

LA FONCTION DE DENSITE AU CARREFOUR ENTRE PROBABILITES ET ANALYSE. UNE INGENIERIE DIDACTIQUE EN CLASSE DE TERMINALE SCIENTIFIQUE

Charlotte **DEROUE**T

ESPE de Strasbourg, LISEC équipe AP2E, Université de Strasbourg

charlotte.derouet@espe.unistra.fr

Résumé

Dans cet article, nous présentons un aperçu global sur notre travail de thèse portant sur l'articulation entre les lois à densité et les intégrales dans la filière scientifique de la dernière année de l'enseignement secondaire français (grade 12). Les deux sous-domaines mathématiques, les probabilités à densité et le calcul intégral, nouveaux pour les élèves à ce niveau scolaire, sont mis en relation notamment à travers l'égalité $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ où f est la fonction de densité associée à la variable aléatoire X . Dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique et de la théorie de l'activité, nous donnons, dans un premier temps, quelques résultats des analyses préalables de notre méthodologie de type ingénierie didactique. Nous montrons ensuite comment les outils méthodologiques que nous avons mis en place pour étudier des déroulements de séances nous permettent d'analyser un épisode d'une des séances d'introduction conçues, dans le but de répondre à notre question de recherche. Enfin, nous concluons par des prolongements possibles à nos recherches.

Mots clés

Probabilités, analyse, fonction de densité, Espace de Travail Mathématique, théorie de l'activité, ingénierie didactique.

INTRODUCTION

A la rentrée 2012, la mise en place des nouveaux programmes de lycée en France a lancé des débats au sein de la communauté mathématique. Certains mathématiciens et enseignants remettaient en question la place de plus en plus importante accordée aux probabilités et à la statistique dans l'enseignement au lycée (Colmez, 2012 ; Perrin, 2015), tandis que d'autres mettaient en avant la possibilité de connecter l'enseignement des probabilités à celui d'autres domaines des mathématiques ou encore à d'autres disciplines (Raoult & Arnoux, 2013).

Notre travail de thèse porte sur l'articulation qui peut exister entre le domaine des probabilités et celui de l'analyse à travers la notion de fonction de densité dans la filière scientifique de la dernière année de l'enseignement secondaire français (grade 12), que nous appelons terminale S. L'objectif principal de notre thèse (Derouet, 2016) a été de concevoir et de mettre en œuvre une séquence d'enseignement et plus particulièrement des problèmes d'introduction de la notion de fonction de densité articulant à la fois les lois à densité et le calcul intégral. Le choix

de la classe s'est arrêté sur le grade 12 car il s'agit actuellement de la classe dans laquelle les lois à densité sont étudiées pour la première fois et le choix de la filière scientifique est lié au fait que c'est dans cette section que l'enseignement sur les lois à densité et le calcul intégral est le plus conséquent, notamment en probabilités où trois lois différentes sont au programme (les lois uniforme, exponentielle et normale).

Les probabilités à densité : quel(s) lien(s) avec le calcul intégral ?

Jusqu'au début de la classe de terminale (grade 12), les élèves rencontrent seulement des lois de probabilité discrètes. Dans le passage aux lois continues, on peut observer une rupture avec les probabilités discrètes. En effet, pour définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue, il faut préciser la probabilité de l'événement « X appartient à l'intervalle $[a ; b]$ », pour tout intervalle $[a ; b]$, et non plus donner la probabilité pour chaque événement élémentaire (qui est toujours nulle dans ce cas).

Dans le cas particulier des lois à densité, on arrive à une égalité entre une probabilité et une intégrale : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (*), où f est la fonction de densité associée à la variable aléatoire X . Cette égalité met en relation deux domaines mathématiques : les probabilités, d'un côté, et l'analyse, de l'autre ; et plus particulièrement, deux sous-domaines : les probabilités à densité et le calcul intégral.

Notre question de départ, qui a ensuite été précisée, était la suivante : Est-il possible de concevoir et de mettre en œuvre des problèmes d'introduction aux lois à densité qui permettent aux élèves de terminale S de construire conceptuellement cette égalité (*) ? Il s'agit finalement de se demander si ce type de problèmes existe.

Revenons sur ce lien entre probabilité et calcul intégral. Si nous nous penchons sur les définitions données dans le programme de terminale S (MEN, 2011), l'égalité (*) n'est pas présente sous cette forme. D'une part, dans la partie sur le calcul intégral, on définit « l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a ; b]$ comme aire sous la courbe » (p. 7). D'autre part, dans la partie sur les probabilités continues :

On définit [...] une variable aléatoire X , fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $X \in J$ comme aire du domaine : $\{M(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I . (p. 12).

On voit donc apparaître une nouvelle notion, l'aire sous la courbe. Il y a donc trois objets mathématiques en interaction : l'intégrale, l'aire sous la courbe et la probabilité (figure 1).

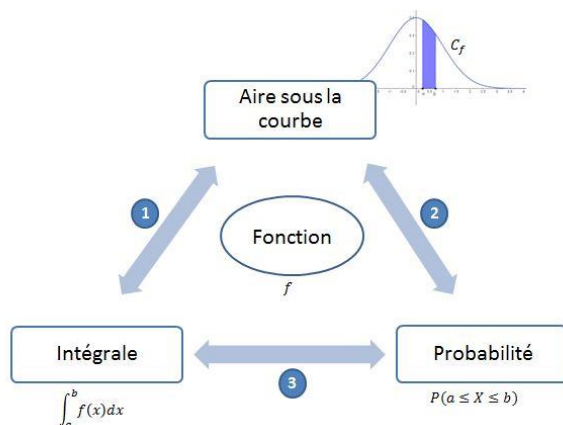


Figure 1. Relations entre intégrale, aire sous la courbe et probabilité

Ces trois objets mathématiques sont reliés, mais les relations deux à deux ne sont pas de même nature. Entre intégrale et aire sous la courbe (flèche 1), le lien est directement fait dans le programme, par la définition de l'intégrale. En revanche, entre probabilité et aire sous la courbe (flèche 2), le lien apparaît aussi dans le programme mais de façon indirecte. Il se fait par l'intermédiaire d'une fonction, la fonction de densité de probabilité. Enfin, entre probabilité et intégrale (flèche 3), la relation se fait à nouveau par l'intermédiaire de la fonction de densité f , de la même manière qu'entre probabilité et aire sous la courbe. On voit donc apparaître un objet central dans les différentes relations qui est la fonction. Cependant, la fonction f fait partie intégrante de l'intégrale (intégrale de la fonction f) et de l'aire sous la courbe (courbe représentative de la fonction f), ce qui n'est pas le cas pour la probabilité. Il y a un passage implicite de X variable aléatoire à f fonction de densité.

Vu la définition de l'intégrale, il est assez naturel de « rassembler » intégrale et aire sous la courbe et de ne considérer plus que la relation entre ce bloc, que nous considérons comme faisant partie du sous-domaine du calcul intégral, et la probabilité, appartenant au sous-domaine des probabilités à densité (figure 2). On peut donc voir la fonction de densité comme l'objet central pour faire la mise en relation entre les probabilités et l'analyse. Pour cette raison, nous avons décidé de focaliser notre recherche sur la notion de fonction de densité.

