriques restent ceux de l'analyse épistémologique et cognitive, et de la théorie des situations didactiques. Mais pour la mise en œuvre de situations en classe, il doit y avoir compatibilité entre les milieux organisés et le contrat didactique. Or c'est l'analyse de niveau 2 qui nous renseigne sur cette compatibilité. Pour le niveau 2, nous articulons la théorie des situations avec la double approche qui nous permet de considérer l'enseignant du point de vue de son développement professionnel. Faut-il y ajouter d'autres éléments théoriques ? Comment les articuler ?

Nous allons à présent revenir sur ces questions.

Mieux caractériser notre approche de la géométrie (niveau 1)

A mi-parcours du LéA, nous identifions mieux les éléments fondamentaux sur lesquels nous devons travailler avec les enseignants en géométrie et la manière dont on peut les formuler en termes compréhensibles pour eux. Il ne suffit pas de proposer des situations complexes qui représentent le savoir géométrique qu'on veut faire acquérir aux élèves. Il faut identifier des briques élémentaires qui permettent de fabriquer de telles situations.
Un moyen de le faire dans notre cas est de considérer que reproduire des figures quelconques, c'est reporter des formes et des grandeurs. Il faut donc s'intéresser aux moyens de reporter des formes et des grandeurs (longueurs et angles). On peut commencer à le faire avec des instruments qui permettent de reporter sans les dissocier toutes les informations sur les figures, comme les gabarits et pochoirs ou le papier calque. Un des objectifs de l'enseignement de la géométrie est d'apprendre à dissocier les différentes informations qui caractérisent une figure. Les instruments de géométrie usuels : règle, équerre, compas permettent de tracer des lignes (droites et cercles) et de reporter des angles droits. On ne peut pas considérer d'emblée le compas comme un moyen de reporter des longueurs, c'est pourquoi nous ajoutons un instrument de report de longueur qui permet de la matérialiser. Les angles, autres que les angles droits, peuvent se reporter avec un papier calque ou un gabarit que l'on fabrique en pliant du papier. Le compas comme instrument de report de longueur ou d'angle ne vient que dans un deuxième temps, quand s'amorce la vision points des figures.
Il faut que les enseignants puissent identifier ces briques élémentaires concernant les reports de formes et de grandeurs dans des situations plus complexes. Les propriétés géométriques vont permettre de les formaliser progressivement.
Un autre point important est d'identifier avec les enseignants des savoirs généralement ignorés par l'enseignement et qui nous paraissent essentiels pour que les savoirs de G2 puissent s'appuyer sur ceux de G1 en dépassant les malentendus identifiés dans de nombreuses recherches. Par exemple :
- Un segment est porté par une droite qui peut se prolonger autant qu'on veut de chaque côté.
- Pour définir un segment, il faut deux points ou un point et une droite support sur laquelle on reporte une longueur ; reporter une longueur à partir d'un point seul donne un cercle.
- Un point s'obtient par l'intersection de deux lignes.

Les situations que nous proposons permettent de donner une place dans l'enseignement à ces savoirs ignorés.

Place d'une instance de conversion dans la démarche d'IDD (dialectique niveaux 1 et 2)

Il nous est apparu que le groupe restreint et la présence dans ce groupe de maîtres formateurs qui sont à la fois enseignants et formateurs jouait un rôle essentiel qui devait être identifié en tant que tel dans la démarche d'IDD. Le fait de rédiger en commun une ressource pour les enseignants est aussi un élément important de la dialectique parce qu'il donne un but commun à tous les acteurs du groupe restreint et même à ceux du groupe élargi.
C'est dans le groupe restreint que peut s'exercer concrètement la dialectique entre les deux niveaux de questionnement de l'IDD. L'existence de ce groupe crée un lieu où les hypothèses de recherche se traduisent en hypothèses de travail qui sont amenées à évoluer dans le travail commun, ce qui amène ensuite à préciser ou modifier les hypothèses de recherche.
Une alternance de modalités de travail diverses dans le groupe laissant plus ou moins d'initiative aux formateurs de terrain permet de mettre l'accent, suivant les besoins, soit sur l'étude de la transposition didactique et des situations soit sur l'étude des pratiques ordinaires et de leurs possibilités d'évolution.

Un des objets du travail de l'année prochaine sera sans doute de préciser mieux ce que nous entendons par ressource et quel rôle nous lui faisons jouer. D'abord, il s'agit d'une ressource pour les enseignants qui contient des fiches ressources pour les élèves accompagnées d'éléments d'analyse à propos de leurs besoins. En effet, c'est souvent par le biais des difficultés constatées chez les élèves qu'on enclenche la réflexion des enseignants.
L'organisation de la ressource est un point crucial parce que nous savons que les enseignants ne sont pas prêts à lire de longs textes avant de rencontrer une activité qu'ils peuvent proposer à leurs élèves. Elle doit donc comporter des activités pour les élèves qui sont presque clés en main mais, avec néanmoins des repères pour les adapter sans en perdre l'intérêt. De plus, les situations proposées doivent s'intégrer dans une progression et non rester en marge du reste de l'enseignement de la géométrie. Une piste que nous explorons cette année est de rédiger des progressions théoriques (des repères dans les savoirs) qui mettent en œuvre les hypothèses G et P et couvrent toute l'école élémentaire sur un sujet familier et d'indiquer des croisements entre ces progressions : nous avons commencé avec une progression englobant le carré, le rectangle et le triangle rectangle.
La ressource doit comporter ce qui relève du contenu à apprendre par les élèves, y compris des formulations pour les élèves mais aussi des connaissances complémentaires sur le contenu pour l'enseignant et des questions de gestion de la progression des connaissances des élèves en classe. Nous ne pouvons pas nous contenter de la description de la situation, des procédures attendues des élèves et de ce qu'il y a à retenir. Il faut indiquer jusqu'où on peut aller dans l'explicitation de la consigne, quels types d'aide on peut apporter et dans quelles conditions. C'est en effet un des points de difficulté que nous avons repérés dans nos observations. Plusieurs niveaux de ressources sont ainsi à envisager.
Il faut de plus que la ressource soit assez proche des pratiques ordinaires pour que les enseignants la reconnaissent comme utilisable et s'en servent. Il faut aussi qu'elle leur permette d'acquérir des connaissances nouvelles sur le contenu lui-même et sur sa didactique. Il nous semble que ces conditions sont assez proches de ce que Adler (2010) appelle la transparence de la ressource, mais dans le cas d'une ressource pour les élèves.
Ainsi, la nécessité de l'instance de conversion semble découler de la volonté de prendre en compte les deux sens des rapports entre recherche et enseignement : diffuser des résultats de recherche via une ingénierie didactique et répondre aux besoins de l'enseignement. C'est le lieu où s'organise une dialectique entre les niveaux 1 et 2 de l'IDD et c'est aussi le moyen d'élaborer une ressource utile du point de vue des chercheurs (répondant aux besoins qu'ils ont identifiés) et utilisable du point de vue des enseignants (répondant aux besoins ressentis).

Quels outils théoriques utiliser pour tester l'adaptabilité des situations ? (niveau 2)

Pour recueillir des éléments de réponses à propos de l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, le chercheur (en position surplombante) s'appuie d'une part sur le travail mené lors des séances en circonscription (groupe restreint et groupe élargi), ce qui correspond à la flèche 3, et d'autre part sur les expérimentations menées dans les classes, ce qui correspond à la flèche 2[8]. Mais, quels outils théoriques utiliser pour tester cette adaptabilité ?

Cerner le « point de vue » des enseignants

Dans le cadre de notre dispositif de travail, la prise en compte du point de vue des enseignants est bien évidemment facilitée par les EMF et CPC qui ont une meilleure connaissance du

[8] Le chercheur recueille d'autres types de données (certaines concernent le niveau 1) mais nous nous limitons ici aux questions relevant du niveau 2.

terrain que les chercheurs (ne serait-ce que parce qu'ils y ont plus facilement accès). L'instance de conversion facilite donc la prise en compte du point de vue des enseignants par les chercheurs (et du point de vue des chercheurs par les enseignants). Dans l'état actuel de notre recherche, nous cherchons à mieux outiller nos analyses et dans ce but nous questionnons certains aspects de notre méthodologie en les mettant en parallèle avec d'autres notions issues d'autres cadres théoriques.

La notion de monde, telle qu'elle est développée dans le travail de Beguin qui, lui-même, emprunte ce concept à Prieto[9], vise justement à conceptualiser la notion de « point de vue » (Beguin & Cerf, 2004 ; Beguin, 2005). Il ne s'agit pas ici d'un point de vue purement subjectif comme dans l'expression « à chacun son point de vue » pour signifier « à chacun son opinion, son avis » mais d'un point de vue situé c'est-à-dire défini par rapport au métier exercé ou pour le dire autrement défini par rapport à « d'où le sujet voit ». Ainsi, face à un même objet (par exemple une situation de travail) coexistent différents systèmes de référence, différents « points de vue », différents mondes qui sont autant d'*arrière-plans à partir desquels chacun se saisit d'une réalité tangible*. Cet arrière-plan est construit par et pour l'action par le sujet ce qui fait dire à Beguin que ce monde est construit et orienté. Beguin utilise cette notion pour étudier l'activité pour la conception de situation de travail lorsque celle-ci est considérée comme un processus développemental (c'est-à-dire un processus où caractéristiques des situations et activités de travail évoluent dialectiquement). La notion de monde permet donc de conceptualiser le « point de vue des opérateurs » et le « point de vue des concepteurs » et d'étudier ce qui se joue à l'interface entre les « points de vue » en présence.

Le travail de conception est alors vu comme la construction d'un monde commun, lieu d'échanges et d'apprentissages mutuels au sein duquel de nouvelles propositions émergent peu à peu. Il est important de noter que la construction de ce monde commun ne va pas de soi, il y a des conflits, des désaccords mais c'est *« lorsqu'on s'éloigne d'un monde qu'on prend conscience de son existence »* (Beguin, 2005). Le résultat du travail des uns n'est jamais définitif, ce n'est qu'une hypothèse de travail à confirmer dans le monde des autres. Sans aller jusqu'à une intégration de cette notion dans notre méthodologie de recherche (le travail d'articulation entre les cadres théoriques reste à faire), nous souhaitons souligner quelques similitudes.

Dans le travail de conception de ressources mené au sein du LéA, nous cherchons à prendre en compte à la fois le « point de vue des chercheurs » (finalisé par la production de savoirs scientifiques) et « celui des enseignants » (finalisé par l'action auprès des élèves). Dans notre recherche, nous étudions ce qui se joue dans l'espace interinstitutionnel que nous avons créé afin de mieux comprendre ce qui peut faire obstacle à l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire ou au contraire ce qui peut la favoriser. Ce travail de conception est donc bien un lieu d'échanges et d'apprentissages mutuels. L'évolution de notre projet témoigne que la construction d'une ressource commune ne va pas de soi (il y a des débats, des désaccords, des besoins à prendre en compte) : le résultat du travail des uns n'est jamais définitif, ce n'est qu'une hypothèse de travail à confirmer par les autres.

Ce sont ces moments de confrontation (moments où le travail des uns n'est pas validé dans le monde des autres) et leur dynamique (comment évoluent ces mises en tension et comment les différents protagonistes parviennent ou non à les dépasser) qui peuvent permettre au chercheur en position surplombante de cerner ce qui est prioritaire pour les chercheurs, mais surtout ce qui est prioritaire pour les enseignants (flèche 3 sur la figure 10).

[9] Prieto, L. J. (1975). *Pertinence et pratique*. *Essai de sémiologie*. Paris: Editions de Minuit.

Cerner la contribution de l'enseignant pour mieux réinterroger la situation et la ressource

Interrogeons-nous à présent sur la méthodologie à mettre en place par le chercheur en position surplombante pour traiter les données recueillies lors des expérimentations menées en classe (flèche 2 sur la figure 10). A ce stade-là du travail, ce dernier cherche à identifier ce qui doit être modifié dans la situation telle qu'elle a été conçue pour être plus adaptée aux pratiques. Mais, pour cela, il doit pouvoir identifier parmi les écarts constatés entre la situation proposée et sa mise en œuvre en classe, ceux qui sont révélateurs d'un manque d'adaptabilité et qui doivent déboucher sur des modifications à apporter à la situation et à la ressource présentant cette situation.
L'écart entre le travail prescrit et le travail réel est un sujet d'étude classique des chercheurs en analyse du travail qui opèrent comme l'indiquent Ombredane et Faverge (1955) une distinction fondamentale entre tâche et activité, c'est-à-dire entre « ce qu'il y a à faire » et « ce que l'on fait ». Selon ces chercheurs, cet écart est irréductible, y compris dans les situations où le travail est présenté comme une « simple » exécution, voire même lorsque la prescription d'une procédure est faite sous forme par exemple de fiche technique, même lorsque cette fiche technique prétend rendre compte de la totalité de ce qui est à faire. Lorsque la tâche est difficilement explicitable (et c'est particulièrement le cas pour les tâches enseignantes qui sont complexes) la contribution de l'agent est importante.
Dans le cadre de notre recherche, lorsque nous analysons les séances mises en œuvre, nous avons besoin de cerner la contribution de l'enseignant pour mieux distinguer ce qui est dû à la situation elle-même et ce qui dépend de l'enseignant (c'est-à-dire, ses propres choix, ses connaissances, son parcours…).
Le modèle d'analyse présenté ici est un modèle de l'activité de l'enseignant (Mangiante-Orsola, 2012) adapté d'un schéma de Leplat (1997) qui analyse l'activité de l'agent comme une suite de tâches. Nous y distinguons trois niveaux ou positions pour le maître : la représentation de la tâche (tout ce que l'enseignant met en œuvre pour se représenter tout ce qu'il pense qu'on attend de lui), la redéfinition de la tâche (tout ce que l'enseignant met en œuvre pour redéfinir la tâche représentée en fonction de ses propres finalités, ce qu'il pense être capable de faire) et la réalisation de la tâche (tout ce que l'enseignant met en œuvre pour réaliser la tâche redéfinie).

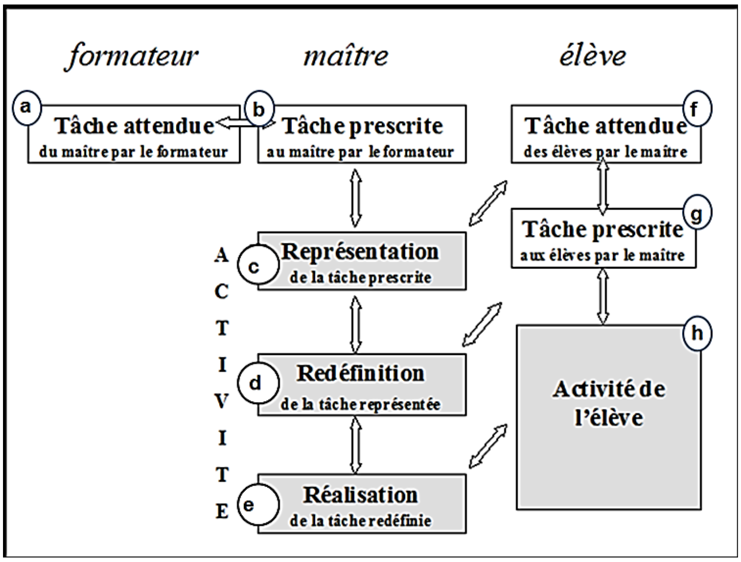


Figure 18

Par exemple, certains enseignants, malgré l'accompagnement mis en place, peuvent ne pas percevoir les enjeux de la situation et le rôle qu'ils sont censés jouer (écart entre la tâche

prescrite, c'est-à-dire, la tâche qui leur a été prescrite via la formation continue et la ressource et la tâche représentée, c'est-à-dire, ce qu'ils pensent que nous attendons de leur part. L'écart est alors au niveau de la représentation de la tâche. Certains enseignants peuvent avoir une idée assez claire de ce qu'on attend d'eux, mais faire d'autres choix, qui peuvent d'ailleurs être tout à fait pertinents, comme par exemple travailler avec le Tableau Blanc Interactif parce que cela leur semble plus pratique mais ils créent un écart au niveau de la redéfinition de la tâche parce que le TBI induit d'autres façons de manipuler les instruments (virtuels)… Ici, l'enseignant redéfinit la tâche représentée en fonction d'autres finalités (qui lui sont propres). Les écarts peuvent aussi survenir au moment de la réalisation de la tâche. Ils sont dus par exemple à la manière dont les enseignants vont réguler, vont gérer les imprévus, etc.
Ainsi, l'analyse de la contribution de l'enseignant doit permettre de mieux cerner les éléments de la situation et/ou de la ressource qu'il convient de revisiter aux niveaux 1 ou 2.

CONCLUSION

Au cours de la troisième et dernière année du LéA, nous envisageons de tester avec d'autres enseignants les documents produits et d'apporter les ajustements nécessaires à la rédaction d'une ressource diffusable auprès d'enseignants n'ayant pas suivi de formation spécifique. Ce sera aussi l'occasion d'affiner nos avancées théoriques et méthodologiques. Cependant, le travail de conception n'est jamais véritablement achevé : à chaque bilan, les propositions des uns peuvent constituer un nouveau point de départ qui oriente le travail des autres vers de nouveaux choix et de nouvelles hypothèses de travail à tester.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADLER J. (2010) La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques.* Lyon : INRP et Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

BEGUIN P. (2005) Concevoir pour les genèses professionnelles. In Rabardel P., Pastré P. (Eds.) *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement*. Toulouse : Octarès.

BEGUIN P., CERF M. (2004) Formes et enjeux de l'analyse de l'activité pour la conception des systèmes de travail. *Activités*, 1(1), 54-71.

BESSOT A. (2011) L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In C. Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29-56). Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (1983) Etude des questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique.* LSD, IMAG. Université Fourier. Grenoble.

BROUSSEAU G. (2006) Mathematics, Didactical engineering and observation in Novotná J., Moraová H., Krátká M., Stehlíková N. (Eds) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1.* (pp. 3-18). Prague: PME.

BROUSSEAU G. (2013) Introduction à l'Ingénierie Didactique. guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-à-lingénierie-didactique3.pdf

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (2006) *L'ingénierie didactique en mathématiques.* Séminaire du DAEST, Bordeaux.

BUTLEN D., MASSELOT P., PEZARD M. (2009) Gestes et routines professionnels : un enjeu pour analyser et intervenir sur les pratiques enseignantes. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial. HTTP://WWW.FSE.ULAVAL.CA/LDEBLOIS/PDF/BUTLEN.PDF, consulté le 18 novembre 2015.

CHEVALLARD Y. (2005) La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*, pp. 239-263. Paris : APMEP.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

GUEUDET G, TROUCHE L. (2010) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques.* Rennes : PUR et INRP.

HOUDEMENT C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM* 67, 69-84.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11, 175-195.

LECLERCQ R., MANGIANTE-ORSOLA C. (2014) Étude d'un dispositif articulant production de ressources et formation continue en géométrie : quels effets sur les pratiques des enseignants ? *Actes du XLème colloque de la COPIRELEM*. Nantes

LEPLAT J. (1997) *Regards sur l'activité en situation de travail. Contribution à la psychologie ergonomique*. Paris : PUF.

MANGIANTE-ORSOLA C. (2012) Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 32(3), 289-331.

MANGIANTE-ORSOLA C., PERRIN-GLORIAN M.J. (2016) Elaboration de ressources pour la classe, interface entre recherche et enseignement ordinaire. In Chopin M.P., Cohen-Azria C., Orange-Ravachol D. (Eds.) *Questionner l'espace. Les méthodes de recherche en didactiques.* (pp. 79-94) Lille : Presses Universitaires du Septentrion.

OMBREDANE A., FAVERGE J-M. (1955) *L'analyse du travail*. Paris : PUF.

PERRIN-GLORIAN M.J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La pensée sauvage.

PERRIN-GLORIAN M.J., GODIN M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école* 222, 26-36.

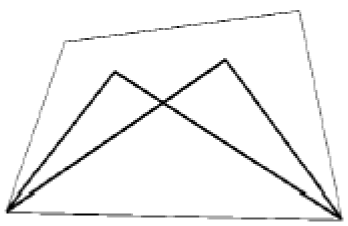
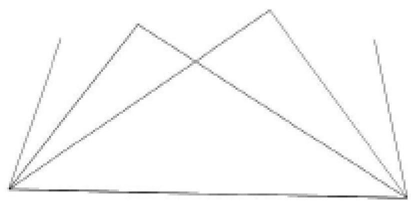
PERRIN-GLORIAN M.J., GODIN M. (en cours de publication) Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège.

PETITFOUR E. (2015) *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de l'Université Paris Diderot.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

ANNEXE 1

Phase 3

Figure modèle	Amorce et instruments
	

Variables didactiques :

Modèle à la même taille ① ou non ②

Modèle sur la même feuille ③ ou séparé④

Procédures observées	Difficultés rencontrées	Aides / adaptations apportées	Mots pour le dire
● Seuls les deux côtés latéraux sont prolongés. Le côté manquant de la figure est tracé après : - Estimation (plus ou moins précise) - Mesure par rapport à la taille du modèle - Réajustement par rapport à ce qui a été observé lors de la phase de vérification avec le calque - Superposition de l'amorce avec le modèle ● Prolongement des deux côtés latéraux, puis tracé du quatrième côté en s'appuyant sur la perception, puis prolongement des côtés des triangles et réajustement. ● Procédure attendue : perception des alignements (diagonales) et des sommets à l'intersection des diagonales et des côtés latéraux prolongés.	L'absence de gabarit n'incite pas les élèves à repartir sur la figure-modèle. Les élèves se contentent de procédures hasardeuses Le fait que les triangles constituent des lignes fermées n'incite pas les élèves à prolonger les côtés. Les élèves ne savent pas ce qu'ils doivent chercher. Il faut prolonger des lignes pour trouver des points. Il faut envisager une intersection de droites pour un point. Ce point est vu comme un sommet et non comme l'intersection de deux droites. Ces actions sont à faire dans un ordre précis.	→ Etayage → Utilisation de la ficelle pour repérer des alignements → Rappel du contrat didactique et notamment qu'on ne peut pas se fier qu'à la perception → Etayage pour clarifier ce qu'on cherche : les deux points (activité intermédiaire autorisant les reports de longueur ?)	→ « On ne peut pas faire confiance à nos yeux. L'œil n'est pas un outil géométrique. » → Deux points sont nécessaires pour déterminer / tracer une droite. → Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux droites. → Les côtés des triangles sont portés par ces deux droites.

INSCRIPTION DU RECIT DANS LE MILIEU EN RESOLUTION DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES : PROPOSITION ET MISE A L'EPREUVE D'UN MODELE D'INTERACTION DES PROCESSUS DE NARRATION ET DE RAISONNEMENT DANS UNE ACTIVITE DE RESOLUTION DE PROBLEMES

Marianne **Moulin**

EA 4148 S2HEP (Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques)
EA 2462 Laboratoire de Mathématiques de Lens
marianne.moulin@cue-lillenorddefrance.fr

Résumé
Notre travail vise à explorer la pertinence du Récit en tant que mode de pensée et support potentiel à la construction de raisonnement. Ainsi, dans notre thèse, nous nous sommes attachés à caractériser le rôle du Récit dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes en mettant en relation les processus inhérents à cette activité et les fonctions du Récit : structuration, problématisation, explication. Nous avons en particulier caractérisé deux espaces problèmes en interrelation : *L'espace problème du contenu* (relatif au Problème de Mathématiques) et *l'espace problème rhétorique* (relatif au Récit). Notre travail théorique et expérimental nous a permis de déterminer les conditions nécessaires à une inscription du Récit dans le milieu didactique permettant d'envisager une co-construction entre récit et raisonnement. La situation que nous avons proposée (cycle 3) a amené les élèves à produire différents types de récits pour résoudre des problèmes numériques. Nos résultats mettent en évidence que le Récit enrichit le milieu didactique en particulier le *registre empirique* et le *registre des nécessités* et permet à l'élève de circuler entre les différents niveaux structurels du milieu didactique (*milieu matériel, milieu objectif, milieu de référence*). C'est en produisant différents types de récits que les élèves, tout en prenant en charge les contraintes mathématiques de la situation, s'affranchissent du monde sensible et s'engagent dans une véritable activité de preuve mathématique (production d'exemples, de contre-exemples, de conjectures, d'argumentations, etc.).

Mots clés
Récit, Fonctions du récit, Raisonnement, Langage, Milieu Didactique, Jeu

INTRODUCTION

Le travail de thèse[1] présenté au séminaire national de janvier 2016 et dans ce texte a été conduit sous la direction de M. Eric Triquet et de Mme Virginie Deloustal-Jorrand au sein du laboratoire S2HEP. Il a été soutenu en juillet 2014 à l'Université Claude Bernard Lyon 1

[1] Moulin, M. (2014) *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement,* Thèse de doctorat disponible en ligne, Université Claude Bernard Lyon 1, 328p, http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01066443.

(Moulin, 2014). Nous y avons proposé une approche par le Récit qui se fonde sur les travaux de Bruner (2003, 2008) mettant en évidence la tendance naturelle de l'Humain pour le Récit ainsi que le rôle de ce dernier dans la construction des connaissances :

> Tout indique (…) que la manière la plus naturelle et la plus précoce dont nous organisons nos expériences prend précisément une forme narrative (Bruner, 2008, p. 151).

Depuis 2007, ce type d'approche narrative s'est développé au sein du laboratoire S2HEP en Sciences Expérimentales avec pour objectif de caractériser les fonctions du Récit dans les apprentissages scientifiques. Notre travail de thèse visait à étendre cette approche aux mathématiques et plus précisément à en caractériser les fonctions dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes. En nous appuyant sur les travaux menés au S2HEP ainsi que sur les perspectives ouvertes par notre mémoire de Master (Moulin, 2010), nous avons fait le postulat initial que l'acte de construction et de production d'un récit permet à l'élève, sous certaines conditions, la prise en charge ou la mobilisation de connaissances, la construction de nouvelles connaissances ainsi que la (re)structuration des connaissances anciennes et nouvelles. Ce postulat a amené un choix épistémologique particulier dans notre approche : Nous intéresser au Récit non pas en tant qu' « objet matériel » c'est à dire un texte déjà construit (respectant des caractéristiques de structure et de forme singulières) qu'il est possible de donner à étudier à des élèves, mais en nous intéressant au Récit en tant que « mode de pensée » dans son acte de construction. Comme le souligne Bruner, « il est [en effet] possible de distinguer avec précision ce qui appartient au mode de pensée narratif de ce qui est texte ou discours narratif » (Bruner, 2008, p. 166). Avec cette distinction nous envisageons l'inscription du Récit dans le milieu didactique comme un outil permettant aux élèves de mobiliser, dans l'élaboration de leur raisonnement, des processus heuristiques et structurants inhérents à la construction d'un récit. Confronté à une *situation problématique,* c'est à dire un problème de mathématiques ou toute autre situation conduisant à mobiliser des connaissances mathématiques (pour répondre à une question ou produire une explication), l'élève peut s'engager, ou être amené à s'engager, dans la production d'un récit. Nous faisons l'hypothèse que cette production de récit (qu'elle soit naturelle ou imposée) dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes, peut participer à la production du raisonnement, à sa structuration et sa justification.

Dans ce texte, nous traitons tout d'abord les aspects théoriques de cette hypothèse en proposant une modélisation des objets « Problème » et « Récit » qui nous permet d'anticiper sur l'action potentielle du Récit sur le milieu didactique (Brousseau, 1990). En nous appuyant sur les travaux de Scardamalia & Bereiter (1987, 1998), nous caractérisons un « espace de transfert de processus » entre deux activités a priori différentes : la construction d'un récit et la résolution d'un problème. Nous mettons ainsi en évidence la possibilité d'inscrire et de construire un raisonnement dans un espace de travail qui soit à la fois mathématique et rhétorique et la possibilité d'une interaction productive entre les deux activités voire une co-construction entre récit et raisonnement. Dans une seconde partie, nous présentons la mise à l'épreuve expérimentale de modèle en présentant quelques résultats significatifs de l'ingénierie didactique développé dans notre thèse. Nous analysons dans cette même partie les conditions et enjeux d'une rencontre entre Récit et Problème, construction de récit et résolution de problème.

TRAVAIL THEORIQUE : MODELISATION DES INTERACTIONS ENTRE CONSTRUCTION DE RECIT ET RESOLUTION DE PROBLEMES

Pour introduire cette partie théorique, nous proposons une analyse du discours d'un élève de cycle 3 pendant la correction collective d'un travail de résolution de problèmes (Enoncé :

figure 1 ; Réponse de l'élève : Figure 2). Le discours de l'élève est proposé dans le tableau 1.

Énoncé	Règles du jeu
Laura joue aux toupies. Pendant le début de la partie, elle gagne 5 points. En tout elle a gagné 3 points. Que s'est-il passé pendant la fin de la partie ?	- 1 pour le joueur qui lance sa toupie en dehors du stadium - 3 pour le joueur qui touche le stadium durant la manche + 3 pour le joueur éjecte la toupie de son adversaire + 2 pour le joueur qui coince son adversaire en zone de pénalité + 1 pour le joueur dont la toupie tourne plus longtemps que celle de son adversaire tout en restant dans le stadium

Figure 1 : *Énoncé du problème*

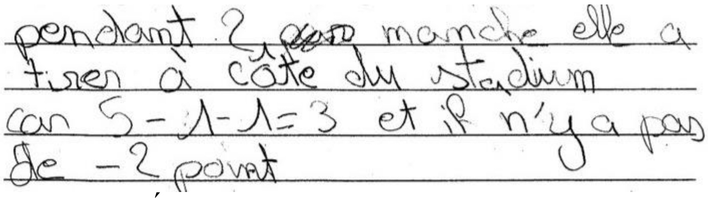

pendant 2 ~~pour~~ manche elle a tiren à côte du stadium car 5 - 1 - 1 = 3 et il n'y a pas de -2 point

Figure 2 : *Énoncé du problème et Réponse de l'élève*

1	Bah au début, moi je pensais que ça allait être en une manche, que ça allait être en fait … puisque en tout on disait qu'elle [gagnait] trois points.
2	Puisque elle en avait cinq au début. Et ensuite elle en avait trois, elle perd deux points donc.
3	Et puisque y a pas dans la règle moins deux points y a que un ou moins trois (…) Donc ensuite moi j'ai dit qu'il fallait faire en deux manches,
4	deux fois en tirant à coté du stadium comme ça, ça fait moins deux ».

Tableau 1 : *Transcription du discours de l'élève*

Le raisonnement décrit ici débute par une réflexion centrée sur des aspects relatifs au récit (Tableau 1 - Ligne 1) : l'énoncé « en tout elle a gagné 3 points » suggère à l'élève une fin de partie en une étape. En conservant cette idée d'une étape unique, l'élève s'engage ensuite au calcul de la valeur de la transformation (Ligne 2). Il s'éloigne ainsi du contexte de la situation et du récit pour s'engager dans un travail mathématique et déterminer la transformation en jeu. Il revient ensuite au récit (Ligne 3) en s'attachant à déterminer les évènements permettant cette perte effective de deux points et se rend compte qu'il n'est pas possible de la réaliser en une seule étape. Ce travail qui ne relève pas directement des mathématiques et qui met en jeu uniquement des événements relatifs au récit amène l'élève à modifier son idée initiale et d'envisager deux manches pour la fin de la partie. Enfin (Ligne 4), il réinvestit le domaine mathématique pour valider « comme ça, ça fait moins deux » et conclure.

Avec cet exemple nous voulions mettre en évidence la circulation de l'élève entre deux espaces de travail distincts pour résoudre le problème[2]:

- un espace relatif aux savoirs mathématiques, appelé *espace problème du contenu* ;
- un espace relatif aux évènements du récit, appelé *espace problème rhétorique*.

