LA VALIDATION DANS L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES AU NIVEAU SECONDAIRE EN FRANCE

Assia **Nechache**

ESPE de Créteil et LDAR

assia.nechache@hotmail.fr

Résumé

Ce texte présente une partie de la recherche d'une thèse portant sur la question de la validation dans l'enseignement des probabilités en quatrième et cinquième année du secondaire en France. Cette recherche a été menée du point de vue du modèle des Espaces de Travail Mathématique. Pour caractériser le statut de la validation nous avons conduit trois sortes d'enquêtes. La première est exploratoire, et vise à comparer la validation pratiquée dans deux domaines : probabilités et géométrie. La deuxième enquête s'appuie sur l'analyse de tâches mises en œuvre dans les quatre dernières années de l'enseignement secondaire et relevant de différentes catégories (simple, standard, riche). Enfin, la dernière enquête, sous forme d'entretien, vise à obtenir le point de vue des enseignants sur les formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités. L'analyse de l'ensemble des résultats de ces trois enquêtes permet de caractériser des formes validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités au niveau du secondaire.

Mots clés : validation, probabilités, ETM, modélisation, enseignement secondaire

INTRODUCTION-CONTEXTE

Notre travail de thèse est né du questionnement d'enseignants du secondaire portant sur l'enseignement du domaine des probabilités, notamment le nôtre. En effet, lorsque nous étions enseignante dans les classes de 3^{e} et de 2de (quatrième et cinquième année du secondaire en France), nous avions l'habitude d'utiliser les logiciels de géométrie dynamique afin de conjecturer des résultats qui par la suite étaient démontrés à l'aide des propriétés géométriques institutionnalisées dans le cours. Ce schéma ne semblait néanmoins pas disponible dans le contexte des probabilités. Prenons l'exemple d'un exercice donné aux élèves dans lequel il fallait déterminer la probabilité d'un événement à l'aide de la simulation informatique. Après leur avoir expliqué certaines fonctions du tableur, les élèves ont effectué la tâche demandée et ont obtenu la probabilité cherchée. Certains élèves ont alors posé la question : « Comment prouver que la probabilité obtenue par la simulation est bien celle attendue ? ». Nous avons répondu que cela n'était pas demandé et qu'il fallait admettre le résultat obtenu par l'expérience. Ils ne disposaient pas en effet à leur niveau de classe des propriétés nécessaires. Les résultats (obtenus par la simulation) seraient démontrés dans les classes supérieures. Certains élèves ne furent pas convaincus par la réponse et posèrent alors la question : « Pourquoi, en géométrie, demandez-vous d'écrire la démonstration en citant les propriétés alors qu'en probabilités vous ne le demandez pas ? ». Cette question avait fini par provoquer un certain malaise car nous n'avions aucun argument à leur opposer. En effet, dans les programmes de 2008, le domaine des probabilités introduit en classe de 3^{e} est étroitement lié à celui de la statistique. Tel qu'il est envisagé par l'institution, l'enseignement des probabilités accorde une place privilégiée au domaine expérimental, à aux notions de simulation et de modélisation. Cela induit une nouvelle démarche et des raisonnements différents des autres branches des mathématiques. Les enseignants sont donc confrontés à un enseignement où le domaine expérimental a une place importante dans les raisonnements conduisant à des formes spécifiques de validation. Cela nous a conduit à étudier le statut de la validation dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^{e} et de 2de en France.

1. OUTILS THEORIQUES ET QUESTION DE RECHERCHE

Nous avons choisi d'étudier la validation dans le domaine des probabilités en fin de scolarité obligatoire lors des séances d'enseignement. Il s'agit pour nous d'identifier les formes de validation en jeu, mais également la manière dont le travail de validation s'effectue.

1.1 Des précisions sur la validation

Pour étudier la validation dans le cadre scolaire nous nous sommes référée aux travaux de Balacheff, Duval et Pedemonte. Pour Balacheff, la démonstration est une validation s'appuyant sur des connaissances théoriques (théorèmes et définitions) reconnues et institutionnalisées, utilisant un formalisme où la langue naturelle et le langage symbolique sont incorporés, et obéissant à des règles de déduction. Par ailleurs, Balacheff (1987) souligne l'importance de l'interaction sociale dans la production de la preuve, et cette interaction est selon lui est un levier dans la production d'arguments pour convaincre un autre que soi-même. Cet aspect social de la preuve constituerait alors le point de rapprochement de l'argumentation et de la démonstration chez Balacheff :

> L'argumentation est ainsi constitutive des processus de validation engagés dans un contexte social. (Balacheff, 1987, p. 574)

L'écart entre l'argumentation et la démonstration chez Balacheff porte sur le fait que l'argumentation vise à obtenir l'adhésion de l'interlocuteur, tandis que la démonstration vise à établir la vérité de l'énoncé indépendamment des interlocuteurs. Balacheff reconnait cependant l'existence de la pratique de l'argumentation dans le cadre de la résolution de problème. De son côté, Duval (1993) souligne que l'argumentation et la démonstration sont deux raisonnements fondamentalement différents. Il ajoute que « pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu'il soit un raisonnement valide » (Duval, 1995, p. 212). Ainsi, une démonstration est désignée par Duval comme un raisonnement valide ayant pour objectif d'établir la justesse d'une proposition (Duval & Egret, 1993, p. 115). Contrairement à la démonstration, l'argumentation est un raisonnement qui obéit non pas aux contraintes de validité mais à celles de pertinence. Chez Duval, la démonstration est caractérisée par une suite de pas déductifs. Un pas a une structure ternaire, composée de trois propositions ayant l'un de ces statuts opératoires : prémisse, énoncé-tiers (ou règle d'inférence), énoncé-cible (ou conclusion). L'énoncé-tiers permet le passage des prémisses à la conclusion. Les statuts opératoires déterminent l'organisation interne et la possibilité du fonctionnement d'un pas. La démonstration est donc un raisonnement organisé en un enchainement de pas de déductions ou d'inférences. Cet enchaînement de pas est articulé de manière à ce que la conclusion d'un pas soit recyclée en la prémisse d'un autre pas, ou dans le cas du pas terminal en la conclusion cible de la démonstration. Ce recyclage entraîne donc un changement du statut opératoire d'une proposition.