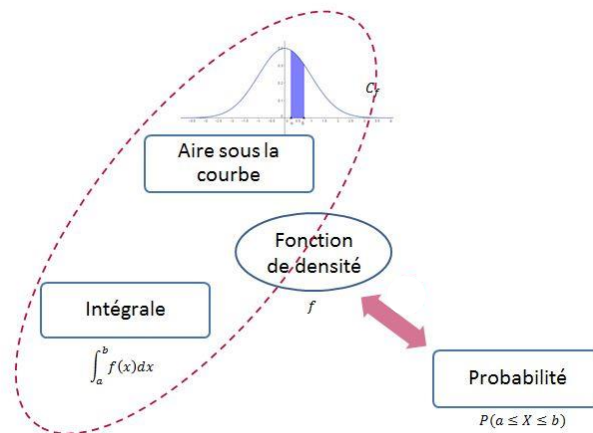


Figure 2. Relation entre calcul intégral et probabilités à densité

Dans cet article, nous allons donner un aperçu global sur la recherche menée dans le cadre de notre travail de thèse. Nous allons commencer par préciser le cadre théorique choisi et les questions de recherche. Nous poursuivrons en présentant la méthodologie générale que nous avons mise en œuvre. Ensuite, nous mettrons en évidence quelques résultats concernant les analyses préalables de la thèse. Enfin, après avoir présenté les problèmes d'introduction conçus dans le cadre du travail de thèse, nous montrerons comment les outils méthodologiques que nous avons mis en place pour l'étude des déroulements de séances nous permettent d'analyser un épisode d'une des séances d'introduction conçues pour répondre à notre question de recherche et nous dégagerons les résultats majeurs qui en ont découlé. Nous concluons par des perspectives de recherche, faisant suite à ce travail.

CADRE THEORIQUE

Le modèle des Espaces de Travail Mathématique

Pour aborder cette question de l'articulation entre deux domaines mathématiques (les probabilités et l'analyse) dans les classes, nous avons fait le choix de nous placer dans le cadre du modèle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011). Le modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) permet de décrire le travail mathématique des élèves en situation de résolution de problèmes (figure 3). Il permet notamment de mettre en évidence des dynamiques dans le travail mathématique en prenant en compte deux plans : le plan épistémologique (en rapport avec les contenus mathématiques) et le plan cognitif (axé sur l'action de l'élève résolvant un problème). Ce modèle permet aussi de décrire les dynamiques entre trois dimensions (appelées *genèses* dans Kuzniak, 2011) :

- la dimension sémiotique, quand le travail mathématique porte sur les signes,
- la dimension instrumentale, liée à l'utilisation d'artefacts matériels ou non, et
- la dimension discursive, rattachée à un discours de preuve s'appuyant sur des définitions ou des théorèmes (ce qui est appelé le référentiel théorique).

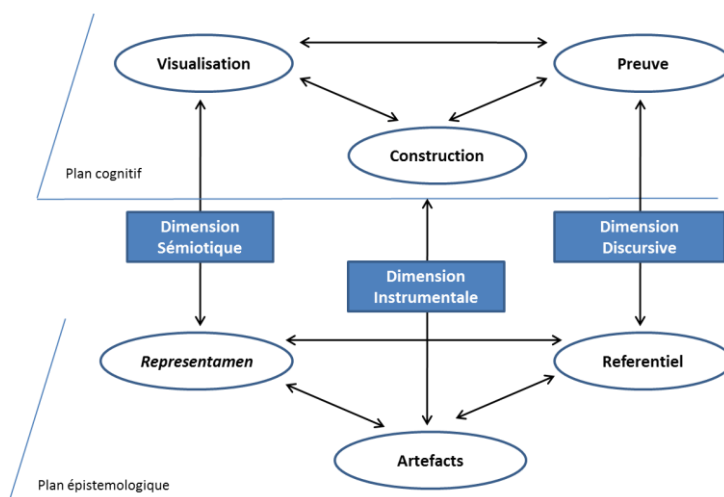


Figure 3. Le modèle des ETM

Le travail mathématique peut être décrit à plusieurs niveaux : l'ETM de référence, qui constitue le travail mathématique visé par l'institution, qui doit ensuite être aménagé en ETM idoine pour permettre une mise en place effective dans les classes, où chaque élève travaille dans son propre ETM personnel. Notre étude se concentre plutôt sur les ETM idoines potentiels (par exemple ceux proposés dans les manuels) et les ETM idoines effectifs (qui sont effectivement mis en place dans une classe), en appui sur l'ETM de référence (souvent ne pouvant être décrit que partiellement).

S'agissant de se questionner sur l'articulation entre deux sous-domaines, nous n'avons pas considéré un ETM global mais plutôt des ETM associés aux sous-domaines en jeu (Montoya Delgadillo & Vivier, 2014), à savoir les probabilités à densité (PaD) et le calcul intégral (CI). Ce point de vue nous permet de questionner les articulations entre ces deux ETM et d'identifier les dimensions en jeu lors de la résolution des tâches d'introduction de la notion

de fonction de densité, en particulier pour vérifier s'il y a effectivement une construction du référentiel théorique autour de la notion de fonction de densité.

Quelques éléments de théorie de l'activité

Dans le modèle des ETM, la tâche mathématique prescrite active le travail mathématique mais n'est pas directement présente dans le modèle. Pour cette raison, nous avons pris en compte quelques éléments de la théorie de l'activité, plus particulièrement des éléments relatifs à l'analyse de tâches comme ceux utilisés dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique. Nous utilisons notamment les termes de *tâche mathématique*, qui renvoie à ce qui est à faire (le but à atteindre), et d'*activité mathématique*, qui renvoie à ce que développe l'élève pour réaliser cette tâche et donc atteindre son objectif (Rogalski, 2008). L'analyse de tâches et de déroulements, développée par Robert (2008b), permet des analyses fines des activités des élèves, qui peuvent ensuite être décrites de manière plus globale à l'aide du modèle des ETM.

Formulation de nos questions de recherche

Ce cadre théorique nous a permis de formuler trois questions de recherche. La question de recherche centrale est la suivante (QR3) :

Quels éléments didactiques peut-on prendre en compte pour concevoir et mettre en œuvre effectivement des tâches d'introduction qui permettent aux élèves de construire la notion de fonction de densité ?

A travers cette question, nous voulons montrer un « théorème » d'existence : nous cherchons à montrer qu'il existe bien des tâches, réalisables en classe de terminale S, qui permettent la mise en place d'activités mathématiques des élèves qui amènent à la construction de connaissances sur la fonction de densité ; mais de plus, nous voulons mettre en évidence par quels moyens ces activités sont possibles, du point de vue du travail mathématique en jeu mais aussi du point de vue de la gestion du travail mathématique de la classe par l'enseignant. Cette question de recherche est précédée par des questions préalables qui la nourrissent. La première question (QR1) est relative à des préoccupations d'ordre épistémologique et historique :

Comment historiquement et épistémologiquement sont apparus les liens entre probabilités à densité et calcul intégral ? Comment a émergé le concept de loi à densité et tout particulièrement la notion de fonction de densité ?

La deuxième question (QR2) est quant à elle d'ordre didactique, elle concerne les enjeux didactiques derrière l'égalité (*) en classe de terminale S, repérables dans le programme et les manuels :

Quelles tâches sont proposées et quelles activités sont attendues des élèves pour, dans un premier temps, l'introduction de la notion de fonction de densité, et dans un second temps, pour exploiter les articulations entre l'ETM relatif aux probabilités à densité (ETM_{PaD}) et l'ETM relatif au calcul intégral (ETM_{CI}) ?

METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Méthodologie de type ingénierie didactique collaborative

L'objectif principal de cette recherche est de concevoir et mettre en œuvre des tâches mathématiques d'introduction de la notion de fonction de densité de probabilité, en restant dans le cadre du programme de terminale S, avec en particulier la contrainte que les séances proposées soient réalisables dans des classes de terminale S « ordinaires », tout du moins dans des conditions de fonctionnement habituelles c'est-à-dire sans aménagement du temps de classe, sans utilisation de matériel nouveau, sans modification des objectifs de l'enseignant pour sa classe (une des priorités en classe de terminale restant toujours la réussite des élèves au baccalauréat). Une question méthodologique s'est donc posée : quelle méthodologie de recherche mettre en place pour assurer la viabilité des séances conçues dans la classe ?

Le travail de recherche s'est inscrit dans une méthodologie de type ingénierie didactique, à laquelle nous avons cependant souhaité ajouter une dimension collaborative. Nous avons donc défini une méthodologie de type ingénierie didactique collaborative.

L'ingénierie didactique

La méthodologie de recherche de type ingénierie didactique est un processus expérimental constitué de quatre phases (Artigue, 1988) :

1. Les analyses préalables (analyse épistémologique des contenus visés, analyse curriculaire, analyse de l'enseignement usuel et de ses effets...), sur lesquelles s'appuie la conception de l'ingénierie ;
2. La conception et l'analyse *a priori* de l'ingénierie dans lesquelles le chercheur agit sur un certain nombre de variables permettant, *a priori*, d'engager le processus de validation ;
3. L'expérimentation permettant de recueillir diverses données ;
4. L'analyse *a posteriori* s'appuyant sur ces données et la validation qui se fonde essentiellement sur la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori*.

Cependant, dans ce type de méthodologie de recherche, les productions réalisées pour l'enseignement ne sont pas directement à destination des classes « ordinaires ».

Les recherches collaboratives

Des chercheurs canadiens (Bednarz, Poirier, Desgagné & Couture, 2001) proposent d'aborder la question de la production de séquences d'enseignement dans une autre perspective que celle de l'ingénierie didactique. Pour eux, une telle production ne peut se passer du point de vue des praticiens, c'est-à-dire des enseignants. Ils parlent alors de recherche collaborative.

Cette approche accorde une place importante à l'association chercheurs et enseignants. Bednarz *et al.* (2001) expliquent l'importance de cette collaboration :

Il ne s'agit pas seulement [...] de développer des situations d'enseignement riches et pertinentes sur le plan des apprentissages [...] mais de produire des situations qui soient aussi viables en contexte (que valent en effet des scénarios s'ils ne rencontrent aucun écho dans l'expérience ?). (p. 45)

Ce travail d'équipe entre enseignants et chercheurs permet de donner plus de poids aux scénarios d'enseignement considérés et de « construire des activités, des interventions non

seulement fécondes au plan des apprentissages mais aussi viables dans la pratique » (Bednarz *et al.*, 2001, p. 46). La recherche collaborative est caractérisée par une double dimension : une dimension formation, du côté de l'enseignant qui cherche à « se perfectionner », à améliorer ses pratiques, et une dimension recherche, du côté du chercheur.

Vers l'ingénierie didactique collaborative

Le couplage des deux méthodologies a donné ce que nous avons appelé une méthodologie de type ingénierie didactique collaborative (Derouet, en relecture). Tout comme pour les recherches collaboratives, ce type de recherche a une double finalité : les produits de la démarche et la diffusion doivent à la fois avoir des retombées pour la communauté de pratique (les enseignants) et pour la communauté de recherche (Desgagné, Bednarz, Lebus, Poirier & Couture, 2001, p. 40). C'est le deuxième axe qui nous a intéressée dans le travail de thèse. Cependant, le premier axe n'a pas été oublié dans le processus, nous y reviendrons dans les perspectives.

Profil de l'enseignante impliquée dans le travail collaboratif

Dans le cadre de notre méthodologie d'ingénierie didactique collaborative, nous avons travaillé avec une enseignante de terminale S. Ce qui a conditionné le choix de l'enseignante est tout simplement une motivation de sa part de se former sur ces notions pour lesquelles elle n'était pas satisfaite de son enseignement. Elle était notamment en demande de problèmes d'introduction « plus convaincants » (citation de l'enseignante) pour la notion de fonction de densité et cherchait un moyen de plus motiver le besoin du calcul intégral. L'enseignante a plus de 20 ans d'expérience dans l'enseignement. C'est une ancienne formatrice de l'IUFM (Institut Universitaire de Formation des Maîtres) et elle est membre de plusieurs groupes IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). Son profil est bien entendu à prendre en compte. Sa classe de terminale S de l'année scolaire 2014-2015 (année de l'expérimentation) est de 35 élèves de milieu social plutôt favorisé dans un lycée parisien du 16^e arrondissement.

Dans la méthodologie de type ingénierie didactique collaborative, le travail collaboratif implique une prise en compte du point de vue de l'enseignante et des contraintes de son contexte d'enseignement. Les contraintes posées par l'enseignante étaient de plusieurs ordres :

- des contraintes de temps : la séquence et en particulier les séances d'introduction ne devaient pas avoir une durée supérieure à ce qu'elle consacrait pour la séquence les années précédentes (2h pour l'introduction du calcul intégral et 2h pour l'introduction des lois à densité) ;
- des contraintes de résultats : les élèves devaient être capables de résoudre les mêmes tâches sinon plus que les années précédentes ;
- des contraintes matérielles : les séances d'introduction devaient être en classe entière, dans une salle de classe équipée d'un ordinateur et d'un vidéoprojecteur (mais pas d'ordinateur pour chaque élève).

Ensuite, des recherches ont montré que les pratiques chez les enseignants expérimentés sont stables (Robert, 2008a). Pour cette raison nos propositions de séances devaient être suffisamment proches des pratiques habituelles de l'enseignante.

Méthodologies spécifiques

Pour chacune des questions de recherche, nous avons mis en place des méthodologies spécifiques, qui sont résumées dans la figure 4.