Ces allers-retours (entre l'espace du contenu et l'espace rhétorique) conduisent à une circulation de connaissances d'un espace à l'autre. Par conséquent, une connaissance mathématique relative à l'espace du contenu, peut-être mobilisée, voire transformée sous certaines conditions, dans l'espace rhétorique (et inversement). Les travaux de Scardamalia et Bereiter (1998), sur lesquels nous nous sommes appuyés pour construire notre modèle théorique, proposent une modélisation de ces transferts nommés de processus de *mobilisation* et de *transformation des connaissances.*

[2] Dans ce texte, l'expression *espace problème (rhétorique ou de contenu)* écrite en italique désigne l'espace problème tel qu'il est défini dans les travaux de Scardamalia & Bereiter (1998). Le mot Problème (avec une majuscule désignera l'objet conceptuel (théorique) en symétrique du mot Récit. Le mot problème (sans majuscule) désignera un problème particulier ou bien fera référence au sens commun du mot problème.

Modèle de transformation des connaissances (Scardamalia & Bereiter, 1998)

Les travaux de Scardamalia et Bereiter (1987, 1998) analysent les processus mis en place par des rédacteurs, experts et non experts, dans le cadre de la rédaction d'un texte. En observant les pratiques des rédacteurs, les deux auteurs ont caractérisé deux espaces de travail : *L'espace problème rhétorique*, relatif au texte en cours de rédaction, et l'*espace problème du contenu* relatif au domaine de connaissances en jeu.

> [La] caractéristique principale est l'existence de deux *espaces-problèmes* interconnectés, un espace qui concerne les problèmes de la connaissance du domaine (l'espace du contenu) et l'autre (l'espace rhétorique) concernant les problèmes relatifs au texte en cours de rédaction (Scardamalia & Bereiter, 1998, p. 31).

Les analyses menées par les auteurs montrent une interaction différente entre ces deux espaces qui est fonction du niveau d'expertise du rédacteur. Dans le cas d'un rédacteur non expert, les connaissances relatives au contenu sont simplement *mobilisées* pour être exprimées dans le texte (Modèle *d'expression des connaissances*, figure 3). Dans le cadre d'un fonctionnement expert, les processus de rédaction induisent une transformation des connaissances dans les deux espaces (Modèle de *transformation des connaissances*, figure 4).

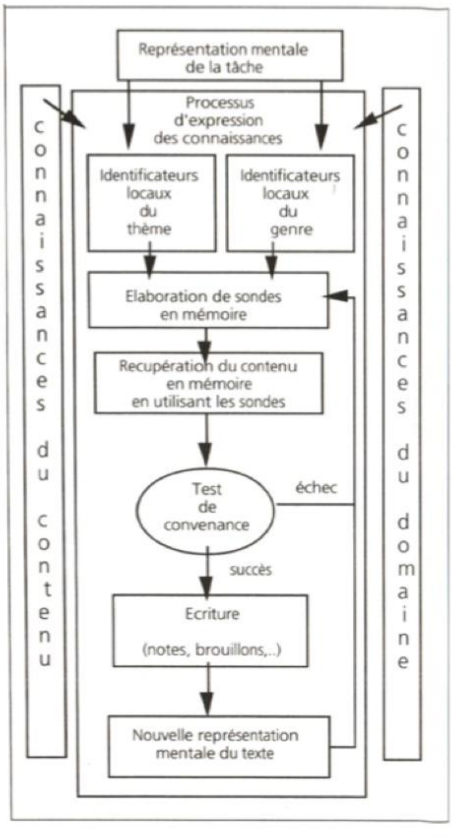


Figure 3 : *Modèle d'expression des connaissances (Scardamalia & Bereiter, 1998)*

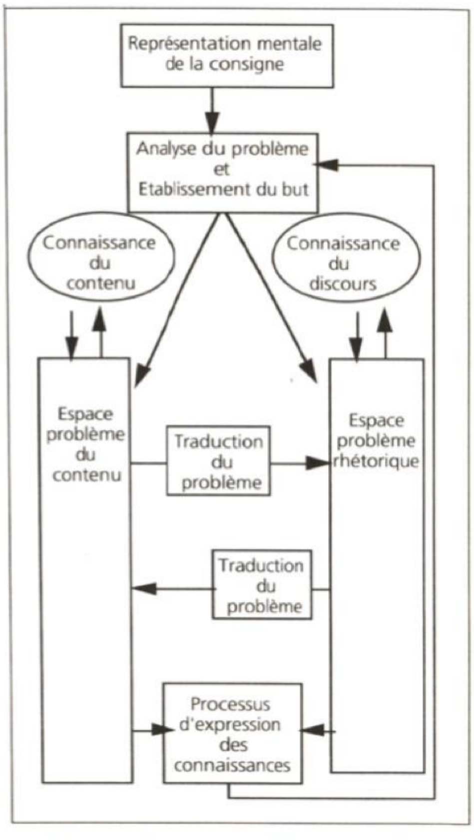


Figure 4 : *Modèle de transformation des connaissances (Scardamalia & Bereiter, 1998)*

Plus concrètement, tout problème local de l'un des deux *espaces problèmes* peut se transférer (moyennant transformation) à l'autre espace et y être résolu. Les résultats obtenus (grâce aux processus cognitifs et autres mis en œuvre pour la résolution) peuvent être transférés à nouveau vers *l'espace problème* initial (moyennant à nouveau une éventuelle transformation). Parmi les illustrations proposées par les auteurs nous pouvons citer, par exemple, que « la nécessité rhétorique de construire une transition reliant des sous-thèmes peut entraîner la découverte d'une relation préalablement non distinguée » (*Ibid*., p. 33). En effet, dans le cadre de la rédaction d'un texte, un rédacteur peut-être amené à proposer des transitions construites notamment via la proposition de mots de liaison. La nécessité de proposer le mot de liaison le plus adéquat ou le plus pertinent, peut conduire le rédacteur à réinterroger ses connaissances dans le domaine du contenu. Par conséquent il devra réévaluer les relations entre les deux objets de contenu concernés et ainsi transformer sa connaissance de ces deux objets via la découverte ou l'approfondissement d'une relation.

Ces travaux et plus particulièrement ce modèle de transformation des connaissances nous ont permis d'envisager l'interaction entre *l'espace problème* du Récit et *l'espace problème du contenu* relatif au Problème de Mathématiques via la possibilité d'un transfert de connaissances et de processus d'un espace à l'autre (une fois ces espaces convenablement définis dans le point suivant) et d'une co-construction entre récit et raisonnement. Pour cela, nous avons modélisé de manière symétrique les objets Problème et Récit, via la mise en évidence de trois composantes similaires, pour définir nos deux espaces problèmes et ainsi construire notre modèle afin de définir un espace de transfert de processus entre l'activité de résolution de problème et de rédaction d'un récit.

Définition des *espaces problèmes* du Problème et du Récit

L'objectif de notre travail de modélisation était de pouvoir anticiper sur les interactions possibles entre la construction d'un récit et d'un raisonnement dans une même situation. Dans ce but, nous avons retenu trois composantes symétriques pour caractériser structurellement nos *espaces problèmes* (Moulin, 2014, p. 129) :

- **La structure** interne qui apparaît (sans être forcément entièrement définie) au travers de la donnée des **informations explicites** et de leurs relations (temporelles, logiques, etc.). Dans un récit, une part importante de ces informations peut être proposée lors de l'exposé de l'état initial, dans un problème scolaire elles sont présentées dans l'énoncé. Les **informations implicites** qui complètent la situation sont à déterminer par le résolveur lors de la résolution du problème et par le récepteur du texte lors de sa lecture du récit.
- **L'élément problématique** qui est à l'origine de la construction du problème et du récit. Il est généralement présenté sous forme d'une ou plusieurs **questions** dans un problème scolaire. Il apparaît sous forme d'une **complication** grâce un élément perturbateur dans le récit et permet la construction de l'intrigue.
- **Le(s) élément(s) de solution**, construits en réponse à l'élément interrogatif. Il(s) consiste(nt) en la résolution de l'intrigue et à un état final stable, le **dénouement,** dans un récit et à la (les) réponse(s) aux questions du problème lorsqu'elle(s) existe(nt), la (les) **solution(s)**.

La construction de cette modélisation en symétrique (figure 5) est développée dans les chapitres 5, 6 et 8 de notre travail de thèse.

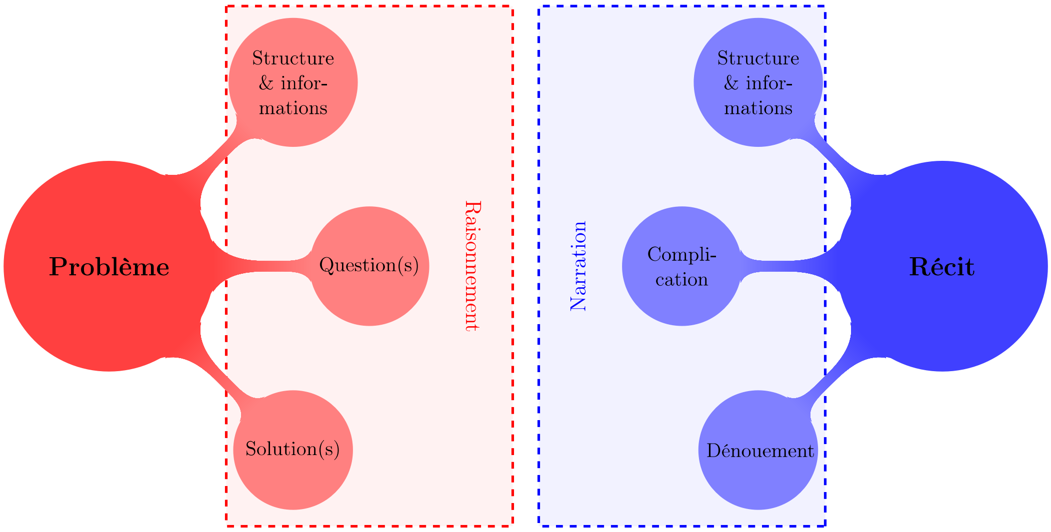


***Figure 5 :** Composantes des objets Problème et Récit*

L'inscription dans le cadre développé par Scardamalia et Bereiter (1998) nous a conduits à associer ces trois composantes aux différents processus de traitement qui leur sont liés afin de définir nos deux *espaces problèmes*. En effet, dans le modèle de Scardamalia et Bereiter (Figure 4), les processus développés dans chaque *espace problème* (considérés comme des réponses à des problèmes locaux rhétoriques *traduits* pour être transformés en problèmes de l'*espace du contenu* ou inversement) sont à l'origine de la transformation des connaissances du rédacteur. La définition de nos deux *espaces problèmes* intègre donc ces processus.

Dans notre cas, du côté du Problème, ces processus s'inscrivent dans une activité globale de résolution de problème via la construction d'un raisonnement et dans une activité d'élaboration d'un texte via l'acte narratif. En référence aux travaux de Polya (1945, 1994), qui mettent en évidence les aspects heuristiques de l'activité de résolution de problèmes, nous avons mis en évidence trois type de processus du côté de *l'espace problème* du Problème (en relation avec la caractérisation des fonctions du Récit exposées ci-après) :

- **Des processus « de structuration et de modélisation » relatifs en particulier au traitement de la structure et des informations** : Dans notre approche de l'activité de résolution de problèmes, nous avons considéré que la détermination de l'ensemble des relations entre les objets mathématiques en jeu était équivalente à la résolution du problème. Ainsi, nous avons qualifié de « processus de structuration » l'ensemble des processus permettant la caractérisation (en terme de propriétés et / ou de mesure et de valeurs) des objets en jeu et de leurs différentes relations. Les processus permettant de représenter (mathématiquement ou schématiquement) la situation et de faire évoluer (au fil de la résolution du problème) ces représentations ont été considérés dans notre travail comme des « processus de modélisation ».

- **Des processus « d'élaboration et de problématisation » participant au traitement de la question** : L'élaboration de conjectures, le découpage du problème en sous-problèmes pour produire de nouvelles informations (et compléter la connaissance de la situation), la recherche d'un modèle de résolution connu ou l'élaboration d'un nouveau modèle via l'articulation de sous-problèmes sont autant de démarches que nous avons qualifiées de « processus d'élaboration et de problématisation ».

- **Des processus « calculatoires » et processus « d'explication et d'argumentation » participant à la détermination en termes de valeurs de la (des) solution(s) de la preuve de sa (leur) validité** : Au delà de la détermination de la valeur de la solution via des processus « calculatoires » (l'application d'un algorithme, la résolution d'une équation, etc.), la résolution d'un problème nécessite la justification de la solution trouvée. Que ce soit via la rédaction d'une preuve mettant en jeu arguments logiques et théorèmes ou simplement via la production d'explications permettant de justifier la validité de solution par rapport aux contraintes de la situation le résolveur du problème s'engage dans des processus « d'explication et d'argumentation ».

Du coté du Récit, nous nous sommes intéressés à l'ensemble des processus mis en place par un auteur dans l'acte de construction de ce récit (la narration). En considérant le Récit comme un mode de pensée et en référence aux travaux de Bruner (2005, 2008) et Eco (1985, 1996) nous avons pu inscrire ces processus dans trois fonctions spécifiques du Récit :

- **Fonction structurante :** La mise en Récit permet de prendre en charge des objets et facilite leur mise en relation. En conduisant à la construction d'un tout cohérent (le *holos*), le récit peut structurer des connaissances et permettre l'articulation des phénomènes. Il facilite ainsi la compréhension de systèmes complexes.
- **Fonction problématisante :** Il n'y a pas de Récit sans intrigue et donc sans problématisation. La mise en place de l'intrigue, via un élément perturbateur, peut être comparée à la construction d'un problème. Elle invite à reconsidérer les connaissances en jeu et à adopter une démarche de problématisation.
- **Fonction explicative : Le** Récit, à travers la fiction, permet de construire des explications. Celles-ci s'inscrivent dans des *mondes possibles* qui prennent en charge toutes les contraintes portées par le récit et par la situation de référence. Les explications produites respectent par conséquent ces mêmes **contraintes.**

C'est la mise en évidence de la relation particulière de chacune de ces trois fonctions à une composante spécifique de l'objet Récit qui nous a conduit à classer les processus de résolution de problème de manière similaire dans notre définition de l'*espace problème* du Problème. Dans la suite de ce texte, pour plus de légèreté dans l'écriture et en accord avec les dénominations de Scardamalia et Bereiter, *l'espace problème* du Problème sera appelé *espace problème du contenu* et *l'espace problème* du Récit sera appelé *espace problème rhétorique.*

Espace de transfert des processus et inscription du Récit dans le milieu didactique

Le modèle proposé par Scardamalia et Bereiter nous a permis d'envisager la co-construction entre raisonnement et récit comme un transfert des processus de résolution de problèmes de *l'espace problème du contenu* vers *l'espace problème rhétorique* (et inversement) grâce la possibilité de *traduction* de chaque problème local (à l'origine du processus) d'un *espace problème* à l'autre. La mise en évidence de ce que nous avons appelé un « espace de transfert de processus » (Figure 6) dans le cadre d'une activité de résolution de problème de Mathématiques apporte aux élèves un nouvel espace de travail : *l'espace problème* du Récit. Cet *espace problème rhétorique*, dans lequel les élèves vont pouvoir développer certains processus est structuré par une logique narrative qu'ils maîtrisent. Cette maîtrise autorise la mise en place de processus plus complexes que ceux qui pourraient être développés dans *l'espace du problème du contenu* qui est également structuré mais qui est régi par une logique mathématique moins maîtrisée des élèves. Dès l'âge de six ans, les enfants sont en effet capables de produire des structures logiques narratives aussi complexes que celles d'un adulte (Fayol, 1985) ce qui n'est pas le cas en Mathématiques.

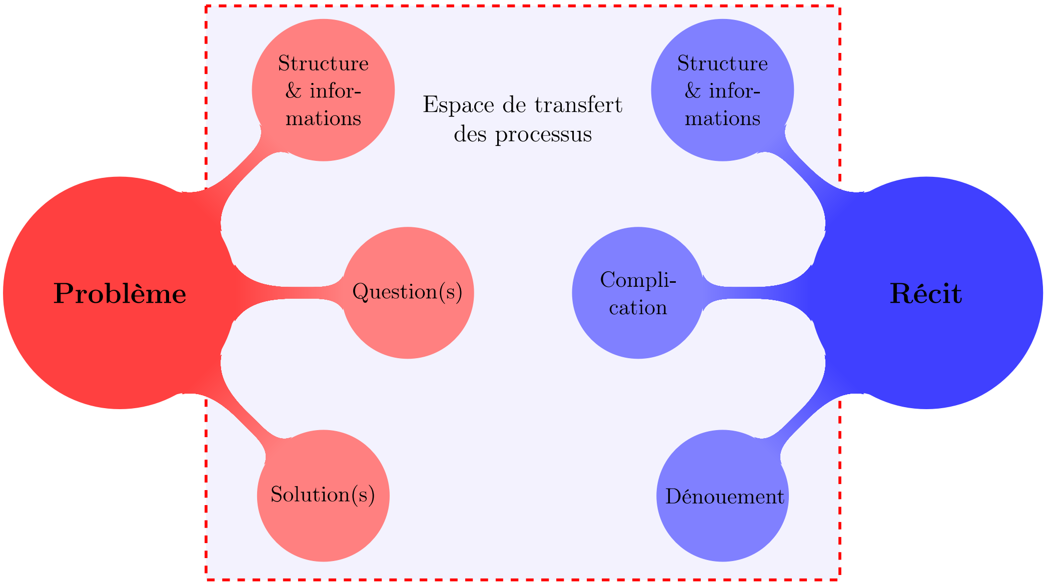


Figure 6 : *Espace de transfert des processus*

Ainsi, en accord avec le *modèle de transformation des connaissances*, tout problème de *l'espace problème du contenu* peut donc (théoriquement) être *traduit* dans *l'espace problème rhétorique* et y trouver une solution pertinente via la mise en place d'un ou plusieurs processus (et inversement). Cette solution (qui est en fait une nouvelle connaissance, une connaissance transformée, une mise en évidence ou caractérisation d'une relation, etc.) peut ensuite être réinvestie dans *l'espace du contenu* directement ou moyennant une réinterprétation. Le travail théorique développé dans notre travail de thèse et présenté ici, nous permet donc de mettre en évidence l'existence, sous certaines conditions, d'un « espace de transfert de processus » entre Problème et Récit et, de fait, la possibilité pour les élèves de s'appuyer sur des processus relatifs à la narration et aux fonctions du Récit pour résoudre un problème de Mathématiques.

L'inscription du Récit dans le milieu didactique que nous avons proposée dans notre thèse a pour donc pour objectif de mettre à disposition des élèves un milieu didactique plus riche et un espace de travail supplémentaire. Même si c'est généralement « *la propriété de milieu antagoniste à* l'élève qui est mise en avant » (Hersant, 2010, p. 44), le milieu possède en fait trois propriétés fondamentales : il est rétroactif, proactif et contraignant. C'est la propriété de contraignance qui nous a particulièrement intéressée dans notre travail car elle est essentielle pour le développement de situations de preuves et de raisonnement. Après avoir souligné la faiblesse de plusieurs situations dans ce domaine, Hersant propose deux manières d'enrichir le milieu didactique (p. 45-46) pour favoriser sa contraignance : l'enrichissement du registre empirique et l'enrichissement du registre des nécessités. Le Récit de par ses caractéristiques peut, en tant qu'acte de pensée, participer à l'enrichissement de ces deux registres :

- Registre empirique : Le Récit, via la fiction, amène la possibilité de construire des mondes alternatifs. Ceux-ci peuvent mettre en jeu une situation réelle légèrement modifiée, une situation fictive ou une situation plus intermédiaire. Dans tous les cas, les mondes possibles engendrés par la construction d'un récit enrichissent le registre empirique porté par le milieu. En effet, même en proposant une situation fictive, le récit est porteur d'un exemple qui peut être considéré et analysé et ce même s'il ne s'est pas effectivement réalisé. Il est ainsi possible de s'affranchir de la réalité, tout en restant dans un monde concret, voire sensible, et respectant les caractéristiques (mathématiques) de la situation.

- Registre des nécessités : Le Récit est un objet structuré dont la construction est régie par une organisation nécessairement logique. Lorsque celle-ci n'est pas conforme à la réalité, les variations sont nécessairement explicites. Tout ce qui n'est pas présenté comme discordant est analogue à la réalité. De fait, les mondes possibles que nous évoquions ci-dessus sont soumis à la logique du récit mais aussi à celle de la situation dans laquelle ils sont construits. Chaque décision prise dans la construction du récit peut donc permettre de considérer ou de déterminer une nécessité relative à la situation. La création de nouveaux récits participe de fait à l'enrichissement du registre des nécessités.

Le Récit peut également, dans une situation de résolution de problème de Mathématiques, favoriser la circulation de l'élève entre les différentes couches du milieu didactique mises en évidence dans les travaux de Margolinas (1998) : le *milieu matériel*, le *milieu objectif* et le *milieu de référence*. L'élève placé face à un énoncé proposant ce que nous avons appelé une situation problématique (avec une question qui lui est posée), doit opérer un passage du *milieu matériel* (composé des objets matériels et / ou conceptuels proposés dans la situation et l'énoncé) vers *un milieu objectif* en établissant un rapport localement stable avec les objets du *milieu matériel* (Margolinas, 1998). En incluant des objets mathématiques (proposés dans l'énoncé) dans la construction d'un récit, l'élève se positionne par rapport à eux en les sélectionnant et en les organisant. Il peut ainsi construire un rapport stabilisé avec ces objets. C'est alors la fonction de structuration du Récit qui entre en jeu et qui peut favoriser le passage du *milieu matériel* vers le *milieu objectif*. Il ne s'agit pas de proposer à l'élève d'établir un récit global incluant toutes les informations et objets mais d'imaginer une multitude de récits, en fonction de différentes contraintes de préférence mathématiques, relatifs aux différents objets en jeu. Le passage vers le *milieu de référence* implique la mise en évidence de similitudes et / ou d'incohérences dans la structure du milieu afin d'en repérer les propriétés. La comparaison et l'analyse de ces différents récits, qu'elle soit structurelle ou qu'elle prenne en charge les relations des objets en jeu, peut permettre de repérer ces propriétés et participer à la détermination de la structure mathématique proposée dans l'énoncé du problème. La démarche de propositions et de tests (à ajuster en fonction des rétroactions du milieu) adossée à une construction de récit (contraint et structuré par nature) va permettre à l'élève de s'affranchir du milieu matériel, de s'éloigner du milieu objectif pour en déterminer les contraintes. Les fonctions de problématisation et d'explication en particulier favoriseront ainsi le passage du *milieu objectif* vers le *milieu de référence*.

Conclusion sur le modèle théorique

La construction de ce modèle d'interactions entre construction de Récit et résolution de Problème ainsi défini nous a permis de mettre en évidence un « espace de transfert de processus » et de nous engager dans une série d'hypothèses mises à l'épreuve dans la partie expérimentale de notre travail de thèse (Moulin, 2014, p. 88 & 139) :

- Sous certaines conditions, l'introduction du Récit dans le traitement d'une *situation problématique*[3] amène une interaction entre la narration (comme activité de production de récit) et la construction d'un raisonnement. L'élaboration d'un récit visant à répondre à une *situation problématique* peut être un élément déclencheur et structurant du raisonnement. Autrement dit, le Récit est un outil problématisant qui permet également de produire une argumentation en vue de

[3] Dans notre thèse, nous avons appelé situation problématique toute situation mise en jeu dans un problème de mathématiques via la question posée dans l'énoncé ou tout sous problème inhérent à cette même question.

justifier la solution trouvée. À un second niveau, les interactions entre les deux *espaces problèmes* (*espace rhétorique* relatif au Récit et *espace du contenu* relatif au Problème de mathématiques), via le transfert de processus mis en évidence dans notre modèle, permettent la mobilisation de connaissances mathématiques et compétences mathématiques et transversales nécessaires à la résolution et peuvent induire une transformation des ces mêmes connaissances afin de permettre la résolution effective du problème.

- Le Récit enrichit, notamment grâce à la fiction, le registre empirique grâce aux possibles, réels et fictionnels, qu'il permet d'exprimer. Le Récit, de par son caractère structurant, contribue à la définition de la structure de la situation par l'élève en lui permettant de déterminer et d'exprimer les contraintes en jeu. Il participe, de ce fait, à la dévolution de la preuve. De plus, sous certaines conditions, le Récit participe, en tant que support de pensée, à la circulation de l'élève entre les différents niveaux structurels du milieu didactique (milieu matériel, milieu objectif et milieu de référence). Ces deux paramètres (enrichissement et circulation) sont essentiels pour conduire l'élève à entrer dans un processus de preuve. Enfin, en tant qu'objet de communication, le Récit prolonge l'action du milieu en apportant la possibilité d'être mis à l'épreuve des pairs et donc d'être soumis à une validation collective.

TRAVAIL EXPERIMENTAL : INSCRIPTION DU RECIT DANS LE MILIEU DIDACTIQUE ET RESOLUTION DE PROBLEMES

Afin de tester ces hypothèses, nous avons développé un travail expérimental reposant sur la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988). La situation proposée, devait permettre l'entrée dans une démarche d'écriture de récit et mettre en jeu des objets et des problèmes de mathématiques. Nous avons proposé à six classes de cycle 3 une séquence[4] construite autour d'un jeu de toupies dont les règles sont présentées (Figure 7) :

La partie est découpée en manches. Au signal, les deux joueurs lancent leur toupie dans le stadium en même temps. Si un joueur lance sa toupie à coté du stadium, il perd la manche. Si les deux toupies atterrissent dans le stadium, c'est le début de la manche. La manche se termine dès que :

1. un joueur touche le stadium ;
2. une des toupies n'est plus dans le stadium ;
3. une des toupies est en zone de pénalité ;
4. une des toupies ne tourne plus.

Le premier joueur qui se retrouve dans une de ces situations perd la manche. S'il n'est pas possible de déterminer un perdant, et par conséquent un vainqueur, la manche est annulée puis rejouée. Cela peut être le cas si les deux toupies arrêtent de tourner en même temps par exemple. Une fois la manche terminée, des points sont distribués ou retirés à un seul des deux joueurs. Pour cela, il faut attribuer les points en appliquant les règles suivantes dans l'ordre ci-dessous (dès qu'un point est distribué ou retiré, on passe à la manche suivante) :

– 1 pour le joueur qui lance sa toupie à côté du stadium ;
– 3 pour le joueur qui touche le stadium pendant la manche ;
+ 3 pour le joueur qui éjecte la toupie de son adversaire hors du stadium ;
+ 2 pour le joueur qui coince la toupie adverse dans la zone de pénalité ;
+ 1 pour le joueur dont la toupie tourne plus longtemps que celle de son adversaire.

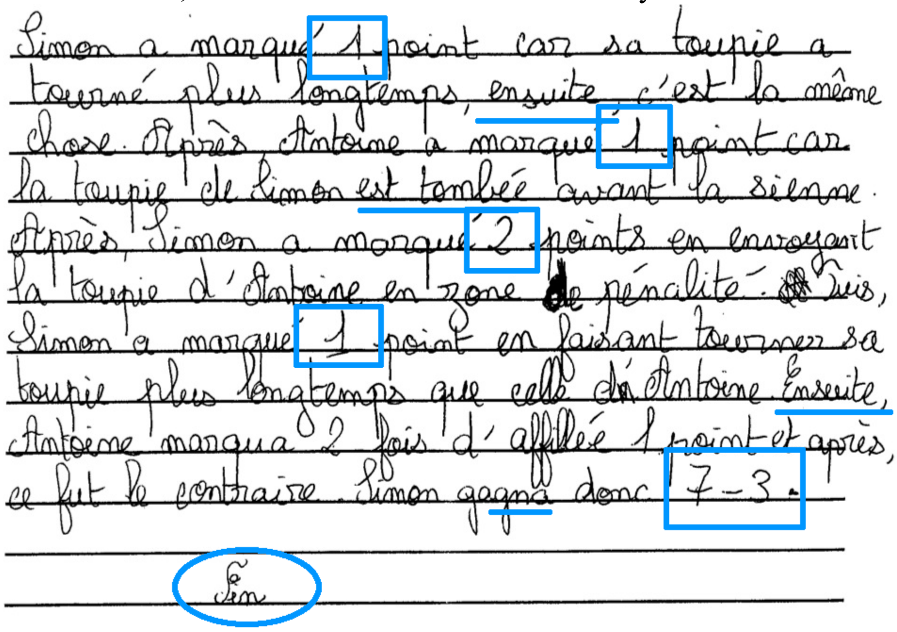
Il n'y a donc qu'un seul joueur qui gagne ou perd des points à chaque manche. Il est également possible d'avoir un score négatif. La partie se termine lorsqu'un joueur atteint 7 points (ou plus). Le premier joueur qui obtient un score supérieur ou égal à 7 points gagne la partie.

[4] Les six classes ont suivi des séquences similaires mais avec des conditions différentes dans certaines classes que nous détaillerons en note pour chaque activité présentée.

Figure 7 : Règles du jeu

Production de récits à partir de la situation de jeu

Cette situation permet effectivement aux élèves d'entrer dans une activité de production de récit. Après avoir joué une première partie nous leur avons demandé de raconter la partie qu'ils avaient jouée. Ce premier type de récit descriptif (exemple Figure 8), permet de décrire, sous une forme structurée, une succession d'évènements et d'y associer des scores.


Simon a marqué 1 point car sa toupie a tourné plus longtemps, ensuite c'est la même chose. Après Antoine a marqué 1 point car la toupie de Simon est tombée avant la sienne. Après, Simon a marqué 2 points en envoyant la toupie d'Antoine en zone de pénalité. Puis, Simon a marqué 1 point en faisant tourner sa toupie plus longtemps que celle d'Antoine. Ensuite, Antoine marqua 2 fois d'affilée 1 point et après, ce fut le contraire. Simon gagna donc 7-3.

Fin

Figure 8 *: Exemple de récit descriptif*

On repère dans ce texte des marqueurs de récit tels que des marqueurs de temps (éléments soulignés), le mot « fin », des personnages (Simon, Antoine). Il n'y a pas ici d'action du Récit sur le milieu didactique car il n'y a pas de problème mathématique en jeu. Les points et les scores sont inclus dans le récit, les règles du jeu sont prises en charge automatiquement. Il s'agit d'une première étape visant à l'entrée des élèves dans une démarche d'écriture de récit.

Pour inscrire réellement le Récit dans le milieu didactique, nous avons proposé par la suite aux élèves de construire des récits de parties qui n'avaient pas eu lieu. Il s'agit alors de récits d'anticipation qui, même s'ils ne relatent pas des parties réelles, doivent se conformer aux règles du jeu. Les déroulements des manches correspondent toujours aux événements du récit, mais les points et les scores deviennent des objets mathématiques à part entière et les règles du jeu deviennent une axiomatique locale au sens de Tarski (1960). En situation de résolution de problème, c'est à dire à partir du moment où l'on impose une contrainte mathématique au récit d'anticipation (un score final, un nombre de manches, etc.) le Récit est inscrit dans le milieu didactique. La résolution du problème et la construction du récit et qui se font simultanément imposent (non nécessairement dans cet ordre) l'analyse des contraintes mathématiques de la situation, la construction d'une succession d'événements permettant d'expliquer la situation problématique, la vérification de l'adéquation de cette solution avec les contraintes mathématiques et événementielles de la situation.

Dans notre travail expérimental, nous avons proposé aux élèves deux types de situations de résolution de problèmes : des situations dans lesquelles le Récit était explicitement convoqué par la consigne et d'autres où le récit ne l'était pas. Dans les deux points suivants nous proposons d'analyser au travers du modèle d'interactions que nous avons présenté dans la partie théorique le rôle du Récit dans ces deux types de situations.

