ÉLABORATION D'UNE RÉFÉRENCE POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA LOGIQUE

Zoé **MESNIL**
Université Paris Est Créteil
zoe.mesnil@u-pec.fr

Résumé
Cette communication présente ma thèse qui porte sur l'enseignement de notions de logique au lycée. Les instructions officielles actuelles précisent qu'il ne s'agit pas de faire un cours de logique mathématique, mais de développer une utilisation en tant qu'outils des notions de logique considérées. Afin de prendre en compte cette contrainte dans l'étude du processus de transposition didactique, j'introduis, entre *savoir savant* et *savoir à enseigner,* un *savoir de référence* pour la logique, savoir qui n'a jamais été institué par la communauté de l'enseignement des mathématiques. Je m'appuie pour proposer une telle référence sur une double étude épistémologique et didactique, dans laquelle je privilégie les liens entre logique et langage. Une étude plus fine du savoir à enseigner donne ensuite à voir la complexité des conditions et contraintes portant sur l'enseignement de ces notions. La question de la formation des enseignants est finalement posée à partir d'une étude de cas : une formation continue de trois jours sur la logique, dans laquelle les notions de logique sont abordées à partir d'une étude naïve du langage mathématique.

Mots clés
Logique, langage, enseignement

INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

En France, le nouveau programme de mathématiques pour la classe de Seconde, publié en 2009, demande explicitement d'enseigner des connaissances sur des notions de logique, et c'est une nouveauté par rapport au programme précédent. Celui-ci datait de 2001 et ne contenait qu'une rapide mention de la logique, ce qui était tout de même déjà un changement puisqu'après avoir été très présente dans les programmes de mathématiques du lycée à partir de 1969, au moment des mathématiques modernes, la logique en a été exclue entre 1981 et 1999. Le nouveau programme fixe des objectifs concernant les connecteurs, les quantificateurs, les types de raisonnement : la dimension outil de ces notions est fortement mise en avant, et on peut même parler d'une méfiance vis-à-vis de la dimension objet.
Il semble effectivement difficile de faire des mathématiques sans que connecteurs, quantificateurs, raisonnements soient présents, et l'on peut se demander s'il y a vraiment besoin de recommandations institutionnelles pour que les enseignants en parlent. Selon Durand-Guerrier, ces éléments présents dans l'activité mathématique ne le sont pas forcément pour autant dans le discours du professeur :

> Pratiquement absente aujourd'hui des curricula français, la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique est également le plus souvent absente du discours du professeur. Pour autant, les objets dont s'occupe la logique, tels que les connecteurs, la quantité, les

règles d'inférences, la vérité et la validité sont autant d'outils de l'activité mathématique, utilisés le plus souvent de façon naturalisée, non problématisée et sans théorie de référence. (Durand-Guerrier, 2005, p. 5)

Peu habitués à mettre des mots sur la dimension logique de leur activité mathématique, quand bien même leurs actes en montrent une bonne maîtrise, les mathématiciens et enseignants ne sont pas forcément conscients des implicites créés par leur pratique des mathématiques. Ainsi, les auteurs du manuel *Maths 2^{nd}, collection Indice* oublient que toutes les propositions en mathématiques ne sont pas forcément universelles, même si effectivement ces dernières sont extrêmement présentes :

> Un ou plusieurs exemples ne suffisent pas pour montrer qu'un énoncé est vrai, mais on peut utiliser un exemple pour montrer qu'un énoncé est faux : on peut alors trouver un cas qui le met en défaut, c'est un **contre-exemple.**

Figure 1 : Extrait du manuel Maths 2^{de}, collection Indice

Cet extrait montre qu'il n'est pas si simple de passer de connaissances en acte à des propos clairs pour les enseigner. Par ailleurs, des difficultés persistantes d'élèves sur ces questions de logique étant maintenant bien identifiées par la recherche en didactique des mathématiques (voir par exemple une synthèse dans la thèse de Njomgang Ngansop (2013)), il est intéressant d'étudier plus précisément la demande institutionnelle et les ressources sur lesquelles les enseignants pourront s'appuyer pour y répondre, ce que j'ai fait dans ma thèse intitulée *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement* (Mesnil, 2014), que je présente dans ce texte.

La demande formulée par les rédacteurs des programmes n'est pas d'enseigner la logique mathématique, mais bien d'enseigner cette logique à l'œuvre dans l'activité mathématique, que j'appelle alors *logique des mathématiques*. Une des questions qui se pose sur cet enseignement concerne la façon dont la logique mathématique y participe. Je partage la position de plusieurs chercheurs qui pensent, et montrent, que c'est une référence pertinente, voir indispensable, mais qui doit être articulée avec l'activité mathématique (Adda, 1988 ; Durand-Guerrier, 1996 ; El Faqih, 1991). Ce point de vue ne semble pas être celui de l'institution puisque qu'il n'y a de logique mathématique dans la formation initiale des enseignants que là où localement des formateurs prennent l'initiative d'en mettre[1].

À travers cette demande se dessine un *savoir à enseigner*, et l'enseignement de la logique au lycée peut être regardé comme résultat d'un processus de transposition didactique, dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique qui permet d'étudier les transformations nécessaires des *savoirs savants* en vue des les enseigner au sein d'une institution particulière (Chevallard, 1985). Mais le savoir logique que les mathématiciens partagent est un savoir en acte, visible dans des pratiques plutôt que dans des traités. Je propose alors de penser la transposition didactique des notions de logique en introduisant un *savoir de référence* entre le

1 Un retour de notions de logique dans les programmes de lycée devrait signifier également un retour dans la formation des enseignants de mathématiques, puisque par exemple en 2016, le programme du CAPES de mathématiques était « constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes préparatoires aux grandes écoles ».
(http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/capes_externe/58/5/p2016_capes_ext_math_455585.pdf)
Dans le programme plus détaillé publié pour la session 2017 du CAPES, il y a un paragraphe « **Raisonnement et vocabulaire ensembliste**. Opérateurs logiques et quantificateurs. Vocabulaire de la théorie des ensembles. Applications, relations d'ordre et relations d'équivalence. », et pour l'option informatique, de la logique propositionnelle.
(http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/capes_externe/12/7/p2017_capes_ext_math_512127.pdf)
Ces prescriptions restent très vagues et ne mentionnent pas explicitement la logique mathématique, même si les objets qu'elle étudie sont évoqués.

savoir savant et le savoir à enseigner, savoir issu des pratiques, mais décontextualisé des situations où le savoir en acte se manifeste, tel que le définissent Rogalski et Samurçay :

> Dans le domaine étudié[2], on assiste au déroulement d'un processus de construction d'un corps de savoir de référence à partir d'un ensemble de « savoirs en acte » manifestés dans des pratiques. Ce processus consiste à identifier des catégories d'objets et de traitement communes à des pratiques efficaces, qui sont quant à elles spécifiques de situations, contextualisées et personnalisées. (Rogalski & Samurçay, 1994, p. 43)

Les auteurs précisent qu'il est nécessaire que ce savoir de référence puisse « s'exprimer avec ses concepts, ses méthodes, ses systèmes de représentations et son langage » (*ibid.*, p. 46). Or, pour ce qui est des notions de logique, un tel savoir de référence n'existe pas au sens où il n'y a pas de corpus rassemblant les connaissances logiques nécessaires à l'activité mathématique et qui fasse consensus dans le choix des concepts et de leur représentation.

J'ai alors mené une étude pour identifier des critères d'un savoir de référence épistémologiquement et didactiquement pertinent pour l'enseignement de notions de logique au lycée. Cette étude m'a également permis de constituer une référence utilisée dans la suite de ma recherche. Je qualifie cet outil d'analyse de *référence*, et non de *savoir de référence*, car la production d'un savoir relève d'un processus long et collectif.

J'ai ainsi pu mener dans un deuxième temps une étude de la partie externe de la transposition didactique, qui consiste en la « sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme "savoir à enseigner", seront alors soumis au travail de transposition » (Chevallard, 1991, p. 31). Il s'agit d'un travail externe car il se fait en dehors des institutions où est mis en œuvre l'enseignement. Des textes sont ainsi produits qui constituent la délimitation « officielle » du savoir à enseigner, vu alors comme aboutissement d'un processus d'adaptation et de choix faits par les rédacteurs de programmes, de documents d'accompagnement, de manuels. J'ai étudié ces documents à l'aide des outils de l'approche écologique (Artaud, 2011), avec une perspective historique qui permet de mieux comprendre la complexité de la demande actuelle.

J'ai ensuite orienté ma recherche vers des questions de formation. La partie interne de la transposition, le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné, se passe à l'intérieur d'une institution d'enseignement, et le savoir à enseigner est alors vu comme le point de départ d'un processus d'adaptation et de choix faits par un enseignant. Une formation d'enseignants vise à influencer ce processus. À partir d'une étude de cas, celle d'une formation continue proposée par l'IREM de Paris, dont je suis co-responsable avec R. Cori, je me suis plus largement demandé comment une formation pouvait permettre aux enseignants d'appréhender la complexité des notions de logique et les intégrer efficacement dans leur enseignement.

Ces trois études structurent ma recherche et le texte qui suit. Je présenterai la méthodologie adoptée pour chacune d'elle, et les principaux résultats, mais je détaillerai surtout ce qui concerne la constitution d'une référence et son utilisation pour l'étude du savoir à enseigner à travers l'exemple des quantificateurs. Dans la thèse, j'ai choisi de ne pas étudier une notion de logique en particulier parmi celles évoquées dans les programmes (connecteurs ET et OU, négation, proposition conditionnelle, quantificateurs, types de raisonnement), j'ai par contre rajouté à cette liste les notions de proposition et de variable. Dans l'étude de l'enseignement de toutes ces notions, j'ai en revanche privilégié le pilier langage de la logique, au détriment du pilier raisonnement. Cet accent mis sur les liens entre logique et langage relève d'une volonté de « réhabilitation du pilier langage », qui me semble moins souvent associé à la logique que le raisonnement.