L'analyse de Duval concernant l'argumentation et la démonstration révèle l'existence d'une distance cognitive entre ces deux types de raisonnement. Ces deux raisonnements ont donc des structures complètements différentes et du point de vue cognitif. Dans la démonstration, la valeur épistémique d'une proposition dépend de son statut théorique, alors que dans l'argumentation elle dépend entièrement de son contenu. Contrairement à Duval, Pedemonte affirme que les raisonnements en mathématiques ne se réduisent pas seulement aux démonstrations et qu'il existe des raisonnements mathématiques, comme ceux de l'argumentation, qui ont pour objectif de fournir des « raisons » (ou « arguments ») pour accepter ou refuser certaines propositions :

> Les raisonnements mathématiques ne peuvent être réduits aux raisonnements démonstratifs qui permettent de déduire des conclusions à partir des prémisses données par le moyen de règles d'inférence explicites à l'avance. Il y a des raisonnements mathématiques, spécifiques à l'argumentation qui veulent simplement donner des « raisons » de l'acceptation ou de la réfutation de certaines propositions. (Pedemonte, 2002, p. 23)

Pedemonte ajoute que les « raisons » d'acceptation ou de réfutation de certaines propositions sont « tous les permis d'inférer possible qui composent l'argumentation » (Ibid., p.24). C'est pourquoi elle défend la thèse selon laquelle« l'argumentation en mathématiques est avant tout une justification rationnelle […].L'argumentation ne se contente pas de la compréhension, elle veut convaincre » (Ibid., p. 24).

Pedemonte affirme que la fonction de l'argumentation en mathématique est de fournir une justification rationnelle et que l'objectif de l'argumentation en mathématique est la détermination de la vérité :

> L'objectif principal de l'argumentation en mathématique est la recherche de la vérité. En mathématique on argumente quand on veut convaincre quelqu'un (soi-même ou un interlocuteur) de la vérité d'un énoncé. L'argumentation est alors un discours construit avec l'objectif de rechercher le « vrai ». (Ibid., p. 30)

Chez Pedemonte, la démonstration a un objectif spécifique qui est celui de valider un énoncé. Selon elle, cela revient « à attester la vérité à l'intérieur d'une théorie mathématique » (Pedemonte, 2002, p. 44).Il en résulte que la démonstration et l'argumentation ont un objectif commun, celui de « la recherche des raisons du « vrai » » (Pedemonte, 2002, p. 44). Pedemonte ajoute que la démonstration est élaborée à partir d'un raisonnement reposant sur un langage et par des règles particulières. De ce fait, ce raisonnement est bien de « la même nature que le raisonnement argumentatif » (Pedemonte, 2002, p. 44). Néanmoins, elle note une différence entre la démonstration et l'argumentation qui provient du fait que « la démonstration apporte une justification à l'intérieur d'un domaine théorique, alors que
l'argumentation n'y est pas obligée » (Pedemonte, 2002, p. 45).

Ainsi, Pedemonte (2002) conclut qu'une démonstration est une argumentation particulière. Dans le contexte scolaire, Pedemonte souligne que les raisonnements mathématiques pratiqués dans les classes sont plus souvent des raisonnements argumentatifs que des démonstrations.

Dans notre étude, nous nous intéressons aux validations produites par les enseignants (en interaction avec les élèves) ou par les élèves et approuvées par l'enseignant pendant les séances d'enseignement. C'est pourquoi, nous considérons que dans le cadre de l'enseignement (au niveau secondaire) des mathématiques, les validations pratiquées et institutionnalisées par les enseignants sont avant tout des argumentations rationnelles (au sens de Pedemonte).

1.2 Le modèle des Espaces de Travail Mathématique

La question de la validation dans l'enseignement des mathématiques a été étudiée sous l'angle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011), notés ETM. Le modèle des ETM a pour objectif de décrire et d'analyser la nature du travail mathématique attendu des élèves (ou plus généralement de ceux qui mettent en œuvre ce travail) au sein d'une institution scolaire donnée. Pour analyser le travail mathématique, les ETM sont organisés suivant deux plans :

- le *plan épistémologique,* composé de trois pôles : representamen, artefact et référentiel théorique. Il permet de structurer le contenu mathématique (et définit les attentes *a priori* sur le travail mathématique par rapport aux exigences de la discipline).
- le *plan cognitif*, composé de trois processus cognitifs : visualisation, construction et preuve. Il vise à structurer l'ETM lorsqu'il est proposé à un individu dont l'intention est d'effectuer le travail mathématique. Ce plan rend compte du travail mené par l'utilisateur de cet espace de travail pendant la résolution d'une tâche.

Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles :

- la *genèse sémiotique* donne aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
- la *genèse instrumentale* a pour fonction de rendre opératoires les artefacts dans le processus constructif ;
- la *genèse discursive* permet de donner sens aux propriétés pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique.

Ces trois genèses favorisent la circulation entre les plans épistémologique et cognitif en activant une articulation entre les composantes respectives des deux plans. L'étude des trois genèses passe par l'étude des dimensions (sémiotique, instrumentale, discursive) qui leurs sont respectivement associées et permet de rendre compte du développement du travail mathématique élaboré dans l'Espace de Travail Mathématique.
Cet ensemble de relations peut être visualisé grâce au diagramme suivant :

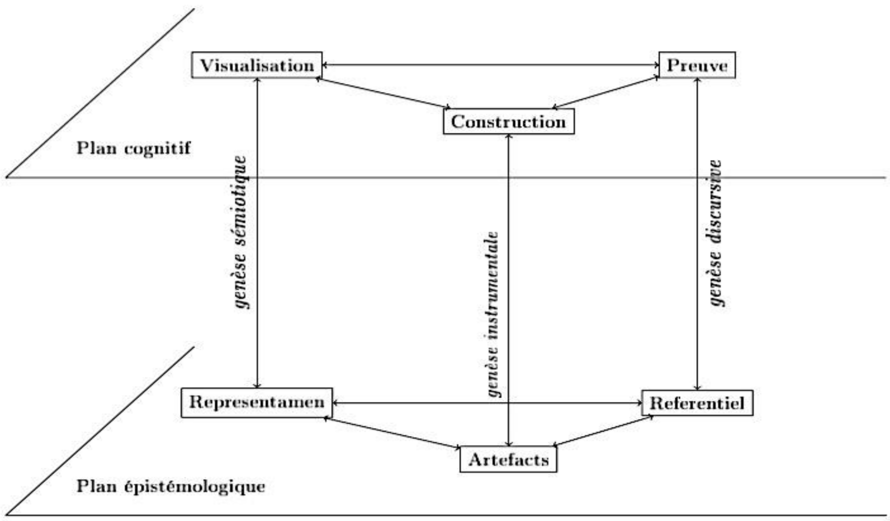
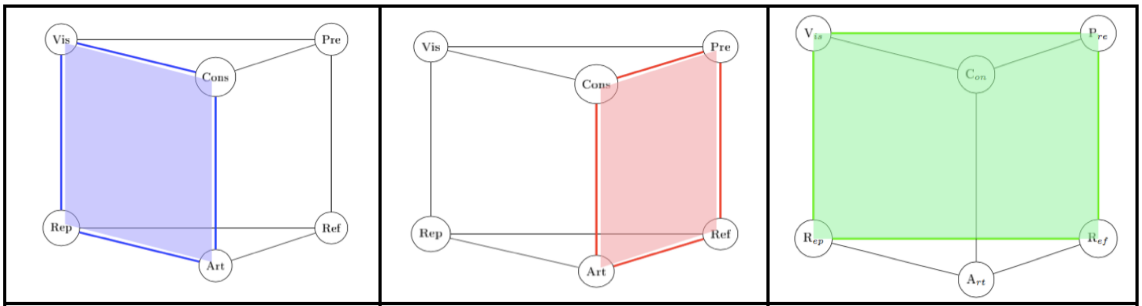