Exemple d'action du Récit sur le milieu didactique (structuration et explication) dans une situation où le récit est explicitement convoqué par la consigne

Nous avons proposé aux élèves de résoudre des problèmes mettant en jeu des objets mathématiques dans le cadre du récit. Nous leur avons fourni un début de récit qu'ils devaient compléter par rapport à différentes contraintes sur le score final du narrateur :

> *Je joue contre Camille. À la première manche, ma toupie a tourné plus longtemps donc j'ai gagné 1 point. À la deuxième manche, c'était l'inverse, c'est Camille qui a marqué 1 point parce que ma toupie s'est arrêtée en premier. On est à égalité. À la manche suivante, j'ai lancé ma toupie plus fort et j'ai réussi à coincer la toupie de Camille dans la zone de pénalité. J'ai gagné 2 points.*

Figure 9 : *Récit initial*

La donnée de cette situation et de la question « complète le récit pour que Laura gagne la partie avec un score de … points » place les élèves dans une situation de résolution de problème. D'un point de vue mathématique, ils doivent déterminer une transformation permettant de passer d'un état initial de 3 points à un état final de 7, 8, 9 ou 10 points selon la contrainte proposée. L'objectif de la tâche était de permettre aux élèves d'analyser la structure mathématique de la situation (une analyse exhaustive, sous forme d'une axiomatique locale, est proposée dans le chapitre 9 de notre thèse). Ils devaient en particulier déterminer qu'il est nécessaire de gagner au moins 2 points à la dernière manche pour atteindre un score de 8 points, qu'il est nécessaire d'avoir 6 points puis de gagner 3 points d'un coup pour atteindre un score de 9 points et enfin qu'il n'est pas possible d'atteindre un score de 10 points[5].

L'analyse cette tâche de résolution de problème au travers de notre modèle d'interaction (Figure 10) nous amène à considérer le récit à compléter comme étant la donnée d'une structure d'informations comprenant des objets mathématiques reliés par une axiomatique locale. La situation ainsi définie est commune au récit et au problème et donc à *l'espace problème du contenu* et à *l'espace problème rhétorique*. Notre contrainte externe, la question du problème mettant en jeu score final du personnage, correspond également à la complication dans *l'espace problème* du Récit.

---

[5] Lors de la première expérimentation (classe 1), nous avons proposé aux élèves un récit qui se terminait (provisoirement) sur un score de 6 à 1. Les élèves n'avaient donc plus qu'une étape à déterminer ce qui a eu pour conséquence de fermer la situation et les a empêché de mettre en évidence le passage crucial au score de 6 points. Dans les classes 4 et 5, les enseignants ont autorisé les élèves qui avaient des difficultés à écrire à proposer un récit « raccourci » ne comportant que les scores (sans décrire les événements). Nous avons montré dans notre thèse que cela a été un frein à l'analyse de la structure mathématique de la situation.

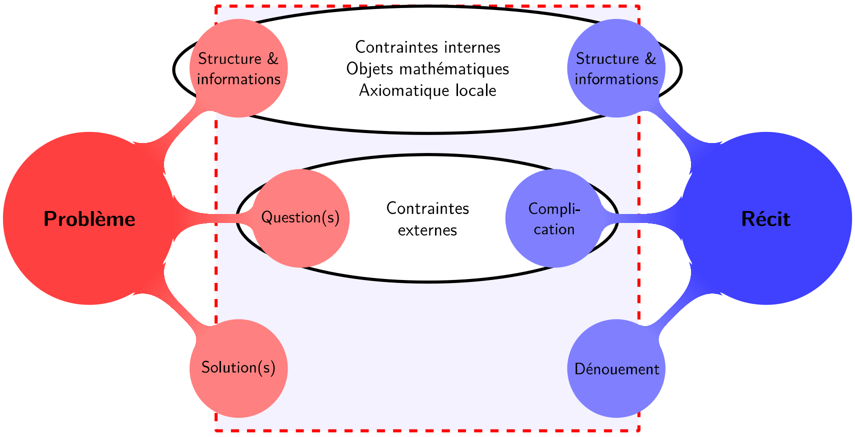


Figure 10 : *Analyse des composantes*

Pour résoudre le problème mathématique proposé, il est nécessaire d'opérer un travail dans *l'espace problème rhétorique*. L'élève ne doit pas seulement déterminer la valeur de la transformation, il doit également déterminer des événements permettant cette transformation. Ce travail, qui est à l'origine un problème de *l'espace rhétorique*, conduit l'élève à analyser la structure et la situation problématique en relation avec les règles du jeu (afin de trouver une succession d'évènements permettant d'atteindre l'état final tout en respectant ces règles). Il amène, de fait, l'élève à analyser la situation par rapport aux propriétés de l'axiomatique locale et, donc, d'un point de vue mathématique. Le problème initial, qui est avant tout un problème mathématique avec une question mathématique (Entouré en pointillés, Figure 11) est déplacé par la consigne « complète le récit » dans *l'espace rhétorique*. L'analyse de la situation dans *l'espace problème* rhétorique conduit à l'analyse de la situation dans *l'espace problème du contenu* (Flèche du haut, Figure 11) et la solution trouvée du point de vue des événements répond également au problème mathématique (Flèche du bas, Figure 11).

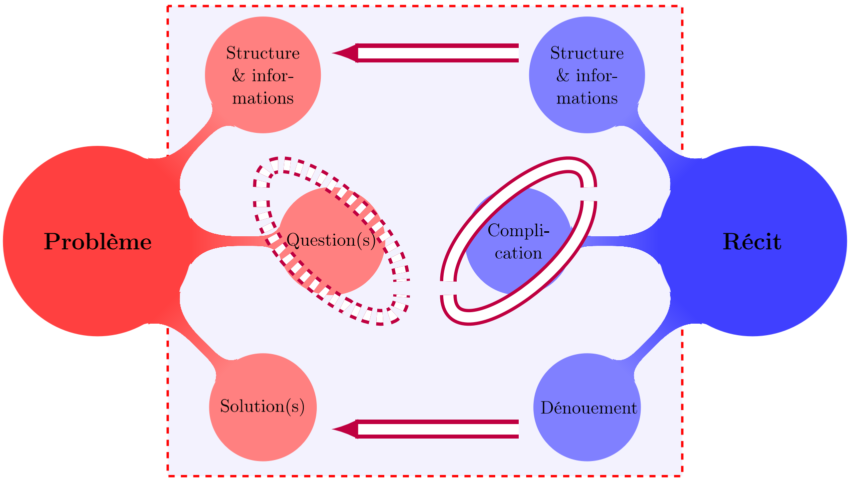


Figure 11: *Analyse des processus*

Plus concrètement, lorsque nous avons proposé aux élèves différentes contraintes sur le score du personnage, ils se sont engagés dans la production de *possibles explicatifs* (voire d'*impossibles explicatifs*), c'est à dire de récits permettant d'expliquer une situation problématique. Le cadre du Récit, qui impose une description des événements a amené les élèves à explorer du point de vue mathématique la situation et son axiomatique.

Ils ont par exemple pu repérer qu'il est nécessaire de gagner au moins 2 points à la dernière manche pour terminer une partie avec 8 points, ce qu'ils n'avaient pas réussi à déterminer dans un premier temps[6] (Exemple : Figure 12).

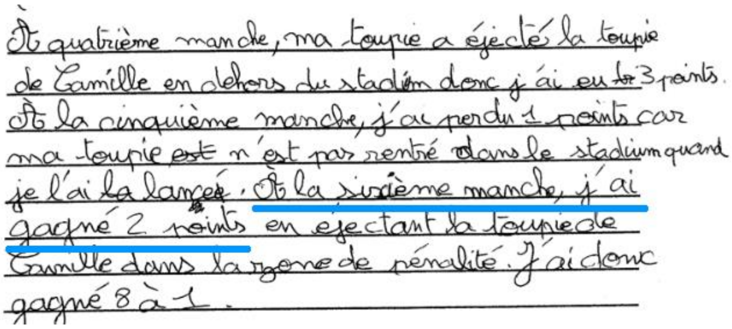


Figure 12 : *Possible explicatif pour terminer avec 8 points*

Ils ont également pu se rendre compte qu'il n'était pas possible de dépasser un score de 9 points (Figure 13) alors que beaucoup affirmaient initialement qu'il était possible de terminer une partie avec n'importe quel score supérieur à 7. Même après avoir construit un *impossible explicatif*, certains élèves mettent en évidence la prise en compte des contraintes mathématiques de la situation en proposant explicitement que leur personnage, même après avoir gagné ait envie de continuer à jouer.

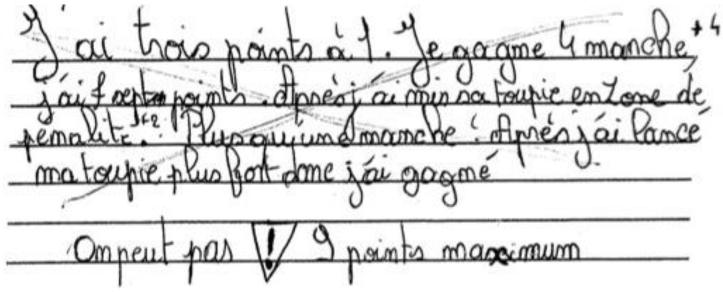


Figure 13 : *Impossible explicatif pour terminer avec 10 points*

Ces exemples mettent en évidence les fonctions de structuration et d'explication du Récit. La mise en récit permet aux élèves de prendre en charge les objets mathématiques et leur mise en relation (dans le but de produire le récit). Ce travail les amène en particulier à déterminer des contraintes mathématiques qui n'étaient pas explicites et qui restaient indisponibles pour les élèves dans un premier temps. Le récit a également conduit les élèves à envisager des mondes possibles et impossibles et ainsi à déterminer les contraintes qui les rendaient effectivement possibles et impossibles. La fonction d'explication du récit leur a permis de s'engager dans l'explicitation de contraintes mathématiques, voire pour certains d'entrer dans la production de preuves (Figure 14) ce qui n'était pas forcément attendu de la part d'élèves de cycle 3.

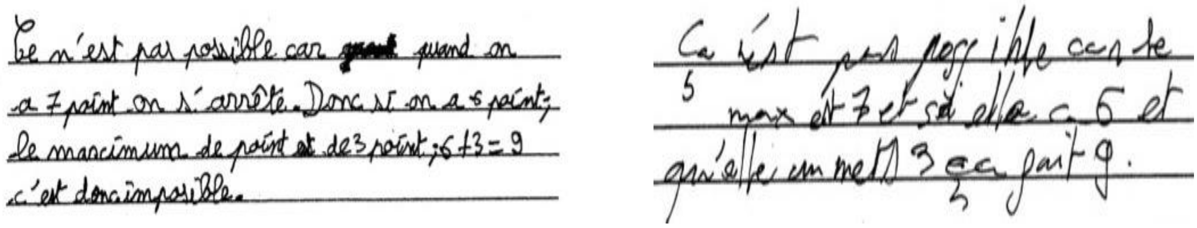


Figure 14: *Exemples de justifications / preuves*

D'une certaine manière, et en comparaison avec la tâche d'élaboration et justification de conjecture que nous présenterons dans le point suivant, cette tâche peut être assimilée à une

[6] En amont de cette activité, les élèves ont du produire des conjectures sur les scores que le vainqueur d'une partie peut atteindre, sur le nombre maximum de manches qu'il est possible de jouer et sur le nombre minimum de manches nécessaires pour terminer une partie (seconde tâche présentée dans cet article).

activité de validation / invalidation de conjectures proposées par la consigne grâce à la production d'un possible explicatif (tout en restant une activité de résolution de problèmes). Les processus de problématisation étaient en partie portés, ou du moins guidés, par la consigne : la conjecture était donnée et le moyen (l'exhibition par le récit d'un cas « ou ça marche » ou non) était également imposé. Le transfert de la question dans *l'espace problème du Récit* a permis aux élèves de s'engager dans l'exploration mathématique de la situation en s'appuyant sur des processus de problématisation également placés dans *l'espace heuristique*. Le problème résolu par les élèves était, en essence et initialement, un problème heuristique : Quelle suite d'évènements proposer pour atteindre un état final donné ? L'appui sur des processus, maîtrisés, dans *l'espace problème du Récit*, à conduit à la nécessité pour les élèves de s'engager dans des processus mathématiques de structuration et d'explication tels que nous les avons définis.

Exemple d'action du Récit sur le milieu didactique (problématisation) dans une situation où le récit n'est pas convoqué par la consigne

Le second type de situation que nous avons proposé aux élèves ne convoquait pas explicitement le récit. Nous leur avons demandé de proposer des conjectures sur l'axiomatique locale et la structure de la situation en nous intéressant particulièrement à :

- la valeur des scores possibles du vainqueur ;
- le nombre de manches minimum pour terminer une partie ;
- le nombre de manches maximum dans une partie.

Cette activité a été proposée aux élèves après qu'ils ont joué et raconté une première partie. Elle s'est donc déroulée (à l'écrit) en amont de la tâche présenté dans le point précédent et donc avant que les élèves élaborent les différents récits d'anticipation présentés ci-dessus. La principale différence est qu'ici les élèves n'ont pas d'indication sur l'état final qu'ils peuvent atteindre. Ils doivent donc s'engager, sans support imposé, dans une activité d'élaboration d'une conjecture, la tester, l'ajuster lorsque cela s'avère nécessaire et proposer une justification accompagnant la conjecture choisie. Les processus de problématisation sont ici au cœur du travail demandé à l'élève. Les conjectures des élèves ont étés discutées à l'oral dans des séances ultérieures (après l'activité présenté dans le point précédent)[7].

Concernant la première conjecture (sur les scores possibles du vainqueur) les élèves se sont engagés dans différentes procédures (exemples tableau 2) :

- Des procédures prenant appui sur une opération (une addition ou une multiplication) avec une analyse plus ou moins correcte de la situation avec des élèves qui semblent inscrire leurs processus de problématisation (et de structuration et d'explication) uniquement dans *l'espace problème du contenu* ;
- Des procédures basées sur la production d'un *possible explicatif*[8] qui conduit les élèves à s'engager dans des processus inhérents à *l'espace problème rhétorique* (avec une conjecture mathématique éventuellement construite dans *l'espace problème du contenu*). Certains ont également proposé plusieurs *possibles explicatifs* avec dans certains cas une base commune qui met en évidence le fait que l'élève a repéré un aspect crucial de la situation.
- D'autres approches sont également apparues avec des justifications basées sur le matériel, sur l'expérience des parties jouées ou encore sur les règles du jeu.

Les arguments avancés par les élèves sont majoritairement des preuves d'existence relatant

[7] Cette tâche a été proposé dans toutes les classes, seule la classe 1 n'a pas réalisé cette activité à l'écrit.
[8] C'est à dire d'un récit, d'une suite d'événements, permettant d'atteindre le score souhaité.

des parties se terminant avec des scores égaux à 7, 8 ou 9.

Appui sur une opération	**Production d'un *possible explicatif***	**Production de plusieurs *possibles explicatifs***
Si le gagnant fait 3 + 3 + 2 + 3 = 12 donc il peut avoir 12 points. *9 points c'est le maximum car si on éjecte de l'arène la toupie adverse 3 fois cela fait 9 car 3 x 3 = 9*	*À la première manche la toupie de mon adversaire s'est arrêtée avant donc j'ai +1. À la deuxième manche j'ai coincé la toupie de mon adversaire à la zone de pénalité donc j'ai +2, à la troisième manche j'ai éjecté la toupie de mon adversaire donc +3. À la quatrième manche la toupie de mon adversaire …*	*Le vainqueur peut avoir 9 points car s'il a 6 points et s'il éjecte l'autre toupie du stadium il gagne + 3 points donc il a 9 points. Le joueur peut avoir 8 points car s'il a 6 points et qu'il envoie la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité il a gagné 8 points. Et enfin si le joueur a 6 points et qu'il gagne une manche il a 7 points.*

***Tableau 2 :** Exemples de justifications de conjectures*

Quantitativement, sur 113 élèves, une quinzaine seulement utilise des arguments mathématiques et / ou basés sur les règles du jeu et donc en s'appuyant des processus développé (*a priori* uniquement) dans *l'espace problème du contenu*. Plus de la moitié s'engage dans la production de possibles explicatifs grâce au récit, en donc en inscrivant (au moins en partie) leurs processus de problématisation dans *l'espace problème du Récit*, confirmant ainsi le penchant naturel pour ce dernier (souligné par Bruner, 2008). D'un point de vue qualitatif, cette seconde approche se révèle également efficace car elle amène :

- 85 % des 32 conjectures complètes,
- 60 % des 46 conjectures incomplètes,
- moins de 50 % des 27 conjectures fausses.

Dans l'objectif de proposer et de justifier des conjectures, ces élèves se sont engagés, sans que la consigne ne leur impose, dans la production de ces *possibles explicatifs*. Ces élèves ont ainsi construit leur raisonnement en mobilisant naturellement des processus relatifs à la production de Récit. La fonction de problématisation du Récit, qui entre en jeu dès lors que l'on cherche à construire un récit, a conduit ces élèves à questionner leur connaissance « sensible » de la situation (connaissance des règles du jeu et expérience d'une partie effectivement joué) et à rechercher des caractéristiques mathématiques de la situation et des objets mathématiques qui y sont inscrits (*situation objective* en lien avec le *milieu objectif*). *L'espace problème du Récit*, en tant qu'espace de travail, a permis à ces élèves d'explorer la situation mathématique.

Prolongement de l'action du Récit sur le milieu didactique par le passage à l'oral

Durant les phases de discussion en classe entière, le Récit en général et les récits construits dans les séances précédentes ou pendant la discussion elle-même sont devenus des supports pour l'argumentation. En tant qu'objet de communication et pouvant être partagé facilement, le Récit peut prolonger l'action du milieu en apportant la possibilité de mettre les récits produits (des *possibles explicatifs*) à l'épreuve des pairs. Les récits de parties enrichissent le *registre empirique* du milieu didactique commun aux élèves. Ils sont en effet partagés dans la classe et proposent des exemples concrets que les élèves intègrent au débat en les discutant et en les acceptant (car ils respectent et donc prennent en charge les contraintes mathématiques de la situation) comme des arguments convaincants. Dans notre travail de thèse, en analysant les transcriptions des phases de travail collectif, nous avons mis en évidence plusieurs utilisations du Récit par les élèves :

- Ils ont utilisé des récits de parties réelles, en y faisant référence, comme des exemples et des contre-exemples pour valider ou invalider des conjectures. Par exemple, l'idée qu'une partie ne pouvait pas comporter plus de quatorze manches (le nombre de lignes de la feuille) a été réfutée par le fait que deux élèves de la classe ont lu leur récit de partie. À partir de ce récit, les élèves ont proposé de compléter leur récit pour proposer des parties de plus en plus longues en repérant et en « réutilisant » les événements qui ont été à l'origine de la longueur de la partie.

- Les élèves ont également construit durant les débats des récits de parties imaginaires afin de convaincre leurs pairs qu'une conjecture était vraie. Par exemple, toujours lorsque les élèves tentaient de déterminer le nombre de manches maximum qu'il était possible de jouer dans une partie, ils ont utilisé l'inscription dans la fiction pour s'affranchir de la réalité. Même si « il n'y a pas le temps », même si « dans la réalité au bout d'un moment y en a un qui gagne » il est possible de construire et de raconter une partie infinie. En voici plusieurs exemples construits par les élèves qui ont convaincu leurs camarades (proposition finale) :
  - Il gagne trois points en éjectant et après il touche le stadium, il a zéro (…) Il tourne plus longtemps et après il lance à coté.
  - Parce qu'à chaque fois on fait moins trois.
  - Si on gagne un point et si on en perd un ; ça fait plus un moins un.
  - Plus trois, moins un, plus deux (…) il a quatre, moins trois et moins un et il se retrouve à zéro.

Ces *possibles explicatifs,* tout en s'éloignant des situations réelles, ont conduit les élèves à explorer les caractéristiques mathématiques de la situation. Dans un premier temps, ils se sont appuyés sur des processus de *l'espace problème du Récit*, puis sur des processus de *l'espace du contenu*. Les élèves se sont appuyés sur des constructions via les événements du récit, rattachés aux scores de manière ultérieure. Dans un second temps, les élèves se sont détachés de ces événements de Récit, les processus relatifs à *l'espace problème rhétorique* ont étés réduits, voire (dans le cas des trois dernières propositions) éliminés (du moins dans l'expression orale). C'est ici la fonction explicative du Récit qui est au cœur de l'activité. En construisant des *possibles explicatifs,* et plus précisément en vérifiant individuellement et collectivement qu'ils sont valides par rapport aux contraintes mathématiques, les élèves établissent un rapport objectif avec les objets mathématiques en jeu et enrichissent le *registre des nécessités* du milieu didactique. Ils mettent en évidence les régularités, les points clefs de la situation et s'engagent dans des processus mettant en évidence leur inscription dans le *milieu objectif* et pour certain dans le *milieu de référence*.

Conclusion sur l'expérimentation

L'expérimentation menée nous a permis de montrer, en référence à notre hypothèse initiale, que le Récit était effectivement un support privilégié par les élèves pour émettre et justifier des conjectures, pour justifier et argumenter à l'écrit comme à l'oral :

- L'engagement dans le raisonnement s'appuie en particulier sur le caractère fictionnel du Récit et sur sa *fonction explicative* : En construisant des récits, en produisant des *possibles explicatifs*, les élèves s'affranchissent de la *situation matérielle* (ce qu'il est possible de faire en vrai avec les contraintes de temps et de matériel) et s'inscrivent dans une *situation objective* en s'engageant la construction d'exemples et de contre-exemples non sensibles. Le passage du *milieu matériel* au *milieu objectif* s'appuie sur des constructions « fictives » mais structurées par les contraintes mathématiques *objectives* de la situation étudiée.
- La structuration du raisonnement peut s'appuyer sur la *fonction de problématisation* et de *structuration* du Récit. Le caractère structuré du Récit et la résolution d'un élément problématique de *l'espace problème* du Récit amène les élèves à repérer les

caractéristiques mathématiques de la situation. La possibilité d'engager des processus de raisonnement dans *l'espace problème rhétorique* accompagne les élèves dans le passage vers le *milieu de référence*. La comparaison structurelle, la comparaison des événements (avant la comparaison mathématique) leur permet de saisir les subtilités de la situation et d'appuyer leur raisonnement via le repérage de ces points critiques *traduits* par la suite dans *l'espace problème du contenu*.

- La justification du raisonnement peut s'appuyer sur des exemples produits et / ou exprimés par le Récit. Les *possibles explicatifs* construits dans *l'espace problème rhétorique* sont analysés par les élèves dans ce même espace mis également dans *l'espace problème du* contenu et donc par rapport aux mathématiques. Ce travail leur permet de produire des arguments mathématiques solides et permettant la validation.

CONCLUSION

L'objectif principal de notre travail était de déterminer si le Récit, introduit dans le milieu didactique en tant que mode de pensée, pouvait participer au travail mathématique et à la construction de raisonnement.

Le modèle théorique développé dans notre travail de thèse qui s'appuie sur une similarité structurelle entre Récit et Problème met en évidence des lieux d'interaction entre construction de récit et construction de raisonnement. Grâce aux travaux de Scardamalia et Bereiter (1998), nous avons en particulier défini et caractérisé un « espace de transfert de processus » entre ces deux activités et souligné la possibilité d'une co-construction entre récit et raisonnement lors d'un travail de résolution de problèmes de mathématiques. Les processus de structuration, d'argumentation, de problématisation, d'argumentation nécessaires à la résolution d'un problème, qui s'inscrivent habituellement dans *l'espace problème du contenu*, peuvent ainsi être réalisés (moyennant une *traduction* et une réinterprétation des problèmes locaux) dans *l'espace problème rhétorique*. Le travail dans cet espace, soutenu par les fonctions structurantes et heuristiques du récit, peut permettre aux d'élèves d'initier, de construire et de justifier leur raisonnement.

Le travail expérimental que nous avons réalisé a confirmé la validité de notre modèle théorique. En explorant et en construisant différents types de récits et différents types de structures les élèves ont enrichi le milieu didactique, au sens proposé par Hersant (2010), ainsi que leurs rapports avec ce dernier. L'appui sur les différentes fonctions du récit a en particulier permis aux élèves de s'affranchir des contraintes matérielles de la situation afin d'établir un rapport plus objectif avec les objets mathématiques en jeu et les différentes caractéristiques mathématiques de la situation. Ils ont en particulier pu repérer et analyser certains points cruciaux de l'axiomatique locale de la situation. Le Récit en tant que mode de pensée a été dans cette situation un support puissant qui a permis à certains élèves de s'engager dans des processus de preuve.

La situation choisie, permettant la proposition de problèmes de transformation avec des caractéristiques temporelles faciles à rapprocher du Récit, a certainement facilité le transfert des processus vers *l'espace problème rhétorique*. Le travail engagé à la suite de notre thèse vise à étendre ce type d'approches à des situations qui apparaissent *a priori* (et *a priori* seulement) plus éloignés de la structure du récit telle qu'on la connaît (c'est à dire avec des étapes, des changements et une temporalité (chronologique) assez marquée. Il faut noter que le Récit en tant qu'objet n'a pour temporalité que celle que l'auteur lui donne en organisant son discours dans un ordre, qui n'est pas nécessairement l'ordre chronologique de l'histoire qu'il raconte. Ce travail d'organisation, essentiel au travail de problématisation dans *l'espace problème rhétorique*, permet de mettre en relation des objets et des événements d'une manière non temporalisée qui pourrait se rapprocher de situations mathématiques non temporalisées.

Les perspectives ouvertes par ce travail, en particulier vis à vis de la preuve, nous incitent également à nous intéresser de près aux processus d'élaboration preuve en particulier dans ce qu'ils ont de commun et / ou de différent avec les processus de construction de récit tels que nous les avons évoqués ci-dessus (temporalité mais aussi, et surtout, organisation, mise en relation, etc.). Une étape préliminaire à ce travail, nous a conduite à nous engager dans le domaine de la géométrie. En nous appuyant sur les travaux de Duval, nous développons et analysons une entrée par le récit dans les apprentissages relatifs aux programmes de construction et à l'analyse de figures (Moulin & Mithalal, 2015).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Artigue, M. (1988) Ingénierie didactique. *Recherche en didactique des mathématiques, 3,* 281–308. Grenoble : La pensée Sauvage Editions.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(2/3), 309-336.

Bruner, J.S. (2003). *Making stories: Law, literature, life*. Harvard University Press.

Bruner, J.S. (2005). *Pourquoi nous racontons-nous des histoires?*. Paris : Pocket.

Bruner, J.S. (2008) *L'éducation, entrée dans la culture : les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle* (Nouv. éd.). Retz.

Eco, U. (1985) *Lector in fabula*. Hachette.

Eco, U. (1996) *Six promenades dans les bois du roman et d'ailleurs* (M. Bouzaher, Trad.). Éditions Grasset.

Fayol, M. (1985). *Le récit et sa construction : une approche de la psychologie cognitive.* Delachaux & Niestle.

Hersant, M. (2010) *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. Note de synthèse HDR, Université de Nantes, Nantes.

Margolinas, C. (1998) Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. In Noirfalise Robert (Ed..), *Université d'été de didactique de La Rochelle, La Rochelle, France.* (pp. 3-16) I.R.E.M. de Clermont-Ferrand.

Moulin, M. (2010). Mathématiques et récits : des textes de fiction pour bien lire des énoncés de problèmes de mathématiques en classe de CM2. *Grand N, 86*, 33-57.

Moulin, M. (2014) *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement,* Thèse de doctorat disponible en ligne, Université Claude Bernard Lyon 1, 328p, http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel- 01066443.

Moulin, M., Mithalal, J. (2015) *Le programme de construction comme un récit : réticence et prolifération,* Atelier présenté aux Journées d'étude LEMME, 05-06 octobre 2015, Villeneuve D'Ascq.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Polya, G. (1994). *Comment poser et résoudre un problème*. Sceaux : Gabay.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1987). Knowledge telling and knowledge transforming in written composition. In R. Rosenberg (Ed.), *Reading, writing, and language learning* (pp. 142–175). Cambridge : Cambridge University Press.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1998). L'expertise en lecture-rédaction. In : Piolat, A., Pélissier, A., & Bereiter, C. (Eds), *La rédaction de textes : Approche cognitive* (pp. 13–59). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Tarski, A. (1960). *Introduction à la logique : ["Introduction to logic and to the methodology of deductive science"], par alfred tarski, 2e édition revue et augmentée. traduit de l'anglais par [le p.] jacques tremblay*, S.J.. Paris : Gauthier-Villars.

Opérationnaliser les registres

Étude de trois objets : nombre entier, nombre rationnel, tangente

Laurent VIVIER
LDAR, Université Paris Diderot
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Duval, dans ses travaux, pointe l'importance cognitive de la coordination entre les registres de représentations sémiotiques dans le travail mathématique. Il précise en outre que les traitements sont moins problématiques dans les registres monofonctionnels. Dans la suite de ses travaux, j'avance que pour que les registres puissent jouer pleinement leur rôle dans l'activité mathématique, et spécifiquement pour la conceptualisation des notions en jeu, la coordination ne peut se limiter aux seules représentations : les traitements doivent également être coordonnés. Si les registres n'acquièrent pas une valence instrumentale, représente-t-on réellement des objets mathématiques ? n'a-t-on pas uniquement des représentations *inertes* ? Ainsi, chaque registre doit-il être *opérationnalisé* par des traitements afin d'effectuer des tâches mathématiques qui, elles-mêmes, doivent pouvoir s'exprimer dans les registres. C'est dans cette perspective que je propose un cadre d'analyse, alliant registres de représentation et praxéologies, pour étudier la coordination de ce que j'appelle les R-praxis.

Mots clés

Registre de représentation ; praxéologie ; nombre ; entier ; rationnel ; période ; tangente

Introduction

Ce texte est une adaptation de ma note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches (HDR)[1] soutenue le 28 mai 2015, intitulée *Sur la route des réels – Points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique*, intégrant mes recherches sur la notion de tangente. L'idée de cette réinterprétation provient du rapport de Denis Tanguay qui écrit, à propos de mon HDR :

> la coordination entre registres de représentations sémiotiques ne peut jouer le rôle essentiel que lui prête Duval (1993, 1995) pour la conceptualisation que si les signes acquièrent d'abord dans chaque registre une *valence instrumentale* (au sens de Chevallard), c'est-à-dire que si l'on a pu les faire fonctionner dans des tâches et techniques (toujours au sens de Chevallard) qui mobilisent des traitements intégrant ces signes à un *système* sémiotique.

Je vais commencer par exposer mes recherches sur les nombres entiers, en base autre que dix pour des étudiants-professeurs et une comparaison des registres chiffré et graphique en première année de primaire, pour lesquelles j'ai développé un cadre d'analyse. Puis, j'exposerai mes recherches sur les nombres rationnels issues de mes recherches en

1 Disponible en ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01223012.

mathématiques avec des implications sur les nombres réels. Enfin, je traiterai de la notion de tangente aux courbes algébriques que je considère comme un intermédiaire intéressant entre la géométrie, où se situe les représentations premières, et l'analyse, qui permet d'étendre largement la notion de tangente et qui est privilégiée par les curricula.
Dans chacune de ces études, même si ce n'est pas la préoccupation première, on se rend compte de l'importance d'avoir des registres de représentations opérationnels, dans lesquels on dispose de suffisamment de traitements efficaces. Je m'intéresse également à la coordination des registres en tentant de comprendre l'importance de l'opérationnalisation de ceux-ci.