2 La formation de professionnels de haut niveau

Étude épistémologique et didactique : identification de caractéristiques pertinentes pour un savoir de référence pour l'enseignement de la logique

Du point de vue épistémologique, j'ai mené une étude de différents systèmes logiques dans trois époques. Dans l'Antiquité grecque, la logique d'Aristote est une logique des termes, et celle des Stoïciens est une logique des propositions. Au XVII^e siècle, la logique de Port-Royal, inspirée des réflexions de Descartes, prend position contre l'excès de formalisme, et s'oppose ainsi sur ce point à Leibniz qui tente de formaliser la logique aristotélicienne. Enfin, au XIX^e siècle, on assiste à la gestation et à la naissance de la logique mathématique, de Boole et la mathématisation de la logique aristotélicienne à Frege et la logicisation des mathématiques. Du point de vue didactique, j'ai sélectionné des travaux mettant en évidence l'apport de l'analyse logique pour des questions didactiques sur le raisonnement, notamment ceux de Durand-Guerrier (1996, 2005), et sur le langage, notamment ceux de Laborde (1982). J'ai également mis en parallèle l'activité de reformulation très présente en mathématiques avec les registres de représentation sémiotique de Duval (1993). J'ai ainsi dégagé quatre axes pour la constitution d'un savoir de référence : le travail sur le langage (qui est au commencement de tous les systèmes étudiés), la validité des raisonnements (qui est le but de tous ces systèmes), la nécessaire formalisation (pour dégager la validité des raisonnements du contenu des propositions) et la dialectique entre syntaxe et sémantique (la formalisation amène ces deux aspects, qui permettent des allers-retours entre manipulation formelle des signes et interprétation), sur lesquels je reviens maintenant plus en détail.

Le travail sur le langage

Tous les systèmes logiques étudiés proposent une importante étude du langage préalable à celle des raisonnements. La notion de proposition y est primordiale. Aristote la définit comme un « discours dans lequel réside le vrai ou le faux » (Aristote, 2008, p. 95), et propose une catégorisation qui distingue les propositions selon un critère de quantité (propositions universelle ou particulière) et un critère de qualité (propositions affirmative ou négative)[3]. Mais cette catégorisation est insuffisante pour décrire les propositions mathématiques. Il a fallu attendre Frege pour qu'à la fin du XIX^e siècle, l'analyse de la proposition en sujet-copule-prédicat soit remplacée par une analyse en termes de fonction et argument, donnant ainsi naissance au langage des prédicats de la logique mathématique actuelle (Frege, 1999).

Le langage actuel des mathématiciens s'inspire du formalisme des logiciens du début du XX^e siècle, mais n'est en aucun cas une utilisation stricte d'un langage formel. Laborde (1982) le décrit dans sa thèse comme le lieu de l'interaction des deux codes de l'écriture symbolique et de la langue naturelle. Cette interaction a pour conséquences des usages spécifiques de ces deux codes et des transformations linguistiques parfois difficiles à comprendre et à utiliser, notamment pour les élèves. Mais l'interprétation des énoncés produits dans la classe de mathématiques demande également de prendre en compte les pratiques langagières de la communauté mathématique, c'est-à-dire non seulement comment sont construits les énoncés, mais aussi le sens que la communauté leur donne. La mise au jour de la structure logique des propositions, à l'aide du langage des prédicats, aide à déceler la complexité et les implicites de certaines formulations. Par exemple, Durand-Guerrier (1999) montre dans son analyse de la « tâche du labyrinthe » comment la pratique de quantification universelle implicite des implications amène un malentendu avec certains élèves.

3 On obtient donc 4 formes de proposition : universelle affirmative (Tous les A sont B), universelle négative (aucun A n'est B), particulière affirmative (quelques A sont B), particulière négative (quelques A ne sont pas B).

La validité des raisonnements

Ces systèmes logiques sont établis comme des contributions à la science du raisonnement. Pour les auteurs de la logique de Port-Royal, « la logique est l'art de bien conduire sa raison dans la connaissance des choses » (Arnauld & Nicole, 1662/1992, p. 30), elle a surtout besoin d'être exercée et la formalisation des raisonnements est vue comme une entrave au fonctionnement de l'intuition. Chez Leibniz (1998) et chez Frege (1999) au contraire, la logique doit fournir un système de signes dans lequel pourront s'exprimer les raisonnements, cette expression formelle étant la garantie de leur infaillibilité.

Gandit (2004) dénonce la place trop importante que prend l'aspect formel d'une preuve au début de l'apprentissage de la démonstration au collège. Mais se méfier de la formalisation au moment de la découverte du raisonnement déductif ne veut pas dire qu'elle ne puisse pas apporter ultérieurement un éclairage pour qui commence à en avoir une bonne pratique. Ainsi, au niveau de l'enseignement supérieur, Selden et Selden (1995) suggèrent de présenter les théorèmes et les définitions dans une formulation informelle, qui permet la compréhension intuitive, et dans une formulation formelle, qui permet un lien entre structures des énoncés et structures des preuves. Ces auteurs ne précisent cependant pas ce qui caractérise la distinction formelle/informelle, précision que j'ai apportée dans l'axe suivant.

La nécessaire formalisation

Il y a une différence importante entre Aristote, les Stoïciens, la logique de Port-Royal d'un côté, et Leibniz, Boole, Frege de l'autre : les premiers se contentent du langage courant pour exprimer les raisonnements, les seconds proposent un autre langage, celui de l'algèbre pour Leibniz et Boole, et un système de signes nouveaux pour Frege. Pour autant, ces systèmes peuvent tous être qualifiés de formels, dans le sens où ils proposent une mise en forme des propositions et des raisonnements selon un code plus ou moins contraignant.

Pour rendre compte de la plus ou moins grande formalisation des propositions dans le langage actuel des mathématiciens, j'ai distingué des registres de représentation sémiotique, au sens de Duval (1993). Deux registres sont facilement identifiables : celui de la langue naturelle (dont fait partie la proposition « les entiers divisibles par 4 sont pairs »), et celui que j'ai appelé « registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats » (dans lequel les connecteurs sont explicites, et les quantifications exprimées par des quantificateurs, comme par exemple dans la proposition « quel que soit l'entier naturel n, si n est un multiple de 4, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ »). Mais beaucoup d'autres formulations ne relèvent d'aucun de ces deux registres et constituent un registre intermédiaire (par exemple la proposition « si 4 divise n, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ » contient des variables, et ne fait ainsi pas partie du registre de la langue naturelle, et contient une quantification universelle implicite associée à la formulation en *si…, alors…* et une quantification existentielle marquée par « avec », et ne fait ainsi pas partie du registre formalisé). Le mathématicien use selon ses besoins de différentes formulations équivalentes, qui relèvent de l'un ou l'autre de ces registres. En reliant cette pratique de reformulation aux registres de représentation sémiotique de Duval (*ibid.*), nous pouvons alors, à l'instar de ce qu'il dit d'une façon générale sur les registres de représentation sémiotique, arguer d'une part que ces différentes formulations sont nécessaires à la compréhension, d'autre part que les reformulations mettant en jeu des changements de registre peuvent s'accompagner de problèmes de non-congruence particulièrement complexes pour les élèves.

La dialectique syntaxe/sémantique

Dans les systèmes étudiés il n'y a pas de séparation nette entre les deux plans syntaxique et

sémantique. Mais la dialectique entre ces deux aspects est très présente : des règles concernant l'équivalence des propositions sont établies sur des fondements sémantiques, puis utilisées pour des manipulations indépendantes de la signification des signes (par exemple les règles de conversion dans la logique d'Aristote, qui deviennent des « règles de calcul » dans la mathématisation qu'en propose Boole), et l'adéquation entre l'utilisation formelle des signes et leur interprétation est une préoccupation constante des logiciens qui proposent des langages formels (par exemple, Frege précise qu'un des signes qu'il utilise, qui correspond au connecteur IMPLIQUE, ne peut pas se traduire dans tous les cas par *si…, alors…*).
D'un point de vue didactique, les travaux de Durand-Guerrier (1996) et Deloustal-Jorrand (2004) sur l'implication, de Chellougui (2004) sur les quantificateurs, de Ben Kilani (2005) sur la négation montrent que la prise en compte des deux dimensions syntaxique et sémantique est essentielle pour une bonne compréhension des notions de logique, mais qu'elle est rarement objet d'enseignement.