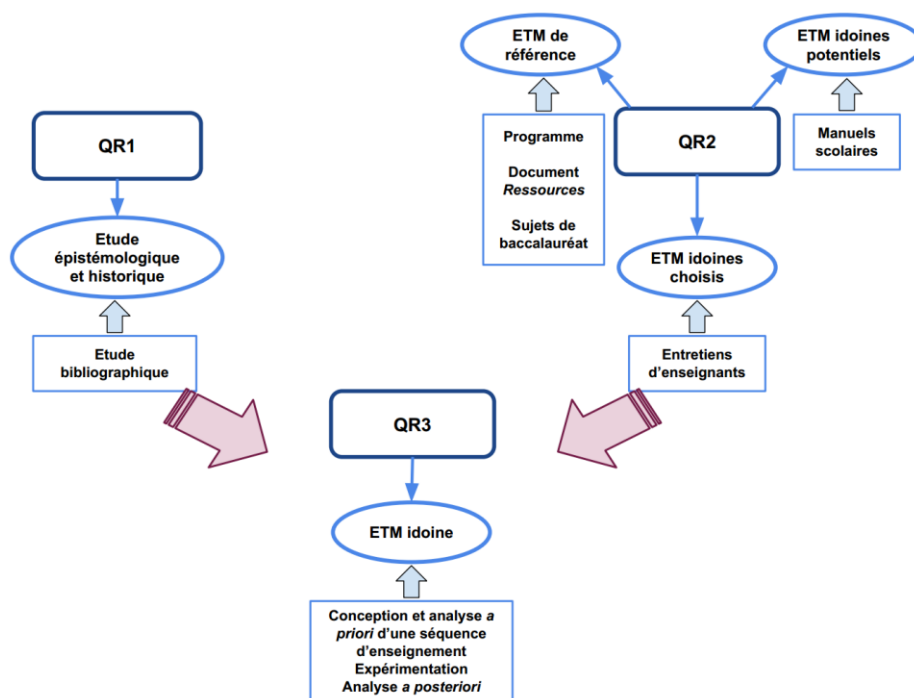


Figure 4. Schéma de la méthodologie générale

Pour la question d'ordre historique et épistémologique (QR1), l'étude a été bibliographique. Pour la question QR2, portant notamment sur l'introduction de la notion de fonction de densité dans les classes de terminale S, nous avons procédé à trois types d'analyse. Une première au niveau de l'ETM de référence, en s'intéressant au programme, au document Ressources en probabilités et statistique en terminale (MENJVA & DGESCO, 2012) et aux énoncés de baccalauréat. Ensuite, nous avons analysé les ETM idoines potentiels, ceux proposés par les manuels scolaires de mathématiques de terminale S, pour avoir une idée de ce qui peut être rencontré dans les classes. Nous avons aussi analysé des ETM idoines choisis par quatre enseignants, par le biais d'entretiens, seulement dans un but de conforter ce que l'on trouve dans les manuels. Ces différentes analyses forment la phase d'analyses préalables de l'ingénierie didactique. Les trois dernières phases de l'ingénierie didactique ont été mises en place pour répondre à la troisième question de recherche (QR3). L'expérimentation a duré un peu plus de trois semaines. Nous avons assisté à l'ensemble des séances (13 séances de 55 minutes ou 1h50). Les données dont nous disposons sont les enregistrements audio des séances, des photos du tableau et de cahiers d'élèves, et aussi de prises de notes. Nous avons ensuite transcrit les séances d'introduction (4 séances).

QUELQUES RESULTATS DES ANALYSES PREALABLES

Analyse historique et épistémologique

Rappelons la première question de recherche (QR1) :

Comment historiquement et épistémologiquement sont apparus les liens entre probabilités à densité et calcul intégral ? Comment a émergé le concept de loi à densité et tout particulièrement la notion de fonction de densité ?

L'étude historique et épistémologique (Derouet, 2017) a fait ressortir plusieurs points. Tout d'abord, les véritables problèmes qui ont fait émerger les lois à densité sont les problèmes de théorie des erreurs (erreurs d'observations) : au XVIII^e siècle, les instruments de mesures sont de plus en plus précis mais le problème des écarts entre les différentes mesures observées d'une même quantité (par exemple la distance entre la Terre et la Lune) se pose toujours. Les mathématiciens cherchent alors à déterminer la « vraie » valeur de la quantité mesurée et à trouver une loi des erreurs. Le point de départ est donc des données statistiques, qui sont ensuite aussi utilisées pour valider ou non les lois proposées. Dans les différents écrits que nous avons analysés, nous avons observé une place assez importante laissée au graphique. Un exemple semble très intéressant dans le cours de Géodésie de Faye (1928). Il s'agit de la détermination empirique d'une loi en partant d'un histogramme des données récoltées. L'histogramme apparaît donc comme un outil intéressant pour passer à la fonction de densité.

Analyse des ETM idoines potentiels

Maintenant abordons la deuxième question (QR2) :

Quelles tâches sont proposées et quelles activités sont attendues des élèves pour, dans un premier temps, l'introduction de la notion de fonction de densité, et dans un second temps, pour exploiter les articulations entre l'ETM_{paD} et l'ETM_{CI} ?

L'analyse de l'ETM de référence a permis de montrer que très peu de liens sont faits entre probabilités et analyse. Aucune proposition n'est faite, dans le programme ou dans le document Ressources, pour introduire la notion de fonction de densité. Ensuite, les tâches proposées au baccalauréat montrent une étanchéité totale entre les deux domaines mathématiques, bien que des connexions pourraient être faites.

Activités d'introduction de la notion de fonction de densité

Nous avons alors mené une analyse des ETM idoines potentiels proposés par les manuels. Nous avons étudié l'ensemble des activités d'introduction de la notion de fonction de densité des manuels de terminale S de l'édition 2012 qui sont au nombre de 8. Contrairement à ce que pouvait laisser présager le document Ressources, il ressort que 7 manuels sur 8 proposent une activité d'introduction. Les approches peuvent être différentes suivant les manuels. En particulier, 5 manuels sur les 8 proposent une introduction utilisant un passage par l'histogramme de fréquences. Nous nous sommes principalement focalisée sur ces manuels. Certains points ont pu être mis en évidence (Derouet & Parzysz, 2016). Nous en énonçons quelques-uns ici : dans ces introductions, le travail mathématique est essentiellement lié à de la visualisation au niveau de l'histogramme et de la courbe, notamment l'histogramme et la courbe de densité sont pratiquement toujours donnés dans le manuel. Il y a un fort appui sur la notion d'histogramme, mais les auteurs des manuels considèrent comme indispensable de faire des rappels sur les propriétés relatives à l'histogramme. Le référentiel théorique lié à l'histogramme n'est donc pas considéré par les auteurs comme disponible pour les élèves. On peut repérer aussi des erreurs sur les représentations graphiques d'histogrammes. Les différentes activités d'introduction font ressortir que la courbe de densité doit « lisser » ou « épouser » l'histogramme, mais la nécessité que l'aire sous la courbe soit égale à 1, par exemple, ne ressort jamais explicitement comme une condition nécessaire. On peut donc conclure qu'il n'y a pas réellement de construction du référentiel théorique lié à la fonction de densité. Les manuels proposent des démarches différentes, soit en partant de données statistiques, soit des probabilités. Dans tous les cas, il n'y a pas de démarche de modélisation ; le modèle est déjà choisi. La fonction de densité n'arrive jamais comme une réponse à un problème, car le problème est déjà résolu.

Liens autour du calcul d'aire

Pour mieux comprendre les liens qui peuvent être faits entre intégrale et probabilité, nous avons regardé les chapitres associés (celui sur le calcul intégral et celui sur les lois à densité) de façon plus globale. En analysant les manuels, dans la partie relative au calcul intégral, on peut repérer trois niveaux de calcul d'aire :

- Le premier niveau A1 : le calcul d'aires élémentaires. Il s'agit des calculs d'aires sous la courbe de fonctions affines par morceaux, ce qui revient à des calculs d'aires de rectangles, de trapèzes...
- Le deuxième niveau A2 : le calcul d'aires à l'aide de primitives. Il s'agit des calculs d'aires qui se font par utilisation du théorème fondamental de l'analyse : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f . Ce type de calcul est possible lorsque l'expression explicite d'une primitive de f est connue des élèves. Ce niveau de calcul d'aire peut aussi être mobilisé pour des fonctions affines par morceaux bien entendu.
- Le troisième niveau A3 : le calcul approché d'aires. Les calculs approchés reposent essentiellement sur la méthode des rectangles qui est au programme de terminale S. Ce niveau concerne les fonctions dont les élèves ne connaissent pas d'expression explicite d'une primitive, mais pas seulement, cela peut aussi être un niveau à mobiliser pour retrouver un résultat obtenu par calcul avec une primitive.

