Pré-Actes du séminaire de didactique des mathématiques (version provisoire - prépublication)

2-3 février 2018

Édités par

Julia Pilet & Céline Vendeira

PRESENTATION

Le séminaire de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration d'une communauté de chercheur-e-s.

Sous réserve de l'accord des intervenant-e-s, les présentations sont filmées et diffusées en ligne. Le travail de capture, de montage et d'hébergement des vidéos est assuré habituellement par l'IREM de Paris.

Au fur et à mesure de la finalisation des textes, ceux-ci sont mis à disposition sur le site de l'ARDM. Ils sont ensuite regroupés en un volume. Actuellement, seuls les textes du premier séminaire de 2018 sont mis en ligne.

Depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de poster durant les sessions du séminaire. Ces présentations affichées donnent lieu à des textes courts que vous retrouverez également dans ce volume de pré-actes.

En attendant la parution des textes du séminaire de mars 2018 et de ceux du prochain séminaire de novembre 2018, nous vous souhaitons une bonne lecture.

SOMMAIRE

Séminaire des 2 et 3 février 2018

T4TEL UN CADRE DE REFERENCE DIDACTIQUE POUR LA CONCEPTION DES EIAH

Hamid **CHAACHOUA**

Université Grenoble Alpes LIG

Hamid.Chaachoua@imag.fr

Résumé

Les recherches menées au sein de mon équipe s'inscrivent dans le domaine des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH) où la modélisation des connaissances et des savoirs est une question centrale. En effet, elle est à la base des différents services proposés par les EIAH comme l'indexation et la gestion des ressources, la conception des scénarios d'apprentissage ou la production de diagnostics et de rétroactions vers l'élève ou vers l'enseignant.

C'est dans ce contexte et afin de disposer d'un modèle didactique pouvant être implémenté que nous avons développé le cadre de référence T4TEL.

Le cadre T4TEL s'inscrit dans la Théorie Anthropologique du Didactique et plus spécifiquement dans l'approche praxéologique : ce cadre représente une formalisation et une extension du modèle praxéologique. Deux extensions sont présentées : l'introduction de la notion de praxéologie personnelle et de la notion de variable.

Mots clés

Praxéologies, praxéologie personnelle, variables, générateur de types de tâches, T4TEL, EIAH

I. INTRODUCTION

Les recherches menées au sein de mon équipe MeTAH[1] s'inscrivent dans le domaine des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH). C'est une équipe interdisciplinaire regroupant des chercheurs en didactique des mathématiques et des sciences et des chercheurs en informatique autour des problématiques sur la conception et l'usage des EIAH. Ce qui est central dans ces problématiques est la modélisation des connaissances et des savoirs et leurs représentations informatiques. En effet, elle est à la base des différents services proposés par les EIAH comme l'indexation et la gestion des ressources, la conception des scénarios d'apprentissage ou la production de diagnostics et de rétroactions vers l'élève ou vers l'enseignant. Dans ces problématiques nous avons voulu prendre en compte la relativité institutionnelle des savoirs aussi bien dans la modélisation des savoirs que dans les services EIAH. En effet, un savoir n'existe pas "in vacuo" dans un vide social : tout savoir apparaît, à

[1] Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain.

un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions. (Chevallard, 1989).

C'est dans ce contexte que nous avons éprouvé un besoin de disposer d'un modèle didactique pouvant être implémenté, permettant de produire différents services EIAH et prenant en compte les conditions et contraintes institutionnelles.

Plusieurs raisons nous ont motivé à se placer dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1999) :

- La relativité institutionnelle des savoirs. Elle est une des sensibilités clés de la TAD au sens d'Artigue (2011).
- Le modèle praxéologique permet de décrire l'organisation du savoir au sein d'une institution, les activités des sujets attendues par l'institution. Notre travail a consisté à intégrer dans cette approche les comportements non attendus par l'institution, en particulier les erreurs des élèves par l'introduction de la praxéologie personnelle (Chaachoua, 2010 ; Croset et Chaachoua, 2016).
- Le modèle praxéologique peut être formalisé pour une implémentation informatique et donc en une modélisation informatique des connaissances (Chaachoua, 2010).