Élaboration d'une référence

Les résultats de l'étude épistémologique et didactique justifient le choix d'une référence dans laquelle les notions de logique mathématique sont présentées à travers l'analyse du langage utilisé en mathématiques. Cette référence (que j'évoquerai en disant simplement *la référence*) n'est pas un savoir de référence puisqu'elle n'est pas partagée et reconnue par la communauté mathématique. Elle pourrait cependant contribuer à la construction d'un tel savoir. J'y combine trois points de vue : le point de vue de la logique mathématique, la prise en compte des pratiques langagières de la communauté mathématique, les difficultés d'élèves montrées dans différentes études didactiques. Dans cette approche multiple, la distinction entre ce que j'ai appelé le *langage mathématique*, qui concerne les objets mathématiques et eux seulement, et ce que j'ai appelé le *discours mathématique*, dans lequel intervient l'être humain qui examine ces objets, est essentielle, parce qu'elle permet de délimiter ce qui est modélisable par la logique des prédicats, qui ne s'occupe que du langage mathématique, et justifie de faire appel à la dimension plus pragmatique des pratiques langagières.
Dans cette référence sont présentés les éléments constitutifs du langage mathématique, en commençant naturellement par les notions de proposition et de variable. Ensuite, pour les connecteurs ET et OU, l'implication, la négation, les quantificateurs, j'ai adopté systématiquement les trois points de vue déjà mentionnés. Bien que l'accent soit mis sur le langage, le raisonnement n'est bien sûr pas absent de la référence. Une difficulté pour les élèves et les étudiants est de distinguer, dans un texte de démonstration, les propositions mathématiques qui concernent les objets mathématiques, et les parties du texte qui permettent de suivre le cheminement du raisonnement, par exemple les introductions de variables, ou la justification d'une inférence permettant de déduire une nouvelle proposition à partir des propositions posées en hypothèses ou déjà démontrées. La confusion entre implication et déduction relève de ce type de difficulté. La référence à la logique mathématique (logique des prédicats et déduction naturelle de Gentzen (1995)) permet aussi d'éclairer certains points complexes liés aux différents types de raisonnement : différence entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée, lien entre exemple et contre-exemple, intervention d'un « et » et d'un « ou » dans le raisonnement par disjonction des cas, gestion de la quantification universelle dans l'étape d'hérédité d'un raisonnement par récurrence.
J'illustre ici le fonctionnement de cette référence à travers l'exemple des quantificateurs, mais pour cela, il est indispensable de donner au préalable quelques éléments concernant propositions et variables.

Sur les propositions

La notion de proposition mathématique est essentielle dans l'étude du discours mathématique. Elle est première dans le sens où les notions de variable, connecteur, quantificateur peuvent ensuite être introduites comme des éléments constitutifs de ces propositions.
Une caractérisation naïve de cette notion suffit pour cela : une proposition mathématique dit un (ou des) fait(s) sur un (ou des) objet(s) mathématique(s), elle est susceptible d'être vraie ou fausse. Ainsi, « 3 est impair » est une proposition vraie, « 2 est impair » est une proposition fausse, « n est impair » (la variable n pouvant prendre ses valeurs dans $\mathbb{N}$) est une proposition pour laquelle cela a un sens de se demander si elle est vraie ou fausse, mais nous ne pouvons pas répondre à cette question par manque d'information sur n. Certains auteurs appellent « proposition » seulement les deux premières (qui sont des propositions *closes),* le choix inverse que je fais a pour but de renforcer la similitude entre ces trois énoncés : ce sont des phrases qui parlent d'objets mathématiques, la première de 3, la deuxième de 2, la troisième d'un objet qui s'appelle n.
Par contre, « 3 est impair donc 3^2 est impair » n'est pas une proposition. Cette phrase ne met pas en jeu seulement des objets mathématiques, elle met en jeu une personne en train d'affirmer des propriétés de ces objets et qui fait un lien entre elles par une inférence. La question qui se pose à propos de cette phrase n'est pas celle de la vérité ou non d'une proposition, mais celle de la validité ou non d'un raisonnement (cette distinction entre vérité et validité est précisée dans Durand-Guerrier, 2005). Pour être valide (on peut dire plus simplement « correct ») un raisonnement doit s'appuyer sur :

- une (ou des) prémisse(s) (hypothèses) vraie(s)
- un schéma de raisonnement valide

Dans l'exemple donné, le raisonnement est correct, et attribuer le qualificatif « vraie » à cette phrase ne nous dérange pas forcément. Par contre, d'autres exemples peuvent amener à voir que ce qualificatif est en fait inapproprié : « 2 est impair donc 2^2 est impair » s'appuie sur une prémisse fausse, mais sur un schéma de raisonnement valide (quel que soit l'entier naturel n, si n est impair alors n^2 est impair, or a est impair, donc a^2 est impair), alors à quoi devrait-on appliquer le qualificatif « vrai » ? Même question pour la phrase « 3 est premier donc 3^2 est impair » dont la prémisse et la conclusion sont vraies, mais qui ne s'appuie pas sur un schéma de raisonnement valide.

Sur les variables

Dans certaines propositions mathématiques nous utilisons des variables. C'est le cas par exemple dans la proposition « n est premier ET n est impair » et dans la proposition « quel que soit l'entier naturel n, si n est impair alors n^2 est impair ». Mais il y a une distinction fondamentale entre ces deux propositions concernant la variable n. D'un point de vue naïf, je dirais que la première proposition « parle » de n, elle dit quelque chose sur un objet qui s'appelle n, alors que la deuxième donne une propriété (il se trouve qu'elle est vraie) des entiers naturels, que je peux d'ailleurs formuler sans utiliser de variable : « le carré d'un entier naturel impair est impair ». D'un point de vue plus formel, on peut caractériser le statut de la variable n dans chacune de ces propositions : elle est parlante (ou libre) dans la première (qui est une proposition *ouverte*), muette (ou liée) dans la deuxième (qui est une proposition *close*).
Repérer le statut des variables qui sont présentes dans des propositions peut aider à contrôler les équivalences entre elles : ainsi, la proposition « pour tout n, $u_n \leq M$ », dans laquelle la variable M est parlante, est équivalente à la proposition « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M »

et non pas à la proposition « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée » qui ne parle pas de M. Cette dernière proposition est équivalente à « il existe un réel M tel que pour tout n, $u_n \leq M$ », dans laquelle la variable M est muette, à cause du quantificateur existentiel. Cette notion de variable muette/parlante peut tout-à-fait vivre dans la classe, et à mon avis utilement, en se posant la question « de qui parle cette proposition ? » Elle peut apporter un autre éclairage sur certains exercices, prenons par exemple un exercice classique en 1[re] : déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation $mx^2 + 2x + 1 = 0$ a deux solutions. On trouve que c'est pour $m < 1$. Finalement, nous avons montré que les propositions « l'équation $mx^2 + 2x + 1 = 0$ a deux solutions » et « $m < 1$ » sont équivalentes. Et il est très facile de voir quand est-ce que la deuxième est vraie[4]. On peut faire remarquer que la variable x, qui était muette dans la première proposition, a disparu dans la deuxième, et utiliser cette idée pour disqualifier la réponse d'un élève qui proposerait « $m=(-2x+1)/x^2$ ».

Les quantificateurs dans la référence

Comme annoncé, la référence contient d'abord une présentation des notions de logique à partir de la logique mathématique. La logique des prédicats utilise deux quantificateurs : le quantificateur universel, qui appliqué à une variable x astreinte à un domaine E permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\forall x$ P, et le quantificateur existentiel, qui appliqué à une variable x permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\exists x$ P (description de l'aspect syntaxique des quantificateurs : ils opèrent sur une variable et une proposition pour construire une nouvelle proposition). La proposition $\forall x$ P[x] est vraie[5] lorsque pour chaque élément a de l'ensemble E la proposition P[a] est vraie. La proposition $\exists x$ P[x] est vraie lorsqu'il existe au moins un élément a de l'ensemble E tel que P[a] soit vraie (description de l'aspect sémantique des quantificateurs : conditions de vérité d'une proposition quantifiée). Les quantificateurs sont des mutificateurs : une variable sur laquelle opère un quantificateur est muette dans la proposition quantifiée.

Voici quelques résultats sur des propositions quantifiées (il faut parfois prendre la précaution que l'on est sur un domaine non vide), ces résultats peuvent être établis sémantiquement, en recourant au sens, mais ils permettent ensuite une manipulation syntaxique, indépendante de ce sens (de la même manière que sont manipulées des égalités algébriques pour être transformées en égalités équivalentes) :

- NON($\forall x$ P[x]) est équivalente à $\exists x$ NON(P[x])
- Si $\forall x$ P[x] est vraie, alors $\exists x$ P[x] est vraie
- $\forall x$ P[x] et $\forall x$ NON(P[x]) ne peuvent pas être vraies toutes les deux
- $\forall x$ (P[x] ET Q[x]) est équivalente à ($\forall x$ P[x]) ET ($\forall x$ Q[x])
- Si [($\forall x$ P[x]) OU ($\forall x$ Q[x])] est vraie, alors $\forall x$ (P[x] OU Q[x]) est vraie
- Si $\exists y \forall x$ P[x,y] est vraie, alors $\forall x \exists y$ P[x,y] est vraie

Dans le langage mathématique, les quantificateurs sont une façon de marquer la quantification (au sens large de l'expression de la quantité, telle qu'on la trouvait déjà chez Aristote), mais il y en a bien d'autres. Voyons cela à travers quelques exemples de propositions mathématiques :

(1) Un nombre réel a un carré positif

4 On retrouve la démarche de résolution d'une équation qui consiste effectivement à donner une proposition simple, du type $x = a$, équivalente à une proposition initiale plus complexe, une égalité entre deux expressions algébriques. L'équivalence entre les deux propositions, et la simplicité de la deuxième, permet de dire quand est-ce que la première est vraie.

5 Cette caractérisation sémantique peut être qualifiée de « naïve » dans la mesure où je ne m'attache pas à définir ce que signifie « être vraie ». Mais bien sûr, cette caractérisation peut être plus rigoureuse à l'aide de la notion de satisfaction d'une formule dans un modèle introduite par A. Tarski (1972).