Figure 1. Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011)

Articulation des genèses de l'Espace de Travail Mathématique

Le diagramme de la Figure 1 fait apparaître un certain nombre de plans verticaux qui rendent compte des connexions entre les trois genèses et de la circulation du travail mathématique au sein de l'ETM. Ces trois plans sont décrits à partir des genèses qu'ils mettent en œuvre :

sémiotique-instrumentale [Sem-Ins], instrumentale-discursive [Ins-Dis] et sémiotique-discursive [Sem-Dis].



[Sem-Ins]	[Ins-Dis]	[Sem-Dis]

Figure 2. Les plans verticaux de l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak & Nechache, 2014)

L'analyse du travail de mathématique via ces trois plans verticaux permet de comprendre la manière dont les trois genèses interagissent afin de constituer un travail mathématique complet (Kuzniak & Nechache, 2016).

Les différents types d'ETM

Il existe trois types d'Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) permettant de décrire le travail mathématique dans le cadre scolaire.

ETM de référence. Une communauté d'individus se met d'accord sur un paradigme donné afin d'énoncer des problèmes et de structurer leurs solutions en favorisant des outils ou des manières de penser. Le contenu mathématique à enseigner est défini par une institution et est décrit dans les ETM de *référence*.

ETM idoine. Il s'agit d'un environnement organisé de telle manière qu'un élève s'engage dans la résolution de problème. Cet ETM permet un travail dans le paradigme correspondant à la problématique visée et ses différentes composantes doivent être organisées de manière valide.

ETM personnel. Des ETM idoines sont mis en œuvre dans les classes pour que les élèves se les approprient grâce aux connaissances, et aux fonctions cognitives qui leur sont propres. Ces espaces deviennent par la suite ce que nous appelons les ETM personnels.

En conclusion, dans une institution scolaire donnée, les ETM de référence sont aménagés en des ETM idoines par les professeurs pour permettre la mise en place effective dans les classes où chaque élève travaille dans son ETM personnel.

L'étude de la validation dans le domaine des probabilités, nous conduit à analyser la manière dont ces validations sont construites. Il s'agit pour nous d'examiner le travail de validation lors de la résolution de tâches probabilistes du point de vue des différents plans et différentes genèses de l'ETM. Il s'agit également d'identifier le discours de la validation produit à l'issue de ce travail. Cela nous permet par la suite de caractériser les formes de validation pratiquées par les enseignants dans l'enseignement des probabilités.

1.2 Tâches mathématiques et ETM

Dans ses travaux sur les tâches de problématisation, Sierpinska (2004) procède à une revue exhaustive de la littérature autour de la notion de tâche mathématique dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques. Sierpinska retient alors la définition suivante de la tâche mathématique :

> J’utilise l’expression *tâche mathématique* dans un sens large pour se référer à n’importe quel type de problèmes mathématiques, dont les hypothèses et les questions sont clairement formulées, et dont on sait que les élèves peuvent les résoudre dans un temps que l’on peut prévoir.[1] (Sierpinska, 2004, p. 10)

En adaptant la définition de Sierpinska au modèle des ETM, la tâche mathématique est pour nous tout exercice, question ou problème réalisé dans un temps limité et dans un contexte donné. Les conditions de réalisation de ce travail mathématique sont définies par l’Espace de Travail Mathématique dans lequel la tâche est proposée.

Niveau d’exigence d’une tâche

L’étude du travail de validation produit lors de l’exécution des tâches probabilistes nécessite d’analyser ces tâches mises en œuvre dans les ETM idoines. L’analyse d’une tâche à travers les ETM a été conduite selon deux points de vue :

- D’un point de vue épistémologique, l’analyse prend en compte les outils *sémiotique, technologique et théorique* du plan épistémologique (Kuzniak, Nechache & Drouhard, 2016) pour résoudre la tâche. Ces outils sont associés respectivement à la genèse sémiotique, instrumentale et discursive. Nous avons également utilisé, pour cette analyse, la notion de praxéologie (Bosch & Chevallard, 1999) pour déterminer les différentes techniques utilisées dans la résolution de la tâche et les technologies de référence justifiant ces techniques.
- D’un point de vue cognitif, l’analyse de la tâche permet de rendre compte de la manière dont le sujet utilise les outils (sémiotiques, technologiques, théoriques) pour résoudre la tâche. Cette analyse s’appuie sur l’identification des *demandes cognitives* (Stein & Smith, 1998) nécessaires pour effectuer la tâche et des différentes *adaptations des connaissances* (Robert, 2007) que le sujet doit réaliser.

Cette analyse de la tâche prend donc en compte les exigences épistémologiques liées à la conception de la tâche et les exigences cognitives liées à sa réalisation. L’analyse d’une tâche dans les ETM est donc associée à deux aspects qui définissent le niveau d’exigence d’une tâche (Nechache, 2017).

Catégorisation des tâches et du travailleur sujet

L’analyse du travail de validation lors de la résolution de tâches via les ETM nous a conduite à catégoriser les tâches en fonction de leur niveau d’exigence. A partir des travaux de Stein et Smith (1998), White et Mesa (2014) et Robert (2007), nous avons construit trois catégories de tâches : simples, standards et riches. Un sujet qui est confiné constamment dans l’une des trois catégories de tâches mathématiques acquiert une identité de travailleur mathématicien. Le travail mathématique de ces catégories de tâches au sein de l’ETM entraîne différentes formes du travail du sujet. Ces formes dépendent fortement de la catégorie des tâches. Ainsi à chacune des trois catégories de tâches, nous associons respectivement une catégorie de travailleur-sujet : tâcheron, technicien et ingénieur.

Tâches simples

La résolution de ces tâches nécessite l’usage de procédures « simples » qui font appel aux connaissances déjà mémorisées et aux techniques de résolution connues. Ces connaissances et ces techniques sont indiquées dans l’énoncé de la tâche et font partie de l’ETM idoine et de l’ETM personnel du sujet. Ce sont des tâches à faible niveau d’exigence. Un travailleur-sujet exerçant ces tâches est qualifié de travailleur « tâcheron ».