1- Les entiers

Un cadre d'analyse

Initié dans (Vivier, 2008) pour l'étude de la synthèse sur les nombres à la transition collège/lycée en France, ce cadre d'analyse prend en compte une double sensibilité sur l'influence du sémiotique dans l'activité mathématique et sur l'organisation mathématique des connaissances – voir (Block, Nikolantonakis & Vivier, 2012) pour un exposé plus détaillé.
En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), c'est autour des *types de tâches* que s'élabore le travail en mathématiques (Chevallard, 1999) qui donne lieu au bloc $[T,\tau]$, nommé bloc des savoir-faire ou *praxis* et composé du type de tâches T et d'une *technique* τ pour effectuer T. La production et la justification d'une technique nécessitent un regard théorique que Chevallard nomme une *technologie*. Cette dernière est un élément du bloc des savoirs, ou *logos*. Praxis et logos forment une *praxéologie*.
Duval (1995, 2006) regroupe les signes utilisés dans le travail mathématique en registres de représentation sémiotique. Il distingue les *traitements*, une transformation sémiotique qui reste à l'intérieur d'un même registre de représentation R, et les *conversions*, une transformation sémiotique dont le résultat est exprimé dans un autre registre. Duval insiste particulièrement sur la différence cognitive entre ces deux transformations sémiotiques.
Le sémiotique en TAD est bien pris en compte à travers la notion d'*ostensif* (Bosch & Chevallard, 1999). Mais les ostensifs en TAD ne sont pas constitués en système sémiotique. En particulier, cette notion ne prétend pas rendre compte de la dépendance d'une technique aux systèmes sémiotiques sur lesquels elle repose. Malgré l'intérêt de cette notion d'ostensif, elle n'est pas adaptée aux questions liées aux registres de mes études.
En TAD, un type de tâches ne fait pas toujours référence aux registres de représentation utilisés. Or, une tâche est toujours exprimée à l'aide de registres sémiotiques et ces derniers, c'est notre hypothèse principale, influencent directement l'activité mathématique[2]. Ainsi, je propose d'indexer les types de tâches et techniques par le(s) registre(s) dans le(s)quel(s) ils sont exprimés. Un type de tâches T relatif à un registre R est noté T_R. Bien entendu, il est tout à fait possible de considérer des types de tâches exprimés avec deux registres ou plus comme on peut le constater avec la tâche *comparer 2/3 et 0,6*. Je ne considère que les types de tâches exprimés dans un seul registre (en revanche, les procédures de résolution peuvent utiliser plusieurs registres).
Afin de prendre en compte les registres de représentations en TAD, je distingue, en me restreignant au cadre numérique :

2 Bosch, Fonseca et Gascón (2004) étudient l'influence de la variation d'ostensifs dans les tâches, par exemple en demandant de calculer une intégrale en *inversant* les signes usuels des variables muettes et liées (*inversion* des lettres *x* et *a* comme paramètre et variable d'intégration) mais il n'y a dans leur étude pas de variation de registres.

- une technique τ_R qui n'utilise qu'un seul registre mathématique R ;
- une technique $\tau_{R \to R'}$ qui correspond à une conversion d'un registre R vers un registre R'.

La restriction au cadre numérique n'est pas une nécessité *a priori* mais permet d'éviter un écueil. Dans le cadre numérique, au moins pour les questions que je considère, les conversions ont toutes une partie algorithmique ou algorithmisable – ou presque –, partie qui peut être considérée comme une technique. Sans cette propriété, on risquerait d'assimiler une conversion à une technique ce qui masquerait la distance cognitive irréductible entre conversion et traitement, précisément ce je voudrais conserver.
Il faut ici distinguer deux types de techniques que nous notons τ_R. Ce peut être évidemment un traitement proprement dit, c'est-à-dire une transformation sémiotique interne à un registre R, ou bien un autre type de technique qui fournit une réponse externe au registre R. Donnons un exemple de ce deuxième type : pour déterminer la parité d'un nombre écrit en base a, il n'y a pas forcément de transformation (si a est pair) et surtout le résultat n'est pas exprimé dans le registre initial mais en langue naturelle : « vingt est pair » ou « treize est impair » – il ne s'agit donc pas d'un traitement au sens strict de Duval.
De même, s'il est clair qu'une technique mathématique ne se fait pas toujours de manière interne à un registre, ce cadre d'analyse permet de décomposer une technique mathématique comme une succession de techniques d'un des deux types précédents. Prenons l'exemple suivant issu de (Nikolantonakis & Vivier, 2010) sur la numération : pour trouver le successeur de $(66)_{sept}$, on peut :

- effectuer un traitement (ou technique) en base sept pour trouver $(100)_{sept}$.
- convertir $(66)_{sept}$ en base dix puis déterminer le successeur codé en base dix qui est 49 (et éventuellement reconvertir en base sept).

L'objectif de cette reformulation des traitements et conversions dans le langage des praxéologies est de conserver leur différence cognitive tout en les considérant au sein d'une organisation mathématique que donne la TAD. Cette distinction des techniques permet une conciliation des deux cadres sur le point crucial des conversions.
Il est clair que, dans notre cadre d'analyse, du caractère cognitif spécifique d'une conversion nous ne conservons qu'une partie qui contient notamment le choix conscient d'un sujet de faire cette conversion. C'est ainsi que parfois la différence cognitive entre une conversion et un traitement peut s'effacer totalement car seule la dimension algorithmique, qui est une technique au sens de la TAD, est du ressort du sujet, soit parce que l'on demande explicitement au sujet de faire cette conversion, soit parce qu'elle correspond à une technique qui a été travaillée dans l'institution pour effectuer un certain type de tâches pour un exemple avec les bases de numération pour l'écriture des entiers cf. Nikolantonakis & Vivier, 2009, 2010, 2013).

Les entiers codés en base quelconque pour des étudiants-professeurs des écoles

En collaboration avec Kostas Nikolantonakis nous étudions l'impact des bases de numération différentes de dix dans les techniques mises en œuvre par des étudiants-professeurs du premier degré avec une comparaison des deux populations étudiées, française et grecque (Nikolantonakis & Vivier, 2009, 2010, 2013) en ce qui concerne le niveau de la *praxis* (savoir-faire). Plus récemment (Nikolantonakis & Vivier, 2016), nous poursuivons l'étude dans le modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) de Kuzniak (2011).
Avec des tableaux de pourcentages et avec une faible population française dans la première étude (2009), nous n'avons pas pu mettre en évidence notre hypothèse principale : au-delà des principes mathématiques identiques, les numérations définies par des bases différentes donnent lieu a des registres différents. Pour cela, nous voulions nous appuyer sur la différence

cognitive avancée par Duval entre traitement et conversion. Il a donc fallu une deuxième expérimentation (Nikolantonakis & Vivier, 2010, 2013) avec des populations plus grandes et plus équilibrées (139 étudiants français et 195 étudiants grecs) afin de pouvoir recourir à l'Analyse Statistique Implicative (ASI), avec le logiciel CHIC (Gras, Régnier & Guillet, 2009). Cet outil s'est révélé indispensable en montrant les similarités entre les différentes variables de traitement d'une part et de conversion d'autre part. L'ASI a ainsi permis de valider notre hypothèse en la précisant puisque c'est la distinction entre la base dix et les autres bases de numération que nous mettons en évidence. Plus précisément, on relève deux difficultés cognitives particulièrement importantes pour le codage des nombres dans la numération de position :

- tout d'abord l'introduction de nouveau registres de représentation R_a avec $a \neq dix$;
- puis l'introduction des registres de représentation R_a avec $a > dix$, car cela nécessite de nouveaux signes pour les chiffres.

Ces difficultés cognitives relatives aux registres R_a, avec $a \neq dix$ d'une part et $a > dix$ d'autre part, sont évidemment liées et semblent, d'après notre étude, stables d'une institution à une autre et d'un enseignement à un autre. En particulier, on remarque que beaucoup d'étudiants ne font pas de traitement dans une base autre que dix et, pour effectuer une tâche énoncé dans une base autre que dix, procède d'abord à une conversion en base dix – et ce malgré les variables didactiques choisies pour rendre coûteux cette conversion. Tout se passe comme si les nombres entiers n'étaient considérés comme des nombres que lorsqu'ils sont codés en base dix puisqu'il s'agit du registre où l'on dispose de techniques pour effectuer les tâches.
Toutefois, l'interprétation nécessite d'aller plus loin car les registres et les types de tâches influencent conjointement l'activité mathématique. On propose alors une hiérarchie des cinq types de tâches de l'étude. En particulier, l'item qui demande la parité d'un nombre codé en base impaire a été très difficile bien que la base, sept, soit inférieure à dix car aucune technique interne à R_a n'est disponible.
Nous pointons également le potentiel technologique du registre de l'écriture polynomiale qui constitue un registre très efficace pour traiter les types de tâches pour lesquels on ne dispose pas de technique institutionnelle – c'est le cas de la recherche de la parité d'un nombre en base impaire.
Du point de vue de la comparaison des deux populations, française et grecque, on ne relève que peu de différences. La principale étant que les items sur les successeurs et prédécesseurs de nombres codés dans des bases autres que dix sont beaucoup mieux réussis par les étudiants grecs, mais il faut signaler que ce type de tâches a été largement travaillé, beaucoup plus que pour la population française. La seule *vraie* différence concerne l'écriture polynomiale qui n'est utilisée par aucun étudiant grec, mais peu d'étudiants français l'ont utilisée et il est difficile d'en tirer des conclusions.

Une étude en CP

En collaboration avec Kostas Nikolantonakis et David Block, nous étudions le rôle joué par le registre de représentation de l'énoncé (graphique ou chiffré) dans les choix des stratégies de résolution d'élèves en première année d'école primaire avec une comparaison des trois populations nationales étudiées (Block et al., 2012). L'étude porte sur 61 élèves français, 45 élèves grecs et 86 élèves mexicains à qui on a proposé deux séries de tests, à une semaine d'intervalle : le premier comportait 5 tâches proposées dans le registre graphique et le deuxième comportait les mêmes tâches dans le registre numérique chiffré.
À partir de cette étude internationale sur les problèmes numériques en fin de première année de l'école primaire, nous avons mis en évidence l'influence à la fois des registres de représentation et des praxis sur l'activité mathématique des élèves. Plus précisément, nous

pouvons avancer une hypothèse sur l'importance du registre de représentation pour certains types de tâches.
Pour un type de tâches travaillé, on suppose qu'un élève reconnaît ce type de tâches, le registre dominant pour le traitement est numérique – et ce, même si celui-ci n'est pas le meilleur registre pour le traitement. Il n'y a de ce fait pas de réelle influence du registre de l'énoncé sur les stratégies des élèves même si, comme nous l'avons dit, les activités changent puisque cette stratégie globale peut nécessiter une conversion selon l'énoncé.
On peut avancer deux explications :

- le coût d'une procédure graphique par rapport à une procédure numérique, surtout lorsqu'il y a un minimum de maîtrise de la praxis numérique – ce qui est notamment le cas pour les types de tâches qui ont été travaillés ;
- lorsque l'on traite d'un type de tâches qui a été travaillé, le rôle de l'institution est justement de développer une praxis numérique.

Pour les autres types de tâches, le registre de l'énoncé influence largement les traitements et la réussite. Car si l'énoncé est essentiellement numérique, on a tendance à y rester ce qui ne favorise pas forcément la réussite. Cette tendance semble venir directement du phénomène précédent qui favorise le numérique. En revanche, un énoncé graphique permet de mieux appréhender un type de tâches non travaillé.
Comme le signale Duval, la coordination des registres est importante. Mais il nous semble que cette importance ne s'exprime pas de la même manière selon le type de tâches :

- s'il est travaillé, l'important est de maîtriser la conversion entre le registre graphique et le registre numérique et la praxis numérique enseignée (cf. par exemple pour la somme de deux nombres où beaucoup d'élèves ne maîtrisent pas la technique de la somme) ;
- s'il n'est pas travaillé, l'important est une bonne coordination des deux registres, sans se limiter à la maîtrise des conversions, comme par exemple lors d'une procédure qui est principalement un traitement dans un des deux registres mais avec un contrôle de l'activité dans l'autre registre (notamment pour la tâche d'une répartition équitable de 24 gâteaux dessinés entre 3 enfants).

Néanmoins, les différents points explicités sont directement liés à l'enseignement reçu que ce soit à travers des cultures différentes, comme nous l'avons mis en évidence avec les profils de chaque pays, ou plus vraisemblablement à travers des profils d'activité enseignante dans les classes, ce qui nécessite une étude plus approfondie. Globalement, il nous semble que l'enseignement se focalise un peu trop sur le registre de l'écriture chiffrée (cela est plus flagrant chez les élèves grecs). Car si cela paraît normal pour le développement des praxis numériques (ce registre est tout de même plus puissant que le registre graphique), il n'en reste pas moins que cela entrave l'activité des élèves lorsqu'ils sont confrontés à un type de tâches nouveau car l'enseignement reçu ne permet pas d'entrer sereinement dans des problèmes plus complexes ni de choisir le(s) registre(s) pour les traitements.

Conclusion sur les nombres entiers

Pour les nombres entiers, l'intérêt d'avoir d'autres registres de représentation chiffrés pour les nombres entiers est de permettre de prendre de la distance et de ne pas confondre l'objet mathématique et sa représentation (Duval, 2006). Mais on voit l'intérêt de pouvoir faire des traitements dans ces nouveaux registres, sinon l'objectif risque de ne pas être atteint, la représentation nouvelle n'étant pas perçue comme un nombre. Au-delà du développement des praxéologies, le développement des R-praxis semble de première importance.
Cette question se retrouve également dans le cas de l'étude en CP. Mais on perçoit un autre aspect : avoir un autre registre, graphique ici, dans lequel des traitements sont possibles

permet d'effectuer des tâches que l'on ne sait pas forcément effectuer dans le registre chiffré. Cette conclusion n'est pas nouvelle et rejoint les travaux de Douady (1986) sur les changements de cadre. Au-delà de ce constat déjà ancien, il semble qu'il faille, en plus des nécessaires conversions entre représentation, également considérer la coordination des registres en prenant en compte les traitements. Cela permet d'effectuer des tâches complexes et inédites par un jeu entre deux registres et un contrôle des traitements dans un registre par des traitements dans un autre registre (comme par exemple : isoler graphiquement la part de chaque enfant par un contrôle numérique de la taille des parts par des élèves de 6-7 ans). Il en est de même avec l'étude des entiers dans des bases autres que dix avec l'utilisation du registre de l'écriture polynomiale.

2- LES RATIONNELS EN ÉCRITURE DÉCIMALE

Introduction

Dans l'enseignement secondaire français, les rationnels apparaissent essentiellement comme des fractions. Ceci, comme annoncé ci-dessus, peut entraîner une confusion entre l'objet et sa représentation. Parallèlement, on ne dispose pas d'un registre numérique de représentation valable pour tous les nombres réels ce qui marque une rupture avec les autres ensembles de nombres rencontrés dans l'enseignement secondaire. Les développements décimaux illimités pourraient résoudre ces deux problèmes. Je me concentre plus particulièrement, à la suite des *idécimaux* de Bronner (1997, 2005), sur le cas des développements périodiques en m'appuyant sur des résultats mathématiques afin de pouvoir faire les opérations de base dans ce système de représentation. En se limitant à la somme, il est déjà possible de comprendre pourquoi, si l'on veut des nombres, il est nécessaire d'imposer l'égalité entre 0,999… et 1. Ainsi, opérationnaliser ce registre des Développements Décimaux Illimités (DDI) périodiques permet d'avoir des retombées intéressantes sur les connaissances en jeu, sur la conceptualisation. Il permet en outre, comme précédemment, d'avoir un registre chiffré, valable pour tous les nombres réels, pour lesquels des traitements sont disponibles ce qui permet d'envisager des nouvelles représentations chiffrées comme des représentations d'objets mathématiques, des nombres. Il reste que ces traitements sont limités au cas des rationnels.
Dans cette partie, je traite ainsi largement de l'égalité entre 0,999… et 1, discussion déjà ancienne comme on le verra avec les arguments de Zénon. Mes premières recherches menées sur le sujet (Vivier, 2011) renforcent le fait déjà bien connu (Tall & Schwarzenberger, 1978 ; Sierpinska, 1985 ; Mena-Lorca, Mena-Lorca, Montoya-Delgadillo, Morales & Parraguez, 2015) que pour beaucoup d'élèves du lycée et une proportion importante d'étudiants de mathématiques en première année d'université (niveau L1) on a l'inégalité stricte $0,\overline{9}<1$.

Depuis l'Antiquité

Commençons par poser le problème en nous référant aux arguments de Zénon d'Elée. Il n'est ici pas question de discuter de la validité de ces arguments ni de leur réfutation par Aristote (1969) dans la Physique VI ou encore Bergson (1889). Il s'agit ici simplement de voir et de comprendre où nous conduisent ces arguments du point de vue mathématique et sémiotique. Pour simplifier, la distance totale est prise égale à 1. Un groupe de chiffres surligné signifie, comme usuellement, la répétition à l'infini vers la droite de ce groupe de chiffres. Dans ce prologue, nous utilisons la base deux car elle est bien adaptée au problème de la dichotomie de Zénon.

Dans le premier argument de Zénon, la dichotomie, les distances à parcourir sont, successivement, 1/2, 1/4, 1/8… ce qui s'écrit, en base deux : 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; etc. (figure 1). Allons-nous jusque $0,\overline{01}$? Avons-nous pour autant 0 ? Symétriquement, les distances restantes, pour atteindre l'arrivée, sont égales à 1/2, 1/2+1/4, 1/2+1/4+1/8,… , soit, toujours en base deux : 0,1; 0,11; 0,111 etc. Allons-nous jusque $0,\overline{1}$? A-t-on finalement 1 ?

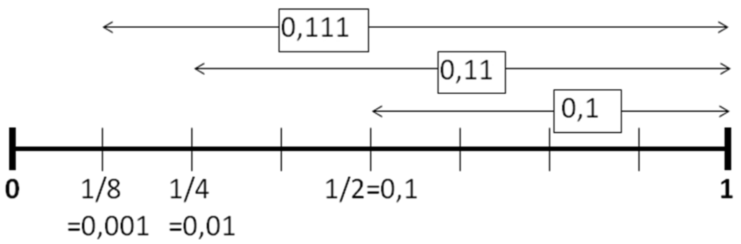


Figure 1 : la dichotomie (les nombres sont écrits en fraction et en base deux)

A partir de l'argument de Zénon, il y a deux points intéressants si l'on veut concilier les aspects mathématiques et la réalité (la notion de limite est bien sûr sous-jacente ainsi que celles des infinis potentiel et actuel) :

1. le fait de considérer la totalité des distances, à l'infini ;
2. le fait de comprendre et de justifier que cette totalité est 1 (ou 0).

Du point de vue mathématique, la situation est identique en base dix avec 0,999… et 1. Les problèmes relatifs aux points (1) et (2) surgissent chez les étudiants comme dans la figure 2 où il s'agit d'un étudiant de première année de mathématiques ; l'égalité 0,999…= 1 a pourtant été enseignée au premier semestre.

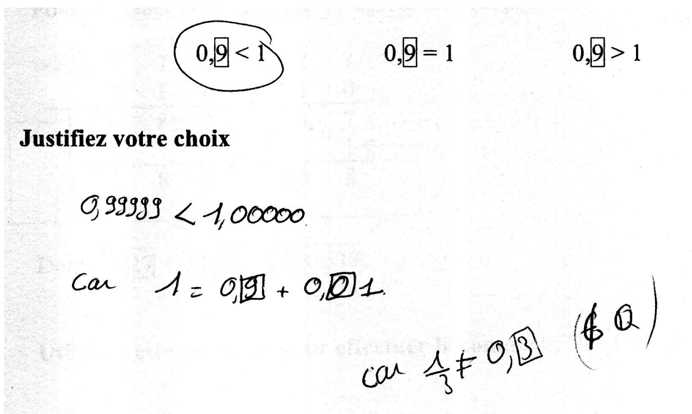


Figure 2 : Un étudiant de L1, mathématiques

Ce type de réponse est à rapprocher d'une conception non standard des nombres. Des étudiants semblent en effet avoir développé des conceptions proches de l'analyse non standard (Ely, 2010) ce qui ne peut manquer de créer des malentendus dans l'enseignement. Nous avons interprété cela en terme de paradigmes dans le modèle des Espaces de Travail Mathématique (Montoya & Vivier, 2016 ; Kuzniak, Montoya-Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2016).

Les *justifications* de l'égalité

Voici quelques justifications, recensées par Tall et Schwarzenberger (1978), de l'égalité $0,\overline{9}=1$ qui s'appuient de fait sur les calculs dans **Q** :

1. $1/3=0,\overline{3}$ donc $3\times 1/3 = 3\times 0,\overline{3}$ d'où $1 = 0,\overline{9}$;

2. $10\times 0,\overline{9} = 9+0,\overline{9}$ donc $9\times 0,\overline{9} = 9$ et $0,\overline{9} = 1$;
3. $1/9=0,\overline{1}$, $2/9=0,\overline{2}$, etc. jusque $8/9=0,\overline{8}$ et $9/9=0,\overline{9}$;
4. de manière plus « légale », comme le dit Tall lui-même, faire une division par 2 pour prouver que $(1+a)/2=a$ pour $a= 0,\overline{9}$ et que donc $a=1$ par des traitements algébriques.

Tall et Schwarzenberger (1978) parlent de légalité parce que l'on n'a pas défini les opérations (addition et multiplication par un entier, soustraction) sur ces nouveaux objets (pour le cas 4, on abaisse successivement les chiffres, on n'a donc pas besoin de considérer l'ensemble infini de chiffres). Cela gêne d'ailleurs les enseignants lorsqu'ils produisent ces justifications avec ces calculs.
Des justifications analytiques sont également possibles comme le calcul d'une somme d'une série géométrique (limite) ou par un argument topologique (Dubinsky, Weller, Michael, Mc Donald & Brown, 2005).
En outre, malgré ces tentatives de justifications, cela ne convainc pas les étudiants (Mena et al. 2015 ; Njomgang Ngansop & Durand-Guerrier, 2014) même s'ils peuvent reproduire ces arguments (cela est sans doute lié à l'autorité de l'enseignant).
Les taux de réponse pour l'inégalité $0,\overline{9}<1$ sont élevés avec peu de variations entre les différentes études ce qui semble indiquer un obstacle :

- au début du lycée (113 élèves) : 100% (Vivier, 2011),
- à l'université pour des étudiants de mathématiques : 13/21 (Vivier, 2011) ; 20/36 (Tall, 1980) ; 23/40 et 12/19 (Mena-Lorca et al., 2015) avec une stabilité autour de 60% pour ce public *mathématicien*,
- pour 204 étudiants-professeurs du 1er degré (Weller, Arnon et Dubinsky, 2009) : 73,5%.

On note en effet une opposition frontale et forte avec des connaissances très anciennes sur l'ordre en écriture décimale, connaissances qui ont fait leur preuve et qui entraîne $0,\overline{9}<1$. Ainsi, la nécessaire réorganisation des connaissances s'avère complexe, plus complexe que dans le cas des nombres négatifs avec $(-1)\times(-1)=1$ où, malgré la difficulté conceptuelle (Glaeser, 1981), il n'y a pas d'opposition de connaissance.

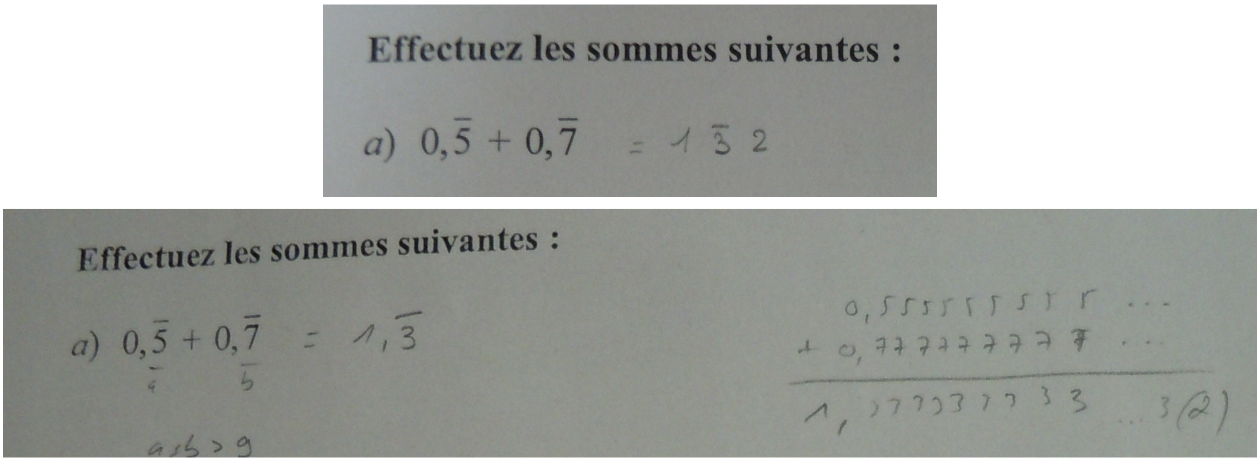
Les opérations

Comme dit dans la 1re partie, pour que ces écritures acquièrent un statut de nombre, il est nécessaire de pouvoir faire des opérations – du moins on peut le penser. Regardons comment on peut procéder avec un cas simple comme $0,\overline{5}+0,\overline{7}$:

i. $0,55+0,77=1,32$; $0,5555+0,7777=1,3332$ etc.
ii. $5/9 + 7/9 = 12/9 = 1+3/9 = 1,\overline{3}$
iii. $0,\overline{3}+0,\overline{2}+0,\overline{7} = 0,\overline{3}+0,\overline{9} = 1,\overline{3}$
iv. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+7}{10^n}=12\times\frac{1}{9}$ par un calcul d'une somme de série.

La procédure (i) nécessite d'avoir des connaissances sur les sommes d'écritures périodiques et en particulier de devoir supprimer les chiffres de droite comme on peut parfois le constater. Néanmoins, elle est source d'erreur et, comme pointé par Margolinas (1988), peut amener à des écritures infinitésimales (on les rencontre effectivement, notamment chez des étudiants-professeurs de mathématiques en Master 2, cf. figures 3a et 3b). Cette procédure se base essentiellement sur un point de vue processus, au sens de la théorie APOS (Arnon et al., 2014), des écritures décimales périodiques.
La procédure (ii), par une double conversion, est plus classique et permet de comprendre pourquoi l'on ne dispose pas de procédure directe de somme en écriture décimale puisque l'on n'en a pas besoin pratiquement. Elle apparaît aussi dans les réponses des étudiants (figure 4). Néanmoins, comme nous l'avons vu en partie 1 sur les entiers, il semble difficile

d'accéder à la notion de nombre si on évite les opérations par une conversion.
La procédure (iii) nécessite la connaissance de l'égalité $0,\overline{9}=1$. Elle n'apparaît pas chez les étudiants des études que nous avons menées (en première et cinquième années d'université, en mathématiques).
La procédure (iv) sur les séries semble être dans un autre *monde* et la coexistence de l'inégalité $0,\overline{9}<1$ avec le calcul correct de la somme de la série $\Sigma 9/10^n$ est tout à fait possible comme le rapportent Njomgang Ngansop et Durand-Guerrier (2014) : le calcul de la somme de la série est perçu comme valide ou est effectué correctement mais, malgré cela, des étudiants continuent d'affirmer l'inégalité. Tall et Vinner (1981) interprètent cela comme des activations de *concept images* différentes : « different stimuli can activate different parts of the concept image, developing them in a way which need not make a coherent whole~~.~~ » (Tall & Vinner, 1981, p. 152).
Force est de constater que l'on est démuni et, dans ce contexte, on comprend bien l'élaboration d'un logiciel pour l'étude de Weller et al. (2009) qui sert d'appui pour effectuer les opérations en restant dans le registre des écritures décimales en prenant un point de vue objet. Mais ce qu'il me paraît important dans cette étude (voir aussi Arnon et al., 2014, chapitre 8) est qu'un travail sur les opérations mathématiques améliore la compréhension de $0,\overline{9}=1$: ils remarquent l'augmentation du taux des étudiants qui affirment l'égalité avec une amélioration de la qualité des arguments avancés.



Figures 3a et 3b : étudiants-professeurs (Vivier, 2012)

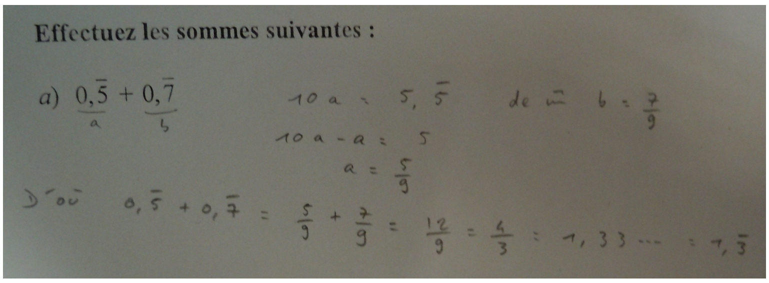


Figure 4 : étudiants-professeurs (Vivier, 2012)

Les opérations avec les mots circulaires

Les études qui suivent se nourrissent de mes recherches en mathématiques en collaboration avec Benoît Rittaud. Il s'agit d'une étude sur une extension du système de numération de Zeckendorf (1972) où les entiers sont codés à l'aide de la suite de Fibonacci : les nombres de base sont issus de la suite $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ avec $F_0=1$ et $F_1=2$ et non pas $B_{n+1}=b\times B_n$ avec $B_0=1$ pour un codage usuel en base b. Nous étudions la structure générale de cet ensemble de

nombres et nous caractérisons les éléments périodiques comme des rationnels (Rittaud & Vivier, 2012). Dans cette numération, nous n'avons besoin que des chiffres 0 et 1 (sans avoir deux 1 consécutifs du fait de la relation entre les unités de numération). Par exemple : 1010010 code le nombre $1\times21+0\times13+1\times8+0\times5+0\times3+1\times2+0\times1=31$ et les nombres périodiques $\overline{0010010}100$ et $\overline{001001}010$ codent tous deux 1/2 comme solution de $2x=1$.
Tout devait être construit mathématiquement et notamment la somme de deux F-adiques périodiques, nos nouveaux *nombres*. Cela n'a pas été simple à cause de la gestion des retenues, bien plus complexe qu'en base usuelle de numération, et cela nous a amenés à concevoir les périodes comme de nouveaux objets, les *mots circulaires*, pour comprendre leur fonctionnement.
Les mots circulaires s'avèrent être des objets intéressants à plus d'un titre. En particulier, une période d'un rationnel en écriture décimale peut être considérée comme un mot circulaire. Cela nous permet une construction du corps **Q** à partir des écritures décimales périodiques en donnant des algorithmes pour effectuer les 4 opérations de base sans utiliser l'écriture fractionnaire. Les cas de la somme et de la différence sont détaillés à la suite.

La somme

Présentons tout d'abord l'algorithme sur quatre exemples (Vivier, 2012) où les trois éléments essentiels ressortent : faire débuter la période au même rang, avoir des périodes de même taille, gérer l'éventuelle retenue à gauche.

1. Le premier exemple (figure 5a) est celui où il n'y a aucune adaptation par rapport à l'algorithme de somme de deux décimaux en écriture décimale : $34,0\overline{45} + 2,5\overline{27} = 36,5\overline{72}$.
2. L'exemple (figure 5b) de la somme $5,7\overline{248} + 8,\overline{307} = 5,7\overline{248} + 8,3\overline{073} = 14,0\overline{321}$ montre comment procéder lorsque les périodes ne commencent pas au même rang (il faut *décaler* la période tout en permutant ses chiffres).
3. L'exemple (figure 5c) de la somme $0,\overline{34} + 7,\overline{202} = 0,\overline{3434} + 7,\overline{202202} = 7,\overline{545636}$ montre comment procéder lorsque les périodes n'ont pas la même taille (il suffit d'utiliser le PPCM des tailles).
4. Le dernier exemple (figure 5d) concerne le problème de la gestion de la retenue qui *sort de la période*. Nous marquons en gras les retenues qu'il faut compter deux fois : au premier chiffre de la période et au premier chiffre à gauche de la période (le 0 trouvé en premier est donc barré et remplacé par un 1). On trouve : $3,\overline{24} + 4,\overline{96} = 8,\overline{21}$.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & \\
 & 3 & 4, & 0 & \overline{4} & \overline{5} \\
+ & & 2, & 5 & \overline{2} & \overline{7} \\
\hline
 & 3 & 6, & 5 & \overline{7} & \overline{2}
\end{array}$$

Figure 5a

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & 1 & \\
 & & 5, & 7 & \overline{2} & \overline{4} & \overline{8} \\
+ & & 8, & 3 & \overline{0} & \overline{7} & \overline{3} \\
\hline
 & 1 & 4, & 0 & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1}
\end{array}$$

Figure 5b

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0, & \overline{3} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} \\
+ & 7, & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\
\hline
 & 7, & \overline{5} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{3} & \overline{6}
\end{array}$$

Figure 5c

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \\
 & 3, & \overline{2} & \overline{4} \\
+ & 4, & \overline{9} & \overline{6} \\
\hline
 & 8, & \overline{2} & \cancel{0}1
\end{array}$$

Figure 5d

Figure 5 : Exemples de somme

Une étude sur l'utilisation d'un algorithme, qui est donné sur un exemple, de somme de deux

rationnels en écriture décimale a été menée en classe de seconde (113 élèves) et de première année d'université (14 étudiants) et est exposée dans (Vivier, 2011). Du point de vue procédural, cet algorithme de somme est plutôt bien compris en seconde, malgré quelques problèmes d'identification des périodes, mais la compréhension conceptuelle de cet algorithme semble loin des possibilités des élèves de ce niveau. Il en est de même en formation des enseignants du premier degré qui, en outre, préfèrent conserver les procédures par approximation, sans pour autant pouvoir les contrôler.
En revanche, en première année d'université il n'y a quasiment plus de problème, ni procéduraux, ni conceptuels. Une étude est également faite sur la comparaison et surtout sur la somme avec notamment une étude des techniques pour effectuer la somme de deux rationnels en écriture décimale illimitée périodique et une discussion avec la théorie APOS (Arnon et al., 2014).
Ces deux études permettent de justifier que cet algorithme de somme peut tout à fait être considéré dans l'enseignement français, mais sans doute à partir de la fin de l'enseignement secondaire pour les classes scientifiques. Il reste néanmoins à étudier expérimentalement l'intérêt que peut présenter cet algorithme de somme.
Une étude (Vivier, 2012) en formation d'enseignant du second degré (12 enseignants) a été menée dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). Sur la base d'un test diagnostique sur les comparaisons et sommes, des groupes ont été formés avec la consigne de trouver un algorithme de somme pour les rationnels en écriture décimale. Si aucun groupe n'a trouvé d'algorithme, les trois points cruciaux ont été globalement trouvés (début et taille des périodes, gestion des retenues) et résolus pour la plupart des groupes sauf en ce qui concerne la gestion des retenues. Cependant, un groupe, sur un exemple, a bien identifié le problème (figure 6) et un autre groupe a trouvé la procédure à suivre sans la comprendre (figure 7) ce qui fait que collectivement un algorithme, proche de celui que l'on propose, a pu être élaboré.