Ces éléments sont donc à l'origine du développement du cadre de référence T4TEL[2] (Chaachoua et al. 2013, Chaachoua 2010). Soulignons tout d'abord que si ce cadre a été motivé par des besoins liés à des problématiques EIAH, il trouve aussi son intérêt et sa pertinence dans des recherches en didactique hors champ des EIAH.

Le cadre T4TEL s'inscrit complétement dans la TAD et plus spécifiquement dans l'approche praxéologique (Bosch et Chevallard, 1999). Il propose une formalisation du modèle praxéologique et deux extensions du modèle : l'introduction de la notion de praxéologie personnelle (Croset, Chaachoua, 2016) et de la notion de variable (Chaachoua, Bessot, 2018). Dans le prochain paragraphe, nous présentons les fondements de T4TEL. Ensuite, nous présenterons ses développements et sa mise en œuvre dans la conception des EIAH.

II. FONDEMENTS DE T4TEL

Nous partons du postulat de la TAD selon lequel toute activité humaine peut être modélisée par un quadruplet praxéologique [T, τ , θ, Θ] appelé aussi une organisation mathématique ponctuelle. Le type de tâches T regroupe les tâches pouvant être accomplies par une même technique τ, justifiée par une technologie θ, elle-même légitimée par une certaine théorie Θ. Pour rendre ce modèle calculable il nécessaire de disposer d'une description formelle des éléments d'une praxéologie ponctuelle et de rendre compte des relations entre ces éléments. A partir des praxéologies ponctuelles il faut définir et décrire une structuration entre les différentes praxéologies. Ensuite, il faut définir des processus permettant de structurer les praxéologies selon les différents niveaux de codétermination : ponctuelle, locale et régionale. Enfin, il faut construire des fonctions didactiques et des processus pouvant produire différents services cités plus haut : diagnostic, rétroactions, indexation de ressources…

[2] T4TEL : T4 renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et TEL pour Technology Enhanced Learning.

1. Définition de type de tâches et de sous-types de tâches

Au préalable, soulignons que la notion de type de tâches est première, comme en TAD, dans la construction de T4TEL mais comme on verra plus loin qu'il y a une forme de dualité avec la notion de technique.

Nous rejoignons le point de vue adopté par Y. Chevallard (1999) :

> *Enfin, tâches, types de tâches, genres de tâches ne sont pas des donnés de la nature : ce sont des « artefacts », des « œuvres », des construits institutionnels, dont la reconstruction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, qui est l'objet même de la didactique. (p. 224)*

Ainsi se pose une question méthodologique sur la construction des types de tâches. En effet, ce qu'observe un chercheur dans une institution donnée ce sont des tâches : comment peut-il définir un type de tâches ? Ou encore comment rattacher et organiser les tâches autour d'un même type de tâches ? Une première réponse est de les regrouper par genre de tâches comme « calculer », « démontrer » etc. On voit bien que ce critère n'est pas pertinent car on ne souhaite pas rattacher au même type de tâches les tâches « calculer 2 + 5 », « calculer la somme de deux vecteurs » et « calculer une intégrale donnée ». Ensuite, on peut les discriminer par rapport aux objets communs sur lesquels porte l'action et par rapport aux moyens communs d'accomplir les tâches.

Il s'agit bien d'un travail de modélisation qui renvoie à la définition du type de tâches.

Précisons que nous nous plaçons dans une institution d'enseignement et nous considèrerons que les types de tâches mis à l'étude possèdent au moins une technique.

Nous présentons ci-dessous une caractérisation de type de tâches selon T4TEL.