---

[1] Notre traduction

Tâches standards
La résolution de ces tâches nécessite d'identifier et d'appliquer des connaissances ou des techniques utiles. Ces connaissances et ces techniques ne sont pas indiquées dans l'énoncé de la tâche mais elles font parties de l'ETM idoine et l'ETM personnel du sujet. Ces tâches nécessitent éventuellement d'enchaîner et de mettre en lien plusieurs procédures. Ce sont des tâches à un niveau d'exigence moyen. Un travailleur-sujet exerçant ces tâches est qualifié de travailleur « technicien ».
Tâches riches
La résolution de ces tâches fait appel à des connaissances et à des techniques de résolution qui ne sont pas nécessairement apprises et qui ne sont disponibles ni dans l'ETM idoine, ni dans l'ETM personnel du sujet. La résolution de ces tâches peut recourir au changement de domaines mathématiques (Montoya & Vivier, 2014), de registres de représentation sémiotique (Duval, 1995) et à la modélisation. Ces changements sont à la charge du sujet. Un travailleur-sujet exerçant ces tâches est qualifié de travailleur « ingénieur ».
Cette double catégorisation constitue un outil méthodologique pour étudier et identifier le travail mathématique produit lors de la mise en œuvre des tâches dans les ETM idoines.

1.3 Questions de recherche

Nous avons choisi d'utiliser le modèle des ETM pour étudier le travail de validation et les formes de validation pratiquées et institutionnalisées par les professeurs dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^{e} et de 2de. Les questions principales qui ont guidé notre travail de thèse sont les suivantes :

1) Jusqu'à présent dans l'enseignement des mathématiques en France, la démonstration est une forme de validation privilégiée, en particulier dans le domaine de la géométrie, dont l'apprentissage débute au collège. Existe-t-il alors des différences entre les formes de validation dans l'enseignement de la géométrie et dans l'enseignement des probabilités en classes de 3^{e} et de 2de ?
2) Notre travail de recherche vise à caractériser les formes de validation pratiquées dans le domaine des probabilités dans les classes de 3^{e} et de 2de. Quelles sont les formes de validation privilégiées dans la résolution de tâches dans le domaine des probabilités en classe de 3^{e} et en classe de 2de ? Ces formes de validation sont-elles propres à ces deux niveaux de classe ou sont-elles caractéristiques de l'enseignement du domaine des probabilités au niveau secondaire ?
3) Le choix de la validation et l'orientation du discours de validation lors des séances de résolution de tâches probabilistes paraissent dépendre de l'enseignant, en particulier de ses représentations et de ses conceptions sur la forme de la validation et sa place dans le domaine des probabilités. Quels sont les points de vue de l'enseignant sur la forme de la validation dans l'enseignement des probabilités ?

2. ÉLEMENTS METHODOLOGIQUES

Pour répondre aux questions de recherche, nous avons mené trois enquêtes. Dans la première enquête, nous avons cherché à répondre à la première question. Pour ce faire, une étude comparative des formes de validation et du travail de validation mis en œuvre dans le domaine de la géométrie et des probabilités a été conduite. Cette comparaison a été effectuée tout d'abord à travers l'analyse des programmes officiels et des documents ressources des deux niveaux de classe 3e et 2de. Par la suite, nous avons procédé à une série d'observations de séances d'enseignement dans deux classes de 3e et deux classes de 2de. Ces observations sont centrées sur les phases de correction d'exercices où il est question d'exposer les validations. Nous avons observé au total 21 séances. Ces dernières ont été filmées et transcrites intégralement.

Dans la deuxième enquête dont l'objectif est de répondre à la deuxième question, quatre tâches probabilistes extraites des documents ressources de différents niveaux de classe (3e, 2de, 1re S, T S)[2] ont été sélectionnées. Ces tâches ont été choisies en fonction de leur niveau d'exigence. Elles ont été proposées à 5 enseignants ayant plus de 10 ans d'expérience, exerçant dans différents établissements et dans différents niveaux de classe. La mise en œuvre de ces tâches en classe a été laissée à l'initiative de chacun de ces enseignants. Les séances observées (soit 9 séances au total) ont été filmées et transcrites intégralement.

Pour répondre à la dernière question, nous avons mené une enquête sous forme d'un entretien (enregistré à l'aide d'un dictaphone) avec chacun des cinq enseignants ayant participé à notre étude. Les questions que nous avons posées sont semi-ouvertes afin d'obtenir davantage d'éléments de réponse. Ces entretiens ont duré 45 minutes et ont été retranscrits intégralement.

Dans la suite, nous avons choisi de présenter une des quatre tâches que nous avons proposées dans la deuxième enquête aux enseignants ayant participé à notre étude. Cela nous permettra d'illustrer la manière dont nous avons conduit l'analyse du travail de validation du point de vue des ETM. Cela nous permettra également de présenter les principaux résultats de notre recherche.

Exemple d'analyse d'une tâche et de sa mise en œuvre

Dans ce paragraphe, nous proposons à partir d'un exemple d'une tâche probabiliste proposée aux enseignants d'illustrer la manière dont nous avons mené l'analyse des tâches et de leurs mises en œuvre dans les classes. La tâche choisie intitulée « segment et son milieu » est extraite des documents ressources de la classe de 3e (RESCOL-PROB, 2008) :

> Sur un segment *S*, on prend au hasard deux points *A* et *B*. On considère l'événement « la longueur du segment [*AB*] est strictement supérieure à la moitié de celle du segment *S* ». Quelle est la probabilité de cet événement ?

L'analyse de la tâche a été conduite dans l'ETM idoine potentiel[3] pour décrire le travail de validation produit *a priori* à l'issue de l'exécution de la tâche et identifier le rôle *a priori* des élèves. Ensuite, nous avons analysé la mise en place de cette tâche dans un ETM idoine effectif[4] afin d'étudier le travail de validation réellement produit. L'analyse détaillée de cette tâche dans l'ETM idoine potentiel et effectif est décrite dans notre travail de thèse (Nechache, 2016).

Analyse de la tâche dans l'ETM idoine potentiel

L'expérience aléatoire décrite dans cette tâche consiste à choisir au hasard deux points *A* et *B* sur un segment noté *S* de longueur donnée. Le choix d'un point sur un segment suit donc une

[2] Soit les quatre dernières années de l'enseignement secondaire, filière scientifique pour les deux dernières.