(2) Un nombre réel a toujours un carré positif
(3) Tous les réels ont un carré positif
(4) Tout réel x est tel que x^2 est positif
(5) Pour tout réel x, x^2 est un réel positif
(6) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

Elles sont plusieurs formulations d'une même propriété, mais la quantification universelle y est exprimée de manière très différente. Dans la proposition (1), la quantification est implicite, sous-entendue par la première occurrence du mot *un*. Nous utilisons fréquemment l'article indéfini *un* pour marquer une quantification universelle, dans le langage courant comme en mathématiques. Mais *un* est également parfois utilisé pour marquer une quantification existentielle, ce qui est évidemment source de confusion ! Parfois même, les deux utilisations cohabitent dans une même proposition, comme par exemple dans « un réel positif possède une racine carrée », ou dans « un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle ». Dans la proposition (2), l'adverbe *toujours* sert à marquer explicitement cette quantification universelle, de même que le mot *tous* dans la proposition (3). Les propositions (4) à (6) se démarquent des deux premières par l'utilisation d'une variable. Par ailleurs, on peut repérer dans chacune de ces propositions une expression exprimant la quantification (ici universelle), et possédant la propriété de pouvoir être séparée de la proposition « x^2 est positif » (ou formulation équivalente) dans laquelle la variable x est parlante (dans la proposition (4), l'expression « Tout réel x est tel que » est moins courante que les deux autres). J'appelle *quantificateur* une telle expression. Dans la formulation (4') « Tout réel x est tel que son carré est positif », la partie « son carré est positif » n'a pas de sens en soi, ça n'est pas une proposition, et ici l'expression « Tout réel x est tel que » n'est pas utilisée comme un quantificateur (d'ailleurs, l'utilisation d'une variable est inutile).

Finalement, nous avons vu que la quantification en mathématiques peut être implicite ou explicite, et dans ce deuxième cas, éventuellement marquée par un quantificateur qui est une expression répondant à des règles syntaxiques d'utilisation.

Les propositions (4) et (5) peuvent paraître plus proches des propositions (1) à (3) car elles sont formulées « avec des mots », contrairement à la proposition (6) qui utilise seulement des symboles mathématiques, et qui peut paraître beaucoup plus formelle. Je voudrais souligner qu'une telle vision masque la formalisation qui existe déjà dans ces propositions, au sens d'une mise en forme respectant certaines règles, même si cette formalisation ne s'accompagne pas d'une symbolisation.

Je terminerai en mentionnant certaines difficultés rencontrées par des élèves du secondaire ou des étudiants du supérieur en lien avec les quantificateurs. Tout d'abord, les quantifications implicites ne sont pas toujours perçues par les élèves. Le cas de la quantification universelle implicite associée aux implications et à la formulation en *si…, alors…* est repéré depuis bien longtemps (voir par exemple Durand-Guerrier, 1999). La quantification est souvent encapsulée dans des tournures rigidifiées (par exemple, « u_n est aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand ») que le mathématicien expert sait reformuler en explicitant les quantifications, mais ces reformulations dans un langage plus formel ont tendance à disparaître du langage utilisé au lycée, et sont source de difficulté quand les étudiants les rencontrent dans le supérieur. Une autre difficulté concerne la non prise en compte de l'ordre des quantificateurs quand il y a alternance. On sait que les élèves ont plutôt une interprétation *pour tout… il existe…*, quand bien même ils sont face à une proposition *il existe… pour tout…* (Dubinsky & Yiparaki, 2000). Par ailleurs, Chellougui (2004) a montré les difficultés d'étudiants avec l'utilisation d'une proposition existentielle. Dans un texte de preuve, on confond généralement l'affirmation de l'existence d'un élément vérifiant une propriété, et l'acte d'en considérer un et de lui donner un nom. C'est-à-dire qu'on écrit « il existe k tel que $n = 2k$ », proposition dans laquelle la variable k est muette, et à la ligne suivante on parle de k.

Cependant, si on écrit ensuite « il existe k tel que $m = 2k$ », le mathématicien expert saura qu'il ne faut pas continuer avec k, mais plutôt avec k', mais un certain nombre d'étudiants n'ont pas cette expertise. De même, les mathématiciens ne se laissent pas piéger par la « règle de dépendance » dans les énoncés *pour tout… il existe…*, et repèrent très facilement cette erreur dans une production d'étudiant. Mais par contre, ils n'expliquent pas forcément cette erreur aux étudiants en la mettant en relation avec des règles formelles de manipulation des variables et des quantificateurs (Durand-Guerrier & Arsac, 2003).

Analyse du savoir à enseigner

La référence ainsi constituée dans ma thèse soulève pour chaque notion de logique des points sensibles qu'il convient de regarder plus particulièrement dans l'analyse du *savoir à enseigner*. Mais avant de regarder notion par notion, des questions plus globales se posent : Quelles notions de logique sont présentes ? Comment la logique est-elle reliée à un apprentissage du raisonnement et du langage mathématiques ? Quel est le niveau de formalisation des notions de logique ?

Reprenant les outils de l'approche écologique (Artaud, 2011), j'ai ainsi recherché habitat(s) (où trouve-t-on les notions de logique) et niche(s) (quelle est leur fonction) de la logique dans les textes des programmes et des documents les accompagnant depuis 1960. Pour cerner le contexte dans lequel est écrit chacun de ces programmes, je me suis appuyée sur différents textes publiés par l'APMEP[6], notamment le Bulletin, publication trimestrielle de l'association. J'utilise ces textes comme des indicateurs des interrogations de la communauté de l'enseignement des mathématiques. Des positions diverses s'y expriment, pas seulement celles prises officiellement par l'association. Je fais ainsi des allers-retours entre analyses des programmes à l'aide des outils de l'analyse écologique qui permettent de préciser la demande institutionnelle, et analyses des bulletins de l'APMEP, qui aident à en comprendre l'évolution, en montrant le point de vue des acteurs de la mise en œuvre de cette demande.

Cependant, comme le souligne Arsac, le savoir à enseigner ne se réduit pas aux textes officiels (d'ailleurs les enseignants se contentent rarement de cette seule lecture pour préparer leurs cours) :

> [le savoir à enseigner] ne se réduit pas au programme, nous avons remarqué en effet qu'un texte de programme appelle une interprétation. Le savoir à enseigner est ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner quand les manuels publiés, les annales, les habitudes prises, ont fixé à peu près définitivement l'interprétation du programme. (Arsac, 1989, pp. 12-13)

Parmi les ressources publiées à côté des textes officiels, les manuels ont une place importante. Ils sont un élément charnière de la transposition. Tout d'abord, ils donnent à voir des choix d'organisation d'enseignement de notions de logique, c'est-à-dire une interprétation possible des programmes à l'intérieur d'un système de contraintes qui leur est propre. Mais, par leur manière de présenter les notions et par le choix et l'organisation des tâches qu'ils proposent, ils sont aussi une ressource pour les choix didactiques des enseignants. J'ai réalisé une analyse de manuels en deux temps : tout d'abord une étude des « pages logiques » des manuels, c'est-à-dire des pages où sont présentées les notions de logique, dans l'ensemble des manuels de Seconde publiés pour la rentrée 2010, ainsi que dans 3 manuels de Seconde publiés en 1969[7], puis une étude des tâches proposées dans 5 manuels actuels.

6 Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

7 L'étude de manuels de 1969 a pour but de donner une idée de l'approche adoptée à cette époque, nous pouvons faire l'hypothèse d'une certaine homogénéité dans les manuels, qui fait qu'il n'est pas nécessaire de proposer une étude de tous les manuels de cette époque, documents plus difficiles à se procurer que les manuels récents.

Ces analyses, menées avec une perspective historique, éclairent les enjeux des choix faits pour définir le savoir à enseigner, choix qui participent d'un système de conditions et de contraintes auquel sont soumis les enseignants. Je présente ici quelques résultats de l'étude globale des programmes, documents d'accompagnement et textes de l'APMEP, puis de l'étude plus locale des quantificateurs dans l'ensemble des documents actuels.

Étude des programmes et des documents d'accompagnement : point de vue global

J'ai centré mon étude sur les programmes pour la classe de Seconde[8], et je l'ai menée en distinguant quatre périodes selon la place attribuée à la logique dans ces programmes :

- de 1960 à 1969 : en 1960, la logique fait une entrée dans les programmes. Et dans les années qui suivent, des expériences sont faites sur le terrain, certaines pratiques d'enseignement sont débattues, notamment en ce qui concerne l'emploi des symboles logiques.
- de 1969 à 1981 : le programme de mathématiques pour les classes[9] de Seconde de 1969 est celui des mathématiques modernes. C'est une période dans laquelle la logique est objet explicite d'enseignement. Mais cette réforme donne rapidement lieu à de vives critiques.
- de 1981 à 1999 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1981 est celui de la contre-réforme. La logique en est exclue, accusée de participer au formalisme excessif reproché aux mathématiques modernes. Cette exclusion se poursuit dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1990.
- depuis 1999 : la logique fait un timide retour dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1999, puis dans le programme pour la classe de Première de la section littéraire en 2004, puis finalement un retour plus explicite dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009.

Je présente ici les résultats de cette analyse en proposant une comparaison entre la période des mathématiques modernes et la période actuelle.

Dans tous les textes institutionnels étudiés, la maîtrise du raisonnement et de l'expression est un objectif affiché de l'enseignement des mathématiques. Mais la logique mathématique n'est une référence pour cet apprentissage que durant la période des mathématiques modernes (1969-1981), et, à un degré moindre, depuis 1999. Nous pouvons donc parler, dans ces deux périodes, de deux niches qui correspondent aux deux piliers de la logique : une niche raisonnement et une niche langage. Ces deux niches sont bien sûr imbriquées puisque le langage est constitutif du raisonnement.

Dans ces deux périodes nous pouvons également parler d'un habitat flou pour la logique qui doit être présente partout, son étude accompagnant celle des notions vues dans les autres chapitres. Il y a cependant une différence notable sur ce point entre les deux périodes, qui révèle deux positions distinctes quant à la dimension objets des notions de logique. Pendant la période des mathématiques modernes, un chapitre spécifique était consacré à ces notions, étudiées en tant qu'objets mathématiques. Ce chapitre était placé en début de Seconde et il avait pour but de poser des bases qui seraient ensuite réinvesties à de multiples occasions. Dans le programme pour la classe de Seconde de 2009, il est précisé qu'il ne faut pas faire de cours et le programme ne suggère d'aborder les notions de logique que dans leur dimension outil.