Définition 1. Type de tâches
Un *type de tâches T* est un ensemble de tâches tel que :

- Toute tâche est décrite par un verbe d'action donné et des compléments fixés, pris dans les objets d'une discipline ;
- Il existe au moins une technique τ qui accomplit au moins une tâche de *T* tel que soit la portée de la technique $P(\tau)$ est un sous-ensemble de *T,* soit *T* est un sous-ensemble de $P(\tau)$.

Nous reviendrons sur la notion de portée plus loin. La deuxième condition doit être vérifiée pour au moins une technique. Donc d'autres techniques accomplissant des tâches de T peuvent exister et dont la portée contient des tâches de T et des tâches extérieures.

Exemple 1. Au début du collège on rencontre le type de tâches institutionnel T_{eq1} (Résoudre une équation de degré 1 à coefficients entiers). Plusieurs techniques seront étudiées comme celles qu'on qualifie d'arithmétique qui consiste à utiliser les opérations inverses. La portée de cette technique est un sous-ensemble de T qui tend à échouer pour les équations du type $ax + b = cx + d$. Une autre technique consiste à utiliser les transformations algébriques sur les équations et dont la portée contient T, c'est-à-dire les équations de degré 1 à coefficient réels.

Maintenant que nous avons caractérisé la notion de type de tâches, nous définissons la notion de sous- type de tâches comme suit.

Définition 2. Sous-type de tâches
On dit que T' est un sous-type de tâches du type de tâches T si

- T' est un sous-ensemble de T ;
- T' est un type de tâches.

Exemple 2. Le type de tâches (Résoudre une équation de degré 1 à coefficient entiers du type $a + x = b$) est un sous-type de tâches de (Résoudre une équation de degré 1 à coefficients entiers) qui est lui-même un sous-type de tâches de (Résoudre une équation de degré 1).

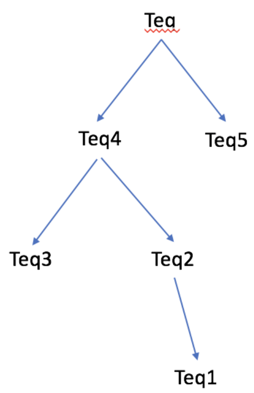
Nous venons de donner une caractérisation de type de tâches et de sous-type de tâches. Notre question est comment décrire un type de tâches.

> *Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches parent) s'exprime par un verbe : balayer la pièce, développer l'expression littérale donnée, diviser un entier par un autre, saluer un voisin, lire un mode d'emploi, monter l'escalier, intégrer la fonction… (Chevallard, 1999, p. 224)*

Ainsi, dans T4TEL nous décrivons un type de tâches T par un verbe d'action et un complément que nous représentons par T (Verbe d'action, Complément). Le verbe d'action caractérise le genre de tâches, comme « Calculer », « Comparer » ou « Intégrer ». Le complément précise sur quoi porte l'action. Cependant, le complément peut être défini selon différents niveaux de granularité, du spécifique au générique et, pour prendre en compte ces relations entre le générique et le spécifique, nous avons introduit les notions de système de variables et de générateur de types de tâches (Chaachoua & Bessot, 2018, sous presse).

2. Générateur de type de tâches et système de variables

Reprenons l'exemple ci-dessus sur la résolution des équations. Le type de tâches T_{eq1} (Résoudre une équation de degré 1 à coefficients entiers) est un sous-type de tâches de T_{eq2} (Résoudre une équation algébrique de degré 1). Si on considère un autre type de tâches T_{eq3} (Résoudre une équation algébrique de degré 2) alors T_{eq2} et T_{eq3} peuvent être considérés comme des sous-types de tâches du type de tâches T_{eq4} (Résoudre une équation de degré inférieur ou égal à 2) ou du type de tâches T_{eq} (Résoudre une équation algébrique). Un autre sous-type de tâche de T_{eq} est T_{eq5} (Résoudre une équation algébrique de degré supérieur à 2). On peut représenter les relations entre ces types de tâches par l'arbre :



Dans cette représentation on a une structuration des types de tâches par rapport à la relation « être sous-type de tâches de ».
Cette structuration rend compte d'un jeu sur le degré de l'équation mais aussi sur la nature des coefficients.
Cette structuration dépend donc des critères retenus.