Dans l'ordre du chapitre, on peut constater que, dans un premier temps, apparaissent des calculs d'aires de niveau A1, puis de niveau A3 pour enfin arriver au niveau A2, qui est le cœur du chapitre du calcul intégral. Le constat de ces trois niveaux est intéressant dans notre cas car nous pouvons remarquer que les trois lois au programme (lois uniforme, exponentielle et normale) sont à relier prioritairement à un des niveaux de calcul d'aire (respectivement niveau A1, A2 et A3).

Vers des pistes à explorer

A la suite de ces analyses préalables, nous avons pu formuler des pistes à explorer pour concevoir une séquence et notamment des séances d'introduction de la notion de fonction de densité afin que les élèves construisent réellement cette nouvelle notion mathématique et lui donnent du sens. Les points qui nous semblent importants sont les suivants :

- La fonction de densité doit être introduite comme réponse à un problème, il faut donc réellement qu'un problème soit posé aux élèves.
- Un appui sur la statistique descriptive (avec les histogrammes) et notamment sur des données statistiques réelles est porteur de sens.
- La notion d'histogramme doit être en amont retravaillée pour être un appui pour introduire la fonction de densité.
- Il est intéressant de s'appuyer sur les trois niveaux de calculs d'aire.

Il semble donc indispensable que les élèves cherchent eux-mêmes l'expression de la fonction de densité pour se poser des questions sur les propriétés que celle-ci doit vérifier. Une démarche de modélisation est à considérer. Ce sont ces pistes qui ont été prises en compte dans la conception et testées dans le cadre de l'ingénierie.

ANALYSE DES SEANCES CONÇUES

La séquence conçue

En partant des pratiques habituelles de l'enseignante sur les chapitres relatifs au calcul intégral et aux lois à densité, nous avons essentiellement proposé une articulation des deux domaines avec une réorganisation de l'ordre d'apparition des notions. Plutôt que voir les probabilités comme une application du calcul intégral, l'idée générale de la séquence conçue est de commencer par deux problèmes de modélisation probabiliste pour ensuite motiver le besoin de calculer des aires sous des courbes et donc d'introduire un nouvel outil mathématique permettant de répondre à ce problème, l'intégrale. Le cours ensuite est assez « traditionnel » mais avec toujours des allers-retours sur les problèmes de probabilités de l'introduction. Enfin, un retour sur les trois lois au programme permet de conclure la séquence. Dans cette séquence, qui articule les deux chapitres habituellement séparés, le calcul intégral n'est pas un prérequis à l'introduction des lois à densité.

Les deux problèmes introductifs, qui correspondent aux séances qui nous intéressent tout particulièrement dans la recherche, ont des objectifs plus précis. Pour le premier problème, que nous appelons le problème de la rencontre (en Annexe 1), il s'agit de faire émerger la notion de fonction de densité, alors que dans le second problème, le problème du volcan Aso (en Annexe 2), il s'agit plus d'un réinvestissement pour consolider ce qui a émergé du premier problème. Du point de vue du calcul intégral, le premier problème aboutit à une fonction de densité affine donc les calculs d'aires sont élémentaires (niveau A1) et ne vont pas poser de difficultés aux élèves. Dans le second problème, il s'agit cette fois d'une fonction de type exponentiel donc du niveau A3 pour les élèves (qui ne connaissent pas encore les intégrales), ce qui va ensuite aboutir sur un travail d'approximation de l'aire sous la courbe. Dans les deux cas, la statistique descriptive (et donc un troisième sous-domaine mathématique) est présente, et notamment avec la notion d'histogramme. Cependant dans le premier cas, le passage par la statistique descriptive se fait via la simulation, tandis que dans le second, il s'agit de données statistiques réelles. Dans cet article, nous ne présenterons que le second problème.

Outils méthodologiques pour analyser les séances

Dans le cadre de la méthodologie de type ingénierie didactique, les analyses de ces séances d'introduction sont constituées d'analyses *a priori* et *a posteriori*. Du fait que les problèmes d'introduction soient des problèmes de modélisation, nous avons voulu prendre en compte dans les analyses le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007), qui a été adapté (figure 5).

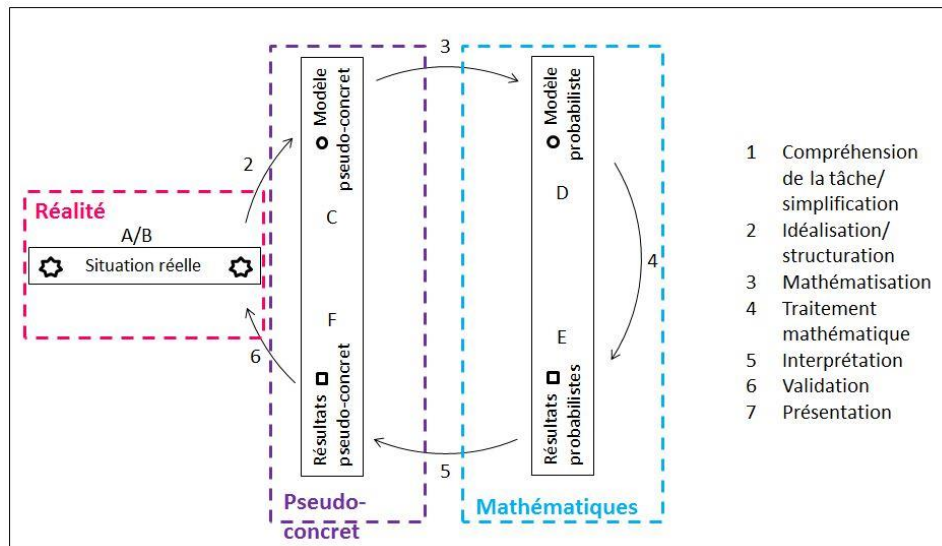


Figure 5. Le cycle de modélisation, inspiré de Blum et Leiss (2007)

Nos analyses ont été de deux niveaux. Des analyses globales sur toute la démarche de modélisation et des analyses plus locales sur les étapes du cycle importantes pour la construction de la notion de fonction de densité, à savoir les étapes de mathématisation (4) et de traitement mathématique (5), qui font donc l'objet d'analyses plus fines.

Pour répondre à la question de recherche sur les éléments didactiques à prendre en compte du point de vue du travail mathématique, nous avons adapté pour les analyses globales les outils d'analyse de tâches et de déroulement (Robert, 2008b) à des tâches de modélisation en prenant donc en compte le cycle de modélisation et en l'adaptant. La démarche de modélisation implique que l'on ne peut pas tout prévoir, pour cette raison nous parlons de canevas dans l'analyse *a priori*, dans lequel nous indiquons parfois plusieurs possibles. Pour l'analyse *a posteriori*, il s'agit du scénario choisi par la classe. Pour les analyses des moments plus révélateurs de la construction de la notion de fonction de densité, nous avons procédé à une analyse plus fine prenant en compte les sous-domaines en jeu, les registres, les dimensions de l'ETM, les adaptations, les activités de traitement, de reconnaissance et d'organisation (Robert & Vandebrouck, 2014) mais aussi ce que nous avons appelé les activités stratégiques, qui correspondent aux activités pour lesquelles les élèves ont un choix à faire.