L'étude de documents accompagnant les programmes de 1969 et de 2009 montre que, si les deux programmes mentionnent à peu près les mêmes notions de logique à étudier, les

8 En ce qui concerne les programmes actuels, les objectifs sont presque identiques pour les classes de Seconde, Première et Terminale et seul un document d'accompagnement a été publié, pour la classe de Seconde.

9Il y avait à l'époque trois sections pour la classe de Seconde.

approches sont très différentes, notamment dans la place attribuée à la logique mathématique. Dans la période des mathématiques modernes, le *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde* de 1970 qui accompagne les programmes de 1969 (désigné ensuite par *le commentaire de 1970*) propose un très synthétique cours de logique mathématique, en précisant que ce qui est exposé est surtout à visée de formation des enseignants plutôt que directement destiné aux élèves. Cet exposé n'est pas accompagné d'exemples d'activités pour la classe. À l'inverse, le document *Ressources pour la classe de Seconde, Notations et raisonnement mathématiques* de 2009 (désigné ensuite par *le document ressource*) propose une série d'exercices sur les éléments de logique au programme, mais aucune considération théorique les concernant. Il n'est ainsi pas question de les présenter, ni pour les élèves, ni même pour les enseignants à partir de l'approche de la logique mathématique. Plusieurs différences entre l'utilisation de certains mots (et, ou, un, si… alors…) dans le langage courant et dans le langage mathématique sont soulignées, mais aucun terme de la logique mathématique n'est utilisé pour expliquer ces différences (par exemple, les termes « quantificateur universel » et « quantificateur existentiel » ne sont pas utilisés pour parler des différents sens dans l'emploi du mot *un*).
Finalement, l'étude de ces deux documents nous permet de préciser les liens entre logique et langage dans ces deux périodes. Durant la période des mathématiques modernes, l'ancrage dans la niche langage est plus fortement affirmé : la formalisation du langage mathématique est vue comme bénéfique, structurante pour l'activité mathématique, et la logique mathématique est vue comme une aide à la maîtrise d'un langage formalisé beaucoup plus largement utilisé au lycée qu'aujourd'hui. Dans le programme actuel, même si la logique est reliée au langage, la maîtrise d'un langage mathématique spécifique n'est plus affichée comme objectif . Les principes de la logique mathématique sont en effet mis en parallèle avec les principes de la logique du langage courant, mais dans les commentaires du document ressource, les premiers semblent consister en des précisions nécessaires pour adapter les deuxièmes à la rigueur requise en mathématiques, qui exige notamment l'univocité de certains termes. Le traitement des notions de variable et de proposition est un indicateur de ces différentes positions par rapport au langage mathématique : elles sont présentées comme des notions essentielles dans le commentaire de 1970, elles sont absentes du document ressources de 2009.
L'étude des documents publiés par l'APMEP montre que l'enseignement de la logique est beaucoup plus une préoccupation des enseignants durant la période des mathématiques modernes qu'actuellement (une liste des articles publiés dans le Bulletin de l'APMEP sur ce sujet se trouve dans Mesnil, 2014, pp. 441-443). En 1967 et 1968, l'APMEP publie dans le Bulletin des articles théoriques sur la logique mathématique, montrant ainsi la volonté de former les enseignants en matière de logique avec cette référence. D'autres textes publiés dans le Bulletin témoignent des débats qui ont accompagné la période des mathématiques modernes, notamment autour de la présentation axiomatique dans l'enseignement des mathématiques. S'agissant plus particulièrement des notions de logique, le débat sur l'utilisation ou non des symboles de quantificateur a été particulièrement vif. Des expériences d'enseignement de logique sont relatées, de l'école primaire au lycée. Les auteurs y mettent en avant le travail sur le langage que permet la logique. La formalisation est défendue par plusieurs enseignants comme un élément fécond pour la conceptualisation des notions mathématiques. Pour la période actuelle, le premier article publié dans le Bulletin qui concerne la logique est paru en novembre 2014, et c'est au jour d'aujourd'hui le seul.

Les quantificateurs dans le programme, le document ressource et les manuels actuels

Je reviens maintenant plus spécifiquement sur les quantificateurs, en proposant un travail d'analyse d'extraits du programme, du document d'accompagnement ou de manuels. La référence construite dans la thèse fonctionne comme une grille de lecture permettant de porter attention à des points sensibles, et nous verrons que les trois approches choisies sont effectivement convoquées.

Le programme de 2009 préconise que « les élèves [soient] entraînés, sur des exemples, à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles ∀, ∃ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ». Le document ressource précise qu'« il convient d'amener progressivement les élèves à prendre l'habitude de faire apparaître les quantifications dans leurs productions écrites, quand la compréhension le demande ». On voit que quantification et quantificateurs ne sont pas vraiment distingués, et l'expression « faire apparaître les quantifications » est ambiguë. On voit également la méfiance persistante vis-à-vis d'un formalisme excessif, puisque ceci n'est demandé que « quand la compréhension le demande ». Il est laissé à la charge des enseignants de savoir identifier ces moments. L'exemple de la tâche du labyrinthe montre qu'ils ne le font pas si facilement, tant l'interprétation de certaines expressions fait partie de leurs pratiques langagières. Le document ressource propose un exemple de tâche donnant lieu à une explicitation des quantifications (figure 2). Nous allons voir que la non distinction entre le niveau du discours mathématique et le niveau du langage mathématique empêche un propos clair sur les quantificateurs.

Exemple 3

Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.

(*Pour tout nombre réel x, l'image de x par la fonction f est égale à $2x + 5$*)

L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions ?

(*Existe-t-il des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ et $2x + 5$ sont égaux ?*)

Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.

(*Trouver l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ et $2x + 5$ sont égaux*)

Dans les deux énoncés, la trace écrite (au tableau ou sur le cahier) est souvent la même :

$$f(x) = 2x + 5.$$

Cependant les deux énoncés n'ont bien sûr pas le même statut : le premier énoncé définit une fonction, le second conduit à résoudre (graphiquement ou par calcul) une équation. Il est important de clarifier par oral ces différents statuts dès que l'occasion se rencontre, et dans certains cas, de faire noter les quantifications par écrit, sans formalisme excessif.

Figure 2 : extrait du document ressource « Notations et raisonnement mathématiques », explicitation des quantifications, page 4

Une première remarque sur cet exemple : nous l'avons vu, les quantificateurs servent à construire des propositions mathématiques, or ici, aucun des trois énoncés n'est une proposition mathématique. Cela complique l'exercice, et rend sa correction délicate. Regardons par exemple le premier énoncé : celui donné initialement et celui donné en dessous en italique (qui, par contre, est une proposition) ne sont pas synonymes, puisque ce qui est contenu dans le « soit » (qui marque l'introduction d'un objet et d'un nom choisi pour cet objet par une personne en train de faire des mathématiques) n'est pas repris.

Cherchons alors à formuler des propositions faisant intervenir l'expression « $f(x) = 2x + 5$ », qui est effectivement quantifiée différemment selon le contexte. Pour le premier exemple, il suffit de se contenter de la proposition « la fonction f est définie par $f(x) = 2x + 5$ », dans laquelle l'expression « f est définie par » masque effectivement une quantification universelle. Pour le deuxième, il suffit de ne pas le proposer sous forme interrogative, et de se contenter de la proposition « l'équation $f(x) = 2x + 5$ a au moins une solution », dans laquelle l'expression « l'équation a au moins une solution » masque une quantification existentielle. Cette rigueur paraît indispensable dans cet exercice, qui présente alors l'intérêt de montrer aux élèves comment une proposition telle que « $f(x) = 2x + 5$ » peut être insérée dans différentes propositions, et mêlée à des expressions exprimant différentes quantifications. Par contre, dans le dernier énoncé, il n'y a pas de proposition mathématique sous-jacente, mais seulement le nom d'un objet : « l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 2x + 5$ », qui peut s'écrire « $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + 5\}$ », où n'intervient aucune quantification, mais dans laquelle la variable x est également muette.

La réintroduction de notions de logique dans le programme a eu un effet sur les manuels : ceux publiés en 2010 pour la classe de Seconde évoquent tous, au moins en partie, ces notions. 9 manuels sur 10 ont choisi de consacrer quelques pages (entre 1 page et 9 pages) aux notions de logique, mais pas comme un chapitre, généralement au début ou à la fin du manuel (seul 1 manuel le fait de manière disséminée). Par ailleurs, ils contiennent tous des exercices estampillés « logique » (de 10 à 54 exercices dans les manuels étudiés).

Dans les 8 manuels qui traitent des quantificateurs, ceux-ci sont introduits par des exemples. 7 de ces 8 manuels ne donnent que des exemples de propositions quantifiées vraies, comme dans l'extrait du manuel *Indice* de la figure 3.

III. Quel que soit – Pour tout – Il existe

Dans le **langage usuel**, quand on dit « Tous les Français sont européens », on veut exprimer le fait que **tout** Français, **quel qu'il soit**, est un Européen.

Quand on dit qu'un Français est daltonien, on veut exprimer le fait qu'il existe au moins un Français qui est daltonien.