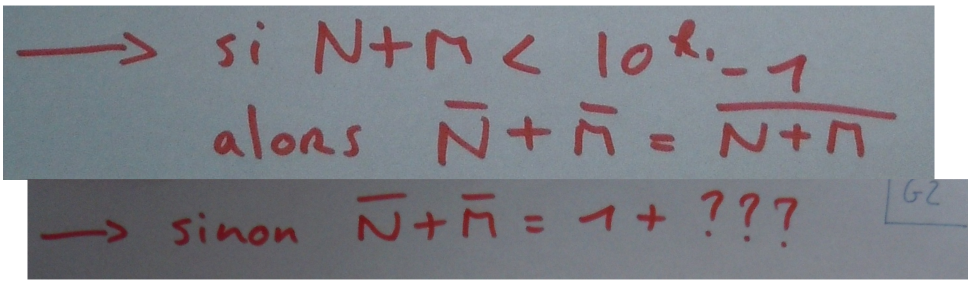


Figure 6 : Par des étudiants-professeurs de M2 MEEF 2nd degré (Vivier, 2012)

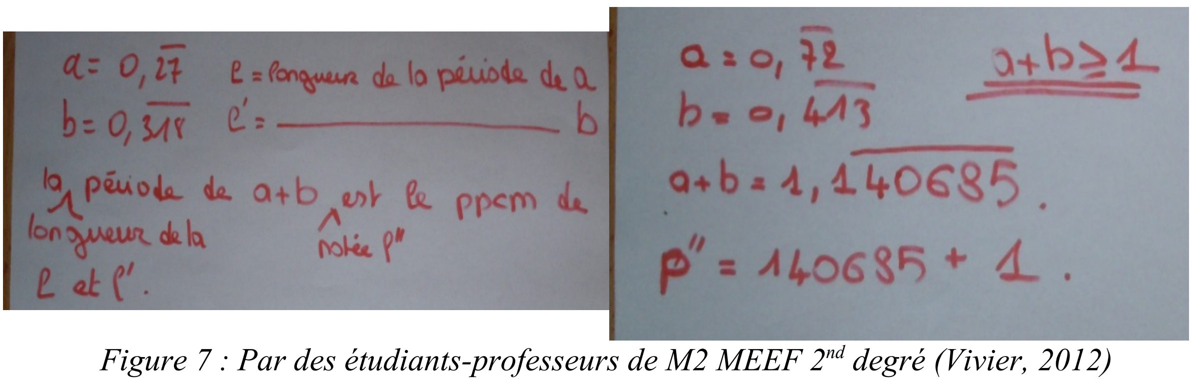


Figure 7 : Par des étudiants-professeurs de M2 MEEF 2nd degré (Vivier, 2012)

En outre, un groupe a explicitement considéré les périodes en les considérant comme des objets à part entière en essayant de les ajouter (figure 6). Il y a bien, sur cet exemple, l'encapsulation d'un processus en un objet, la période, sur lequel on peut effectuer des traitements (ici des sommes). Ce groupe a de fait découvert un nouvel objet, les mots circulaires.

Le problème de la soustraction et les autres algorithmes

L'algorithme de la somme permet en effet d'obtenir rapidement l'identité $0,\overline{9}+a=1+a$ pour tout a dont la période n'est pas $\overline{0}$. Cette relation n'est pas nouvelle (Richman, 1999) mais la nouveauté ici est qu'elle apparaît comme une conséquence de la définition de la somme sur ces écritures chiffrées. Un jeu est alors possible entre la comparaison et la somme qui ont des caractéristiques qui s'opposent : numériquement on devrait avoir $0,\overline{9}<1$ mais algébriquement on devrait avoir, par simplification, $0,\overline{9}=1$. Il est possible de faire ressortir cette opposition des deux points de vue des travaux des étudiants en L1 car « on calcule $0,\overline{9}+a$ » et « on voit $1+a$ » (Rittaud & Vivier, 2014).
Ainsi, tel quel, on n'a pas un monoïde régulier, donc pas de soustraction possible (on ne peut pas définir un groupe)… à moins d'identifier $0,\overline{9}$ et 1 (mais ce n'est pas une obligation ! Tout dépend de ce que l'on veut). Ainsi peut-on construire le corps **Q**. Et il n'est pas sans intérêt de remarquer que dans tous les calculs *prouvant* $0,\overline{9}=1$ il y a une soustraction (excepté pour la justification s'appuyant des relations comme 1/3=0,333… etc. où la conversion définit un morphisme entre l'ensemble des développements décimaux périodiques et **Q**).
En identifiant $0,\overline{9}$ et 1, on peut donc définir une soustraction qui fonctionne de manière identique à la somme avec une gestion similaire des retenues. La multiplication est plus complexe (il faut faire des sommes *triangulaires* ou considérer des divisions par 9, 99, 999, etc.). La division n'est pas si difficile et permet de revisiter l'algorithme usuel de la division : multiplier par une puissance de 10, c'est juste un décalage.
Une recherche historique a permis de retrouver les travaux de Marsh (1742), et d'autres comme Malcom ou Hatton (cf. Rittaud & Vivier, 2014)[3] qui avait proposé ces algorithmes en s'appuyant fortement sur les fractions et la conversion en écriture décimale – cela nous a permis de simplifier l'algorithme de la multiplication. Les travaux de ces comptables semblent avoir été oubliés par l'histoire des mathématiques.

Une étude en L1

L'étude (Rittaud & Vivier, 2014) a été menée en L1 auprès de 29 étudiants, sur deux jours. Le premier jour un test diagnostique a été proposé sur les écritures décimales illimitées, des comparaisons, des sommes, des différences. Cela a permis de former les groupes du deuxième jour autour de l'algorithme de somme, qui est donné sur des exemples. Si la contradiction apparaît, en revanche l'égalité n'émerge pas de cette contradiction essentiellement pour deux raisons, différentes selon que le groupe a affirmé l'égalité ou non : (1) l'égalité a été rappelée en début d'année et elle est avancée comme une évidence sans que l'on puisse attribuer sa présence à la contradiction ; (2) le temps de travail sur l'algorithme a été sans doute trop court pour que les étudiants puissent avoir suffisamment confiance en lui pour écarter l'inégalité $0,\overline{9}<1$. Enfin, une étude plus théorique en TAD est exposée utilisant les praxéologies et en interprétant l'égalité $0,\overline{9}=1$ comme une technologie cachée.
Cette position pour discuter de la comparaison entre $0,\overline{9}$ et 1 est totalement nouvelle. La plupart des travaux, tels ceux de Tall (1980) et de Dubinsky et al. (2005), se placent d'emblée dans un ensemble construit de nombres qui est de fait soit **Q** soit **R**, même si l'ensemble de référence n'est pas toujours explicité. On justifie alors l'égalité $0,\overline{9}=1$ soit par des opérations dans **Q** (Tall & Schwarzenberger, 1978), soit par des considérations topologiques (Dubinsky

3 A noter aussi le travail en révision : Rittaud, B. & Vivier, L. La mystérieuse égalité 0,9999…=1 : regards didactiques, mathématiques et historiques, projet d'ouvrage collectif aux PUFC.

et al., 2005). Pour les premières justifications, prenons, par exemple, le calcul $10\times0,\overline{9}-0,\overline{9}=9$ qui mène à $0,\overline{9}=1$. Pourquoi croire cela au lieu de la très naturelle inégalité ? Si l'on fait comme d'habitude, avec les opérations on aboutit à l'égalité alors qu'avec la comparaison on aboutit à l'inégalité. Bref, les mathématiques semblent incohérentes sur ce point et en tout cas il n'y a pas d'explication. Quant aux justifications topologiques, basées sur la complétude de **R**, elles me paraissent d'un niveau beaucoup trop élevé pour fournir une explication raisonnable à ce public : c'est comme si l'on justifiait l'existence du PGCD dans le secondaire par les idéaux dans l'anneau principal **Z**.

Conclusion de la partie 2

Ici encore, on voit l'intérêt d'opérationnaliser le registre des écritures décimales illimitées. D'une part cela permet de ne pas avoir un unique registre de représentation chiffré pour les rationnels ce qui pourrait avoir pour conséquence la confusion (répandue) entre nombres rationnels et fractions exactement comme nous l'avons affirmé avec les nombres entiers et l'écriture décimale de ces objets.
En outre, comme annoncé, le gain conceptuel paraît important. Il permet en effet de comprendre, d'une manière nouvelle, le besoin de l'égalité entre $0,\overline{9}$ et 1 afin d'avoir un ensemble de nombres avec une structure algébrique intéressante (pouvoir définir une soustraction, pouvoir simplifier) comme dans l'extension des entiers naturels aux entiers relatifs où l'on impose $(-1)\times(-1)=+1$ afin de conserver des propriétés algébriques (le fameux *principe de permanence*).
Cela, alors même que l'enseignement secondaire français semble exclure toute référence aux écritures décimales périodiques, nous paraît important dans l'apprentissage des premières connaissances sur les nombres réels. Les écritures décimales illimitées constituent en effet un registre de représentation chiffré valable pour tous les nombres réels où l'on peut percevoir la propriété de complétude spécifique de **R**. On pourra se référer à (Oktaç & Vivier, 2016) pour une présentation de recherches sur les nombres réels.

3- LES TANGENTES AUX COURBES

Introduction

Dans mes investigations pour écrire l'ouvrage de vulgarisation « La géométrie analytique » (Vivier, 2006), je me suis familiarisé avec les méthodes algébriques d'obtention des tangentes aux courbes algébriques et plus spécifiquement avec la méthode de Descartes. C'est avec cette référence historique que j'ai commencé à étudier l'enseignement de la notion de tangente en France. Je propose alors dans (Vivier, 2010a, 2010b) de travailler sur la notion de tangente d'un point de vue algébrique avant de rentrer pleinement dans l'analyse. Je m'inspire de la méthode de Descartes et je m'appuie sur un logiciel libre de géométrie dynamique.
Cette méthode permet de déterminer les tangentes à une courbe algébrique, qu'elle soit représentative d'une fonction ou non, en considérant une condition sur les points d'intersection entre une droite passant par le point et la courbe. Il s'agit alors d'un faisceau de droites qui est constitué, cette fois-ci, des sécantes dans un sens usuel (sauf pour la, ou les, tangente(s)). Cette condition revient, dans les cas les plus courants, à la recherche d'une intersection d'ordre 2 (ordre maximum dans le cas général). Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de rechercher explicitement les points d'intersection, un travail sur les équations suffit. La méthode adaptée de Descartes (1637) se trouve en annexe 1.
Néanmoins, les notions d'algèbre nécessaires étant avancées (il faut considérer les équations

de courbes, savoir factoriser un polynôme par un monôme du premier degré) et vu les programmes du secondaire en France, il semble difficile de proposer ce déroulement en l'état à des lycéens. De plus, il est préférable de comprendre d'abord comment réagissent les enseignants avant de se lancer dans une expérimentation sur des élèves et ce d'autant plus que, lors de conférences en lycées, je m'étais aperçu que certains enseignants étaient récalcitrants à considérer le point de vue algébrique. Je me suis donc tourné, dans un premier temps, vers un public d'enseignants.

Un état des lieux

La limite des sécantes

Depuis plus d'un siècle (Beke, 1914), la notion de tangente sert à introduire la dérivation, notamment à travers la conception « limite des sécantes » (figure 8), pour ensuite définir plus généralement la tangente à une courbe représentative d'une fonction comme la droite dont le coefficient directeur est le nombre dérivé au point considéré. Bien sûr, il y a là une sorte de cercle vicieux du point de vue mathématique, mais cela n'est pas un problème du point de vue didactique. En effet, l'idée est de s'appuyer sur une conception des tangentes déjà-là pour aller plus loin et ensuite mieux définir ces tangentes.

En revanche, c'est le travail sur les tangentes pour aboutir au nombre dérivé qui est problématique. Plusieurs points sont à discuter :

- la notion de sécantes utilisée, « droite qui passe par deux points distincts de la courbe », n'est pas usuelle, alors que d'autres *sécantes* à la courbe peuvent être envisagées (voir la droite qui coupe la courbe en figure 8) ;
- on introduit la limite d'un quotient de nombres réels par une limite dans l'espace projectif de dimension 1 – n'est-ce pas un peu trop ? ;
- cette nouvelle conception de la notion de tangente n'est pas opérationnelle, pas proposée spontanément par les élèves, n'est plus utilisée jusque la fin des études secondaires ;
- elle s'accompagne souvent d'une activité TICE, mais selon les paramètres du logiciel utilisé il se peut que l'animation aboutisse à superposer exactement les deux points et la droite disparaît alors de l'écran ce qui renforce l'obstacle bien connu chez les élèves (Sierpinska, 1985) : *à la limite il n'y a plus de droite car il n'y a qu'un seul point* !

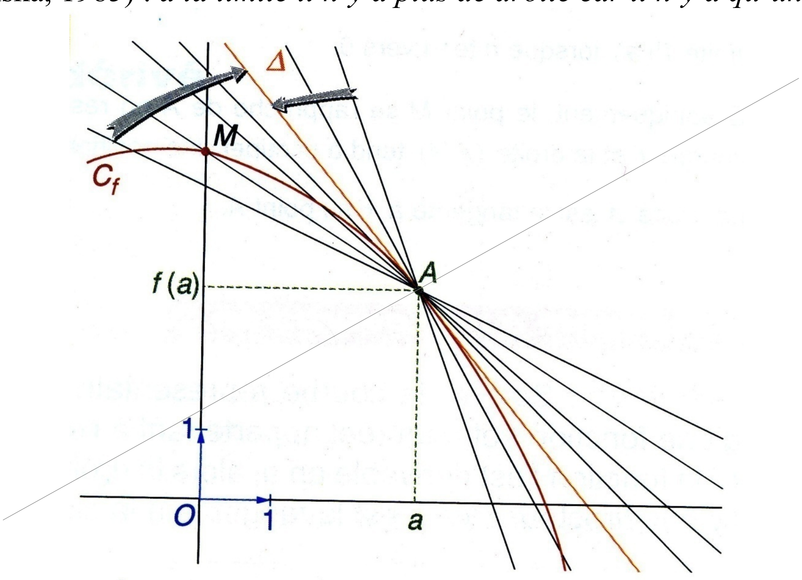


Figure 8 : extrait d'un manuel de 1ère S auquel on a ajouté une droite ne coupant la courbe qu'au point A : est-elle une sécante à la courbe ?

Conceptions relatives à la notion de tangente

Adaptant les travaux de Vinner (1991) et de Castela (1995), j'ai mené des études auprès de 88 élèves de 1re S, avant le chapitre sur la dérivation. Il se trouve que ces élèves ont des conceptions des tangentes qui s'opposent pour les 4/5 d'entre eux aux conceptions sur lesquelles on voudrait s'appuyer (sur 88 élèves ; Vivier, 2010b). En particulier, la conception UPI (une droite avec un Unique Point d'Intersection avec la courbe) est très forte et fréquemment restreinte au cercle – la seule courbe pour laquelle les élèves ont entendu parler de tangente en mathématiques.
En début d'université (Montoya & Vivier, 2015), pour les enseignants du secondaire aussi (Páez Murillo & Vivier, 2013 ; Vivier, 2013), des problèmes sont toujours là.
Une étude expérimentale sur les tangentes a été menée en formation continue des enseignants au Mexique (Páez Murillo & Vivier, 2013). On retrouve dans cette recherche mes préoccupations relatives aux registres sémiotiques et aux techniques. Mais, dans ce cas, le cadre de la TAD n'est pas adapté car les conceptions sont multiples, propres à chaque sujet, et cela conditionne fortement le tracé, ou non, de la tangente. La technique est en effet pratiquement toujours la même : pour dire vite, il s'agit du tracé d'une droite. C'est le type de courbe et le sujet, en amont de la technique, qui sont importants ici – même si l'on peut trouver des éléments technologiques comme l'unicité de la tangente. C'est pourquoi l'étude utilise le cadre cK¢ (Balacheff & Gaudin, 2010 ; Balacheff & Margolinas, 2005) qui permet une étude fine des conceptions et une analyse des actions des sujets en prenant en compte les registres sémiotiques.
Dans (Páez Murillo & Vivier, 2013), nous nous donnons une liste restreinte de conceptions. Bien entendu, ces dernières s'appuient, en partie, sur les recherches sur la notion de tangente telles (Vinner, 1991), (Castela, 1995) et (Maschietto, 2004). Ces conceptions *a priori* nous permettent alors d'analyser les conceptions des enseignants participant à l'étude. En outre, cette formation continue a été élaborée avec la méthodologie ACODESA (Hitt, 2009) et notamment lors de la première phase dans le cadre graphique.
L'objectif de cette première phase, graphique, est pleinement atteint avec 12 courbes proposées dont il faut tracer, si possible, une tangente. Ces 12 courbes sont choisies avec précaution car il s'agit d'une variable didactique de première importance. Ce travail déstabilise les participants ce qui entraîne des débats riches entre différentes conceptions, parfois opposées, et montre le besoin de connaissances permettant de faire le lien entre ces conceptions du concept de tangente.
Nous avions pensé à la méthode adaptée de Descartes et à un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD) pour faire ce lien, mais le niveau en algèbre et la méconnaissance des LGD ont été deux obstacles, sous-estimés pour cette population d'enseignants de mathématiques. Les objectifs n'ont été atteints que pour un des participants, et de manière partielle. En revanche, nous avons validé notre hypothèse qu'une activité uniquement dans le registre graphique, inspirée du « terril » de (AHA, 1999), pouvait donner lieu à une recherche de la tangente dans le cadre algébrique (et non analytique).

Les tangentes dans les cadres graphique et algébrique

Dans (Vivier, 2013), je présente une étude se basant sur trois populations : 88 élèves de 1ère S, 5 enseignants au Mexique (lors d'un atelier de formation continue) et 10 étudiants-professeurs en France (en formation initiale). Je pars de l'hypothèse que la tangente est avant tout, dans

les représentations spontanées, un objet graphique que les mathématiques définissent en géométrie, en algèbre et en analyse. La question qui se pose est alors celle du passage du graphique à un domaine mathématique et de la *distance* entre les deux conceptions en jeu.
Cette distance est *faible* avec la géométrie, mais finalement exploitée uniquement pour le cercle dans l'enseignement secondaire français (ainsi que dans d'autres pays). La distance avec l'analyse est *importante* car cela nécessite des points de vue nouveaux comme une perspective locale et les notions de limites, de taux d'accroissement, de pente. Dans cette perspective de *distance*, le cadre algébrique apparaît comme étant intermédiaire.
Je discute alors deux méthodes algébriques pour l'obtention des tangentes en prenant en compte la proximité avec les conceptions initiales relevées dans les études expérimentales dans le cadre graphique. C'est notamment la perspective locale qui permet de distinguer les deux méthodes : nécessaire pour mener à bien celle qui considère la tangente comme une « droite de transition » (Crombie & Grant, 2012), la perspective locale peut en revanche émerger du travail algébrique sur la méthode de Descartes.
La proposition d'enseignement des tangentes a été élaborée en s'appuyant sur des éléments mathématiques, épistémologiques et historiques de la notion de tangente ainsi qu'à partir de l'identification de connaissances génériques que possèdent des élèves au début de la deuxième année du lycée. Ainsi, nous avons élaboré un milieu théorique (Bloch, 2002) pour la notion de tangente aux courbes algébriques et les principales variables de la situation sont identifiées. Plus précisément, le savoir visé par ce milieu théorique est constitué par la définition mathématique de la tangente qui émerge de ce premier travail algébrique : *Une tangente est une sécante qui forme une intersection d'ordre de multiplicité au moins 2 avec la courbe*. Il semble toutefois que des interventions du professeur soient nécessaires pour certains points comme la mise en évidence des nécessaires solutions doubles, l'obtention d'une tangente *verticale* à un cercle ou la forme algébrique adéquate d'une sécante.

Conclusion sur les tangentes

La méthode algébrique développée (voir annexe 1) permet d'opérationnaliser le registre de représentation algébrique des tangentes dans le domaine de l'algèbre. Il est en général laissé de côté, sauf pour quelques exercices que l'on peut trouver dans certains manuels de lycée, essentiellement pour la parabole en classe de seconde.
Cette opérationnalisation s'appuie sur les représentations premières, et notamment la conception Unique Point d'Intersection, dans le registre graphique. Ainsi, on peut espérer réduire la *distance* entre les conceptions des élèves (en géométrie) et la notion de tangente en analyse permettant d'atteindre la notion de tangente et, ainsi, de donner du *poids mathématique* à l'objet tangente, avant l'enseignement de l'analyse. Est-ce qu'ainsi on pourra effectivement s'appuyer sur les représentations des élèves ? Cela reste à valider, mais on peut néanmoins penser que la tangente dans le domaine de l'algèbre peut constituer un intermédiaire intéressant entre la géométrie et l'analyse.

CONCLUSION GÉNÉRALE

A travers ces trois exemples de notions mathématiques, il ressort que avoir des représentations <u>opérationnelles</u> est, en plus de ne pas confondre l'objet et sa représentation, une condition pour que ces représentations représentent bien des objets mathématiques et pas uniquement une *représentation inerte* sur laquelle on ne peut effectuer aucun traitement. En outre, la recherche d'une opérationnalité des registres est productrice, permet un approfondissement de la compréhension, de la conceptualisation, et permet un renouvellement

des questions didactiques, voire mathématiques et historiques.
Mais cela est souvent au prix d'une prise de distance avec l'habitude, avec le point de vue commun : 10 est le nombre dix ; le chiffre des unités donne la parité d'un nombre entier ; un rationnel est une fraction ; il n'existe pas d'algorithme permettant de faire directement les opérations sur les écritures décimales périodiques ; la tangente est un objet de l'analyse qui *doit* être introduit par la *limite des sécantes*. Autant de *certitudes* qu'il faut arriver à dépasser.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARISTOTE (1969). *Physique.* Paris : Les belles Lettres.

AHA (groupe d'auteurs) (1999). *Vers l'infini pas à pas, Approche Heuristique de l'Analyse – Guide méthodologique.* Bruxelles : De Boeck Wesmael.

ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., ROA FUENTES, S., TRIGUEROS, M. & WELLER, K. (2014). *APOS theory, a Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York : Springer-Verlag.

BALACHEFF, N. & GAUDIN, N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. In F. Hitt, D. Holton & P. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, Volume VII (pp. 207- 234). Washington : American Mathematical Society.

BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005). cK¢ : modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Actes de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques*, *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75–106). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BEKE, E. (1914). Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires. *L'Enseignement Mathématiques*, 16, 245-284.

BERGSON, H. (1889). *Essai sur les données immédiates de la conscience*, Alcan, Paris.

BLOCH, I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques 21-30/08/2001*, Corps – France, La Pensée Sauvage.

BLOCK, D., NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2012). Registre et praxis numérique en fin de première année de primaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 17, 59-86.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-123.

BOSCH, M., FONSECA, C. & GASCON, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2/3), 205-250.

BRONNER, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels: Idécimalité et racine carré*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.

BRONNER, A. (2005). La question du numérique dans l'enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Actes de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, *Perspective en didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CASTELA, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 7-47.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 222-265.

CROMBIE, W. & GRANT, M. (2012). Polynomial calculus: rethinking the role of architecture and access to advanced study. Texte présenté à ICME-12*,* Seoul, Korea.

DESCARTES, R. (1637). *La géométrie.* Paris : Editions Jacques Gabay (réédition de 1991).
DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
DUBINSKY, E., WELLER, K., MICHAEL, A., MC DONALD, M. A. & BROWN, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 253-266 .
DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.
DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Berne : Peter Lang.
DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.
ELY, R. (2010). Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 117-146.
GLAESER, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.
GRAS, R., RÉGNIER, J.-C., & GUILLET, F. (Eds.) (2009). *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. Toulouse : Cépaduès.
HITT, F. (2009). Resolución de situaciones problemas y desarrollo de competencias matematicas en ambientes de aprendizaje de colaboración, debate científico y autoreflexión (ACODESA). In. D. Benitez, O. Mederos, & E. Padron (Eds.), *Memorias del primer seminario internacional sobre resolución de problemas y uso de la tecnologia computaciona.* Mexico.
KUZNIAK, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.
KUZNIAK, A., MONTOYA DELGADILLO, E., VANDEBROUCK, F. & VIVIER, L. (2016). Le travail mathématique en analyse de la troisième au début du supérieur : identification et construction. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques* (accepté). Grenoble : La Pensée Sauvage.
MARGOLINAS, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x*, 16, 51-66.
MARSH, J. (1742). *Decimal arithmetic made perfect; or, the management of infinite decimals displayed.* London.
MASCHIETTO, M. (2004). Le jeu entre point de vue local et point de vue global en analyse: une ingénierie didactique à visée diagnostique au niveau première. In *Actes du colloque de Mulhouse 8-9 mars 2002.* IREM de Strasbourg.
MENA-LORCA, A., MENA-LORCA, J., MONTOYA-DELGADILLO, E., MORALES, A., & PARRAGUEZ, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(3), 329–358.
MONTOYA DELGADILLO, E. & VIVIER, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico - Cambios de dominios y de puntos de vista. In P. Scott & A. Ruiz (Eds.), *Educación Mathemática en las Américas 2015, Volumen 17 : Talleres y Minicursos, Proceedings of CIAEM XIV* (pp. 157-168). México : CIAEM.
MONTOYA DELGADILLO, E. & VIVIER, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 48(6), 739–754.
NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies. In A. GAGATSIS, A. KUZNIAK, E. DELIYIANNI & L. VIVIER (Eds.), *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques, Actes du 1er colloque*

Franco-Chypriote de didactique des mathématiques. Université de Chypre, Chypre.
NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2010). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce. In J.-C. Régnier, R. Gras, F. Spagnolo & B. Di Paola (Eds.), *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*, *Actes du 5^e colloque A.S.I.*. Université de Palerme, Italie.
NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis. *MENON : Journal of Educational Research*, Issue 2a, 99-114.
NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA,* 30, numéro 54, 23-44.
NJOMGANG NGANSOP J. & DURAND-GUERRIER V. (2014). 0, 999….. = 1 an equality questioning the relationships between truth and validity. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti, *Proceedings of CERME 8* (pp. 196-205). Middle East Technical University, Ankara, Turquie.
OKTAÇ, A. & VIVIER, L. (2016). Conversion, change, transition… In B. R. HODGSON, A. KUZNIAK, & J.-B. LAGRANGE (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Hommage to Michèle Artigue* (pp. 87-122). Springer International Publishing.
PÁEZ MURILLO, R. E. & VIVIER, L. (2013). Evolution of teachers' conceptions of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 209-229.
RICHMAN, F. (1999). Is .999. . .= 1 ? *Mathematics Magazine*, 72(5), 396–400.
RITTAUD, B. & VIVIER, L. (2012). Circular words, F-adic numbers and the sequence 1, 5, 16, 45, 121, 320,… *Functiones et approximatio commentarii mathematici*, 47(2), 207-231.
RITTAUD, B. & VIVIER, L. (2014). Different praxeologies for rational numbers in decimal system – the $0,\overline{9}$ case. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti, *Proceedings of CERME 8* (pp. 363-372). Middle East Technical University, Ankara, Turquie
SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.
TALL, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus. *Poster presented at the Fourth International Congress on Mathematical Education, Berkeley*.
TALL, D. O. & SCHWARZENBERGER, R. L. E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.
TALL, D. O., & VINNER, S. (1981). Concept image and conception definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.
VINNER, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In D. TALL (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
VIVIER, L. (2006). *La Géométrie analytique*. Paris : Le Pommier, collection Quatre à Quatre.
VIVIER, L. (2008). De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 13, 63 - 92.
VIVIER, L. (2010a). La noción de tangente en la educación media superior. *El cálculo y su enseñanza*, Vol. II. México.
Revue en ligne : http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/
VIVIER, L. (2010b). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 15, 167-193.
VIVIER, L. (2011). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. *El cálculo y su enseñanza*, Vol. III. México.
Revue en ligne : http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/
VIVIER, L. (2012). Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des*

mathématiques et contrat social, Enjeux et défis pour le 21e siècle, Actes du colloque EMF 2012 (pp. 919-932). Université de Genève.

VIVIER, L. (2013). Without derivatives or limits: from visual and geometrical points of view to algebraic methods for identifying tangent lines. *International Journal of Mathematic Education in Science and Technology*, 44(5), 711-717.

WELLER, K., ARNON, I. & DUBINSKY, E. (2009). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), 5-28.

ZECKENDORF, E. (1972). Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 41, 179-182.

ANNEXE 1 : ADAPTATION DE LA MÉTHODE DE DESCARTES

Descartes propose de déterminer un cercle tangent à une courbe algébrique de manière à obtenir la tangente (le rayon est la normale). On peut adapter cette méthode avec des droites dans un repère cartésien, la seule restriction est que l'on n'obtient pas les tangentes *verticales*. L'idée est simple : parmi les droites du faisceau de droites concourantes, rechercher celle(s) qui a (ont) une intersection d'ordre supérieur. Cela requiert un travail sur les équations et on peut s'appuyer sur l'identification des points d'intersection pour les courbes de degré 2 puis 3. Je développe ces deux exemples à la suite, mais la méthode est beaucoup plus générale (Vivier, 2010).

Commençons par l'exemple d'une parabole et cherchons la tangente à $y=x^2$ passant par le point $A(a,a^2)$. On forme le système d'équations qui suit puisque la courbe et chacune des droites du faisceau passent par A :

$$y = x^2 \qquad ; \qquad y = k(x\text{-}a)+a^2$$

En identifiant y, on obtient l'équation : $x^2 = k(x\text{-}a)+a^2$. Cette équation se factorise en $(x\text{-}a).(x+a\text{-}k) = 0$ puisque l'on peut remarquer que $x=a$ est nécessairement une solution. On obtient donc deux solutions qui correspondent à deux points d'intersection. Comme on veut la tangente, on peut, en s'appuyant sur la conception Unique Point d'Intersection, identifier les solutions : $a=k–a$ ce qui donne le coefficient attendu $k=2a$. Il est à noter que l'on peut aussi imposer que la solution évidente $x=a$ annule aussi le second facteur puisque l'on ne veut qu'un seul point d'intersection ($a + a – k = 0$). On obtient ainsi la tangente, $y = 2a(x\text{-}a)+a^2$, avec un unique point d'intersection avec la courbe, cette intersection étant double.