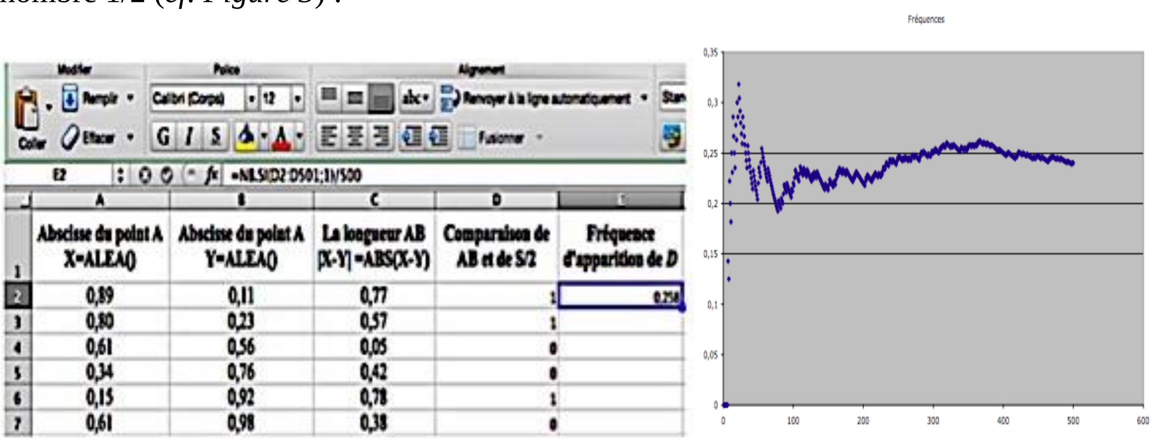
[3] L'ETM *idoine potentiel* est celui qui est construit au préalable pour être mis en place dans les classes.

[4] Les ETM *idoines effectifs* sont les ETM *idoines* potentiels effectivement mis en place dans les classes par les professeurs

loi uniforme sur *S*. Il y a indépendance entre les deux événements respectivement « choisir le premier point » et « choisir le second point ». Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement *D* : « la longueur du segment [*AB*] est strictement supérieure à la moitié de celle du segment *S* ».
Dans le document ressource de la classe de 3[e] (RESCOL-PROB, 2008), deux méthodes ont été suggérées. Nous présentons ci-dessous ces méthodes que nous avons détaillées.

Méthode 1 : Simulation à l'aide d'un tableur

Pour déterminer la probabilité de l'événement *D*, les auteurs du document ressource de la classe de 3[e] (Ibid., 2008) proposent d'abord d'effectuer une simulation de l'expérience aléatoire et de déterminer la fréquence de *D* (phase 1), puis d'estimer la valeur de la probabilité à partir de cette fréquence (phase 2).
Phase 1 : Simulation et détermination de la fréquence de *D*
On considère par exemple que la longueur du segment *S* est égale à 1. L'information « choisir deux points au hasard sur le segment *S* » est interprétée comme le choix de deux nombres réels appartenant à l'intervalle [0 ; 1]. Ces deux nombres réels sont respectivement les abscisses (notées *X* et *Y*) respectifs des points *A* et *B*. L'univers de l'expérience aléatoire est alors $[0; 1] \times [0; 1]$. La résolution de la tâche revient alors à résoudre l'inéquation $|X-Y| > 1/2$.
Dans une feuille de calcul et à l'aide de la fonction ALEA(), les nombres réels *X* et *Y* sont écrits de la manière suivante : *X* = ALEA() et *Y* = ALEA().
De même, la longueur *AB* qui est égale à la distance entre *X* et *Y* est écrite dans la feuille de calcul sous la forme suivante : *AB* = ABS(*X*-*Y*). La longueur *AB* est par la suite comparée au nombre 1/2 (*cf. Figure 3*) :



	A	B	C	D	E
1	Abscisse du point A X=ALEA()	Abscisse du point A Y=ALEA()	La longueur AB |X-Y| =ABS(X-Y)	Comparaison de AB et de S/2	Fréquence d'apparition de *D*
2	0,89	0,11	0,77	1	0,258
3	0,80	0,23	0,57	1	
4	0,61	0,56	0,05	0	
5	0,34	0,76	0,42	0	
6	0,15	0,92	0,78	1	
7	0,61	0,98	0,38	0	

Figure 3

On décide par exemple de simuler 500 fois l'expérience, les fréquences de l'apparition de l'événement *D* sont données par la feuille de calcul. À partir d'un certain rang, on constate que les fréquences de l'événement *D* ont tendance à se stabiliser autour du nombre 0,25. Les auteurs du document ressource proposent également d'utiliser les ressources graphiques (*cf. Figure 3*) du tableur afin de visualiser l'évolution des fréquences au fur et à mesure de l'augmentation du nombre d'expériences.
Phase 2 : Estimation de la valeur de la probabilité de D
Selon la loi des grands nombres, la valeur de la fréquence de l'événement *D* se rapproche de la probabilité de l'événement *D*. Donc 0,25 est une valeur (arbitraire) possible estimée de la probabilité de l'événement *D*.
Dans cette première méthode, le travail de validation débute par une exploration visuelle sur le segment *S* (dimension sémiotique) liée à l'usage d'un outil technologique de la dimension instrumentale, ici un tableur, pour obtenir des nombres réels compris entre 0 et 1 avec la

fonction ALEA(), pour calculer la distance entre deux nombres réels (ici |*X*-*Y*|) à l'aide la fonction ABS (), et pour déterminer la fréquence de l'événement *D*. De ce fait, le travail de validation commence dans le plan [Sem-Ins]. Par la suite, à partir des résultats donnés par le tableur (dimension instrumentale) dans la première phase, et en utilisant la loi des grands nombres, outil théorique de la dimension discursive, une valeur de la probabilité de l'événement *D* est estimée et justifiée. Ainsi le travail de validation se termine dans le plan [Ins-Dis]. Dans cette méthode, les auteurs du document ressource de la classe de 3^{e} ne proposent aucun discours de la validation.
Dans cette méthode, le travail de validation est basé sur des outils technologiques complexes tels que la feuille de calcul et les fonctions du tableur. La dimension instrumentale est alors privilégiée dans le travail de validation.

Méthode 2 : Utilisation d'un support géométrique (carré de dimension 1)

De la même manière que dans méthode précédente, on considère que la longueur du segment *S* est égale à 1. Dans cette deuxième méthode, le travail de validation est basé sur l'étude de la distance |*X* - *Y*| entre deux variables aléatoires continues *X* et *Y* qui suivent la loi uniforme sur [0 ; 1] (outils théoriques de la dimension discursive).