Du côté de la gestion du travail mathématique dans la classe, nous avons identifié qui, des élèves ou de l'enseignante, prenait en charge le travail mathématique dans la classe. Nous avons introduit la notion d'ETM collectif de la classe, en parlant du collectif classe lorsqu'un élève prenait la parole au niveau mathématique. Nous avons aussi plus particulièrement regardé le rôle de l'enseignante en identifiant les aides qu'elle apportait, les reformulations, les bilans...

Dans la suite, nous allons présenter comment ces outils méthodologiques ont été utilisés pour décrire le travail mathématique lors d'un épisode particulier de la séance sur le problème du volcan Aso.

Le problème du volcan Aso

Le volcan est actuellement en éruption [nous étions en mars 2015]. Comment évaluer la probabilité que la prochaine éruption : Ait lieu dans les 5 ans ? Pendant l'année 2030 ?

A partir des transcriptions et d'autres données telles que les photos du tableau, nous avons reconstitué le déroulement de cette séance. Nous avons notamment identifié les sous-tâches qui sont apparues dans la classe. Elles sont résumées dans la figure 6.

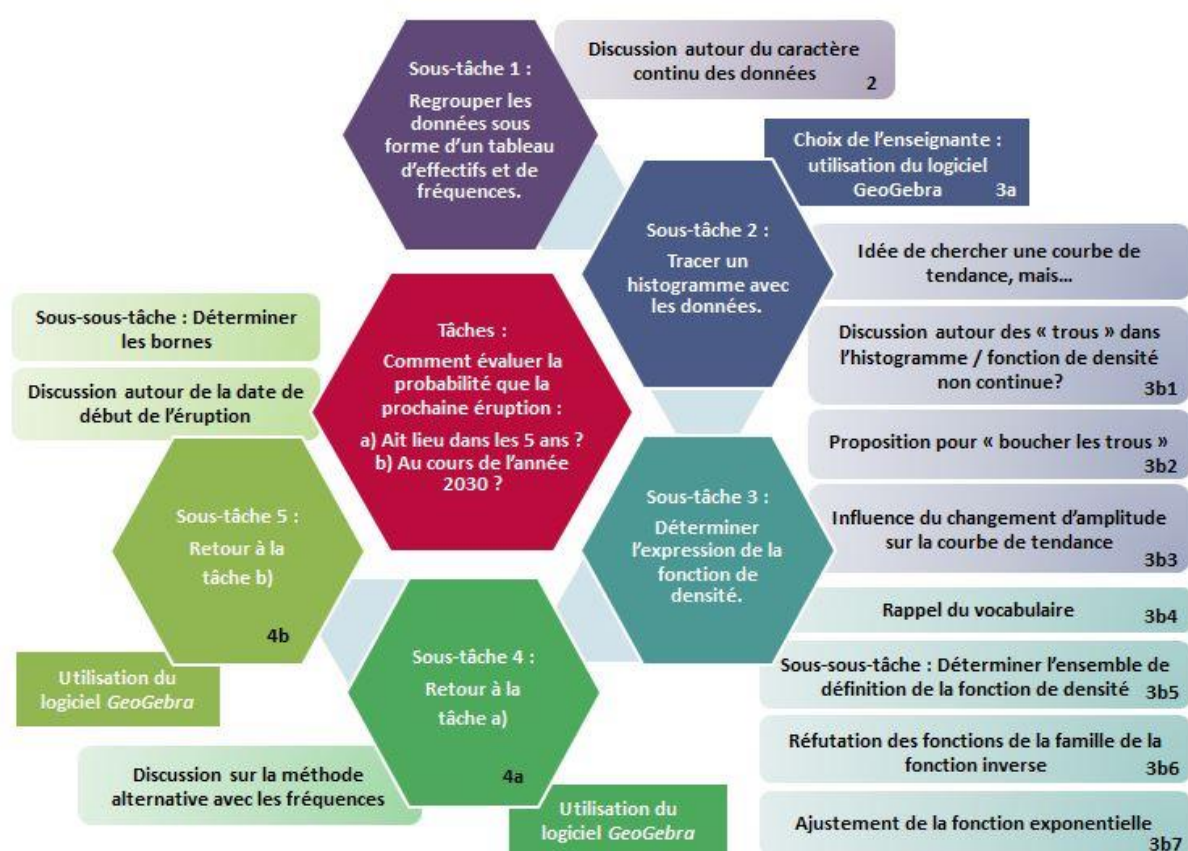


Figure 6. Diagramme illustrant les différentes sous-tâches dans le déroulement de la séance

A l'intérieur de ces sous-tâches, nous avons identifié les phases liées aux étapes du cycle de modélisation. Les moments révélateurs, autour de la construction de la notion de fonction de densité, sont les quatre sous-phases : 3b6, 3b7, 4a et 4b, qui font partie des phases de mathématisation et de traitement mathématique (phases 3 et 4 du cycle de modélisation).

Analyse d'un épisode du déroulement de la séance

Dans cet article, nous allons présenter, sur un épisode précis de la séance, comment nous avons mené nos analyses. Nous allons exposer nos éléments d'analyse de la phase 3b6 de réfutation des fonctions de la famille de la fonction inverse.

Nous sommes au moment de la séance où la classe s'est mise d'accord sur le choix d'un histogramme d'amplitude 4 ans des données des temps d'attente entre deux éruptions (figure 7).

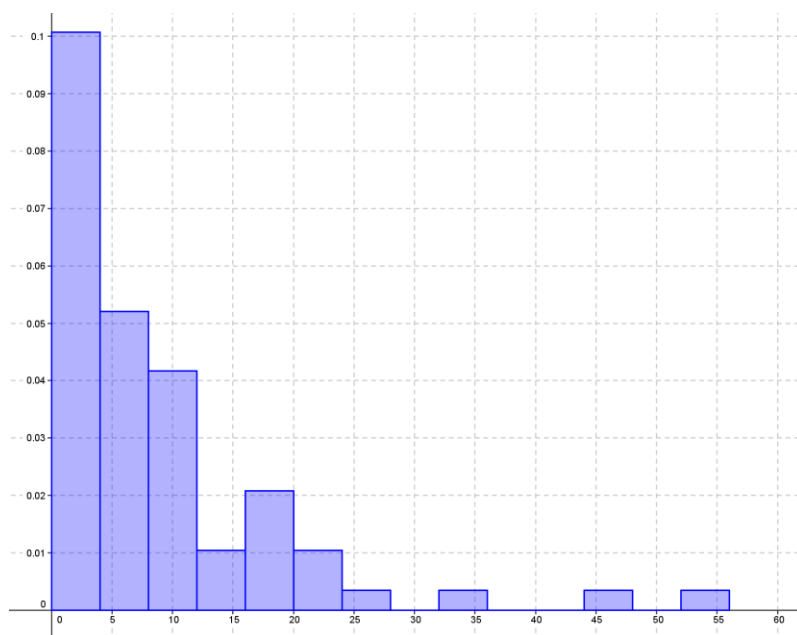


Figure 7. Histogramme retenu par la classe

La tâche écrite au tableau à ce moment-là est la suivante : *On cherche une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ qui approche « au mieux » l'histogramme.* Il y a une phase de recherche individuelle où les élèves tracent à main levée une courbe qui semble leur convenir. L'enseignante leur demande de trouver l'expression de la fonction. Beaucoup d'élèves pensent à la fonction inverse. L'enseignante décide ensuite de faire une mise en commun.