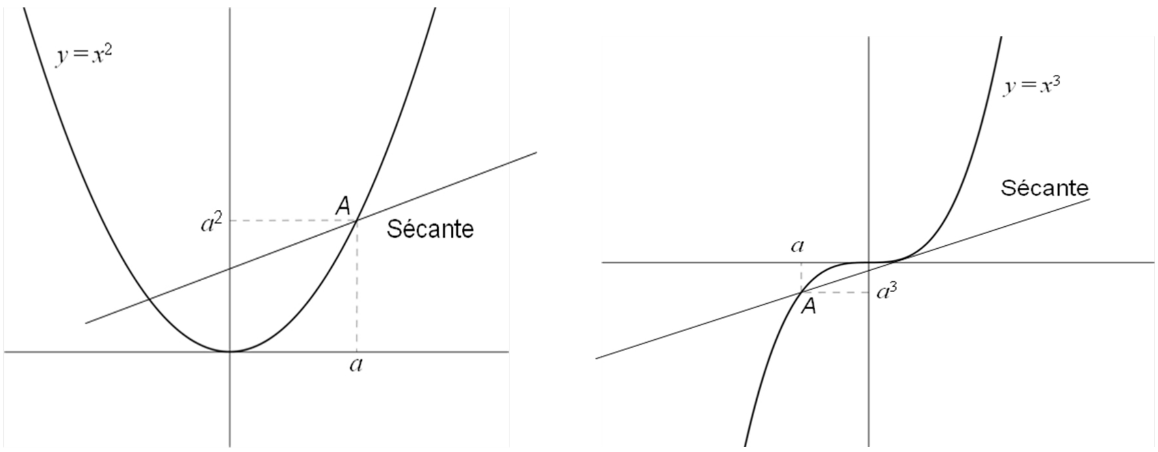


Figure ÷9

Cela se généralise aux polynômes f : la tangente de la courbe $y = f(x)$ est l'unique droite qui a un point double. Reprenons la méthode précédente pour la fonction cube. On forme le système :

$$y = x^3 \quad ; \quad y = k(x–a)+a^3$$

Puis l'équation que l'on factorise : $(x\text{-}a) . [x^2+ax+a^2 – k] = 0$. On peut calculer les deux autres points d'intersection et identifier avec la solution évidente $x=a$, mais cela nécessite de distinguer différents cas ce qui est un peu lourd. Il est plus facile de remarquer que le deuxième facteur est annulé par la valeur $x=a$. On obtient ainsi $a^2 + a.a + a^2 – k = 0$ puis $k = 3a^2$, puis la tangente. On peut, avec cet exemple, comprendre que tangente et courbe peuvent avoir d'autres points d'intersection.

ÉLABORATION ET ANALYSE D'UNE FORMATION D'ENSEIGNANTS CENTREE SUR LE CALCUL MENTAL

Jean-François **CHESNÉ**

Directeur scientifique du Cnesco

Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot,

jean-francois.chesne@education.gouv.fr

Résumé

Depuis 25 ans en France, des évaluations standardisées font apparaître des constats récurrents sur les activités des élèves dans le domaine des nombres et du calcul. Nous interrogeant sur les apports que pourraient avoir ces évaluations pour l'enseignement, nous nous sommes demandé comment intégrer leurs résultats dans les pratiques quotidiennes des enseignants au début du collège pour améliorer les apprentissages des élèves. Pour cela, nous avons conçu et mis en place un dispositif étagé de formation d'enseignants (PACEM : Projet pour l'acquisition de compétences par les élèves en mathématiques) centré sur le calcul mental.

Nous avons utilisé la théorie de l'activité, la double approche, issue de la didactique des mathématiques et de la psychologie ergonomique, et d'autres outils de didactique des mathématiques que nous avons adaptés pour formuler des d'hypothèses de formation, mises à l'œuvre dans le dispositif. Puis nous avons exploré comment l'ensemble du dispositif a été mis en place, en analysant *a posteriori* le potentiel de formation des résultats d'un pré-test *ad hoc* réalisé auprès des élèves, et construit à partir d'évaluations standardisées. Enfin, grâce à un protocole spécifique d'évaluation, nous avons analysé les effets de l'expérimentation, positive à bien des égards, en comparant les résultats d'un post-test des élèves impliqués et des élèves de groupes témoins.

Dans notre communication, nous présenterons l'ensemble du dispositif PACEM et les résultats obtenus, en mettant un accent sur le rôle du calcul mental dans la formation des enseignants.

Mots clés

Calcul mental, évaluations standardisées**,** formation des enseignants, théorie de l'activité

PREAMBULE

Ma présentation recouvre deux histoires imbriquées l'une dans l'autre, et l'exercice qui a consisté à les dégager l'une de l'autre a d'ailleurs représenté en soi la première étape de mon travail de thèse. La première histoire est la conception et la mise en œuvre d'une expérimentation de formation d'enseignants (PACEM), que j'ai menée de 2010 à 2012 alors que j'occupais la fonction de chef de bureau de l'évaluation des actions éducatives et des expérimentations à la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, la DEPP, expérimentation toutefois inspirée en partie par des travaux de recherche. La deuxième est celle de ma recherche proprement dite (Chesné, 2014), c'est-à-dire de l'analyse du point de vue du chercheur de cette expérimentation, que j'ai dû revisiter, avec les données qu'elle a demandé de recueillir et qu'elle a fournies, et avec ce que cela impose comme travail de questionnement, de documentation, de choix du cadrage théorique, de problématisation et de méthodologie de recherche.

En fait, au fur et à mesure des diverses présentations de mon travail, je me suis rendu compte que les questions que j'avais eu comme ambition de traiter étaient trop nombreuses ou trop importantes, une par une, pour être toutes exposées dans ce texte. Là où j'en suis maintenant, je crois pouvoir dire que mon travail consistait, et consiste d'ailleurs toujours, en une réflexion accompagnée, voire précédée en partie de mise en actes, sur :

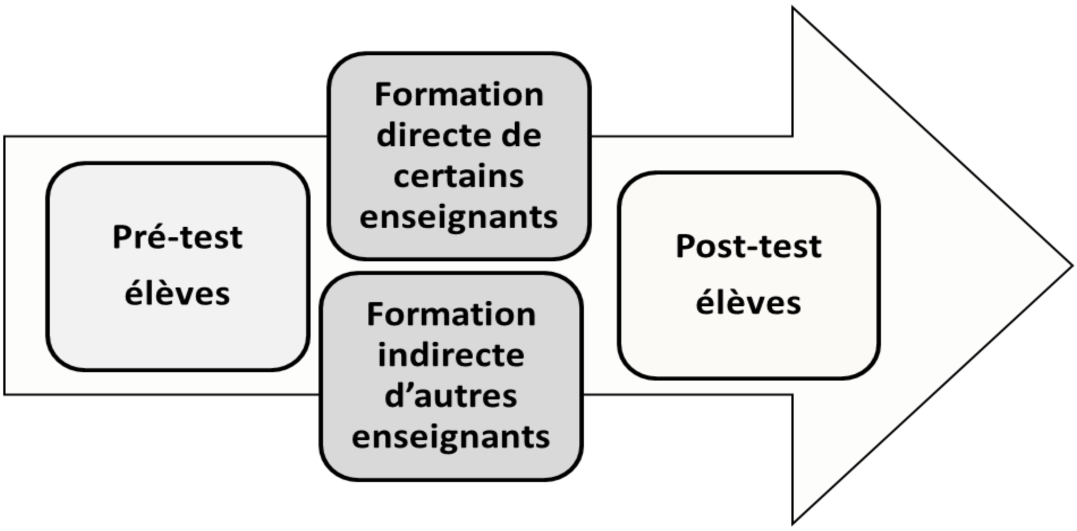
- l'état des lieux des acquis mathématiques des élèves à l'issue de l'école élémentaire, notamment dans le domaine des nombres et du calcul, et des réponses possibles en termes d'enseignement ;
- les évaluations standardisées à la fois productrices d'informations, avec une nécessaire relativisation, et outils potentiels de formation des enseignants ;
- le calcul mental comme élément d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques ;
- le format, spatial et temporel, d'une action de formation continue et sa contribution au développement professionnel, individuel et collectif, des enseignants;
- le déroulement d'une formation d'enseignants et l'identification de « facteurs clés d'efficacité ».

Cette réflexion engage plusieurs entrées, plus ou moins générales, plusieurs temporalités et plusieurs postures – celle de formateur concepteur, de formateur acteur, de chercheur… Après avoir rappelé quelques éléments sur l'expérimentation PACEM et les ancrages théoriques que j'ai adoptés pour ma recherche, j'ai choisi aujourd'hui d'évoquer principalement mon travail sur le calcul mental, en tant qu'objet d'étude pour lui-même, et dans ses liens avec les autres aspects évoqués ci-dessus.

A. QUELQUES REPÈRES SUR L'EXPÉRIMENTATION PACEM

La première histoire, c'est celle d'un projet, orienté d'emblée vers la classe et vers l'amélioration des acquis des élèves, avec l'hypothèse qu'il y a moyen de faire évoluer les pratiques des enseignants grâce à une formation adéquate pour améliorer ces acquis, et par le biais d'une diffusion de la formation au sein des établissements des enseignants formés.

Figure 1 : Protocole de l'expérimentation PACEM



Le protocole de mesure d'impact de l'expérimentation est classique avec la comparaison des résultats des élèves à un pré-test et un post-test, tous deux construits à partir d'items d'évaluations nationales antérieures (standardisées), validés d'un point de vue psychométrique.

Un groupe expérimentateur et un groupe témoin ont été constitués, le plus rigoureusement possible, avec à l'intérieur de chacun de ces deux groupes, deux catégories d'enseignants.

Figure 2 : Structure de la population d'enseignants de l'expérimentation PACEM en 2011-2012

Enseignants	**Collèges expérimentateurs**	**Collèges témoins**
Identifiés par l'inspection et volontaires pour participer à l'expérimentation	Participent à une formation continue spécifique (« *Enseignants Correspondants* »)	Ne participent pas à la formation (« *Enseignants témoins* »)
Non identifiés par l'inspection	Ne participent pas à la formation (« *Enseignants associés* »)	Ne participent pas à la formation *(« Enseignants involontaires* »)

La population étudiée est quantitativement importante, et équilibrée du point de vue de variables disponibles sur les élèves.

Figure 3 : Structure de la population d'élèves de l'expérimentation PACEM en 2011-2012

Enseignants	**Élèves**		**Classes**		**Garçons**		**Élèves "à l'heure"**		**Élèves "en retard"**	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Correspondants (17)	591	19,3	28	19,2	303	51,3	467	79,0	107	18,1
Associés (39)	1221	39,9	58	39,7	625	51,2	989	81,0	216	17,7
Témoins (16)	524	17,1	25	17,1	255	48,7	416	79,4	92	17,6
Involontaires (28)	724	23,7	35	24,0	362	50	598	82,6	121	16,7
TOTAL	3060	100	146	100	1545	50,5	2470	80,7	536	17,5

Les prétests ont confirmé cet équilibre du point de vue des performances des élèves.

La formation des enseignants dure 18 heures, réparties en 1 journée puis 4 demi-journées sur le premier semestre de l'année scolaire. Elle comporte quatre temps :

- **une phase d'amorce** destinée à favoriser des prises de conscience des enseignants sur des notions clés à partir d'évaluations nationales, puis des résultats des élèves au pré-

test ; à faire émerger des pratiques et à faire exprimer des besoins ;
- **un apport** de connaissances mathématiques et didactiques, notamment en calcul mental.
- **une phase d'appropriation** de ces connaissances par les enseignants que le formateur inscrit dans des pratiques de classe possibles, grâce à des exemples de couples tâches/déroulements en calcul mental ;
- **une phase de structuration**, permettant aux enseignants d'organiser les différentes séances de calcul mental entre elles d'une part, et les séances de calcul mental dans une programmation globale annuelle des nombres et du calcul d'autre part.

Les résultats obtenus, par-delà les biais possibles liés notamment à la méthode pré-test/post-test, aux effets expérimentaux, montrent un impact global positif de l'expérimentation avec :
- un effet positif direct de la formation, c'est-à-dire sur les élèves des enseignants formés ;
- un effet positif indirect de la formation : on observe une nette progression des élèves des enseignants du groupe expérimental, non-identifiés par les inspecteurs, par rapport aux scores des élèves des enseignants « involontaires » du groupe témoin, mais aussi par rapport aux scores des élèves des enseignants « identifiés » du groupe témoin ;
- des tendances intéressantes sur les résultats des filles, sur ceux des élèves d'éducation prioritaire, et sur ceux des élèves de bas niveau, qui semblent marquer des « effets de rattrapage » ;
- un effet positif du dispositif qui se conserverait sur deux ans, mesuré par deux tests effectués en fin de 5^{e} (un test spécifique lié à l'expérimentation, et le test national proposé en 2012).

B. LA RECHERCHE SUR PACEM

La deuxième histoire est celle de mon travail de recherche, mené avec Aline Robert et Janine Rogalski, qui va m'obliger à faire non pas un pas de côté, mais plusieurs, pour me départir de mes rôles successifs de concepteur et pilote du dispositif, et de formateur. Il s'agit alors pour moi d'interroger et de comprendre *a posteriori* ce qui a été mis en place dans l'expérimentation PACEM, pour en quelque sorte dénaturaliser les éléments qui la composent, les analyser, identifier ceux qui, dans la démarche d'expérimentation, avaient déjà pu, au moins partiellement, relever d'une démarche de recherche, et enfin repérer l'évolution de certains d'entre eux.
J'ai donc été amené, du point de vue du chercheur, à m'engager dans l'analyse du dispositif, et pour cela me poser un certain nombre de questions sur chacune de ses composantes, avec la difficulté que la complexité des pratiques enseignantes se retrouvait d'une certaine façon dans la conception et la mise en œuvre du dispositif. L'architecture globale de ma recherche s'est donc organisée autour de quatre grands axes d'étude :
- l'analyse des évaluations standardisées (dégager une méthodologie, comment m'y étais-je pris pour les analyser ? Que nous apprennent-elles exactement ? Formaliser ce que j'en avais fait pour la conception des tests, pour concevoir la formation) ;
- l'analyse de ce qui concerne le calcul mental (qu'est-ce que c'est ? Qu'est-ce que la recherche en sait, du côté des élèves ? Des enseignants ? Quel rôle le calcul mental peut-il jouer dans les apprentissages ? Pourquoi ? Comment ça peut se passer en classe ?) ;
- l'analyse de la formation des enseignants (qu'est-ce qui s'est joué, en comparant notamment le scénario initial avec le déroulement ?) ;

- l'appréciation de l'impact du dispositif sur les élèves (valider en quelque sorte le protocole d'évaluation envisagé, mais aussi le compléter et en définir les limites, et bien sûr analyser les résultats) ;

Même si, comme chacun sait, il y a beaucoup plus d'allers-retours dans la réalité que dans la présentation finale d'un travail de recherche, la première étape de ce travail fut bien sûr d'abord de définir un cadrage théorique adapté à mes questionnements, qui me permettrait à la fois d'analyser les fondements et la manière dont ma démarche avait été opérationnalisée au cours de l'expérimentation.

Toutes les questions énoncées ci-dessus ne sont pas reprises dans ce texte, qui est centré sur le calcul mental. Toutefois, après avoir présenté les éléments théoriques qui m'ont permis de légitimer et d'étayer ma démarche de chercheur, j'exposerai rapidement en quoi l'analyse des évaluations standardisées en a constitué une première étape fondatrice. Je m'attarderai ensuite plus largement sur le calcul mental, ce qu'il recouvre de mon point de vue, sur les fonctions qu'il peut recouvrir pour la classe, du côté des élèves et des enseignants, et sur la place qu'il peut prendre dans une formation d'enseignants. Je ne reviendrai pas sur l'analyse de l'impact du dispositif, mais son caractère positif, non seulement sur les acquis des élèves des professeurs ayant participé à la formation spécifique organisée pour l'expérimentation (les « enseignants correspondants »), mais aussi sur ceux des élèves de leurs collègues dans les collèges expérimentaux, non formés directement (les « enseignants associés »), constitue, malgré certaines limites, des avancées incontestables pour la recherche, et offre également un certain nombre de perspectives que je propose à la fin du texte.

1. Cadre théorique

Il est important de préciser les trois ancrages théoriques que j'ai choisis. Pour analyser ce qui touche, dans mon travail, l'enseignement et l'apprentissage, j'ai choisi comme toile de fond la théorie de l'activité, qui permet d'étudier, en situation scolaire et en mathématiques, les apprentissages des élèves en relation avec leurs activités provoquées par leurs enseignants. Pour compléter, et spécifier ce cadrage, j'ai choisi la théorie de la double approche, issue de la didactique des mathématiques et de la psychologie ergonomique (Robert et Rogalski, 2002), qui est un moyen de prendre en compte la complexité des pratiques (réelles) des enseignants.
Pour analyser ce qui relève de la formation des enseignants, je me réfère également aux deux cadres précédents : à la théorie de l'activité, en mettant les activités mathématiques des élèves, notamment en classe, au centre de ce qui peut provoquer leurs apprentissages (objectif des pratiques et des formations), et à la double approche, permettant d'apprécier les choix réels, les anticipations et les improvisations de ce qui peut se jouer en classe. Mais, en ce qui concerne plus spécifiquement les formations, j'ai aussi essayé d'avancer dans un travail de modélisation, dans lequel Aline Robert et moi-même sommes engagés depuis plusieurs années, et qui s'inspire de la notion de zone proximale de développement. Nous définissons ainsi une zone proximale de développement des pratiques (ZPDP), associée à des activités des enseignants proches des leurs, qu'ils peuvent reconstituer, apprécier, analyser et enrichir.

L'hypothèse que nous faisons est que pour qu'un travail en formation enrichisse les pratiques, et pas seulement des connaissances sur les exercices ou les déroulements, il est important qu'il s'appuie sur des éléments des pratiques relevant de cette ZPDP, dont les enseignants ont conscience ou peuvent prendre conscience. Ce peut être parce qu'ils les reconnaissent comme relevant de leurs pratiques ou proches de celles-ci, ou parce qu'ils peuvent en ressentir le besoin. En fait ce qui est développé ici relève du travail réalisé à partir de cette hypothèse, même si cela a été explicité en partie après la formation (et a donc pu bénéficier de l'expérience de formateur acteur) ! Avec, tout de suite, une question sous-jacente : les ZPDP sont individuelles, et la formation collective.

2. Analyse des évaluations standardisées

Concernant l'analyse comparative des évaluations standardisées, des chercheurs s'y étaient déjà livrés avant moi (Pluvinage & Rauscher, 1991 ; Bolon, 1992, 1996 ; Roditi, 2001). J'ai tenté pour ma part de travailler de manière quasi exhaustive sur l'ensemble des matériaux des évaluations nationales disponibles en faisant un certain nombre de choix : d'abord, restreindre mon champ d'étude au domaine qui me préoccupait, nombres et calcul. Ensuite, considérer que cette analyse se rapporte à ce qui est enseigné, ou en tout cas censé être enseigné, et donc pour cela procéder à l'étude des programmes en vigueur au cycle 3 depuis 1980, c'est-à-dire en gros, ceux qui correspondent à la scolarité des élèves testés depuis que les résultats d'évaluations les plus anciens sont disponibles (1989). Puis j'ai abordé cette analyse, non pas avec l'objectif de dresser un bilan du niveau des élèves, c'est-à-dire par exemple en cherchant à savoir s'il y avait des évolutions du nombre d'élèves en difficulté (en effectuant des comparaisons temporelles), mais avec le but de dresser un état des lieux (évolutif) du niveau de maîtrise par les élèves des différents types de tâches testés, tels qu'ils sont définis dans les programmes du cycle 3 de l'école primaire. Pour cela, j'ai regroupé tous les items disponibles par type de tâches, et j'ai analysé d'un point de vue didactique les données métriques[1] sur l'ensemble des tâches disponibles ; enfin, j'ai dégagé des résultats non pas d'un point de vue rétrospectif, c'est-à-dire orienté vers une recherche d'éléments qui peuvent les expliquer, mais dans la perspective de comprendre en quoi ce que ces données nous apprennent peut être utile à un enseignant de sixième pour travailler avec ses élèves. L'ensemble des résultats obtenus m'a ainsi permis de mettre en relief certaines connaissances, sans doute insuffisamment acquises par les élèves à la fin de l'école primaire pour constituer une base solide qui leur permette d'en acquérir de nouvelles au collège : en particulier celles qui portent sur les décimaux et les rationnels, celles qui mettent en jeu des structures multiplicatives et celles qui concernent l'estimation d'un ordre de grandeur d'un résultat numérique. Cela m'a aussi permis d'anticiper sur des bénéfices potentiels du calcul mental relativement aux apprentissages des élèves sur ces points précis.

C. LE CALCUL MENTAL

La formation des enseignants dans le dispositif PACEM s'est progressivement articulée autour de la place du calcul mental dans l'enseignement au collège, en termes de choix de contenus, de déroulements, et de programmation. Quel calcul mental, pourquoi y consacrer du temps, dans quels buts, comment l'organiser en classe, quand ? Je présente dans cette partie quelques sources qui ont inspiré ma démarche avec les enseignants lors de cette formation ; je propose ensuite une définition du calcul mental, issue d'une revue de littérature nationale et internationale, et j'expose enfin mes partis pris sur les apprentissages des élèves liés au calcul mental, et d'autres se plaçant plutôt du côté des pratiques des enseignants.

1. Introduction

L'exercice du calcul mental a toujours fait partie de mes pratiques d'enseignant, au collège et

[1] Ces données renseignent à la fois sur la réussite des élèves à un item et sur la corrélation de celui-ci avec l'ensemble des items proposés dans le même test.

au lycée, et j'ai maintes fois eu l'occasion de constater des effets positifs sur les élèves, et pas seulement sur des dimensions purement cognitives comme le souligne ce témoignage d'élève :

« Le calcul mental m'a permis d'acquérir des automatismes, c'est-à-dire qu'en face d'opérations, je sais tout de suite ce qu'il faut faire. Il m'a aussi permis de donner un ordre d'idée des résultats. Ainsi, je peux me rendre compte quand mes résultats sont faux. A force de travailler en calcul mental, c'est plus facile de résoudre des problèmes. J'ai plus confiance en moi. »

A contrario, j'ai également pu constater les difficultés des élèves en calcul mental, lors de travaux communs avec des collègues enseignants ou à l'occasion d'examens oraux. Ces difficultés sont d'ailleurs confirmées par les résultats des évaluations nationales. Pour rappel, selon l'évaluation de fin de 3^{e} menée en 2008 par la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (Depp) dans le cadre du cycle d'évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons (Cedre), certains élèves parmi les plus performants sont en difficulté devant le calcul « trois quarts de 44 » Et selon les évaluations nationales à l'entrée en 6^{e}, nombreuses sont les tâches moyennement ou faiblement réussies par les élèves, et qui pourraient relever d'un calcul mental simple, comme par exemple :

- Addition et soustraction des décimaux :
  - 1,7 + 2,3 (2003, TR = 61 %)
- Multiplication
  - 35,2 x 100 (1994, TR = 60 % ; 2008, TR = 32 %)
  - 3 fois 0,5 (2003, TR = 44 %)
- Ecriture fractionnaire d'un nombre décimal
  - ¼ = 0,25 (2008, TR = 27 %)

Comme formateur enfin, j'ai souvent eu l'occasion de constater le manque de familiarité des enseignants ou des futurs enseignants avec le calcul mental, mais aussi l'intérêt que peut présenter le recours au calcul mental en formation comme réponse possible à des difficultés d'enseignement des nombres et du calcul.

2. Ce que recouvre le calcul mental

Pour ma recherche, j'ai donc cherché à étayer les partis pris que j'avais finalement adoptés au cours de la mise en œuvre du projet PACEM. Je me suis d'abord livré à une revue de littérature, française avec essentiellement les travaux de Butlen et Pézard (1992, 1996), et internationale, très abondante sur ce thème. La très grande majorité des recherches dont j'ai pris connaissance s'accorde à présenter les bienfaits du calcul mental dans les apprentissages des élèves, mais il n'y a cependant pas consensus sur un enseignement systématique du calcul mental. Un certain nombre de recherches menées sur les pratiques d'enseignement relatives au calcul mental font en effet apparaître le risque de voir ces pratiques réduites à des exercices techniques routiniers (Maclellan, 2001). Quoi qu'il en soit, l'enseignement exclusif, mécanique, des algorithmes standards de calcul posé semble quasi unanimement rejeté aujourd'hui par les chercheurs, en France (Butlen, 2007) comme à l'étranger (Gravemeijer, 2003; Heirdsfield & Cooper, 2004 ; Kamii & Dominick, 1997). Par exemple, les recommandations actuelles de chercheurs britanniques, néerlandais et américains, accompagnant l'évolution de l'enseignement des mathématiques dans leurs pays respectifs,

insistent largement sur la compréhension par les élèves des méthodes et stratégies utilisées en calcul mental (par exemple Anghileri, Beishuizen & Putten, 2002 ; Thompson, 1999, 2008 ; van de Heuvel-Panhuizen, 2001 ; Yackel, 2001).
De quoi parle-t-on quand on parle de calcul mental ? Pour ma part, j'entends par calcul mental l'ensemble des activités qui consistent à effectuer des opérations avec des nombres, essentiellement sans aide matérielle externe. J'étends ces activités relevant du calcul mental à un travail explicite sur les désignations des nombres (écrites, orales, symboliques chiffrées ou non) et à un travail participant, tout ou en partie, à la résolution de problèmes mettant en jeu des données numériques, dans un cadre intra ou extra mathématique (de l'amorce de la démarche à la résolution complète). Le calcul mental est donc bien davantage que la seule activité, fréquente dans les classes de l'école primaire il y a une cinquantaine d'années, qui consistait à exécuter le plus rapidement possible des procédures opératoires sur les nombres, et dont l'objectif principal était l'automatisation de ces procédures. Dans cette acception, le calcul mental se rapproche largement du concept anglo-saxon de « *number sense* » (Gersten & Chard, 1999 ; Berch, 2005) qui n'est pas associé exclusivement au calcul mental. Ce concept fait globalement référence à « la compréhension générale des nombres et des opérations, ainsi qu'à la capacité d'utiliser cette compréhension de façon adaptée dans la gestion de situations numériques, pour porter des jugements mathématiques et élaborer des stratégies utiles et efficaces » (Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, Johnsson & Yang, 1999). En particulier, je reprends fortement à mon compte ce que les chercheurs appellent *inclination* en anglais, et que je comprends comme la tendance et l'envie de recourir au calcul mental, associées à la disponibilité, au sens de Robert (1998) de connaissances sur les nombres et les opérations. Ce dernier aspect renvoie à l'idée que quelqu'un qui se sent « à l'aise » avec les nombres saura d'autant mieux les utiliser et les interpréter (Turkel & Newman, 1988).

J'établis ainsi une grande proximité du concept de « *number sense* » selon deux dimensions sous-jacentes centrales dans mon travail de recherche sur le calcul mental. La première de ces dimensions porte sur les contenus numériques et les différentes manières de les mettre en œuvre avec des élèves, la seconde est liée à la nature des objectifs visés en calcul mental : fin en soi pour que les élèves acquièrent des connaissances et des capacités spécifiques parmi d'autres connaissances et d'autres capacités, ou moyen pour faciliter chez eux des apprentissages, voire leur permettre de les amorcer. Autrement dit, je m'intéresse au calcul mental comme apprentissage, mais aussi et surtout, comme modalité d'apprentissage le dépassant : la pratique du calcul mental par les élèves, défini et mis en œuvre selon des choix conscientisés et optimisés par les enseignants, ne constituerait pas seulement un moyen d'acquérir des faits numériques (tables d'addition et de multiplication par exemple) ou des procédures de calcul automatisées (multiplier par 11 ou par 0,5 par exemple), mais une voie privilégiée pour la construction des nombres et des propriétés des opérations.

3. Une analyse des partis pris sur le calcul mental pour la classe et dans la formation PACEM

Ce qui devait constituer un élément de formation parmi d'autres, le calcul mental, est en réalité devenu l'axe principal, le fil rouge, de la formation PACEM. De nouveaux questionnements sont alors apparus tout naturellement au cours de mon travail de recherche : en quoi et sur quoi la pratique du calcul mental apporte un plus pour l'apprentissage des élèves ? Dans quelle mesure est-il profitable pour les enseignants d'enseigner des procédures de calcul mental ? Comment concilier un enseignement de procédures de calcul mental et prendre en compte les procédures personnelles des élèves ? A quel moment doit-on passer à une « procédure experte » ? Est-il toujours pertinent de le faire ? Et plus largement, une des

questions, de mon point de vue fondamentale actuellement, porte sur la pertinence d'élaborer des progressions pour le collège autour de tâches spécifiques à effectuer mentalement.
Cette réflexion m'a conduit à déterminer trois fonctions spécifiques que le calcul mental peut jouer pour répondre à des difficultés identifiées chez les élèves :

- du côté des tâches et du côté des activités spécifiques des élèves qu'elles peuvent provoquer, une fonction qui fait la quasi-unanimité dans la recherche étrangère : participer à l'acquisition de connaissances mathématiques des élèves, c'est-à-dire développer le sens des nombres chez les élèves, avec la signification évoquée ci-dessus, et favoriser des habiletés pour la résolution de problèmes (engagement dans des démarches heuristiques, stratégies personnelles de résolution et de contrôle) ;
- du côté des enseignants : la possibilité d'adopter un « rythme didactique » spécifique, voire différent ; au niveau macro, dans l'organisation annuelle de l'enseignement, qui permet non seulement la fréquentation régulière, renouvelée, de notions, mais aussi l'anticipation sur de nouveaux apprentissages pour les élèves, avec l'élaboration de représentations mentales et de formulations intermédiaires ; et au niveau local, l'organisation de moments de classe spécifiquement dédiés au calcul mental, sans lien nécessaire avec le reste des séances, offrant ainsi de la souplesse aux enseignants ;
- et enfin, une troisième fonction, qui porte *a priori* sur une tout autre dimension, mais néanmoins importante, notamment dans les classes de l'académie de Créteil (largement peuplée d'élèves socialement défavorisés) : la pratique du calcul mental est un moyen d'installer un climat de classe favorable aux apprentissages, en créant des routines qui favorisent à la fois une mise en activité rapide de tous les élèves et des interactions entre les élèves, et entre les élèves et leur enseignant. Mais des tâches de calcul mental, convenablement choisies, peuvent être à la fois immédiatement accessibles aux élèves et leur offrir des cheminements différents pour les effectuer. Une certaine pratique du calcul mental en début de séance peut donc aller bien au-delà de ce seul aspect de gestion de classe.

Ce sont ces trois fonctions qui ont fondé mes partis pris sur le calcul mental, en termes de pratiques enseignantes potentiellement porteuses de facteurs favorables à l'apprentissage des élèves.
Le premier point a été souligné par Lieven Verschaffel (pour les nombres entiers à l'école primaire) lors de la conférence de consensus sur la numération co-organisée par le conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco) et l'institut français de l'Éducation (Ifé / ENS de Lyon) en novembre 2015. Le calcul mental est porteur d'un intérêt primordial, s'il est conçu comme un moyen privilégié de favoriser la conceptualisation des nombres (compréhension du système de numération, décompositions additives et multiplicatives, ordre de grandeur), notamment par comparaison avec le calcul posé. Du point de vue de la nature de l'activité cognitive provoquée par les deux démarches, Verschaffel a rappelé que le calcul posé repose sur des algorithmes, qu'il fonctionne sur les chiffres, et qu'il exige de travailler « de droite à gauche », alors que le calcul mental a un fondement heuristique, qu'il opère sur les nombres au lieu des chiffres, et qu'il va « de gauche à droite ». Au-delà de ces différences de ces deux méthodes de calcul desquelles de nombreux chercheurs (étrangers surtout) ont analysé les forces et les faiblesses, à la fois en termes d'efficacité et plus largement de leur importance pour l'enseignement des mathématiques, le calcul mental permet aussi une articulation aisée entre différents registres de représentation sémiotique, oraux et écrits.
Je vais présenter quelques analyses de tâches que j'ai menées. Elles m'ont en effet permis de faire émerger différents types de traitements sur les nombres et sur les opérations, et m'ont conduit à faire l'hypothèse générale qu'une certaine pratique du calcul mental permettrait d'optimiser les choix, à la fois sur les nombres et sur les opérations, tout en étant très compatible avec des modalités de gestion de la classe favorables à des activités des élèves.