La longueur *S* étant prise comme unité, on choisit au hasard un point de coordonnées (*X* ; *Y*) dans le carré de côté 1 (*cf. Figure 4*). Le carré $[0\,;1]\times[0\,;1]$ devient alors le support géométrique de la validation (outil de la dimension sémiotique). De ce fait, la détermination de la probabilité de l'événement *D* revient à trouver tous les couples tel que |*X*-*Y*| > 1/2. L'inéquation |*X*-*Y*| > 1/2 est alors résolue graphiquement (*cf. Figure 5*) sur le carré $[0\,;1]\times[0\,;1]$ en considérant deux cas :

- Si $X > Y$ alors $Y < X - 1/2$
- Si $X < Y$ alors $Y > X + 1/2$

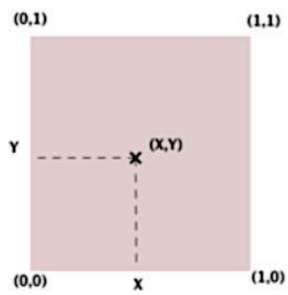


Figure 4

Ces deux inéquations sont résolues graphiquement, en traçant les deux droites (d1) et (d2) d'équations respectives *Y*= *X*- 1/2 et *Y*= *X*+ 1/2. L'ensemble des points (*X* ; *Y*) solutions est composé des deux triangles rectangles bleus (*cf. Figure 5*).
La probabilité de l'événement *D* est obtenue par un calcul simple de la somme des aires des deux triangles bleus divisée par l'aire du carré :
p(*D*) = $\frac{2\times Aire(bleu)}{Aire\ carré} = \frac{1}{4}$

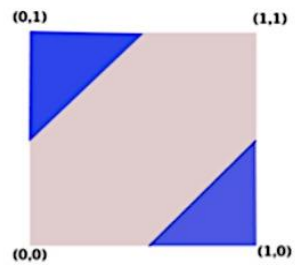


Figure 5

Dans cette méthode, le travail de validation est basé sur le carré de dimension 1 en tant qu'outil sémiotique (dimension sémiotique). Le traitement de la tâche dans cette méthode nécessite l'usage des outils théoriques (dimension discursive) tels que la résolution graphique d'inéquations et le calcul de la probabilité dans le cas continu qui n'est pas un objet d'enseignement en classe de 3^{e}. Ce travail de validation est placé principalement dans le plan [Sem-Dis].
Le niveau d'exigence de cette tâche est ici élevé. Dans ce cas, cette tâche est considérée comme une tâche riche et le rôle *a priori* de l'élève est celui d'un ingénieur.

Exemple de mise en œuvre dans une classe 3^{e}

Dans ce paragraphe, nous présentons une analyse de la mise en œuvre de la tâche présentée précédemment dans une classe de 3e. Nous précisons que le scénario de la mise en œuvre de cette tâche a été entièrement conçu et mis en place par le professeur responsable de cette classe. En effet, notre objectif est d'analyser le travail de validation produit à l'issue de la résolution de cette tâche et d'identifier la forme de validation pratiquée par ce professeur.
Le travail de validation proposé par le professeur est élaboré en trois phases : exploration de l'expérience aléatoire, simulation de l'expérience aléatoire et estimation de la probabilité, et justification de la probabilité estimée.

Phase 1 : Exploration de l'expérience aléatoire

Dans cette phase, les élèves de la classe ont construit un segment *S* (à l'aide d'une règle graduée) d'une longueur choisie arbitrairement (ici la longueur est de 6 *cm*). Puis, ils ont choisi (en fermant les yeux) deux points *A* et *B* sur le segment S (autrement dit selon la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 6]). Ils ont alors mesuré à l'aide d'une règle graduée la longueur *AB*. Enfin, ils ont comparé la mesure *AB* obtenue à la moitié de celle de *S*, soit 3 *cm*.

Le professeur relève au tableau chacun des résultats obtenus (*cf. Figure 6*) par les élèves afin de les discuter. À travers les questions du professeur, les élèves ont conclu que la procédure qu'ils utilisaient ne leur permettait pas d'estimer convenablement la probabilité de l'événement *D* en raison de l'insuffisance de la taille de l'échantillon. Le professeur ajoute que le choix au hasard de deux points sur le segment S avec « les yeux fermés » n'est pas évident. Un élève intervient en proposant d'effectuer une simulation de l'expérience aléatoire, ce que le professeur approuve.

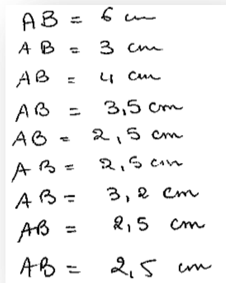


Figure 6

Phase 2. Simulation de l'expérience aléatoire et estimation de la probabilité

Le professeur propose aux élèves d'assimiler le choix au hasard de deux points sur un segment d'une longueur donnée à un lancer de deux dés. Il ajoute que la simulation du lancer des dés doit se faire réellement à l'aide de deux dés.
Le passage de l'expérience initiale vers l'expérience aléatoire à simuler induit un changement de domaine en passant du domaine de la géométrie plane vers celui des probabilités. Ce passage induit également un changement de l'univers de l'expérience en passant de $S \times S$ à $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Précisons que ce changement de domaine et d'univers est pris intégralement en charge par le professeur. Nous résumons dans le tableau ci-dessous le passage de l'expérience initiale à l'expérience simulée effectué par le professeur :

Expérience initiale	Expérience simulée
S un segment d'une longueur donnée *L*	*S* un segment de longueur 5 cm et gradué de 1 à 6
On prend au hasard deux points *A* et *B* sur le segment *S*	On lance deux dés et on s'intéresse au résultat affiché sur chacune des faces supérieures. Le premier dé donne l'abscisse du point *A* (notée x_A) et le deuxième dé donne l'abscisse du point *B* (notée x_B)
On mesure la longueur *AB*	On calcule la valeur absolue de la différence entre x_A et x_B avec 2,5

La longueur *AB* est strictement supérieure à la moitié de *S* soit 1/2	On compare la valeur absolue de la différence entre x_A et x_B avec 2,5
Les issues réalisant l'événement *D* sont dans l'intervalle]*L*/2 ;*L*]	Les issues réalisant l'événement *D* appartiennent à l'ensemble {3, 4, 5}. Ces valeurs correspondent aux différentes longueurs possibles de *AB* lorsque la longueur du segment *S* vaut 5 cm.