Figure 1 : Exemple de structuration des types de tâches.

On peut dire aussi que le type de tâches T_{eq4} est plus générique que T_{eq2} ou encore que T_{eq2} est plus spécifique que T_{eq4}.

Nous introduisons la notion de générateur de types de tâches qui à partir d'un système de variables peut générer des types de tâches et des sous-types de tâches selon une certaine structuration rendant compte des relations « plus générique que » et « plus spécifique que ».

Définition 3. Générateur de types de tâches.
Nous définissons un générateur de types de tâches par :

GT = [Verbe d’action, Complément fixe ; Système de variables] où :

- Le couple (Verbe d’action, Complément fixe) est un type de tâches,
- Le système de variables est composé d’une liste de variables et de valeurs qu’elles peuvent prendre.

Notons qu’un générateur de type de tâches n’est pas un type de tâches mais il permet d’engendrer des types de tâches selon une structuration hiérarchique. Le niveau le plus générique est définit sans aucune instanciation du système de variables donc il s’agit du type de tâches définit par le verbe d’action et le complément fixe. Les différentes instanciations des variables permettent d’engendrer des types de tâches plus spécifiques.

Exemple 3. Si on reprend les types de tâches de l’exemple 2 on peut considérer le générateur de type de tâches GTeq = [Résoudre, une équation algébrique ; V1, V2][3] où V1 : le degré de l’équation et V2 : la nature des coefficients. La variable V1 peut prendre les valeurs : 1, inférieur ou égale à 2, supérieur à 2. La variable V2 peut prendre les valeurs : entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels. On génère alors des types de tâches selon la structuration présentée dans la figure 1.

Cependant, le choix des variables et de leurs valeurs dépend de plusieurs points de vue que nous présenterons plus loin. Dans cet exemple, le choix de la valeur « inférieur ou égale à 2 » de la variable V1 est discutable. En effet, cela dépend si on veut traiter dans le même type de tâches les équations de degré 1 et de degré 2. Un des critères peut être les techniques ou encore le découpage institutionnel. Ainsi, un autre choix est de considérer comme valeurs de la variable V1 : 1, 2, supérieur à 2. Dans ce cas les valeurs sont disjointes et le générateur produit une structuration de types de tâches différente de celle de la figure 1. Donc, la structuration des types de tâches est dépendante de la structuration des valeurs des variables[4].

Exemple 4. Considérons le générateur de type de tâches GTs = [Calculer, la somme de deux nombres entiers ; V1, V2] où V1 : taille du premier nombre (nombre de chiffres) et V2 : taille du second nombre (nombre de chiffres).

Dans cet exemple le complément fixe est « la somme de deux nombres entiers ». Le type de tâches le plus générique est Ts = (Calculer la somme de deux nombres entiers).

Un autre choix était possible est de considérer le complément fixe « la somme de deux nombres » qui est plus générique et d’ajouter une autre variable sur la nature du nombre (entier, rationnel, réel…). Le choix de niveau de granularité est un point important dans la construction des générateurs de types de tâches et dépend d’au moins de 3 facteurs que nous considérons comme importants : questions de recherche, l’institution cible et les techniques. Notons d’abord que le facteur institution cible est en partie lié aux questions de recherche.