Dans la première sous-phase (3b6.1), l'enseignante commence en traçant sur le logiciel GeoGebra la fonction $x \rightarrow 1/x$. Les élèves entrent alors dans un travail de visualisation et demandent à l'enseignante de déplacer la courbe pour qu'elle approche au mieux l'histogramme. Les dimensions en rouge sont celles sollicitées par les élèves, en vert par l'enseignante. Nous remarquons donc un travail de visualisation entre les sous-domaines de la statistique (SD) et du calcul intégral (CI) (figure 8). La dimension instrumentale est prise en charge par l'enseignante, car c'est elle qui est sur l'ordinateur, cependant elle agit sous commande des élèves (d'où les pointillés). Il s'agit ici d'une activité de traitement dans le registre graphique.

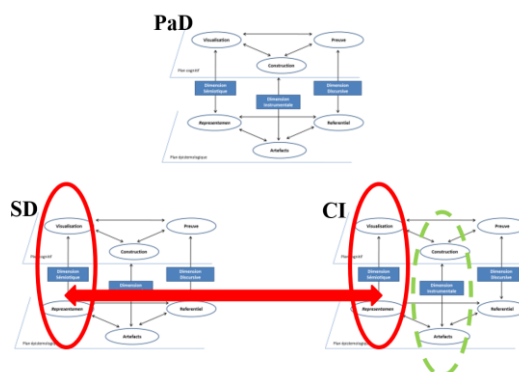


Figure 8. Diagramme représentant la sous-phase 3b6.1

Ensuite (sous-phase 3b6.2), l'enseignante dit : « *Alors oui mais est-ce que je peux la décaler...? Regardez bien ce qu'il se passe partout parce que...* ». Un élève alors répond que la fonction doit être positive. Cette aide procédurale indirecte de l'enseignante induit l'activité de reconnaissance d'une propriété d'un élève et donc il y a une mobilisation du référentiel théorique de la fonction de densité, qui relance le travail de visualisation (figure 9). Les élèves s'arrêtent sur cette fonction, mais finalement un élève propose de déplacer la fenêtre, et ils s'aperçoivent que la courbe coupe en effet l'axe des abscisses.

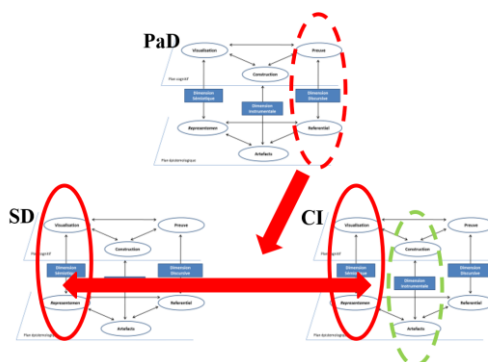


Figure 9. Diagramme représentant la sous-phase 3b6.2

L'enseignante propose ensuite aux élèves un changement de registre pour passer au registre algébrique de la fonction. L'enseignante va prendre à sa charge ce travail sur les fonctions, pour arriver à considérer les fonctions du type $f(x) = a/(bx + c)$ (sous-phases 3b6.3 et 4), qu'elle va introduire dans le logiciel GeoGebra avec des curseurs a , b et c (dont les valeurs peuvent varier). La dimension instrumentale va à nouveau relancer le travail de visualisation des élèves (sous-phase 3b6.5).

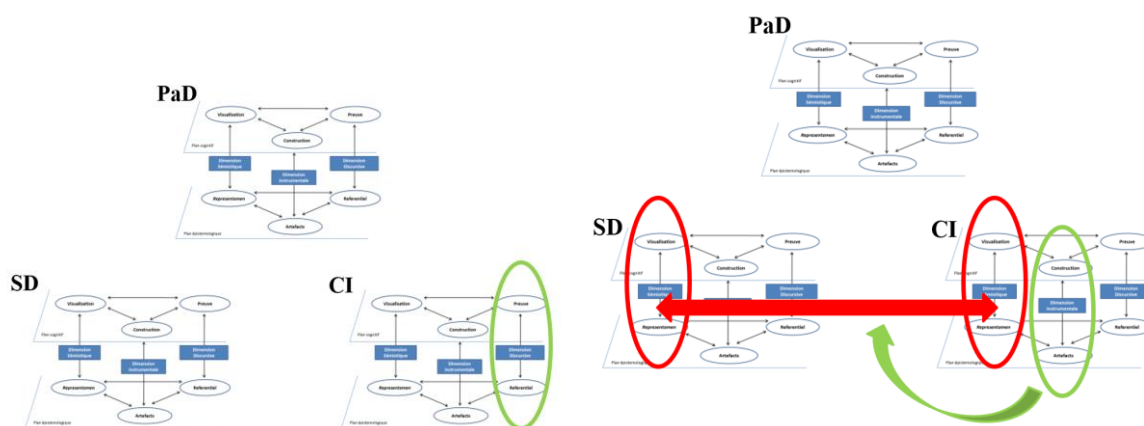


Figure 10. Diagramme représentant les sous-phases 3b6.3 et 4 (à gauche) et la sous-phase 3b6.5 (à droite)

Finalement, l'enseignante va à nouveau proposer une aide procédurale indirecte (phase 3b6.6) : « *Rappelez-moi, il y avait une contrainte sur la courbe qu'on cherche quand même. C'est quoi ?* ». Plusieurs élèves vont alors dire que l'aire sous la courbe doit être égale à 1. Cette reconnaissance d'une propriété va à nouveau relancer le travail de visualisation (figure 11). La commande GeoGebra, précisant la valeur de l'aire sous la courbe, va permettre de réfuter le choix d'une fonction de cette famille.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion

Nous avons montré dans cette thèse que les deux problèmes, celui de la rencontre et celui du volcan Aso, sont effectivement réalisables en classe de terminale S et que le travail mathématique en jeu dans la classe et plus spécifiquement les activités de la classe amènent à une construction du référentiel théorique de la notion de fonction de densité, ce qui n'est pas le cas dans les manuels. L'inversion dans l'ordre d'apparition des notions d'intégrale et de loi à densité est bénéfique dans la construction de la fonction de densité. Le fait que les élèves ne connaissent pas le calcul intégral ôte la priorité au calcul et permet de focaliser le travail mathématique sur l'objet fonction de densité, de questionner cette notion pour en faire émerger les caractéristiques pour ensuite permettre de faire apparaître le besoin de calculer des aires sous une courbe. Cette démarche permet de donner un véritable sens à l'égalité (*). La démarche de modélisation, qui fait intervenir les trois sous-domaines : statistique descriptive, probabilités à densité et calcul intégral, joue un rôle important pour faire émerger les lois à densité comme réponse à un problème.

Les conclusions au sujet de cette ingénierie didactique sont positives. Cependant, il faut rester prudent car cette recherche présente des limites. Tout d'abord, du point de vue de l'expérimentation, l'enseignante avec qui nous avons travaillé en collaboration présente un profil particulier, ce qui est à prendre en considération dans les résultats. Il en est de même pour l'établissement dans lequel a eu lieu l'expérimentation, de milieu social plutôt favorisé. Cela joue nécessairement un rôle dans le déroulement des séances, notamment dans le fait qu'il n'y avait aucun problème de discipline par exemple. Un autre point, d'ordre méthodologique cette fois-ci, constitue une limite de notre travail. Nous avons fait le choix dans nos analyses de considérer le collectif classe (quand un élève prenait la parole sur des contenus mathématiques) plutôt que les élèves individuellement. Dans ces conditions, nous perdons des informations sur les activités personnelles des élèves en individuel, en les considérant dans un tout. Nos conclusions sont donc à prendre pour le collectif mais pas pour chacun des élèves. Après avoir compté le nombre d'élèves à prendre la parole au cours des quatre séances d'introduction, nous avons pu tout de même mettre en évidence une bonne participation des élèves, ce qui nous permet de dire que dans ce cas cette considération du collectif était une possibilité envisageable, mais d'autres choix auraient pu être faits.