Tableau 1. Traduction de l'expérience aléatoire en une expérience simulée

L'expérience initiale est simulée réellement « à la main » 50 fois par chacun des dix groupes (constitués de deux élèves) de la classe. Ces derniers ont eu pour consigne de noter les résultats de chacun des 50 lancers, mais aussi le résultat de la différence des valeurs des faces supérieures dans un tableau. Les élèves ont dénombré toutes les issues réalisant l'événement *D* sur les 50 lancers et ont calculé « à la main » la fréquence d'apparition de l'événement *D*. L'observation des dix résultats permet d'affirmer que les fréquences fluctuent autour de 30%. Le professeur propose ensuite de regrouper les résultats obtenus dans un tableur et de calculer la fréquence de l'événement *D* sur un échantillon de taille 500. Cela a permis de constater la stabilisation des fréquences et d'estimer la valeur de la probabilité de *D*, égale à environ 0,3.
Phase 3 : Justification de la probabilité estimée
Le professeur insiste sur le fait que les résultats obtenus par la simulation permettent seulement de conjecturer la valeur de la probabilité et de ce fait, qu'il est nécessaire de démontrer ce résultat estimé. Pour ce faire, il leur suggère de construire (et de remplir) un tableau à double entrée tel que :

- la première ligne corresponde au lancer du premier dé,
- la première colonne corresponde au lancer du deuxième dé,
- chacune des 36 cases du tableau corresponde à la différence en valeur absolue des valeurs affichées sur les faces supérieures des deux dés.

1er dé / 2e dé	1	2	3	4	5	6
1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
3	**2**	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**
4	**3**	**2**	**1**	**0**	**1**	**2**
5	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**1**
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**

Tableau 2. Résultats des lancers de deux dés

En entourant le nombre de cas favorables (tous les nombres supérieurs à 2,5) et en utilisant la formule de Laplace, les élèves déduisent que la probabilité de l'événement *D* est égale à 1/3. Cette valeur est approuvée par le professeur car elle est relativement proche de la valeur estimée dans la phase 2 (30%). Or, la probabilité obtenue ici est différente de celle qui obtenue dans l'ETM idoine potentiel (égale à 1/4). Cela s'explique par le fait que le professeur a changé l'univers de l'expérience aléatoire en considérant l'univers {1, 2, 3, 4, 5, 6} × {1, 2, 3, 4, 5, 6} au lieu de *S* × *S*. Cela implique un calcul de probabilité sur un ensemble fini et discret au lieu d'un ensemble infini et continu. Les deux expériences aléatoires (initiale et simulée) n'ont donc pas le même univers.
Le travail de validation mis en œuvre par le professeur pour résoudre la tâche est réalisé en trois phases. Ce travail de validation débute (phase 1) par une exploration visuelle sur le segment *S* (dimension sémiotique) liée à l'usage de la règle graduée (outil technologique de la

dimension instrumentale) pour construire le segment et mesurer sa longueur. Le travail de validation commence dans le plan [Sem-Ins].
Dans la deuxième phase, les élèves ont simulé « à la main » l'expérience aléatoire proposée par le professeur. Les résultats obtenus par les élèves sont relevés dans une feuille de calcul du tableur (outil technologique de la dimension instrumentale) afin de calculer la fréquence d'apparition de l'événement D sur un échantillon de taille plus grande. À partir de la fréquence observée, une valeur de la probabilité de l'événement D est estimée et justifiée selon la loi des grands nombres (outil théorique de la dimension discursive). Le travail de validation est placé dans le plan [Ins-Dis]. Dans la troisième phase, le professeur propose une justification de la probabilité estimée. Cette justification est basée sur le tableau à double entrée (outil sémiotique) pour dénombrer les cas favorables et sur la formule de Laplace (outil théorique) pour calculer la probabilité de D. Ainsi, le travail de validation se termine dans le plan [Sem-Dis]. Dans l'ensemble, le travail de validation mis en œuvre par le professeur favorise l'articulation entre les différentes genèses de l'ETM idoine impliquant une circulation du travail de validation dans les différents plans verticaux de l'ETM idoine. Il en résulte que le travail de validation produit est complet (Kuzniak & Nechache, 2014).
Par ailleurs, le discours de la validation institutionnalisé par l'enseignant à l'issue du travail de validation (*cf. Figure 6*) est constitué d'un tableau à double entrée (outil sémiotique) présenté dans la phase 3 et de l'égalité « $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ » représentant la probabilité de l'événement D. Dans ce cas, les outils de la dimension sémiotique sont utilisés pour justifier les résultats obtenus dans la phase 2.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

Figure 6. Le discours de la validation

Tel qu'il est produit, le travail de validation semble être pris en charge par le professeur. La construction de la simulation (dans la phase 2) et la justification de la probabilité (dans la phase 3) sont suggérées directement par le professeur. Les élèves ont, pour leur part, eu à leur charge la simulation réelle de l'expérience et le calcul de la probabilité (avec la formule de Laplace). Le professeur a non seulement changé la tâche qui est *a priori* riche en une tâche quasi simple, mais il a également modifié le rôle des élèves en les assignant à la fonction de tâcheron au lieu d'ingénieur comme nous l'avions prévu.
Les résultats issus de cette analyse de tâche et de sa mise en œuvre en classe de 3^{e}, nous ont permis de constater que dans le cadre de la résolution de tâches riches au niveau de la classe de 3^{e}, où les outils théoriques nécessaires à cette résolution ne font pas partie du référentiel théorique de l'ETM idoine et personnel de l'élève, les outils sémiotiques sont privilégiés pour construire la validation. Ces outils constituent également le discours de la validation. En revanche, cela n'est pas le cas, lorsque l'on propose la résolution d'une tâche riche pour une classe de Terminale S. En effet, notre analyse de mise en œuvre de tâche riche en classe de 3^{e} met en évidence, que la validation construite est fondée principalement sur les outils théoriques (dimension discursive). Ainsi, dans le cas d'une résolution d'une tâche riche, le travail et les formes de validation sont différents selon le niveau de classe dans la tâche est proposée.

4. PRINCIPAUX RESULTATS

Dans le paragraphe précédent, à travers un exemple nous avons présenté quelques-uns des résultats obtenus (dans la deuxième enquête) dans notre thèse. Précisons que ce choix d'exemple de tâche est justifié par le fait que cette tâche, que l'on qualifie de riche, rend compte des enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités au niveau du secondaire. En particulier, cette tâche rend compte de la complexité de la validation dans le cas où les outils nécessaires pour l'élaborer ne sont pas des éléments du programme du niveau de classe dans lequel elle est proposée.
L'analyse des résultats des trois enquêtes menées dans la thèse met en évidence qu'il existe différentes formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire qui dépendent du référentiel théorique et du niveau de la classe, de la catégorie de la tâche, de la place accordée à la dimension sémiotique et instrumentale par l'enseignant dans l'élaboration de la validation.