Pour le facteur « institution cible », le choix du système de variables pour GTs n’est pas le même si l’institution est le début de l’école élémentaire (6-8 ans) ou tout l’enseignement primaire (6-12 ans) ou encore le collège (12-15 ans), et donc le choix du générateur n’est pas le même. Par exemple, si l’institution cible est l’enseignement primaire (6-11 ans) on peut introduire une variable V3 sur la nature du nombre qui prend au moins deux valeurs : entiers et décimaux. On obtient alors comme générateur de types de tâches : GTs = [Calculer, la somme de deux nombres ; V1, V2, V3].

Pour le facteur « techniques », il s’agit de déterminer les techniques possibles et de caractériser leur portée, à l’aide des variables.

[3] Dans cette écriture, V1 et V2 désignent les variables mais aussi les valeurs qu’elles peuvent prendre.
[4] Pour une étude détaillée de cet exemple cf Chaachoua et Bessot (2018, sous presse).

Comme pour les types de tâches, les générateurs de types de tâches sont des construits du chercheur.

Fonctions des variables

Chaachoua et Bessot (2018, sous presse) ont présenté trois fonctions aux variables : générer des types de tâches, caractériser les portées des techniques et décrire les praxéologies personnelles que nous présentons ci-dessous.

1) Générer des types de tâches et sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable.

Par instanciation des valeurs des variables on génère, selon une structure hiérarchique, les sous-types de tâches du type de tâches le plus générique.

Par exemple le type de tâches T_{S1} (calculer la somme de deux entiers de taille 1) et T_{S2} (Calculer la somme d'un entier de taille supérieure à 2 et d'un entier de taille 1) sont disjoints et sont des sous-types de tâches de T_{S3} (Calculer la somme de deux entiers de taille inférieures ou égales à 2).

Ces trois types de tâches peuvent être générés à partir de GTs = [Calculer, la somme de deux nombres ; V1, V2, V3] par instanciation uniquement des variables V1 et V2.

Cependant, une question se pose : quels sont les types de tâches qu'on souhaite générer ?

Bien que la réponse à cette question dépende des questions de recherche, nous pensons que deux raisons importantes peuvent motiver la génération de certains types de tâches et donc un choix de variables et de valeurs adéquates : les portées des techniques et les contraintes / conditions institutionnelles qu'on développera dans la suite.

2) Caractériser les portées des techniques

Revenons d'abord sur la notion de portée d'une technique τ définie par l'ensemble des tâches pouvant être accomplies par τ. Par exemple, pour le type de tâches T_{eq3} (Résoudre une équation de degré 2) la technique dite du discriminant a pour portée T_{eq3}. Il s'agit d'une portée théorique au sens où d'un point de vue mathématique la technique s'applique à toutes les tâches de T_{eq3}. Reprenons la définition donnée par Chevallard (1999) :

> *Tout d'abord, une technique – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie P(τ) des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique : elle tend à échouer sur T\P(τ), de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T ». (p.225)*

On voit que dans cette définition on se place dans le cas où la portée de la technique est une partie du type de tâches auquel elle est relative. Or, étant donné un type de tâches T on peut trouver une technique dont la portée contient T. Par exemple quand on étudie les techniques du type de tâches T_{eq1} (Résoudre une équation de degré 1 à coefficient entiers) on introduit une technique dont la portée est T_{eq2} (Résoudre une équation algébrique de degré 1). Cependant, à chaque technique on peut lui associer un type de tâches contenant sa portée. Nous y reviendrons.

Une deuxième remarque dans cette définition est qu'en dehors de sa portée la technique tend à échouer. Nous l'interprétons par le fait qu'elle peut ne pas s'appliquer ou elle peut s'appliquer mais avec un risque d'erreur.

Reprenons l'exemple 4. La technique dite de sur-comptage[5] peut s'appliquer sur Ts (Calculer la somme de deux nombres entiers). Mais, si on l'applique à des grands nombres, il y a de forte chance qu'elle échoue. Cependant, elle réussit sur T_{S2} (Calculer la somme d'un entier de taille supérieure à 2 et d'un entier de taille 1). On considère donc T_{S2} comme portée pragmatique de cette technique que nous définissons ci-après.