Apport de ce travail de thèse

Malgré les limites de ce travail, nous pouvons identifier différents apports de cette thèse. Le premier est un apport pour le champ de la didactique. Ce travail spécifiquement centré sur la fonction de densité apporte une nouveauté dans le domaine car peu de travaux s'intéressent aux probabilités continues et encore moins à la notion générale de fonction de densité. D'un point de vue théorique, il s'agit d'un premier travail de recherche essayant d'articuler le cadre des Espaces de Travail Mathématique et des éléments de théorie de l'activité. Nous pensons avoir montré à travers nos analyses une compatibilité des deux cadres théoriques et même une complémentarité. Il nous semble que les analyses des tâches et des déroulements permettent une analyse fine. Le modèle des ETM quant à lui permet dans un second temps de porter un regard plus global sur les activités des élèves. Le dernier apport est d'ordre méthodologique avec la méthodologie de type ingénierie didactique collaborative.

Perspectives

Pour revenir sur la méthodologie d'ingénierie didactique collaborative, le point de vue recherche collaborative nous invitait à considérer à la fois des finalités pour la recherche, ce que nous avons mis en avant dans la thèse, mais aussi des finalités pour la communauté de pratique. Pour cette raison, il nous semble important dans les perspectives d'aborder la question de la diffusion de cette séquence. Après différentes interventions en formation continue des enseignants, nous cherchons maintenant à travailler sur la création d'une ressource en ligne, avec toujours un point de vue pratique (pour les enseignants) et un point de vue recherche. Nous chercherons à mettre en évidence les éléments nécessaires et indispensables pour créer une ressource en ligne à destination des enseignants qui soit pertinente, utilisable et bénéfique sans que soient dénaturés les objectifs didactiques et pédagogiques des tâches mathématiques proposées. Cette étude aura pour but de soutenir la conception et l'implémentation de la ressource. Nous étudierons ensuite l'appropriation de la ressource par des enseignants qui ne l'ont pas conçue. Cela nous permettra aussi de tester la reproductibilité de la séquence dans d'autres contextes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- BEDNARZ, N., POIRIER, L., DESGAGNE, S., & COUTURE, C. (2001). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques : une nécessaire prise en compte des praticiens. In A. Mercier, G. Lemoyne, & A. Rouchier (Eds.), *Le génie didactique. Usages et mésusages des théories de l'enseignement* (pp. 43–69). Paris : De Boeck Université.
- BLUM, W., & LEISS, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? The example “Sugarloaf” and the DISUM Project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12) – Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester : Horwood.
- COLMEZ, P. (2012). Faut-il arrêter d'enseigner les statistiques au lycée ? *Images Des Mathématiques*. Repéré à <http://images.math.cnrs.fr/Faut-il-arreter-d-enseigner-les-1321.html>
- DEROUE, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en oeuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral*. Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.
- DEROUE, C., & PARZYSZ, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions? *ZDM - Mathematics Education*, 48(6), 757–773.
- DEROUE, C. (2017). Emergence historique des lois à densité. Des pistes pour l'enseignement. *Statistique et Enseignement*, 8(2), 3–24.
- DEROUE, C. (en relecture). Co-construction d'une séquence d'enseignement articulant lois à densité et calcul intégral en terminale S : présentation d'une méthodologie de type ingénierie didactique collaborative. In *XIXe école d'été de didactique des mathématiques, Paris*.
- DESGAGNE, S., BEDNARZ, N., LEBUIS, P., POIRIER, L., & COUTURE, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(1), 33–64.
- FAYE, H. (1928). *Cours d'astronomie et de géodésie de l'école polytechnique*. Paris : Gauthier Villars.
- KUZNIAK, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (MEN) (2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques. Classe terminale de la série scientifique.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DE LA JEUNESSE ET DE LA VIE ASSOCIATIVE (MENJVA), & DGESCO (2012). Ressources pour la classe terminale générale et technologique. Probabilités et statistique.
- MONTOYA DELGADILLO, E., & VIVIER, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 73–101.
- PERRIN, D. (2015). Remarques sur l'enseignement des probabilités et de la statistique au lycée. *Statistique et Enseignement*, 6(1), 51–63.
- RAOULT, J.-P., & ARNOUX, P. (2013). Pourquoi enseigner les probabilités et la statistique dans les cours de mathématiques. *Images Des Mathématiques*. Repéré à <http://images.math.cnrs.fr/+Pourquoi-enseigner-les+>

- ROBERT, A. (2008a). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 59–68). Toulouse : Octarès Editions.
- ROBERT, A. (2008b). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45–58). Toulouse : Octarès Editions.
- ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZDP des élèves : analyse de séances sur des tâches complexes. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 34(2-3), 239–285.
- ROGALSKI, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 23–30). Toulouse : Octarès Editions.

ANNEXES

Annexe 1. Enoncé du problème de la rencontre

Karine et Olivier décident de se retrouver au café de l'Hôtel de Ville entre 7h et 8h. Ils peuvent arriver à tout moment entre 7h et 8h. Que peut-on dire du temps d'attente du premier arrivé ?

Annexe 2. Enoncé du problème du volcan Aso

Le volcan Aso, situé sur l'île de Kyushu au Japon, est l'un des plus actifs au monde. On possède les statistiques de ses éruptions, régulièrement tenues depuis le XIII^e siècle. Nous avons, dans le document tableur, les années d'éruptions jusqu'au XIX^e siècle (à partir du XX^e siècle, les données, d'une autre nature, ne sont pas compatibles(*)).

Années des 73 éruptions du volcan Aso du XIII^e au XIX^e siècle

Donnée n°	Année	Temps d'attente	Donnée n°	Année	Temps d'attente
1	1229		34	1562	4
2	1239	10	35	1563	1
3	1240	1	36	1564	1
4	1265	25	37	1576	12
5	1269	4	38	1582	6
6	1270	1	39	1583	1
7	1272	2	40	1584	1
8	1273	1	41	1587	3
9	1274	1	42	1598	11
10	1281	7	43	1611	13
11	1286	5	44	1612	1
12	1305	19	45	1613	1
13	1324	19	46	1620	7
14	1331	7	47	1631	11
15	1335	4	48	1637	6
16	1340	5	49	1649	12
17	1346	6	50	1668	19
18	1369	23	51	1675	7
19	1375	6	52	1683	8
20	1376	1	53	1691	8
21	1377	1	54	1708	17
22	1387	10	55	1709	1
23	1388	1	56	1765	56
24	1434	46	57	1772	7
25	1438	4	58	1780	8
26	1473	35	59	1804	24
27	1485	12	60	1806	2
28	1505	20	61	1814	8
29	1506	1	62	1815	1
30	1522	16	63	1826	11
31	1533	11	64	1827	1
32	1542	9	65	1828	1
33	1558	16	66	1829	1
			67	1830	1
			68	1854	24
			69	1872	18
			70	1874	2
			71	1884	10
			72	1894	10
			73	1897	3