4.1 Le référentiel théorique et le niveau de la classe

Au début de l'enseignement et l'apprentissage des probabilités (en classes de 3^{e} et de 2de), le référentiel théorique est en cours de cours de construction. De ce fait, il ne peut pas assurer sa mission de fournir les outils théoriques pour bâtir des discours de validation fondés sur des théorèmes ou des propriétés au même titre qu'en géométrie. Mais, à partir de la classe de 1re S, le référentiel évolue et permet de produire des discours de validation basés sur des outils théoriques.

4.2 La catégorie de la tâche (simple, standard, riche)

Lorsqu'il s'agit de résoudre des tâches standards (ou simples), les outils de la dimension sémiotique tels que les arbres ou les tableaux sont utilisés. Les formes de validation mobilisent alors des raisonnements de type diagrammatique (Nechache, 2016). En revanche, lorsqu'il s'agit de résoudre des tâches riches, les outils de la dimension instrumentale, en particulier dans le cas des simulations, sont utilisés dans le travail de validation. Les formes de validation mobilisent alors des raisonnements assistés par des simulations. Il en résulte des formes de validation distinctes.

4.3 La place accordée à la dimension sémiotique et à la dimension instrumentale par l'enseignant dans l'élaboration de la validation

En classes de 3^{e} et de 2de, les enseignants s'appuient essentiellement sur les outils de la dimension sémiotique pour mettre en œuvre le travail de validation. Les enseignants utilisent également ces outils (les arbres et les tableaux) dans le discours écrit de la validation. Mais à partir de la classe de 1re S, le référentiel théorique évolue en termes de propriétés. De ce fait, les formes de validation produites prennent appui sur les outils du référentiel théorique. Lorsqu'il s'agit d'utiliser la simulation, les enseignants font appel aux outils de la dimension instrumentale. Ces outils sont très souvent utilisés pour vérifier, contrôler ou découvrir un résultat et non pas pour le justifier. Pour justifier les résultats obtenus par la simulation, ces enseignants proposent d'utiliser soit les intervalles de confiance, soit la loi des grands nombres. D'autres enseignants proposent d'utiliser un arbre ou un tableau.

5. BILAN ET PERSPECTIVES

Nous avons identifié plusieurs formes de validation privilégiées dans l'enseignement qui sont caractérisées par leur dépendance à la catégorie de la tâche (simple, standard ou riche), au niveau de la classe considérée et à certains choix du professeur. Une étude complémentaire serait d'observer si ces formes de validation sont également présentes dans d'autres niveaux de classes et s'il existe d'autres formes de validation que nous n'avons pas identifiées dans ce travail de thèse.

Pour les besoins de cette recherche, nous avons développé dans le cadre des ETM un nouvel outil méthodologique qui est la catégorisation des tâches (simple, standard, riche) et du travailleur sujet (tâcheron, technicien, ingénieur). Cette catégorisation s'est révélée intéressante pour analyser le travail de validation et a permis de caractériser des formes de validation pratiquées dans l'enseignement des probabilités, mais aussi d'identifier le rôle (la responsabilité) des élèves dans le travail. Cet outil méthodologique de la catégorisation des tâches et du travailleur-élève a été adapté par la suite pour analyser dans le cadre des ETM le travail mathématique mis en œuvre dans la résolution des tâches probabilistes (Nechache, 2017) et nous a permis d'identifier et de caractériser des transformations par les professeurs dans la nature des tâches probabilistes ayant pour conséquence d'abaisser le niveau d'exigence. Cela nous amène à questionner l'origine de ces transformations et la manière de conserver le niveau d'exigence des tâches lorsqu'elles sont proposées dans les classes.

Nous avons identifié une diversité de tâches probabilistes qui sont potentiellement porteuses d'un travail mathématique complet (Kuzniak & Nechache, 2016). L'analyse de ces tâches via l'ETM nous a permis d'identifier des difficultés d'enseignement voire des blocages lors de la mise en œuvre de certaines d'entre elles dans les classes. Il s'agit alors de comprendre comment et pourquoi ces blocages surviennent. Un travail de recherche portant sur cette question à partir de l'étude plus fine des ETM personnels des enseignants (en formation initiale) et des ETM idoines conçus par ces enseignants) autour de tâches emblématiques est en cours de réalisation.

Les tâches que nous avons identifiées comme étant potentiellement riches peuvent être un levier pour questionner le travail mathématique autour de l'enseignement des probabilités en mettant notamment l'accent sur le rôle de l'analyse *a priori* des tâches. La dialectique entre ces analyses *a priori* et les mises en œuvre effectives de ces tâches dans les classes permet de créer une dynamique de formation basée sur les trajectoires de problèmes (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2013). Ce type de formation a fait objet d'un travail de recherche portant sur la notion de tâche emblématique dans le domaine des probabilités (Kuzniak & Nechache, 2016). Par ailleurs, on peut utiliser l'outil de la catégorisation des tâches et du travailleur-sujet dans le cadre de la formation des enseignant pour analyser des séances d'enseignement. Cela peut permettre aux enseignants de prendre conscience des formes de travailleur-sujet qu'ils développent chez leurs élèves.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18(2)*, 147–176.

BOSCH, M. & CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité scientifique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(1),* 77–125.

DUVAL, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x, 31,* 37–61.

DUVAL, R., & EGRET, M. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères-Irem, 12,* 114–140.

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Bern : Peter Lang.

KUZNIAK, A., NECHACHE, A. & DROUHARD, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education, 48(6),* 861–874.

KUZNIAK, A. & NECHACHE, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines : existence et usages. *Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématique,* Florina, Grèce, juillet 2016.

KUZNIAK, A. & NECHACHE, A. (2014). Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. In *Actes du 41e colloque COPIRELEM*, Mont de Marsan.

KUZNIAK, A., PARZYSZ, B. & VIVIER, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training. *The Mathematics Enthusiast, 10,* 407– 440.

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9–24.

MONTOYA-DELGADILLO, E., & VIVIER, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des espaces de travail mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19,* 73–101.

NECHACHE, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22,* 67–90.

NECHACHE, A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot, Paris. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01345747.

PEDEMONTE, B. (2002). Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble 1, Grenoble.

RESCOL-PROB. (2008). Ressources pour les classes de collège - Probabilités. Repéré à http://eduscol.education.fr

ROBERT, A. (2003). Tâches mathématiques et activités des élèves une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe de collège. *Petit x, 62,* 61–71.

ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 27(3),* 271–311.

SIERPINSKA, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: task problematization. *International Journal of Mathematics Education, 24(2),* 7–15.

STEIN, MK. & SMITH, MS. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4),* 268–275.

WHITE, N. & MESA, V. (2014). Describing cognitive orientation of Calculs I tasks across different types of coursework. *ZDM Mathematics Education, 46(4),* 675–690.