Pour nous la notion de portée pragmatique correspond à la définition de Chevallard. Et c'est bien cette portée qui est pertinente pour la vie des praxéologies et qui est au cœur des questions didactiques. Dans la suite, nous la nommerons portée d'une technique sans l'adjectif « pragmatique » et en reprenant la définition de la portée d'une technique.

Définition 4. La portée (pragmatique)
La *portée d'une technique*, est l'ensemble des tâches où la technique est fiable dans le sens où elle permet d'accomplir ces tâches avec peu de risque d'échec et un coût raisonnable. La technique réussit sur cette portée et tend à échouer en dehors.

Peut-on toujours caractériser les portées des techniques ? Cela n'est pas toujours possible pour la portée théorique d'une technique comme par exemple certaines techniques de calcul d'intégrales. Cependant, pour la portée d'une technique, au sens pragmatique définit ci-dessus, on peut la caractériser bien que cette caractérisation puisse être amenée à se préciser dans le temps.

Propriété
La portée d'une technique, théorique ou pragmatique, est un type de tâches.

Cette propriété découle directement de la définition 1.

Comme la portée est un type de tâches, certaines variables et/ou valeurs sont choisies de sorte qu'on puisse générer les types de tâches qui sont des portées des techniques.

Nous considérons la caractérisation de la portée comme un objet d'étude didactique en soi.

3) Décrire les praxéologies personnelles.
Pour rendre compte des praxéologies personnelles des élèves (Croset, Chaachoua 2016) qu'elles soient valides ou non, nous enrichissons a posteriori les valeurs des variables. Ces valeurs permettent de générer des types de tâches susceptibles de mobiliser chez des élèves des praxéologies personnelles non valides. Par exemple, dans le cas des équations de degré 2, il important de pouvoir générer le type de tâches « Résoudre une équation du type $P_1(x)Q_1(x) = k$, où $P_1(x)$ et $Q_1(x)$ sont des polynômes de degré 1, k non nul ». En effet, une technique personnelle non valide possible est $\tau = \{$(Ecrire « $P_1(x) = k$ ou $Q_1(x) = k$ »)$\}$[6].

Comme le précisent Chaachoua et Bessot (2018, sous presse) les deux premières fonctions :

> *« apparaissent comme particulièrement intéressantes pour conduire des analyses a priori (point de vue épistémologique et didactique) et calculer des parcours d'apprentissage à partir d'un jeu sur ces variables et leurs valeurs. En particulier, la construction d'un modèle de praxéologie de référence pour un domaine mathématique (au sens de l'échelle de codétermination) inclue de fait pour nous l'explicitation de variables et de ses valeurs possibles ».*

[5] Pour ajouter 7 à 23 on compte 24, 25…
[6] Cf. (Chaachoua et Bessot, 2018, sous presse) pour plus de détail sur les praxéologies personnelles et sur cet exemple.

Conditions et contraintes (institutionnelles)

Les contraintes et les conditions définies par une institution vont restreindre non seulement le type de tâches, mais aussi des variables ou des valeurs possibles d'une variable d'un type de tâches institutionnel. Par exemple, au début de l'école primaire (3-6 ans) on se limite aux nombres entiers inférieurs à 30.

Ainsi, « une variable et ses valeurs institutionnelles modélisent des conditions et des contraintes explicites ou implicites (relevant des niveaux de l'échelle de codétermination) sous lesquelles une praxéologie existe ou peut exister institutionnellement. » (ibid., 2018, sous presse). Kaspary (2018) dans sa méthodologie de recherche étudie des corrélations entre conditions/contraintes et variables pour décrire les rapports attendus par une institution noosphérienne.

Variable « Ostensifs »

Une des variables importantes est celle d'ostensifs car elle intervient dans tous les générateurs de types de tâches. Mais selon le générateur cette variable peut prendre des valeurs différentes. Elle joue un rôle au niveau des types de tâches et plus précisément au niveau des tâches mais aussi au niveau des techniques puisqu'ils sont les ingrédients premiers d'une technique.