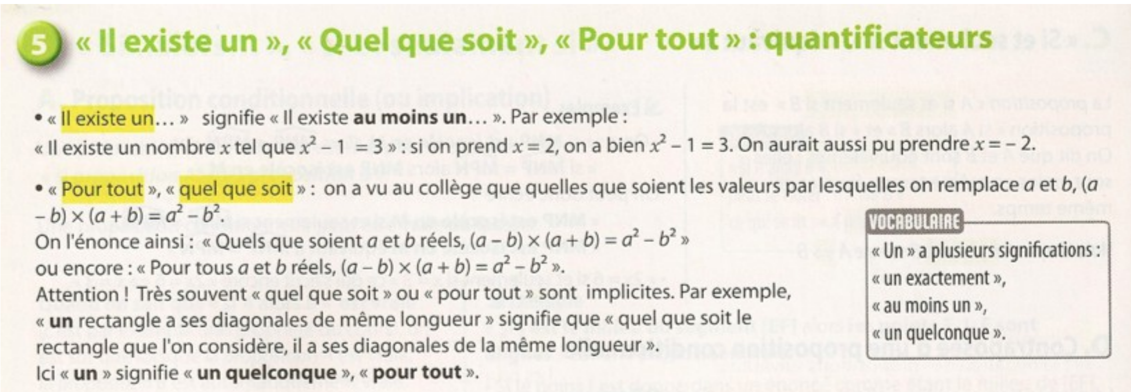
En mathématiques, on utilise souvent les expressions « quel que soit » ou « il existe », appelées quantificateurs. Ces expressions sont parfois implicites.

Par exemple :
- **Quels que soient** les réels a et b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- « Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires » signifie que **tous** les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires.
- Le carré d'un réel est positif : cette proposition est vraie **quel que soit le** nombre réel.
- **Il existe** un nombre entier pair supérieur à 1 000 000.
- **Il existe** deux réels x vérifiant l'égalité $x(x - 3) = 0$.
- **Pour tout** réel x, on a $x(x - 3) = x^2 - 3x$.
- **Quel que soit** le triangle ABC rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Figure 3 : extrait du manuel Indice Maths 2de, pages 23-24

Dans une telle présentation, l'aspect syntaxique des quantificateurs n'est pas du tout présent. On ne se sert des quantificateurs que pour affirmer quelque chose, il n'y a pas du tout l'idée d'une proposition construite avec un quantificateur dont on peut se demander si elle est vraie ou fausse. Les auteurs comptent sur la compréhension des expressions utilisées pour signifier la quantification à partir de leur utilisation dans le langage courant. Comme le suggère le programme, ils mentionnent la quantification implicite liée au mot « un » : il est d'abord utilisé dans une proposition non mathématique où il a une signification existentielle, puis dans deux propositions mathématiques où il a une signification universelle. Mais ces exemples étant donnés dans des contextes différents, étant placés à des endroits de la page différents, et n'étant pas mis explicitement en relation, l'ambiguïté qu'ils sont censés illustrer n'est pas clairement explicitée. Regardons maintenant d'un peu plus près un premier exemple : dans la proposition « le carré d'un réel est positif », pour savoir que l'interprétation du « un » est une interprétation universelle, il faut… savoir que la proposition universelle est vraie ! Ce sont donc des connaissances mathématiques qui permettent de trancher entre les deux interprétations possibles du mot « un » (de même, sans savoir qu'il existe des français qui ne sont pas daltoniens, on ne peut pas trancher pour une interprétation existentielle dans le premier exemple). Cela invite à la prudence lors de l'utilisation de ce mot « un » dans un contexte où les connaissances des élèves sont éventuellement fragiles. Toujours à propos de

cet exemple, il est dit que « cette proposition est vraie quel que soit le nombre réel ». Or, la proposition désignée dans ce commentaire est la proposition non quantifiée « le carré de x est positif » dans laquelle la variable x désigne un nombre réel, qui est une proposition ouverte que l'on ne peut pas exprimer sans variable. Cela n'a pas de sens de dire que la proposition « le carré d'un réel est positif », qui est équivalente à « pour tout réel x, le carré de x est positif » est vraie quel que soit le réel x, puisque la variable x est alors muette. Il y a finalement une confusion entre l'utilisation de l'expression « quel que soit » pour marquer simplement la quantification universelle, et son utilisation pour signifier que cette proposition universelle est vraie (on retrouve ces deux utilisations si l'on dit que la proposition « quel que soit le réel x P[x] » est vraie lorsque quel que soit le réel x la proposition « P[x] » est vraie).
Regardons maintenant l'exemple « il existe deux réels x vérifiant l'égalité $x(x - 3)=0$ ». L'expression « il existe » marque ici une quantification, et non un quantificateur. En effet, reformuler cette proposition[10] en utilisant des quantificateurs demanderait d'utiliser deux variables : « il existe un réel x, il existe un réel y tels que ($x \neq y$ et $x(x – 3)=0$ et $y(y - 3)=0$) ». Dans l'exemple « il existe un nombre entier pair supérieur à 1 000 000 », il n'y a pas de variable, et il s'agit également d'une quantification et non d'un quantificateur. Finalement, il n'y a donc pas d'exemple d'une proposition se présentant simplement sous la forme « il existe x tel que P[x] », c'est-à-dire pas d'exemple avec le quantificateur existentiel. Le quantificateur existentiel est moins présent dans ce qui concerne les notions de logique dans les manuels que le quantificateur universel. Certes, ce déséquilibre se retrouve dans les énoncés des théorèmes mathématiques, mais les difficultés soulignées dans la référence concernant le quantificateur existentiel montrent qu'il est nécessaire de ne pas le négliger.
Bien sûr, la transposition consiste en des adaptations du savoir savant, et il n'est pas question de présenter les quantificateurs dans les manuels de Seconde comme cela pourrait être fait dans un livre de logique mathématique. Mais les remarques dont j'ai fait part à propos de cet extrait de manuel laissent penser que, dans les choix qu'ils opèrent, les auteurs ne portent pas d'attention particulière aux points sensibles soulignés dans la référence, dont ils n'ont peut-être pas conscience. Ce constat ne s'applique pas à tous les manuels, par exemple, dans l'extrait du manuel *Math'x* de la figure 4, on ne retrouve pas les confusions évoquées.


5 « Il existe un », « Quel que soit », « Pour tout » : quantificateurs

• « Il existe un… » signifie « Il existe **au moins un**… ». Par exemple :
« Il existe un nombre x tel que $x^2 - 1 = 3$ » : si on prend $x = 2$, on a bien $x^2 - 1 = 3$. On aurait aussi pu prendre $x = -2$.

• « Pour tout », « quel que soit » : on a vu au collège que quelles que soient les valeurs par lesquelles on remplace a et b, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$.
On l'énonce ainsi : « Quels que soient a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ »
ou encore : « Pour tous a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ ».
Attention ! Très souvent « quel que soit » ou « pour tout » sont implicites. Par exemple, « **un** rectangle a ses diagonales de même longueur » signifie que « quel que soit le rectangle que l'on considère, il a ses diagonales de la même longueur ».
Ici « **un** » signifie « **un quelconque** », « **pour tout** ».

VOCABULAIRE
« Un » a plusieurs significations :
« un exactement »,
« au moins un »,
« un quelconque ».

Figure 4 : extrait du manuel 2de Math'x, page 354

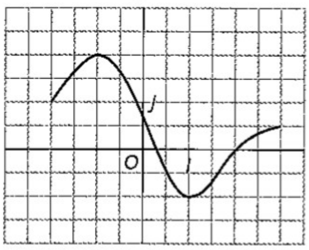
Pour ce qui est des exercices, les quantificateurs sont la deuxième notion la plus présente (19,5% des tâches), derrière l'implication (32,6%). Il y a essentiellement deux types de tâche : dire si une proposition quantifiée est vraie ou fausse, compléter avec un quantificateur.
Par exemple, regardons l'exercice de la figure 5 extrait du manuel *Repères*. La consigne « compléter soit avec… soit avec… » laisse à penser qu'à chaque fois, un seul des quantificateurs est correct. Pourtant, lorsque la proposition « pour tout x P[x] » est vraie, la

10 En interprétant « il existe deux » comme « il existe au moins deux », l'interpréter comme « il existe exactement deux » donnerait une reformulation encore plus complexe.

proposition « il existe x tel que P[x] » est vraie aussi, donc quand il est possible de compléter avec le quantificateur universel, il est également possible de compléter avec le quantificateur existentiel. Dans le langage courant, nous respectons le principe du maximum d'information, selon lequel nous donnons à notre interlocuteur toutes les informations en notre possession. Ainsi, si je dis « pendant mes vacances, certains jours il a plu », je dis en même temps qu'il n'a pas plu tous les jours. L'habitude de ce principe nous amène dans cet exercice à compléter naturellement par le quantificateur universel lorsque cela est possible. Pour autant, ce serait en contradiction avec la notion de vérité d'une proposition d'aller jusqu'à dire que compléter alors avec le quantificateur existentiel est une erreur, car pour ce qui est des propositions mathématiques, si la proposition « pour tout x P[x] » est vraie, elle n'est pas « plus vraie » que la proposition « il existe x tel que P[x] ». Certains élèves adoptent cependant cette position, et le manuel du professeur qui ne propose comme correction que le quantificateur universel lorsque que cela est possible laisse planer le doute sur la position de ses auteurs.

29 Quantificateurs

À partir de la représentation graphique de la fonction f ci-dessous, recopier et compléter les phrases en utilisant soit « pour tout ...... on a ... », soit « il existe un ...... tel que ... ».



a. ...... réel x ...... $f(x) > 0$.

b. ...... réel x ...... $f(x) \leqslant 3$.

c. ...... réel x ...... $f(x) = 1$.

d. ...... $x \in [1;2]$ ...... $f(x) \leqslant 0$.

e. ...... réel x ...... $f(x) \neq 0$.

Figure 5 : extrait du manuel Maths 2^de^ Repères, page 77

Signalons un exercice du manuel *Hyperbole* d'un type légèrement différent (figure 6) : il s'agit de compléter une implication existentiellement quantifiée de façon à ce qu'elle soit vraie puis fausse.

82 Propositions vraies ou fausses

Recopier et compléter la phrase :

« Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 36$, alors ... »

pour obtenir :

a) une proposition vraie ;

b) une proposition fausse.