Prenons le cas d'une somme à calculer, par exemple 37 + 99. Dans un calcul posé, il s'agit d'abord pour un élève de reconnaître qu'il s'agit d'une addition de deux entiers et éventuellement de repérer qu'ils ont le même nombre de chiffres. La deuxième étape consiste à choisir une organisation spatiale adaptée (écriture des nombres l'un en-dessous de l'autre avec alignement des chiffres de même rang), puis à gérer l'écriture de nouveaux chiffres, y compris celle de la retenue intermédiaire. Enfin, vient une phase de traitement qui est ici un algorithme et qui comporte au moins 2 étapes, voire 3 ou 4 : « 7 + 9 = 16, je pose 6 et je retiens (voire j'écris au bon endroit) 1 ; 3 + 1 = 4 et 4 + 9 = 13 ». Le résultat est le nombre qui s'écrit avec un 1, un 3 et un 6 dans cet ordre, donc 37 + 99 = 136. Cette analyse vaut peu ou prou pour tous les calculs posés, notamment l'étape finale, « reconstitutrice » du résultat obtenu à partir de chacun de ses chiffres, et éventuellement avec une virgule à placer correctement. Une ultime étape pourrait être – devrait être – un contrôle *a posteriori* de l'ordre de grandeur du résultat, mais l'activité menée dépasse alors l'application stricte de l'algorithme.
Sur la même somme (37 + 99) à effectuer mentalement, il s'agit toujours évidemment de reconnaître une addition de deux entiers, mais en identifiant cette fois que l'un des deux est très proche de 100. Le travail consiste d'abord à remplacer la somme à effectuer par celle de 100 et de 37 et de compenser ensuite (ou avant). Le traitement interne qui va suivre a donc été anticipé dans les deux phases précédentes, par la double reconnaissance de l'opération et de la spécificité des nombres en jeu. C'est comme si cette troisième phase avait été déclenchée avant d'avoir réellement débuté le calcul, par la transformation de 99 en 100 – 1. Il reste alors à effectuer 37 + 99 = 37 + (100 – 1) = (37 + 100) – 1 (ou (37 – 1) + 100) ; on remplace un entier par une différence d'entiers (choisie lors de l'anticipation), puis une somme de deux entiers par une somme/différence de trois entiers, et on table sur la disponibilité de 37 + 100 et de l'expression de l'entier qui précède 100, sans parler de l'associativité en actes, qu'on considère ici comme naturelle. Il y a donc deux étapes et au moins un choix.
C'est ce travail de description précise des sous-activités possiblement en jeu qui m'a permis d'identifier des facteurs favorables à une certaine pratique du calcul mental, porteuse d'apprentissages pour les élèves à la fois

- en termes de tâches qui favorisent la mémorisation, la conceptualisation des nombres et de leurs propriétés (travail sur les nombres et non sur les chiffres, travail de gauche à droite), le développement d'habiletés pour la résolution de problèmes, -
- et en termes de modalités (quand faire du calcul mental avec les élèves et comment, avec l'importance de l'explicitation et de la mutualisation des procédures des élèves, ce qui renvoie à un travail sur la ZPD).

Voici quelques exemples de calculs, repris des évaluations nationales, qui me semblent particulièrement représentatifs des difficultés repérées chez les élèves, propices au questionnement des enseignants, qui étaient présents dans le pré-test et qui ont été travaillés en formation, avec une centration sur le calcul mental :

- Addition et soustraction des décimaux :
  - 38 – 1,5 (EN 6^{e} 2008, TR = 52 % ; PACEM sept 2011, TR = 30 %)
- Multiplication :
  - 3,72 × 1000 (PACEM sept 2011, TR = 30 %)
  - 4,6 × 3 (PACEM sept 2011, TR = 35 %)
- Ecriture fractionnaire d'un nombre décimal
  - ¼ = 0,25 (EN 6^{e} 2008, TR = 27 % ; PACEM sept 2011, TR = 27 %)

Ces exemples illustrent des connaissances très partiellement acquises, qui relèvent, dans les programmes, à la fois de l'école primaire et de la sixième, et pour lesquelles je considère qu'une certaine pratique du calcul mental peut avoir une influence positive sur les apprentissages des élèves, en développant la disponibilité des connaissances mises en jeu. Ainsi, le premier calcul apparemment largement à la portée d'un élève de sixième, offre pourtant des taux de réussite très moyens surprenants, et permet d'enclencher avec les enseignants un travail de réflexion sur l'insuffisance de ces taux de réponse, puis sur la nature des réponses erronées (37,5 pour environ la moitié des réponses incorrectes, et 23 ou 2,3), en remontant aux procédures des élèves, à leurs connaissances sur les nombres décimaux, et en ouvrant des pistes concrètes pour favoriser l'apprentissage de ces connaissances par des tâches de calcul mental.
Les résultats positifs de l'expérimentation apportent une réflexion globale, actualisée et adaptée à la sixième, sur le calcul mental, son exploitation à bon escient, et enrichie d'une réflexion didactique un matériel important presque « laissé en jachère » jusqu'ici par les enseignants (les évaluations standardisées). On peut pressentir l'intérêt de recherches allant plus loin dans ce sens, par exemple en explorant plus précisément la proposition aux élèves, régulière et fréquente, de tâches à effectuer mentalement dans la résolution de tâches complexes (au sens où les documents institutionnels les définissent) ou avec l'utilisation des matériels numériques (tableau numérique interactif, tablettes).

D. LA PLACE DU CALCUL MENTAL DANS LA CONCEPTION D'UNE FORMATION D'ENSEIGNANTS

Pour le formateur, les retours des professeurs participant à la formation ont incontestablement valorisé la démarche choisie, mais suscité dans le même temps un certain nombre de questions « naïves » en cours de formation, auxquelles je ne m'attendais pas toujours, ou en tout cas pas aussi clairement explicitées : du côté des contenus et tâches à proposer (comment énoncer un calcul ? Peut-on proposer des tâches qui ne sont pas du « calcul » au sens strict ? Peut-on proposer des tâches de calcul mental qui ne sont pas directement liées à la suite d'une séance ? Etc.), du côté des mises en œuvre (Combien de temps ? Sur quels supports ?), du côté des prises d'information et de leur exploitation (Faut-il « corriger » les productions des élèves ? Faut-il les noter ? Comment organiser la correction ? Quelle durée ?). Ces retours constituent évidemment des indices sur les pratiques des enseignants et leurs besoins, et m'ont obligé à des adaptations en cours de formation. Pour le chercheur, ces mêmes retours offrent des renseignements sur des pratiques dont on peut faire l'hypothèse qu'elles renvoient à des activités génériques, et procurent ainsi des éléments de compréhension sur les apprentissages des élèves. Par ailleurs, ils provoquent des réflexions sur la formation des enseignants, et sur ce qui peut apparaître comme des conditions nécessaires pour atteindre des attendus de la formation, sur le calcul mental en particulier.
Je terminerai mon analyse par la place du calcul mental dans la conception globale d'une « formation à l'envers[2] » et sa cohérence (compte tenu du domaine étudié) avec le fait d'avoir cherché à travailler dans une zone proximale de développement des pratiques des enseignants participant à la formation. Le fait de travailler d'abord sur des matériaux extérieurs aux enseignants – des résultats d'évaluations nationales–, puis sur des matériaux plus proches

[2] Nous entendons par « formation à l'envers » une formation dans laquelle les apports du formateur sont adaptés aux besoins des enseignants, soit qu'ils aient été exprimés par eux, soit qu'ils aient été identifiées par le formateur ; Cette stratégie inductive de formation part d'éléments de pratiques locales des enseignants, pour remonter ensuite vers des alternatives et des pratiques plus globales.

d'eux – les résultats du prétest – et de proposer des activités mettant en jeu des « couples[3] » contenus/déroulements de calcul mental, comme réponses possibles aux difficultés d'apprentissage et d'enseignement exprimées et identifiées, permet sans doute en effet aux enseignants d'enrichir facilement et rapidement leurs pratiques sans les bouleverser.

E. RESULTATS ET PERSPECTIVES

En ce qui concerne le champ de la didactique des mathématiques, on peut donc considérer que ma recherche offre un certain nombre d'avancées, qui ne sont pas toutes de même nature, et sans doute pas à considérer au même degré de développement. Parmi elles, je retiendrai :

- du côté des évaluations standardisées : l'outillage méthodologique que j'ai mis en place pour analyser les résultats et le potentiel de formation qu'elles peuvent contenir ;
- du côté de la formation des enseignants : la validité d'un travail de formation dans la ZPDP des enseignants, et l'ancrage d'une formation sur au moins deux composantes des pratiques au sens de la double approche (cognitive et médiative) ; la question de la durée de la formation, révélée à la fois sur le plan qualitatif par les retours des enseignants et par les résultats aux tests ; le fait qu'une action de formation continue peut dépasser le seul cadre spatial et temporel de l'action proprement dite, et contribuer au développement professionnel des enseignants d'un même établissement : développement individuel en agissant sur les pratiques dans la classe, et développement collectif, en offrant à une équipe d'enseignants un terrain propice à la réflexion autour de matériaux communs à utiliser (ou à construire) et à mettre en œuvre ;
- enfin, l'intérêt du calcul mental comme élément de formation et comme pratiques en termes de contenus/déroulements pour les enseignants : ces pratiques possibles en calcul mental sont effectivement intégrables par les enseignants, et peuvent générer des activités favorables aux apprentissages des élèves.

Bien sûr, il existe des limites à ma recherche qui sont liées à la structure du projet (et notamment à son montage particulier), à la méthodologie de l'expérimentation (effets enseignants ? effets établissements ?) et aux moyens d'observation mis en œuvre (que s'est-il vraiment joué dans les classes et dans les collèges ?). Mais cette recherche fait apparaître aussi un certain nombre de questions théoriques qui offrent des pistes à explorer pour la recherche :

- sur les évaluations : travail de croisement entre différents types de tâches, analyse des activités des élèves pendant un test, formes différentes d'évaluation (en groupes, avec aides), travail de croisement entre évaluations de classe et évaluations standardisées ;
- sur le calcul mental, avec des études plus poussées sur les tâches, des études cliniques sur les liens tâches/activités/productions des élèves, sur les changements de cadres ou les changements de registre, sur l'articulation avec le reste de ce qui est enseigné.

D'autres questions à approfondir sur la dimension collective du métier d'enseignant et sur la possibilité d'exploiter collectivement dans une formation des ZPDP *a priori* individuelles. Des questionnements sur l'activité du formateur, pendant la formation en présentiel, voire au-delà dans le cadre d'une formation hybride, sont encore nombreux, et importants dans la réflexion actuelle sur l'enseignement des mathématiques dans le cadre de la scolarité

[3] Un « couple » contenu/déroulement est constitué d'un énoncé et d'un déroulement possible associé à la mise en œuvre en classe de cet énoncé, le choix d'un énoncé prédéterminant *a priori* des tâches pour les élèves, et le déroulement influençant leurs activités.

obligatoire, et la formation continue des enseignants.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANGHILERI, J., BEISHUIZEN, M. & PUTTEN, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics, 49,* 149-170.

BERCH, D. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children with Mathematical Disabilities. *Journal of learning disabilities*, *38*, 4, 333-339.

BOLON, J. (1992) L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N*, *52,* 49-79. IREM de Grenoble.

BOLON, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école - collège.* Thèse de doctorat de l'Université Paris 5.

BUTLEN, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique, Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution des problèmes numériques*. Presses universitaires de Franche-Comté.

BUTLEN, D., & PÉZARD, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *12*(2/3) 319-368.

BUTLEN, D., & PÉZARD, M. (1996), Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire. *Cahier de DIDIREM n°27*. Paris, IREM Paris 7.

CHESNÉ, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot (Paris 7).

GERSTEN, R., & CHARD, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education, 33*, 19–28.

GRAVEMEIJER, K. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. In KILPATRICK J., MARTIN W. G., & SCHIFTER D. (Eds.). *A research companion to Principles and Standards for school mathematics*, (pp. 114–122). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

HEIRDSFIELD, A., & COOPER, T. (2004). Inaccurate Mental addition and subtraction: Causes and Compensation. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *26*(3) 43-65.

KAMII, C., & DOMINICK, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behaviour*, *16*(1) 51-61.

MACLELLAN, E. (2001). Mental calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education, 24*(2) 145-154.

PLUVINAGE, F., & RAUSCHER, J.-C. (1991). Les élèves et leur enseignement en mathématiques en sixième. *Education et formations, 27,* 83-95.

REYS, R., REYS, B., MCINTOSH, A., EMANUELSSON, G., JOHNSSON, B., & YANG, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics, 99*(2) 61-70.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 139-190.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *2*(4), 505-528.

RODITI, E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

THOMPSON, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction - Part 1, *Mathematics in School*, *28*, 5, 22-25.

THOMPSON, I. (2008). Mental Calculation. *Mathematics Teaching, 213*, 40-42.

TURKEL, S., & NEWMAN, C. (1988). What's your number? Developing number sense. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 53-55.

VAN DE HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. In J. ANGHILERI (Ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, (pp. 49-64). Buckingham: Open University Press.

VERSCHAFFEL, L. (2015) : Quelles difficultés rencontrent les élèves quand ils ont à effectuer des opérations ? Conférence consultable à l'adresse http://www.cnesco.fr/numeration/paroles-dexperts/calcul-et-operations/

YACKEL, E. (2001). Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of America. In J. ANGHILERI (Ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, (pp. 15-32). Buckingham: Open University Press.

ETUDE DU PROCESSUS D'INSTITUTIONNALISATION DANS LES PRATIQUES DE PROFESSEURS DES ECOLES EXPERIMENTES.

Cécile **ALLARD**

LDAR, Université Paris-Est-Créteil

cecile.allard@u-pec.fr

Résumé

L'objectif de cette recherche consiste à décrire et débusquer les résistances à exposer des connaissances, plus précisément à mettre en œuvre le processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives des professeurs pour le cas de l'enseignement des fractions.

Mots clés

Institutionnalisation- pratiques- fraction- formation.

1. INTRODUCTION.

L'objectif de ma recherche consiste à décrire et débusquer les résistances à exposer des connaissances (Butlen et al, 2002, 2012 ; Coulange, 2011, 2012 ; Margolinas & Lappara, 2011) et plus précisément à mettre en œuvre le processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives des professeurs pour le cas de l'enseignement des fractions.

L'institutionnalisation en didactique a été définie dans la Théorie des Situations Didactiques, assez tardivement et suite à des ingénieries didactiques pas nécessairement destinées à être diffusées dans l'enseignement ordinaire (Brousseau, 1984 ; Perrin Glorian, 1986, 1993, 1997).

L'institutionnalisation des savoirs est définie comme étant un processus qui rend possible la décontextualisation et la dépersonnalisation des savoirs. Dans la Théorie des Situations Didactiques, le Processus d'Institutionnalisation (PI) induit l'Exposition de Connaissances (EC). Ces phases peuvent être induites par des situations de formulation voire de validation. Elles se construisent éventuellement et idéalement après des phases d'action sur une situation liée à un problème adéquat mettant en jeu le savoir, inspiré d'une situation fondamentale. Le principal enjeu de ce travail est de dépeindre ce que signifie exposer des connaissances en classe, plusieurs décennies après que le caractère incontournable dans l'enseignement de l'institutionnalisation ait été précisé et dégagé dans les théories didactiques (Brousseau, 1984 ; Perrin, 1993) sur lesquelles je m'appuie.

Ce processus qualifié de lent (Perrin, 1997) est difficile à observer. Perrin distingue trois types d'institutionnalisation :

> « l'Institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation/décontextualisation ce qui conduit à distinguer des niveaux dans le PI :
> - Des institutionnalisations locales

- Des institutionnalisations qui permettent d'ancrer l'ancien dans le nouveau : phase de rappel
- Les institutionnalisations plus globales qui renvoient à l'émergence du concept. »

(Perrin, 1993, pp21-22)

C'était là une des premières difficultés de mon objet d'étude : rendre compte d'un processus qui s'étale sur une durée de plusieurs séances induisant plusieurs semaines d'observation.
Une autre difficulté est apparue assez rapidement : institutionnaliser à l'école n'est pas nécessairement finalisé par un écrit.

2. CADRES ET POINTS D'APPUIS THEORIQUES.

J'emprunte à la **théorie des situations didactiques** (Brousseau, 1998) les définitions, résultats et fonctions de l'institutionnalisation (mémoire didactique, phase de rappel, phase de conclusion). J'utilise la **dialectique Outil Objet** (Douady, 1986) qui me permet ainsi de mieux cerner les enjeux de la décontextualisation et le rôle des changements de registre dans le processus que j'étudie. Enfin pour la caractérisation des pratiques, j'utilise la **Double approche didactique et ergonomique** (Robert & Rogalski, 2002). J'emprunte les outils de ce cadre notamment les 5 composantes des pratiques, les 5 niveaux de détermination des pratiques, les degrés de décontextualisation.
Les difficultés à institutionnaliser ont été identifiées par plusieurs autres chercheurs : Butlen et al (2002, 2012), Margolinas et Lappara (2008), Coulange (2012). C'est ainsi que ces auteurs s'accordent à parler d'un déficit de l'institutionnalisation au profit de la dévolution, du faire, de l'action des élèves Le couple dévolution/institutionnalisation est alors qualifié de couple en tension. Ce déséquilibre montre un dysfonctionnement qui conduit à reléguer à l'arrière-plan les connaissances et les savoirs (Margolinas et Lappara 2011).
Enfin, l'étude des pratiques d'enseignants débutants a permis de proposer une catégorisation de ces dernières en i-genre. Le i-genre 3 correspondant à des pratiques ayant atteint les cinq niveaux suivants (Butlen et al, 2012) :

- niveau 1 : installer la paix sociale voire la paix scolaire
- niveau 2 : choix des situations plus ou moins robustes (avec potentiel a-didactique)
- niveau 3 : savoir dévoluer
- niveaux 4 et 5 : savoir Hiérarchiser des procédures et Institutionnaliser.

Butlen et al (2012) ont ainsi pu montrer que les enseignants débutants relevant du i-genre 3 étaient minoritaires, les niveaux 4 et 5 faisant défaut à la plupart des enseignants suivis. Les résultats suivants ayant été obtenus auprès de professeurs des écoles débutants, j'ai souhaité compléter cette étude en analysant des pratiques de professeurs reconnus experts par l'institution.
Cette difficulté à institutionnaliser est-elle également présente pour des professeurs expérimentés ou bien encore est-il possible que plusieurs années après la formation initiale des enseignants cette difficulté demeure ? J'ai étudié un processus lent et diffus dont les acteurs (enseignants et élèves) produisaient à différents moments des connaissances plus ou moins contextualisées.
C'est pourquoi j'ai dû établir une méthodologie originale composant avec **de nombreux observables et un recueil de données conséquent pour réussir à qualifier et à caractériser l'institutionnalisation dans ces classes de professeurs expérimentés.**
J'ai construit un modèle qui met en évidence les deux dimensions dans lesquelles le Processus d'Institutionnalisation se développe : la **dimension sociale et la dimension cognitive.**

Le processus d'institutionnalisation est **impulsé** par les activités que propose le PE en s'appuyant sur les programmes. En appliquant les programmes un professeur offre une dimension culturelle et sociale et inscrit son action dans ce **que prescrit l'institution.**
Les élèves individuellement et collectivement cherchent à trouver une solution au problème proposé. Ils sont conduits à échanger : l'activité est sociale dans la classe. Mais cette activité n'est pas donnée au hasard, elle doit permettre aux élèves d'accéder à une nouvelle connaissance.
Dans la dimension sociale, le PI s'inscrit dans le prescrit par l'institution. Les interactions entre les individus (éléves/élèves, maître/élèves) permettent une existence au savoir en jeu.
La dimension **cognitive** a une part moins accessible, celle de la construction individuelle des concepts pour un sujet. Cette construction individuelle repose également sur les interactions avec les autres. Dire, **formuler rend plus visible ce qu'il y a à conceptualiser** et peut être rendu possible par des cycles de contextualisation/décontextualisation/recontextualisation.
Pour synthétiser je rappelle un résultat de Forget (2011). Cette auteure dans sa thèse étudie comment importer le concept d'institutionnalisation dans la classe de Français, elle conclut ainsi : « Peut-on documenter l'absence **?** et si oui comment ? » (Forget, 2011 p302)
Est-il possible que les enseignants produisent des textes décontextualisés et dépersonnalisés le plus souvent à l'oral en s'appuyant sur des interactions avec leurs élèves ?
Est-il possible de décrire dans les pratiques ordinaires un PI le plus abouti possible, c'est-à-dire se rapprochant du modèle théorique?
J'ai préféré utiliser la formulation d'exposition de connaissances (EC) au lieu d'institutionnalisation. Cette formulation (Bridoux et al, 2015) a le mérite :

- de ne pas renvoyer la question de l'institution de référence difficile à déterminer
- de prendre en compte les expositions de connaissances plus ou moins décontextualisées et dépersonnalisées et dont les niveaux de formulation et de généralisation sont à de degrés différents
- de prendre en compte tous les moments des séances où il y a des Expositions de Connaissances
- de prendre en compte les modalités de gestion et les déroulements lors de ces moments.

Les EC contribuent au PI et permettent de rendre compte de sa dynamique, ils apparaissent comme constitutifs du PI.

3. METHODOLOGIE

Mon objectif est de décrire et de débusquer les résistances, les raisons de ces difficultés à exposer des connaissances dans les pratiques des professeurs des écoles. J'ai apporté des éléments de réponse à la question suivante : dans quelle mesure est-il possible de mener jusqu'au bout un processus d'institutionnalisation basé sur des situations solides ?

3.1 Les choix

Mes choix méthodologiques m'amènent à étudier les pratiques des maitres formateurs sur un temps long et par conséquent à opérer un choix sur une notion en particulier : les fractions. Ces choix répondent à des contraintes de mon objet d'étude (l'étude du PI dans les pratiques) : ce processus lent nous conduit à observer plusieurs séances consécutives sur plusieurs années et à trouver des enseignants qui potentiellement proposent des situations robustes, qui institutionnalisent (donc relèvent du i-genre 3), qui déclarent avoir un bon rapport aux mathématiques et qui assurent la paix scolaire. Je fais remarquer que le choix des situations est souvent corrélé au choix des ressources

3.2 Les données

Pour une enseignante, j'ai été en mesure de proposer une étude longitudinale (3 ans) : j'ai recueilli suffisamment de données pour reconstituer l'itinéraire cognitif de ce professeur ainsi que l'ensemble des EC produites sur trois années dans le même niveau de classe. Afin de relever ce qui a été dit à l'oral, j'ai été en mesure de filmer la quasi-totalité des séances sur les fractions (une dizaine de séances) et cela plusieurs années de suite. Ainsi, j'ai pu réaliser une étude longitudinale et comparative d'une même enseignante.
Pour les trois autres enseignants la quantité de données est moindre notamment parce que deux d'entre eux ne sont pas restés sur des postes devant élèves. Pour autant les données sont suffisantes et permettent l'étude comparative des pratiques d'enseignants utilisant les mêmes ressources (trois professeurs des écoles sur quatre utilisent Ermel (CM2).
La lenteur de ce processus impose une étude sur un temps long et sur une notion précise. De manière pragmatique j'ai choisi l'étude des fractions au regard des cahiers de leçons. L'étude comparative des cahiers de leçons montraient que cet enseignement était pris en charge par les quatre enseignants de mon expérimentation. L'enseignement des fractions semblait suffisamment emblématique pour provoquer un écrit destiné à être appris.

3.3 Etude du relief de la notion étudiée : les fractions

J'emprunte des résultats des travaux du Rational Number Project (RNB). Les anglo-saxons ont, en effet, une autre approche de l'enseignement des fractions. La comparaison entre leur approche et les choix français m'a permis de mieux cerner les difficultés de cet enseignement. Les résultats de RNB font partie de ma méthodologie car ils me permettent de cerner dans les déroulements effectifs mon objet d'étude. D'après les auteurs du RNB construire le concept de nombre rationnel dépend de la fréquentation et de la rencontre de ce que Behr et al (1992) appellent les différents « points de vue » ;

> *« However, when fractions and rational numbers as applied to real-world problems are looked at from a pedagogical point of view ».*(Behr et al, 1992, p296)

Ils ajoutent que ce qui est difficile c'est la reconnaissance et l'apprentissage de ces différente personnalités des fractions à des élèves très jeunes (à partir de 7/8 ans au canada par exemple) Ainsi, l'ensemble des nombres rationnels est un ensemble infini de classes d'équivalences, chaque classe d'équivalence (fraction) ayant une infinité de représentants. Cette définition n'est pas accessible pour des élèves de primaire et c'est bien là tout l'enjeu de cet enseignement : asseoir les premières représentations de ces nouveaux nombres sans pouvoir s'appuyer sur du formalisme et en s'appuyant sur des représentations matérielles de ces nombres. Les documents d'accompagnements des programmes de l'Ontario (Canada) donnent des pistes pour enseigner les fractions en appui sur du matériel et dans des contextes très variés). C'est ainsi que ces auteurs distinguent au moins cinq aspects des fractions (partie/partie d'un tout, fraction-mesure, fraction quotient, fraction ratio, fraction opérateur)
Grâce à l'étude longitudinale et comparative de pratiques d'une même enseignante sur trois ans d'une part, et de l'étude des pratiques de trois autres maitres formateurs d'autre part, je suis en mesure de documenter un peu plus l'ordinaire de ces pratiques et j'ai pu établir des gestes professionnels d'institutionnalisation. De plus, j'ai pu caractériser le Processus d'institutionnalisation à l'oral comme à l'écrit.

4. LES RESULTATS

4.1 Du côté des ressources

Les quatre enseignants articulent parfois deux manuels et une ressource « ERMEL » qui est un ouvrage proposant des situations issues des résultats obtenus en didactique des mathématiques. De l'avis des enseignants, leur progression semble trop dense et impossible à réaliser. C'est pourquoi ils empruntent et articulent le plus souvent deux ressources. Les modifications que les enseignants font changent parfois les enjeux de la situation. Les connaissances didactiques semblent parfois faire défaut aux PE.
Ces ressources souvent conseillées en formation (Allard & Ginouillac, 2014) sont centrées sur des situations qualifiées de robustes mais n'outillent pas suffisamment les PE dans le contenu, n'explicitent pas suffisamment les variables didactiques et leurs rôles. Les indications portant sur les institutionnalisations possibles sont souvent trop anecdotiques ou peu explicitées pour être retenues.
La question des ressources (au sens large) se précise : les programmes officiels, les manuels présentent une transposition problématique du domaine considéré (au regard de celle opérée dans le monde anglo-saxon) peu étayé tant du point de vue du traitement de la notion que du côté des apports didactiques. J'avance alors qu'il devient indispensable de penser l'élaboration des ressources en tenant compte des contraintes du métier.

4.2 Résultats les plus significatifs du côté des pratiques

Trois des enseignants sur quatre choisissent des situations robustes, enrôlent leurs élèves si bien que ces derniers se lancent dans les activités, proposent des phases de recherche suffisamment longues, ils exploitent les différentes procédures des élèves et ils organisent des mises en commun suivies de synthèse (pour deux sur quatre des enseignants suivis). En revanche, proposer un texte de savoir suffisamment décontextualisé ou généralisé n'est pas présent. C'est là une véritable difficulté et un enjeu du métier. Les pratiques de trois professeurs sur quatre relèvent du i-genre3 malgré un processus d'institutionnalisation non abouti.
La question de la professionnalisation des professeurs des écoles (et donc de la formation continue !) sur un temps long, de la construction de connaissances didactiques en acte et de gestes d'institutionnalisation apparaissent suite à ces analyses. Institutionnaliser et les gestes associés ne sont pas pris en charge dans les instituts de formation (Allard, 2015 ; Butlen, 2012) et ce sont des gestes professionnels qui se construisent sur un temps long.

4.3 Résultats du côté des fractions

J'ai pu montrer que seuls deux aspects sur les cinq présentés sont travaillés à l'école primaire (pour des raisons institutionnelles). De plus les nombres rationnels ne sont utilisés que dans des cas continus (mesure d'aires, de longueurs) et jamais dans des cas discrets (sacs de billes par exemple et billes à répartir en plusieurs parts). Enfin les seules opérations possibles avec ces « nouveaux nombres » sont les additions ou soustractions de fractions au même dénominateur ce qui ne rend pas explicite le fait que les fractions soient des nombres. Cela interroge sur les possibilités pour le professeur à favoriser la conceptualisation et des cycles de contextualisation/décontextualisation/recontextualisation

4.4 Du côté de l'institutionnalisation

Pour une enseignante seulement, le texte du savoir écrit proposé aux élèves est un point d'appui et on retrouve des traces de ce qui a été écrit dans le discours oral.
En revanche pour les trois autres enseignants, l'écrit n'est pas la clé de voûte du processus d'institutionnalisation. Les moments d'exposition de connaissances sont alors diffus et non étiquetés en tant que tels.
C'est alors à la charge des élèves d'identifier ce qui est de l'ordre du contexte (le presque anecdotique) et de l'ordre du savoir (de l'ordre de l'indispensable). Je vois dans cette difficulté à cerner l'essentiel de ce qui doit être su, construit, la source de difficultés scolaires voire d'inégalités scolaires

5. CONCLUSION

Les élèves de CM2 des classes retenues ne fréquentent pas ou peu de textes mathématiques si bien qu'ils ne sont pas habitués à lire ou à entendre des textes présentant des savoirs formalisés, formulés, décontextualisés et montrant un certain degré de généralisation. Ainsi pour les fractions, les deux seuls aspects enseignés sont les aspects partie sur un tout et l'aspect mesure. Au collège les trois autres aspects sont enseignés (quotient, opérateur et ratio). La construction de la fraction comme nombre est-elle vraiment envisageable en fin d'école primaire ?
L'un de mes résultats montre le manque de visibilité des contenus mathématiques, ce qui a pour conséquence directe de laisser à la charge des élèves d'identifier ce qui est de l'ordre du contexte et de l'ordre du savoir. De plus, les variabilités intra et inter personnelle constatées n'assurent pas que les savoirs enseignés soient les mêmes (malgré les programmes identiques sur tout le territoire Français) d'un enseignant à l'autre. Je postule que les temps d'expositions de connaissances devraient être un levier puissant dont dispose le professeur pour orienter les élèves dans l'activité mathématique, l'absence ou le manque de visibilité contribue à creuser les inégalités scolaires.
J'ai mis également en évidence que l'absence de traité, de textes à destination des maîtres est une des explications possibles à cette difficulté d'institutionnaliser. Les ressources, reconnues de qualité par les formateurs ESPE (Allard & Ginouillac, 2014) et la formation n'outillent pas suffisamment ces enseignants polyvalents dont la formation initiale est assez peu souvent scientifique. Je montre que les enseignants même déclarés experts sont insuffisamment outillés aux plans didactiques et mathématiques mais, et surtout, montre l'intelligence pratique de ces professionnels pour créer et construire des manières pertinentes de faire vivre le processus d'institutionnalisation. La question de l'institutionnalisation dépasse la dialectique novices/experts.
Mes perspectives de travail me conduisent à étudier la place des textes de savoir dans le cadre de la liaison école collège : comment des élèves qui n'ont pas fréquenté un texte de savoir en primaire vont-ils s'adapter au collège ? Comment vont-ils comprendre les enjeux du cahier de cours –quand il y en a un- ?
C'est pourquoi je pense qu'il devient important de produire un tel traité en collaboration avec des chercheurs, des enseignants-formateurs en mathématiques, des enseignants de l'école.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALLARD, C. (2015). *Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de doctorat, Université de Paris Diderot, 297 pages.

ALLARD, C., & GINOUILLAC S. (2014). De la ressource à la séance de classe : le cas de la proportionnalité en cycle3. *Actes du 41ᵉcolloque COPIRELEM, « Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages à l'école primaire»*,18-19-20 Juin 2014, Mont de Marsan.