Par exemple, dans sa thèse, Brasset (2017) considère le générateur de type de tâches GT = [Traduire, un nombre d'un ostensif de départ vers un ostensif d'arrivée ; V1.1, V1.2, V2.1, V2.2, V3.1, V3.2][7] où

V1.1 : Ordre de la plus grande unité de numération.
    Valeurs : 1, 2, 3, …
V1.2 : Absence d'au moins une unité de numération
    Valeurs : Oui, Non
V2.1 : Nature de l'ostensif de départ.
    Valeurs : Écriture chiffrée, Écriture en unité de numération, Écriture en matériel de numération, Écriture additive, ….
V2.2 : Forme de l'ostensif de départ.
    Valeurs : Canonique, Non canonique
V3.1 : Nature de l'ostensif d'arrivé.
    Valeurs : Écriture chiffrée, Écriture en unité de numération, Écriture en matériel de numération, Écriture additive, ….
V3.2 : Forme de l'ostensif d'arrivé.
    Valeurs : Canonique, Non canonique.

Par exemple le type de tâches T(Traduire un nombre de l'écriture en écriture en unité de numération non canonique vers l'écriture chiffrée) est obtenu à partir du générateur par les instanciations des variables suivantes :

V2.1 = Écriture en unité de numération

V2.2 = Non canonique

V3.1 = Écriture chiffrée

Une tâche de ce type de tâches est « Écris en chiffres le nombre 14 centaines et 235 dizaines ».

[7] D'autres variables ont été considérées dans Brasset (2017), comme l'organisation du matériel, que nous ne présentons pas ici.

Dans ce travail la considération des ostensifs dans les variables permet de structurer les types de tâches de traduction d'écritures de nombres. Cependant, il manque un véritable travail conceptuel sur l'intégration des ostensifs dans T4TEL. C'est ce qui est au cœur de la thèse de Kaspary (thèse en cours) où elle étudie le rôle des ostensifs dans les techniques et leurs évolutions. Cela est lié en partie aux portés des techniques. Par exemple pour le type de tâches « calculer la somme de deux entiers » la technique, qui mobilise les doigts pour compter de 1 en 1, a pour portée le type de tâches T_{S2}.

3. Description des techniques

Le problème de description des techniques a été soulevé dans (Chevallard, 1994) « … de quoi est faite une technique donnée ? De quels "ingrédients" se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la "mise en œuvre" d'une technique ? ». Si ce problème n'est pas posé explicitement dans les différents travaux qui font usage de l'analyse praxéologique, ces travaux en proposent des descriptions. Certains les décrivent sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décrivent par des sous-tâches. Par exemple, Cirade & Matheron (1998) décrivent la technique utilisée pour le type de tâches T (Résoudre une équation du premier degré), par des sous-tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer les termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme $ax = b$. Puis, les auteurs ajoutent que ce découpage est arbitraire, et qu'il s'agit d'un modèle dont l'objectif est de mettre en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer. L'intérêt de ce découpage est qu'il renvoie à des tâches reconnues institutionnellement et, pour chacune d'elles, il existe une praxéologie mathématique qui a été mise en place avant. D'ailleurs, les manuels adoptent ce mode de description des techniques. Nous voyons un intérêt dans ce découpage : il permet de mieux situer les difficultés des élèves dans la mise en œuvre d'une technique au niveau des sous-tâches qui composent la technique. Ce découpage a été aussi adopté par Castela (2008) où elle étudie comment une tâche peut intervenir dans la technique d'une autre tâche. Elle étudie la technique d'une tâche sous forme d'un enchaînement d'organisations mathématiques ponctuelles (Castela, 2008, p.129).

Définition 5. Description d'une technique
Une technique est décrite par un ensemble de types de tâches appelés ingrédients de la technique.