Figure 6 : extrait du manuel Mathématiques Seconde, Hyperbole, page 91

Il est impossible de compléter la proposition donnée de manière à ce qu'elle soit fausse. On le verra facilement en utilisant la forme disjonctive de l'implication : il faut compléter de manière à rendre fausse la proposition « Il existe au moins un réel x tel que ($x^2 \neq 36$ ou …) ». Or, elle est équivalente à « (Il existe au moins un réel x tel que $x^2 \neq 36$) ou (il existe au moins un réel x tel que …) », qui ne peut pas être fausse car « Il existe au moins un réel x tel que $x^2 \neq 36$ » est vraie. Un tel exercice est construit artificiellement pour faire travailler les notions de logique, on ne rencontre pas dans le discours mathématique d'implication existentiellement quantifiée, et il faut vraiment mobiliser des connaissances en logique mathématique pour voir

qu'il n'est pas possible de répondre à la question b), connaissances qui semblent faire défaut aux correcteurs qui proposent la solution « Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 36$ alors $0 \leq x \leq 3$ ».
Finalement, dans le programme et le document ressource, le discours sur les notions de logique reste en grande partie informel, et le document ressource, pourtant à destination des enseignants, ne propose aucun élément théorique. Cette absence de référence dans le programme se ressent dans les manuels actuels, et ce que j'espère avoir donné à voir pour les quantificateurs est valable pour les autres notions de logique : le discours est assez différent d'un manuel à l'autre, il reste également en partie informel, et les notions de logique y sont même parfois malmenées. Une conséquence immédiate de la défiance affichée vis-à-vis de la formalisation des notions est l'absence quasi totale de leur aspect syntaxique.
Nous pourrions résumer très rapidement les résultats précédents en décrivant la situation actuelle en quelques mots : à un savoir de référence absent s'ajoute un savoir à enseigner imprécis. Il semble alors que les enseignants de lycée d'aujourd'hui pourraient légitimement se sentir en difficulté pour proposer à leurs élèves un enseignement de notions de logique permettant d'atteindre les objectifs du programme.

Analyse d'une formation

Dans ce contexte particulièrement complexe, la formation des enseignants est d'autant plus importante. Or, la logique mathématique est absente de la plupart des cursus universitaires de mathématiques. De plus, l'enseignement de notions de logique n'était plus explicitement au programme entre 1981 et 2009, et nous pouvons supposer que les difficultés des élèves relevant de la logique étaient encore moins étudiées dans la formation des enseignants dans cette période qu'actuellement. Puisque depuis 2009 les programmes mentionnent de nouveau des notions de logique, il est légitime de se poser la question de ce qu'il est possible de proposer dans le cadre de la formation.

Des besoins de formation

Les études épistémologique et didactique de la première partie de la thèse m'ont permis de dégager des besoins supposés de formation, que j'ai comparés à des besoins ressentis dégagés des résultats d'un questionnaire soumis à 50 enseignants de Seconde. Cette comparaison m'a permis de lister des besoins de formation concernant l'enseignement de notions de logique :

- besoin d'une formation théorique, de connaissances sur les notions de logique, mais abordées en lien avec l'activité mathématique. Quelques enseignants, mais ils restent minoritaires, ressentent un manque de connaissances, qu'ils aient ou non eu une formation, même minimale, en logique mathématique. Quelques autres enseignants, qui n'ont eu aucune formation en logique mathématique, considèrent que les connaissances en acte dont ils usent dans leur propre activité mathématique sont suffisantes pour enseigner les notions de logique. Il y a donc un besoin de faire prendre conscience aux enseignants du fait que la complexité des notions de logique nécessite des outils permettant d'adopter une position réflexive indispensable quand il s'agit de transmettre ces connaissances.
- Besoin de constituer une référence qui amorce la transposition didactique. Ce *savoir de référence* devrait permettre de préciser le *savoir à enseigner* et de mettre en place un *savoir enseigné* qui prenne en compte les dimensions outil et objet des notions de logique.
- Besoin de ressources à destination des élèves, et surtout d'outils pour l'analyse

d'activités permettant de travailler sur les notions de logique (outils pour une rédaction particulièrement rigoureuse des activités portant explicitement sur des notions de logique, outils pour dégager un possible travail sur des notions de logique dans des activités où elles ne sont pas spécifiquement visées).

- Besoin de réhabiliter le pilier langage de la logique. Les enseignants associent plus spontanément la logique au raisonnement. Par ailleurs, ils montrent une défiance vis-à-vis de la formalisation du langage, et il y a donc un besoin de montrer comment cette formalisation peut aussi lever des ambiguïtés et participer à la conceptualisation des notions, de logique bien sûr, mais aussi de mathématiques en général.

Une étude de cas : l'analyse de la formation continue « Initiation à la logique » de l'IREM de Paris

Je me suis ensuite intéressée à une formation particulière : la formation *Initiation à la logique* proposée par l'IREM de Paris dans le cadre de la formation continue des enseignants. Bien que participant activement au stage et à sa conception, je prends pour ma recherche une position distanciée pour pouvoir questionner les choix d'organisation et de contenu de la formation.

Le langage est au cœur de cette formation de 3 jours, et les notions de logique sont étudiées à partir d'une approche naïve basée sur l'analyse du langage et du discours mathématique. Nous retrouvons en grande partie l'approche choisie pour la référence proposée dans la thèse, et l'analyse de cette formation permet alors une validation expérimentale de cette référence. Je regarde finalement comment les contenus proposés dans la formation se constituent en savoir de référence pour les enseignants qui la suivent, au sens d'un savoir partagé par une communauté[11]. Parallèlement à cette question, j'ai également analysé la façon dont les formateurs amènent les stagiaires à prendre conscience des implicites et des ambiguïtés des pratiques langagières des mathématiciens, et comment cet axe fort du contenu de la formation est perçu par les stagiaires.

La comparaison du scénario de la formation avec les besoins de formation précédemment identifiés montre qu'elle y répond *a priori* en grande partie. L'analyse du déroulement effectif à partir des vidéos et des transcriptions montre ce qu'il en est *a posteriori*. J'ai analysé finement la première journée, et notamment la première matinée dans laquelle le formateur démarre l'étude naïve du langage mathématique avec un exposé qui fonctionne à la manière de ce que Hersant (2004) appelle un cours dialogué.

J'ai finalement cherché à évaluer les effets de la formation à partir de présentations d'activités réalisées par des stagiaires lors de la troisième journée du stage, et de leurs réponses à un questionnaire-bilan.

Dans la formation, les notions de logique sont abordées à travers une approche naïve : elles ne sont pas mathématiquement définies comme cela serait fait dans un cours de logique mathématique. Pourtant, elles acquièrent un statut d'objet en étant décontextualisées des situations où elles sont rencontrées. Il y a des phases ponctuelles d'institutionnalisation, prises en charge par les formateurs. Elles sont prévues par le formateur dans l'exposé sur l'analyse du discours mathématique, ou insérées dans un moment qui ne leur est pas particulièrement destiné (présentation d'activités pour la classe par exemple). Certaines propriétés des notions de logique sont alors précisées, et sont réinvesties dans d'autres situations, il y a ainsi une mise en œuvre de la dialectique outil/objet. Une autre forme d'institutionnalisation se fait à travers la répétition de certaines expressions, la décontextualisation étant alors plutôt à la charge des stagiaires. La logique mathématique fonctionne comme *savoir savant* auquel se

11 Il ne s'agit pas du *savoir de référence* évoqué pour étudier la transposition didactique puisque cette communauté se limite aux participants de la formation.

réfèrent les formateurs, mais le *savoir enseigné* dans la formation est une adaptation de ce savoir à des fins de formation des enseignants dans laquelle les formateurs oscillent entre plus ou moins de formalisme. Selon qu'ils aient ou non des connaissances en logique mathématique, les stagiaires peuvent plus ou moins relier ce qui est dit au *savoir savant*.
Je dirais donc qu'il se constitue un *savoir de référence* à l'échelle du stage, dans le sens de conceptions partagées de notions de logique, caractérisées par les formateurs, et d'un vocabulaire institué pour parler de ces notions. Mais les formateurs ne proposent pas de corpus matériel qui l'exposerait. Une partie non négligeable de la constitution de ce savoir reste donc à la charge de chaque stagiaire et dépend alors des connaissances et des intérêts de chacun.
Le travail reste donc à poursuivre pour organiser ce *savoir de référence*. Il y a un noyau de contenu bien identifié, autour des éléments constitutifs du langage mathématique (variables, propositions, connecteurs, quantificateurs). Il y a des situations « d'introduction » de ces notions, qui fonctionnent plutôt bien (on pourrait cependant envisager d'y introduire plus de situations de formulation, avec un travail en groupe). Mais l'institutionnalisation pourrait être plus formalisée, pas forcément pendant la formation, mais par exemple en distribuant aux stagiaires un document dans lequel les notions seraient plus étudiées sous leur aspect objet (et qui s'apparenterait donc plus à un cours de logique).
Les stagiaires approuvent unanimement dans le bilan la stratégie choisie d'entrée dans la logique mathématique par l'étude naïve du discours mathématique. Mais plus encore que cette approbation, le fait que les trois quarts des stagiaires déclarent un impact de la formation sur la façon dont ils s'expriment dans leur classe montre une pertinence de ce choix. Plusieurs stagiaires mentionnent notamment un réel changement de pratiques quant à l'explicitation des quantifications, qu'ils jugent nécessaire à une bonne compréhension des élèves (même si elle n'est évidemment pas suffisante). L'impact de la formation est d'autant plus fort que la remise en question de certaines pratiques langagières des mathématiciens produit un effet de surprise, les formateurs amenant les stagiaires à se rendre compte que ces pratiques comportent plusieurs implicites qui peuvent être autant de difficultés pour les élèves. La première séquence de la formation, dans laquelle est mise au jour la quantification universelle implicite des implications, semble vraiment « faire mouche » et atteindre son double but de mettre en évidence une telle pratique et de montrer le déficit d'outils pour l'analyser. Les notions de variable, proposition, connecteur, quantificateur sont des éléments constitutifs d'un langage qui sert de référence pour analyser des énoncés couramment utilisés en mathématiques. Si la plupart des stagiaires se disent donc conscients que les quantifications sont importantes à souligner, ils ne font cependant pas tous les mêmes choix pour l'explicitation des quantifications : certains vont utiliser beaucoup plus les quantificateurs universel et existentiel dans leurs énoncés, d'autres font le choix de marquer cette quantification par des termes plutôt empruntés au langage courant (toujours, forcément, dans tous les cas).
La deuxième séquence du stage portait sur la notion de proposition. Les stagiaires se déclarent en moyenne très intéressés personnellement par l'apport du stage sur cette notion, pour laquelle ils sentaient leurs connaissances avant le stage à peine suffisantes. Pourtant, cet apport du stage leur paraît difficilement exploitable en classe. Il en va de même pour la notion de variable. Celle-ci occupe une place très importante dans le stage, avec des apports théoriques sur le statut (parlante ou muette) de la variable et la notion de signe mutificateur. Ces deux notions de proposition et de variable sont quasiment absentes du *savoir à enseigner*. Il y a donc une réelle prise de position des formateurs qui leur accordent une place importante dans le stage, mais leur discours semble encore insuffisant pour que les stagiaires leur accordent une telle place dans la classe. Pour continuer à défendre une telle position, il me paraît nécessaire de relier le discours théorique à des phénomènes que les enseignants peuvent observer dans leur classe (comme c'est fait pour la quantification universelle implicite