BEHR, M., HAREL, G., POST, & T., LESH R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

BRIDOUX, S., CHAPPET-PARIES M., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C., & ROBERT, A. (2015) *Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques : secondaire et début de l'université.* Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz 14,1-14. Paris : IREM.

BROUSSEAU, G. (1984) Le rôle du maître et l'Institutionnalisation. *IIIème école d'été de didactique des mathématiques*. http://guy-brousseau.com/2376/le-role-du-maître-et-l'institutionnalisation-1984/ (consulté le 24/09/2015).

BROUSSEAU, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble : la pensée Sauvage.

BUTLEN, D., PELTIER M.L., & PEZARD, M. (2002). Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en REP : cohérence et contradictions, *Revue Française de Pédagogie* ,140, 41-52.

BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, & M., MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : la pensée Sauvage.

COULANGE, L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Etude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM, in Rochex, J.-Y. et Crinon, J.(dir) *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*, 33-34. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

COULANGE, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves.* Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot, 136 pages.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectiques outil-objet. *Recherche en didactique de mathématiques*, 7(2),5-31.

FORGET, A. (2011). *Importer le concept d'institutionnalisation en classe de français : quatre classes aux prises avec une même séquence didactique sur le genre encyclopédique en cinquième année primaire*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. 307 pages.

MARGOLINAS, C., & LAPARRA,M. (2008) : « Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation », *Actes du colloque : Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, Bordeaux.

http ://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf

MARGOLINAS, C., & LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire in Rochex, J.-Y. et Crinon, J.(dir) *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*, 19-33. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

PERRIN-GLORIAN, M.J.(1997). Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? *Repères Irem*, 29, 43-66.

PERRIN-GLORIAN, M.J.(1986).Représentations des fractions et des décimaux chez des élèves de CM2 et du collège. Cahier de didactique des mathématiques 24.

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_cahiers_de_didactique/#blanc consulté le 09/09/2015

PERRIN-GLORIAN, M.J. (1993).Questions de didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des « classes faibles ». *Recherches en didactiques des mathématiques*, 13(1/2), 95-118

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématique : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

UN USAGE DE LA GEOMETRIE DYNAMIQUE EN CYCLE 3 : EXPLICITER EN GEOMETRIE

Francine **ATHIAS**

ESPE Besançon/ Laboratoire ADEF

francine.athias@univ-fcomte.fr

Résumé

Nous nous intéressons au rôle que peut avoir la géométrie dynamique dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie au cycle 3 de l'école primaire (les élèves ont 9/10 ans). Plus précisément, dans une étude de cas, nous cherchons à étudier comment le professeur rend nécessaire une explicitation des relations géométriques autour du triangle équilatéral. La question de recherche concerne l'organisation des transactions par le professeur autour d'un logiciel de géométrie dynamique pour mettre en évidence les éléments caractéristiques d'un cercle.

Mots clés

géométrie dynamique, cercle, action conjointe.

INTRODUCTION

Cette recherche concernant l'introduction de la géométrie dynamique en cycle 3 s'inscrit dans le prolongement de travaux antérieurs (e.g. Assude & Gelis, 2002 ; Assude & Grugeon, 2002 ; Restrepo, 2008). Les deux premières études ont permis de rendre compte des tâches et techniques que les élèves ont pu mettre en œuvre et la manière dont ils s'approprient l'environnement dynamique. Quant à Restrepo, cette auteure rend compte de la manière dont les élèves s'approprient le déplacement. Nous nous focalisons sur les transactions in situ pendant l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques (Barrier & Mathé, 2014). Le logiciel de géométrie dynamique choisi ici est Tracenpoche[1], il a été introduit dans des classes de CM1/CM2 par des professeurs des écoles. À l'école primaire, les constructions sont la plupart du temps faites avec les instruments usuels, ces derniers « embarquant » plus ou moins implicitement les propriétés. Dans le cas du cercle, par exemple, les élèves savent qu'il faut utiliser le compas, la pointe du compas étant placé sur le centre du cercle et l'écartement du compas représentant le rayon du cercle. Si l'usage du compas en CM1/CM2 est régulier en classe, les éléments caractéristiques du cercle sont rarement nommés. Nous voulons étudier comment le changement d'environnement va contraindre les élèves et le professeur à développer un discours technologique, au sens où l'entend Chevallard (1998). On peut donc poser la question de recherche sous la forme suivante : comment, au cours des transactions suite à l'utilisation autour d'un logiciel de géométrie dynamique, le professeur peut-il engager les élèves dans le jeu d'explicitation ?

[1] Tracenpoche : http://tracenpoche.sesamath.net/

CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIQUE

Pour l'analyse des transactions, nous nous appuyons sur la notion de jeu, issue de la théorie de l'action conjointe en didactique (Sensevy, 2011). À un premier niveau de description, on peut considérer qu'un professeur et des élèves jouent à un jeu dans lequel l'un des joueurs (le professeur) gagne si et seulement si l'autre joueur (l'élève) gagne. Le professeur sait, mais il ne peut donner directement la solution à l'élève, qui doit la trouver de son propre mouvement. À un deuxième niveau de description, plus spécifique, le professeur est amené à organiser la séance et à orienter l'attention de l'élève de manière à ce qu'il agisse de façon adéquate dans la situation. Autrement dit, en prenant appui sur ce que les élèves savent (contrat), il fait rencontrer aux élèves un problème (milieu), dont la résolution permet de faire une certaine expérience du savoir, enjeu de la situation. C'est précisément à ce niveau de jeu, nommé jeu d'apprentissage dans la théorie, que nous nous situons pour la suite.

Méthodologie

Différentes situations ont été proposées à des professeurs des écoles dans le cadre d'une ingénierie de premier niveau (Perrin-Glorian, 2009). L'organisation de cette ingénierie et l'analyse des séances ont fait l'objet d'une recherche (Athias, 2014). Les séances ont été filmées et transcrites.
La question est ici travaillée à travers une étude de cas, en appui sur l'une des séances mise en œuvre par un des professeurs. Dans cette séance, le professeur a d'abord demandé aux élèves de construire un triangle équilatéral dans l'environnement Tracenpoche. Collectivement, il choisit de faire construire en parallèle un triangle équilatéral dans l'environnement Tracenpoche, ce dernier étant vidéoprojeté, et un triangle équilatéral au tableau, avec les instruments usuels (nous parlerons d'environnement papier-crayon).

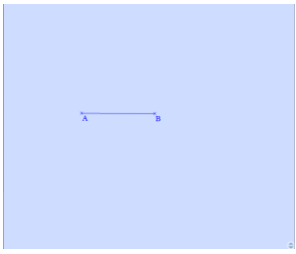
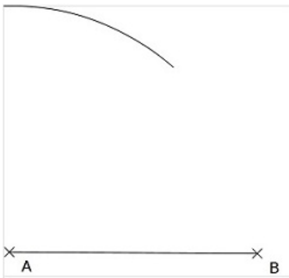
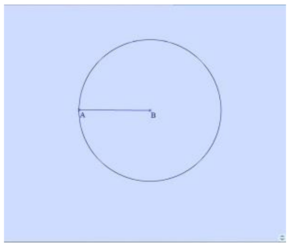
LE CAS ETUDIE

Dans une première partie de séance, les élèves ont travaillé individuellement. Ils devaient tracer un triangle équilatéral dans l'environnement papier-crayon avec la règle et le compas. Dans une deuxième partie, en binômes, ils devaient construire un triangle équilatéral cette fois-ci dans l'environnement Tracenpoche, ce qui n'a pas été fait sans difficulté. Le professeur se déplaçait alors de binômes en binômes pour réguler l'action des élèves. De retour en classe entière, le professeur choisit de partager le tableau en deux parties : une élève E doit tracer avec les instruments usuels un triangle équilatéral, à droite du tableau, une autre élève Am doit construire un triangle équilatéral dans l'environnement Tracenpoche, sachant que l'écran est vidéoprojeté. Il demande à la classe de repérer « ce qui est pareil et ce qui est différent ». Sont ainsi tracés successivement, le segment [AB], le cercle de centre A et passant par B, le cercle de centre B passant par A, le point C à l'intersection des deux cercles, et ce alternativement à chaque étape dans l'environnement papier-crayon (sur le tableau) puis dans l'environnement Tracenpoche.

Un moment approfondi

Il s'agit du moment de la construction du cercle de centre A et passant par le point B. Le segment [AB] a été déjà tracé, dans l'environnement papier-crayon et dans l'environnement Tracenpoche (cf illustrations 1 et 2). L'élève E sait construire le triangle équilatéral avec le compas. Alors qu'elle s'apprête à le faire, le professeur l'interrompt et lui demande de dire ce qu'elle va faire. Il explique que cela permettra à l'élève Am de continuer la construction dans

l'environnement Tracenpoche. Nous savons par ailleurs qu'Am ne l'a pas fait (nous n'en connaissons pas les raisons). L'élève E ne sait pas expliquer ce qu'elle a l'intention de faire. Collectivement, les élèves et le professeur arrivent à expliquer qu'avec le compas, E va tracer le « cercle » de centre A passant par le point B. Ils précisent alors immédiatement que le cercle sera en fait réduit à un arc de cercle. Puis les deux élèves tracent l'arc de cercle (cf illustration 3) et le cercle (cf illustration 4).
Nous avons reproduit dans le tableau ci-dessous les constructions successives faites alternativement dans l'environnement papier-crayon puis dans l'environnement Tracenpoche[2].

<table>
<tr><td>Illustration 1</td><td>Illustration 2
</td><td>Illustration 3

</td><td>Illustration 4
</td></tr>
<tr><td>Le segment [AB] dans l'environnement papier-crayon</td><td>Le segment [AB] dans l'environnement Tracenpoche</td><td>Le premier arc de cercle tracé avec le compas dans l'environnement papier-crayon</td><td>Le premier cercle dans l'environnement papier-crayon</td></tr>
<tr><td colspan="2">P : Comment on fait pour utiliser le compas, E ?
E : On prend la mesure de AB.
P : Qu'est-ce que tu fais pour prendre la mesure ? Dis-nous ce que tu fais pour qu'Am puisse le faire ?
E : Ben, je fais le cercle. Je prends la mesure et je fais ça.
P : Oui, tu prends la mesure. Tu prends le compas d'une certaine façon.
E : Ben oui, je pique sur B.
P : Pourquoi tu piques sur B ?
E : Parce que… je ne sais pas.</td><td colspan="2">Un peu plus tard
P : Et donc Am, elle va avoir quoi, elle ? On va appeler comment AB, pour son travail à Am ?
E : Ben le diamètre.
P : Le diamètre ?
E : Euh non le rayon.
P : Le rayon. Am, t'es prête ? Tu as vu, elle va faire un arc de cercle et toi tu vas faire un cercle. Elle a dit de centre B, de centre B…
E : Et de rayon AB.
P : Et de rayon AB. C'est parti. Oui, de centre B et de rayon AB.</td></tr>
</table>

Analyse

Si nous modélisons le début de ce moment sous forme d'un jeu, l'enjeu pour le professeur est de faire expliciter par les élèves les éléments caractéristiques du cercle. L'enjeu pour les élèves (dont l'élève E) est de faire en sorte que A puisse tracer dans l'environnement Tracenpoche, sous les injonctions du professeur. Pour pouvoir s'engager dans le jeu, nous savons que les élèves ont déjà des connaissances sur le triangle équilatéral et en ont tracé un dans les deux environnements. Ils ont une certaine habitude des constructions dans

[2] Nous avons des photographies faites en classe. Pour des raisons de lisibilité, nous ne les avons pas proposées, mais nous les avons reproduites.

l'environnement papier-crayon (feuille ou tableau). Ils ont également découvert le logiciel de géométrie dynamique depuis sept séances. Les règles du jeu ont été clairement annoncées par le professeur (comparer). Dans la modélisation, ces éléments sont plutôt du côté du contrat. Lorsque le professeur propose de jouer à ce jeu, il organise une co-construction collective dans les deux environnements. C'est cette organisation, nouvelle pour les élèves, qui va nourrir l'action. Il est à noter qu'à ce moment, tous les problèmes de construction rencontrés ont été résolus. Du point de vue du modèle, ces éléments, du côté du milieu, offrent peu de résistance. Si nous notons que l'élève E sait ce qu'elle doit faire, elle se trouve face à un problème d'explicitation. Autrement dit, le professeur modifie le contrat : il ne s'agit plus de comparer les deux environnements mais d'anticiper la construction dans l'environnement Tracenpoche à partir de celle de l'environnement papier-crayon. Au regard des élèves, cette modification n'est pas une exigence qui dépend du professeur mais bien une exigence relative à cette juxtaposition des deux environnements. De plus, elle est problématique. Les rétroactions du milieu ainsi constitué sont saillantes : dire ce que l'on fait dans l'environnement papier-crayon devra permettre à A de poursuivre la construction dans l'environnement Tracenpoche. Implicitement, ne pas l'expliquer ne permettrait pas de le faire. Ainsi, le professeur amène les élèves à dire que tracer un arc de cercle dans l'environnement papier-crayon, c'est faire le choix de ne tracer qu'une portion d'un cercle, dont le centre et le rayon est à préciser.

CONCLUSION

Regarder la séance comme un jeu donne à voir ce que le professeur fait faire aux élèves. L'enjeu de comparaison (« ce qui est pareil et ce qui est différent »), déclaré de manière explicite par le professeur n'est pas l'enjeu épistémique qu'il vise (mettre en évidence les éléments caractéristiques du cercle). Il est ainsi possible, à partir de ce cas, de voir comment l'environnement Tracenpoche peut être utilisé non pas comme une fin en soi, mais plutôt comme un adjuvant au contrat pour rendre le milieu plus résistant et les questions épistémiques plus saillantes. Dans l'exemple analysé, savoir construire un triangle équilatéral dans l'environnement Tracenpoche est devenu un prétexte pour savoir donner les éléments caractéristiques d'un cercle. Ainsi, l'usage des TICE est revisité pour mettre en évidence la figure géométrique, ici le cercle défini par un centre et un point du cercle. Cependant, dans cette classe, notons que les raisons d'être du cercle ne sont jamais évoquées. En effet, le professeur n'explique pas que le cercle, en tant qu'ensemble de points équidistants d'un centre, garantit l'égalité des longueurs des côtés du triangle. Le jeu épistémique relatif à cette définition du cercle n'est pas mis en œuvre au cours de cette séance. Le professeur n'éprouve pas la nécessité de justifier l'égalité des longueurs des trois côtés. L'institutionnalisation consiste donc en une explicitation d'une technique de construction, reposant sur l'emploi des éléments caractéristiques du cercle, mais la technologie justifiant cette technique n'est pas présentée.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ASSUDE, T., & GELIS, J-M. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematic*, *50*, 259-287.

ASSUDE, T., & GRUGEON, B. (2002). Intégration de logiciels de géométrie dynamique dans des classes de l'école primaire. *29ème colloque Inter Irem des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, La Roche-sur-Yon.

ATHIAS, F. (2014). *La géométrie dynamique comme moyen de changement curriculaire*, thèse de doctorat, Université Aix-Marseille (Hal : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01092711) (446 pages)

BARRIER, T., & MATHÉ A-C. (Eds.) (2014). Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques. *Spirale, 54*.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. *Actes de l'Université d'été, La Rochelle*, (pp. 91-120), IREM de Clermont-Ferrand.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2009). L'ingénierie comme interface recherche-enseignement, dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, F. Vandebrouck et F. Wozniak (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV école d'été de didactique des mathématiques*, (pp. 57- 78), Clermont-Ferrand.

RESTREPO, A.-M. (2008). *Génèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème*, Thèse Université Joseph Fourier Grenoble.

SENSEVY, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

PROPOSITION D'UN CADRE D'ANALYSE DE SITUATIONS DE FORMATION DE PROFESSEURS DES ECOLES

Christine **MANGIANTE**, Pascale **MASSELOT**, Édith **PETITFOUR**, Claire **WINDER**

COmmission Permanente des IRem sur l'enseignement ELEMentaire (COPIRELEM)

christine.mangiante@espe-lnf.fr, pascale.masselot@u-cergy.fr,

edith.petitfour@univ-lorraine.fr, claire.winder@free.fr

Résumé

Les réflexions dans le domaine de la formation en mathématiques des professeurs des écoles ont conduit à la production d'un grand nombre de documents présentant des situations de formation issues de pratiques de formateurs. Nous présentons le cadre d'analyse de ces situations de formation que nous avons élaboré. Ce cadre nous permet de conduire une analyse des situations de formation et d'en interroger leurs potentialités dans le but, à terme, de favoriser une meilleure appropriation de ces ressources, voire d'envisager des adaptations prenant en compte les contraintes de formation imposées.

Mots clés

Cadre d'analyse, situation de formation, professeurs des écoles, savoirs didactiques, savoirs mathématiques, savoirs professionnels.

Dans le domaine de la formation en mathématiques des professeurs des écoles, les réflexions menées notamment par la COPIRELEM, ont conduit à la production d'un grand nombre de documents à destination des formateurs des professeurs des écoles. Dans la plupart des cas, ces documents comportent des informations précises relatives à la mise en œuvre de ces scénarios (présentant les différentes étapes, phases, consignes, éléments à institutionnaliser) et des explicitations relatives aux choix effectués rapportés aux enjeux de formation associés. Or il nous semble que la mise à disposition des formateurs de ressources, dont la qualité est reconnue par un collectif, ne suffit pas à garantir leur appropriation.

Notre questionnement est double. D'une part, nous cherchons à cerner les savoirs potentiellement en jeu dans chacune de ces « situations de formation » et leur possible articulation. D'autre part, nous étudions comment le formateur peut exploiter les différentes potentialités de ces « situations de formation » en fonction des objectifs qu'il s'est fixés. Pour cela, il nous a semblé nécessaire de construire un outil d'analyse de « situations de formation ». Nous utilisons ici le mot « situation » au sens de (Brousseau, 2010) :

> Une situation est caractérisée dans une institution par un ensemble de relations et de rôles réciproques d'un ou de plusieurs sujets (élève, professeur, etc.) avec un milieu, visant la transformation de ce milieu selon un projet. Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation. Le sujet détermine une certaine évolution parmi des états possibles et autorisés de ce milieu, vers un état terminal qu'il juge conforme à son projet. (Brousseau, 2010, p. 2)

Ainsi une « situation de formation » est, pour nous, une situation impliquant des formés (étudiants en formation initiale ou enseignants en formation continue), et des formateurs au sein d'une institution de formation d'enseignants. Elle consiste en un ensemble d'activités

proposées par le formateur et construites autour d'une activité que nous appellerons activité « amorce ».
Notre cadre d'analyse des situations de formation vise dans un premier temps à interroger les potentialités de ces situations pour pouvoir les adapter à un public choisi dans le contexte de contraintes de formation imposées. Il contribue aussi à clarifier les enjeux dans les différentes phases de la mise en œuvre, enjeux liés à des objectifs de formation mathématiques, didactiques ou pédagogiques. À terme, il s'agit de permettre aux utilisateurs de ces ressources de mieux appréhender et de s'approprier les enjeux de formation sous-jacents, de manière plus fidèle aux intentions des concepteurs.

UNE VARIABLE ET DES INDICATEURS

Nous prenons en compte l'ensemble des activités proposées par le formateur en les caractérisant en fonction de leur nature. Pour chaque activité, plusieurs indicateurs apparaissent :

- le type de connaissances convoquées ;
- le degré de décontextualisation de ces connaissances ;
- la posture du formé dans l'activité.

Le type de connaissances convoquées

En accord avec Margolinas (2012), « une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation ». En ce sens, une connaissance est intimement liée au sujet, alors qu'un « savoir est une construction sociale et culturelle qui vit dans une institution. (…) [Il est] dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé ». Les connaissances convoquées sont les connaissances attendues au regard de la tâche prescrite. Houdement (1995) et Kuzniak (1994), en utilisant une métaphore issue de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau), ont identifié trois types de « savoirs utiles pour enseigner » (Houdement, 2013) :

> Le savoir mathématique correspond aux mathématiques nécessaires à l'enseignant pour préparer, réguler et évaluer sa séance et ses élèves.
> Le savoir didactique est, par définition, nourri par les recherches en didactique sur les mathématiques du primaire. *A priori* ce savoir a vocation à être théorique mais (…) une transposition est nécessaire pour rendre accessible en centre de formation des « savoirs utiles ». Ce savoir didactique est issu d'ouvrages de recherches collaboratives (…).
> Le savoir pédagogique ou « savoir d'expérience » (Portugais, 1995) (…) se caractérise par son oscillation entre deux pôles, l'un théorique mais parfois très éloigné de la pratique future des étudiants (par exemple le fait que les pratiques constructivistes de l'apprentissage prennent le pas sur les conceptions behavioristes), l'autre proche du sens commun et de la pratique (…) mais privée de l'adaptabilité d'un modèle plus théorique. (Houdement, 2013, pp. 12-13).

Dans les différentes activités, nous distinguons alors les connaissances mathématiques ainsi que les connaissances didactiques et pédagogiques, que l'on vise à faire acquérir aux formés.
Les *connaissances pédagogiques* relèvent des conceptions de l'apprentissage, de l'organisation et de la gestion de la classe, indépendamment des contenus disciplinaires : par exemple envisager différentes modalités de travail (individuel, en petits groupes pour favoriser les interactions, en grand groupe), différentes gestions de la mise en commun (par affichage – ou pas – des productions, par une prise en compte de toutes les productions ou d'une partie), différents supports de travail (cahier de brouillon, affiches, ardoises ; éphémères ou pas), ...
Les *connaissances didactiques* sont spécifiques au contenu mathématique enseigné. Ces

connaissances sont des connaissances pour l'enseignant : elles correspondent à des transpositions de savoirs didactiques initialement conçus dans le cadre de la recherche. Par exemple le concept de variable didactique donne à l'enseignant le moyen d'identifier et de hiérarchiser les différents paramètres à considérer et de faire des choix des valeurs de certains en fonction de ses objectifs en termes d'apprentissage à provoquer.
Connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques sont intimement liées au cœur des pratiques enseignantes et ne peuvent être abordées de façon vraiment indépendante dans le cadre des situations de formation.

Le degré de décontextualisation des connaissances convoquées

Selon les moments de la mise en œuvre, les connaissances convoquées peuvent être :

- mobilisées en contexte implicitement (en acte) ;
- mobilisées en contexte explicitement ;
- décontextualisées (pour devenir mobilisables dans d'autres contextes).

On définit ainsi trois degrés de décontextualisation de connaissances convoquées. Les connaissances mathématiques sont mobilisées en acte lorsqu'elles sont utilisées comme outil (Douady, 1986) dans l'activité mathématique considérée. Cette dernière peut être soit vécue, avec la réalisation effective de ce qui est demandé (réalisation de manipulations, élaboration et rédaction d'une solution), soit évoquée, avec une résolution mentale. Les connaissances mathématiques sont explicitées en contexte lorsque leur utilisation dans l'activité en tant qu'outil est formulée et elles sont décontextualisées lorsqu'elles sont présentées en tant qu'objet, généralement dans une phase d'institutionnalisation. Concernant les connaissances didactiques ou pédagogiques, elles sont mobilisées en acte dans l'identification des choix didactiques ou pédagogiques effectués dans l'activité mathématique considérée, elles sont explicitées en contexte dans une analyse des implications de ces choix et elles sont décontextualisées dans la mise en évidence et l'explicitation des concepts didactiques ou pédagogiques sous-jacents.

La posture du formé

En liaison avec les différentes manières dont un formateur peut s'adresser à des stagiaires (en formation initiale ou continue) dégagées par Sayac (2010), nous distinguons, dans une situation de formation, plusieurs postures spécifiques attendues du formateur de la part du formé, dont ce dernier peut ou non être conscient. Ainsi, le formé est placé dans une *posture d'élève* par rapport aux connaissances mathématiques lorsqu'il doit réaliser l'activité mathématique ou lorsqu'il s'intéresse aux connaissances mathématiques décontextualisées de cette activité. Il est placé dans une *posture d'élève-enseignant* (au sens de « élève ingénieur ») lorsqu'il étudie des activités à destination des élèves ou des productions d'élèves, lorsqu'il analyse les conditions de mise en œuvre en classe de l'activité mathématique considérée. Il est placé dans une *posture d'enseignant* lorsqu'il entre dans un questionnement plus large sur les pratiques de classe ou sur les enjeux d'apprentissages mathématiques. Enfin, il est placé dans une *posture d'élève-chercheur* (voire de *praticien-chercheur*) lorsqu'il s'agit de problématiser une question professionnelle en lien avec les pratiques de classe et les enjeux d'apprentissage.

La nature des activités

Dans une situation de formation, nous distinguons des activités de natures différentes qui induisent (implicitement ou explicitement) des postures spécifiques attendues du formateur de la part du formé, dont ce dernier peut ou non être conscient. Les différentes activités se présentent sous forme de paliers (figure 1).

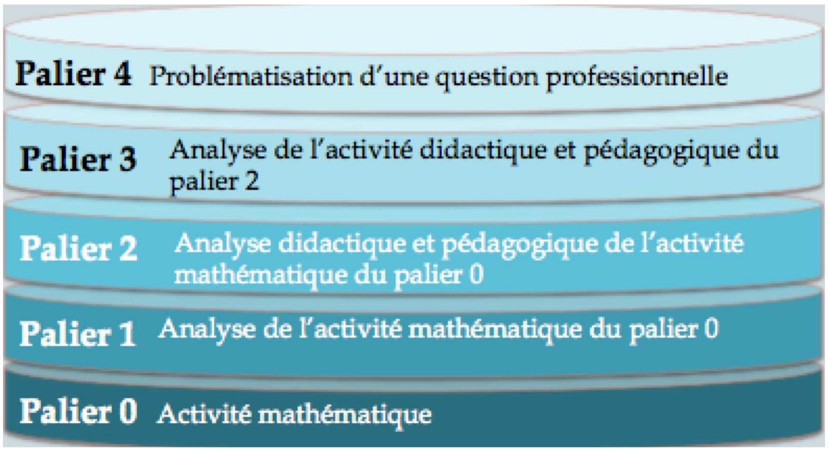


Figure 1 : Cinq paliers d'étude

Palier 0 - *Activité mathématique* : elle peut être vécue ou évoquée (réalisée mentalement), le formé étant placé en posture d'élève (par rapport aux connaissances mathématiques) ; les connaissances mathématiques convoquées sont contextualisées, elles peuvent être implicites ou explicites ;

Palier 1 - *Analyse de l'activité mathématique de palier 0* : elle fait apparaître les connaissances mathématiques décontextualisées (ce qui place le formé en posture d'élève apprenant les mathématiques), ainsi que des connaissances didactiques et/ou pédagogiques en acte (initiant le changement de posture du formé vers une posture d'élève-enseignant) ;

Palier 2 - *Analyse didactique et pédagogique de l'activité mathématique de palier 0* (analyse des conditions de mise en œuvre – effective ou seulement anticipée – de cette activité mathématique) : elle nécessite une posture d'élève-enseignant de la part du formé ; les connaissances didactiques et/ou pédagogiques sont explicitées en contexte ;

Palier 3 - *Analyse de l'activité pédagogique et/ou didactique du palier 2* : elle conduit à la décontextualisation des connaissances didactiques et/ou pédagogiques ; elle peut se présenter sous la forme d'un questionnement plus large portant sur les pratiques de classe (situations d'apprentissage spécifiques, gestes professionnels, …), ou sur les enjeux d'apprentissages mathématiques d'un ou de plusieurs contenus (programmes, progressions, …) ou bien encore sous la forme d'une mise en évidence d'outils d'analyse didactique (phases d'une situation didactique, types de tâches, …) ; le formé a une posture d'enseignant ;

Palier 4 - *Problématisation de questions professionnelles* en lien avec les pratiques de classe, les enjeux d'apprentissage et/ou les outils d'analyse didactique : elle permet une posture d'élève-chercheur notamment lorsqu'il s'agit d'élaborer une méthodologie d'analyse de cette question et d'en inférer des résultats.

Le tableau suivant récapitule les caractéristiques des cinq paliers d'étude que nous distinguons même s'ils sont imbriqués et « se chevauchent » parfois dans la mise en œuvre de situations de formation.

<table>
<tr><th rowspan="2">Palier</th><th rowspan="2">Nature de l'activité</th><th rowspan="2">Posture du formé</th><th colspan="3">Connaissances</th></tr>
<tr><th>mathématiques</th><th>didactiques</th><th>Pédagogiques</th></tr>
<tr><td>0</td><td>Activité mathématique (action réalisée effectivement ou mentalement)</td><td>Élève</td><td>En contexte</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>1</td><td>Analyse de l'activité mathématique du palier 0.</td><td>Élève
Elève-enseignant</td><td rowspan="4">Décontextuali-sées</td><td>Implicites en contexte</td><td>Implicites en contexte</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Analyse didactique et pédagogique de l'activité du palier 0.</td><td>Elève-enseignant</td><td>Explicitées en contexte</td><td>Explicitées en contexte</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Analyse de l'activité didactique et pédagogique du palier 2.</td><td>Enseignant</td><td rowspan="2">Décontex-tualisées</td><td rowspan="2">Décontex-tualisées</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Problématisation d'une question pro-fessionnelle en lien avec le palier 3.</td><td>Élève-chercheur</td></tr>
</table>

Chaque palier correspond à une mise à distance, mettant en jeu des connaissances mathématiques et/ou didactiques et/ou pédagogiques, à partir de l'étude du palier précédent. Le passage d'un palier n à un palier $n + 1$ s'accompagne :

- soit d'un changement de posture du formé ;
- soit d'une mise à distance dans une posture donnée en lien avec le degré de décontextualisation (implicites en contexte, explicitées en contexte, décontextualisées) des connaissances de différents types.

Nous faisons l'hypothèse qu'il n'est pas possible d'exploiter une situation à un palier $n + 1$ si les formés ne possèdent pas les acquis correspondants du palier n.

Le cadre d'analyse des situations de formation ainsi élaboré met en lumière les différentes potentialités de ces situations et rend compte de la manière dont s'articulent les différents types de savoirs « utiles pour enseigner » intervenant dans celles-ci, en explicitant la « stratégie » du formateur pour pouvoir adapter ces situations à un public choisi dans le contexte de contraintes de formation imposées en fonction des objectifs visés. En effet, il clarifie les enjeux possibles des différentes phases de la mise en œuvre, enjeux liés à des objectifs de formation (appropriation de savoirs mathématiques, didactiques ou pédagogiques).

Par ailleurs, ce cadre d'analyse est un outil pour décrire des alternatives quant à l'usage par le formateur de ces situations, mais aussi pour décrire certains passages obligés. En effet, la mise en parallèle de différents scénarios de formation nous conduit à plusieurs constats. Tout d'abord, une même mise en activité peut donner lieu à différentes exploitations dont nous pouvons rendre compte en termes de parcours selon différents paliers d'étude. Ensuite, le premier palier d'étude (celui correspondant à la mise en activité) diffère d'un scénario à l'autre. Enfin, certaines régularités observées dans ces scénarios suggèrent non pas une organisation chronologique des différents paliers, mais une hiérarchisation : l'entrée dans une situation donnée peut se situer aux paliers 0, 1, 2, 3 ou 4 mais des passages par les paliers inférieurs se révèlent souvent nécessaires. En outre, en considérant la succession de plusieurs situations de formation, ce cadre aide à mettre en évidence l'existence de différents parcours de formation envisageables, révélateurs de la stratégie du formateur à un niveau plus global.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* (édition révisée de 1996). http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2)*, 5-31.

HOUDEMENT, C. (1995). *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies.* Thèse de l'Université Paris 7.

HOUDEMENT, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Note d'habilitation à diriger des recherches. Université Paris Diderot – Université de Rouen.

KUZNIAK, A. (1994). *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs des maîtres du premier.* Thèse de l'Université Paris 7.

MARGOLINAS, C. (2012). Des savoirs à la maternelle, oui mais lesquels ? *Actes du XXXIX Colloque COPIRELEM*, Quimper.

SAYAC, N. (2010). Appréhender la formation des professeurs des écoles en France à travers la pratique des formateurs en mathématiques. *Actes du congrès de l'AREF*, Université de Genève.