associée à l'implication). Il y a donc un travail didactique d'identification des situations où des conceptions erronées des notions de variable ou de proposition posent problème. Ce qui bien sûr est d'autant plus difficile qu'elles ne sont pas l'objet d'activités spécifiques.
Les données que j'ai récoltées sont trop limitées pour pouvoir donner des résultats sur une éventuelle modification des pratiques. C'est finalement plutôt l'activité des stagiaires en tant qu'« élèves » de la formation que j'ai observée. Pour étudier un effet sur les pratiques, il faudrait compléter cela d'observations des stagiaires dans leur activité d'enseignant, c'est-à-dire de retour dans leur classe. J'ai cependant déjà mentionné que les stagiaires déclarent une modification de leurs pratiques concernant la façon dont ils s'expriment en classe.
À plusieurs moments dans le stage les pratiques individuelles sont mises en relation avec des pratiques institutionnelles (hésitation des enseignants à faire des moments d'institutionnalisation mis en relation avec les hésitations du programme, pratiques langagières qui sont celles de la communauté mathématique). Les trois quarts des stagiaires déclarent que le stage leur a apporté des éléments pour concevoir des activités portant sur la logique. Plusieurs propositions d'activités pour la classe sont faites pendant le stage, mais les stagiaires les découvrent en même temps qu'est raconté leur déroulement effectif. Les discussions au sujet de ces activités seraient sans doute plus riches en laissant aux stagiaires plus de temps pour les découvrir et imaginer une utilisation possible. Par ailleurs, là aussi le stage gagnerait sûrement à être accompagné d'une ressource papier dans laquelle ces activités seraient présentées.

Conclusions et perspectives

La constitution d'une référence pour l'enseignement de la logique combinant trois approches est finalement le cœur de ma recherche. Elle permet d'étudier l'enseignement de notions de logique dans le secondaire en pensant la transposition didactique du savoir logique des mathématiciens non pas à partir d'un savoir savant (qui serait la logique mathématique) mais à partir d'un savoir de référence qui prend en compte une dimension pragmatique à partir des pratiques langagières et une dimension didactique à partir des difficultés supposées des élèves. J'ai d'abord argumenté les choix de contenu de cette référence : le choix de « l'entrée langage » adoptée est cohérente avec l'étude épistémologique, et en résonance avec plusieurs travaux didactiques. J'ai ensuite exploité cette référence comme outil d'analyse, montrant qu'elle permettait une sensibilité accrue à des points délicats de l'enseignement de notions de logique. Le travail sur cette référence est bien sûr à poursuivre. J'ai proposé une contribution à une réflexion qui doit être collective et menée sur un long terme par des logiciens, mathématiciens, didacticiens, enseignants (éventuellement aussi linguistes, psychologues…) pour finalement se mettre d'accord sur des incontournables qu'une telle référence devrait comporter. Des recherches sur les notions de proposition et de variable sont notamment à poursuivre. Ce sont des éléments essentiels du langage mathématique, mais, sans doute parce qu'elles sont primordiales, elles ont été l'objet de nombreux débats au moment de la crise de fondements. Le point de vue naïf adopté dans la référence que j'ai constituée tend à gommer leur complexité, l'étude de ces débats en permettrait sans doute une description plus fine. Ces notions sont également essentielles pour parler du langage mathématique dans une perspective d'enseignement des mathématiques. Elles sont pourtant en grande partie absentes du programme et des manuels, et le discours sur le langage mathématique y reste très confus. Ainsi, c'est surtout en direction de la classe que des recherches sont à poursuivre sur ces notions, qui pourraient être structurées autour des questions suivantes : quelles difficultés des élèves peuvent être mises en relation avec une conception erronée de ces notions ? Comment les enseignants abordent-ils ces difficultés ? Qu'est-ce qu'une clarification de ces notions peut

apporter sur ces deux points ? Quelles situations proposer pour les aborder ?
Un autre enrichissement de la référence constituée consisterait à redonner au raisonnement une place plus importante. Là encore, c'est une suite naturelle au travail déjà fait sur le langage (voir par exemple l'étude des pratiques langagières dans la formulation des preuves dans Hache et Mesnil (à paraître)), pour laquelle de nombreuses recherches existantes pourraient être exploitées.
L'analyse du savoir à enseigner à l'aide de la référence construite montre qu'il reste imprécis : il est difficile d'identifier les connaissances visées dans le programme, aucun élément théorique n'est proposé pour accompagner les activités proposées dans le document ressource, il y a une grande variabilité de ce qui est proposé dans les manuels, qui va au delà des différences de choix didactiques, les propos des manuels sont parfois en contradiction avec le point de vue de la logique mathématique. Ce constat invite à diffuser les ressources déjà existantes produites par la recherche ou au sein de groupes IREM, et à en créer de nouvelles. Mais la question de l'appropriation de ces ressources par les enseignants reste ouverte, puisqu'elle nécessite que ceux-ci dépassent l'impression que la maîtrise des outils logiques issue de la pratique mathématique est suffisante afin d'accepter que la dimension objet des notions de logique, et donc des connaissances en logique mathématique, sont nécessaires pour l'enseignement de ces notions. Une façon d'argumenter cette position serait de chercher à mesurer l'effet de l'imprécision du savoir à enseigner sur le savoir enseigné, et donc sur l'activité des élèves.

Références bibliographiques

Adda, J. (1988). L'évolution de l'enseignement de la logique en France. *Atti degli incontri di logica matematica, 5,* 13-26.

Aristote (2008). *Organon. I. Catégories. II. De L'interprétation* (version française). Traduction française par J.Tricot. Paris : Vrin.

Arnauld, A. & Nicole, P. (1992). *La logique ou l'art de penser.* Paris : Gallimard. (Ouvrage original publié en 1662)

Arsac, G. (1989). La transposition didactique en mathématiques. In G. Arsac, M. Develay & A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie* (pp. 3-36). IREM et LIRDIS de Lyon.

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul *et al.* (Eds.), *Actes de la 14e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 101—139).

Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Dubinsky, E. & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics, IV,* 239-289.

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50*, 57-79.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique*. Note de synthèse (HDR), Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. spécificité de l'analyse. quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23*(3), 295-342.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

EL FAQIH, E. M. (1991). *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

FREGE, G. (1999). *Idéographie* (version française). Traduction française par C. Besson. Paris : Vrin.

GANDIT, M. (2004). Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : première partie. *Petit x, 65,* 36-49.

GENTZEN, G. (1955). *Recherches sur la déduction logique* (version française). Traduction française par R. Feys et J. Ladrière. Paris : Presses Universitaires de France.

HACHE, C. & MESNIL, Z. (à paraître). Pratiques langagières et preuves. In A. Chesnais, M. Gandit & G. Train (Eds.), *Actes du XXII colloque de la CORFEM*.

HERSANT, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 4*(2), 241-258.

LABORDE, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse de doctorat, Université scientifique et médicale, institut national polytechnique de Grenoble.

LEIBNIZ, G. W. (1998). *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités. 24 thèses métaphysiques et autres textes logiques et métaphysiques* (version française). Traduction française par J. B. Rauzy et al. Paris : Presses Universitaires de France.

MESNIL, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

NJOMGANG NGANSOP, J. (2013). *Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone: aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

ROGALSKI, J. & SAMURCAY, R. (1994). Modélisation d'un savoir de référence et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau. In G. Arsac, Y. Chevallard, J. Martinand & A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35-71). Grenoble : la Pensée Sauvage.

SELDEN, A. & SELDEN, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 123-151.

TARSKI, A. (1972). *Logique, sémantique et métamathématique* (version française). Traduction française par G. G. Granger. Paris : Armand Colin.

MANUELS SCOLAIRES

Indice, Maths 2^de^, BORDAS, 2009

Hyperbole, Mathématiques 2^de^, NATHAN, 2010

Math'x 2^de^, DIDER, 2010

Repères Maths 2^de^ , HACHETTE EDUCATION, 2010