Pour pouvoir décrire les techniques par un ensemble de types de tâches nous avons distingué deux sortes de types de tâches pour intégrer dans la technique des types de tâches comme T (Transposer les termes) de l'exemple ci-dessus.

Définition 6. Types de tâches intrinsèque et extrinsèque
Nous distinguons deux sortes de types de tâches :

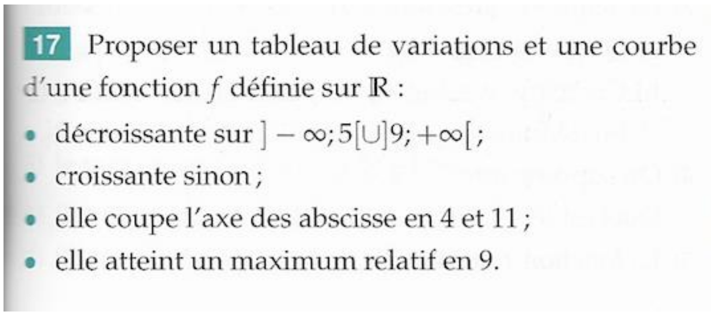
- les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre des techniques de certains autres types de tâches, appelés types de tâches *intrinsèques* ;
- les types de tâches qui existent en dehors des techniques et peuvent être prescrits institutionnellement aux élèves, qualifiés de types de tâches *extrinsèques*.

Exemple 5. Pour le type de tâches T_{S2} (Calculer la somme d'un entier de taille 1 et d'un entier de taille supérieure à 2), de l'exemple 4, une des techniques est la technique dite algorithmique où il s'agit de poser l'addition. On peut la décrire par au moins deux types de tâches : TD (Disposer en colonne l'addition des deux nombres) et TS1 (Calculer la somme de deux entiers de taille 1). Le type de tâches TD est intrinsèque : il n'est pas prescrit par l'institution tout en ayant une praxéologie, en particulier une technique et une technologie. Le type de tâches TS1 est extrinsèque car il est prescrit au début de l'école primaire.

Les types de tâches intrinsèques ont eux aussi leurs propres praxéologies. Elles peuvent même être prescrites aux élèves pendant un moment sous des formes adaptées dans des organisations didactiques. Par exemple pour TD (Disposer en colonne l'addition des deux nombres) on trouve des tâches qui visent à travailler la disposition des nombres. Par exemple, on donne une opération en ligne et on demande de poser l'addition sans l'effectuer.

Exemple 6. Un autre exemple est autour de l'ostensif « tableau de variation » où l'institution crée des organisations didactiques autour des types de tâches comme (Compléter le tableau de variation), (Produire un tableau de variation) ou (Lire un tableau de variation). Ensuite, ces types de tâches ne vivent que comme ingrédients de techniques d'autres types de tâches.

Dans l'extrait ci-dessous (Figure 2), il s'agit d'une tâche qui vise à comprendre les règles de formation d'un tableau de variation à partir de certaines informations sur la fonction. Ce type de tâches, présent en classe de seconde en France, l'année où on introduit l'ostensif « tableau de variation », disparaît les années suivantes mais continue à vivre comme ingrédient des techniques de types de tâches, par exemple le type de tâches d'étude de fonctions.



17 Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

- décroissante sur $]-\infty;5[\cup]9;+\infty[$;
- croissante sinon ;
- elle coupe l'axe des abscisse en 4 et 11 ;
- elle atteint un maximum relatif en 9.

Figure 2 : Extrait de Sésamath, Seconde, 2014, p.123.

Remarquons que chaque type de tâches qui est ingrédient d'une technique a lui-même une ou plusieurs techniques qui s'expriment à leur tour par un ensemble de types de tâches. Nous avons donc introduit la notion de type de tâches élémentaire pour exprimer qu'à un niveau donné de la description on arrête le processus.

Définition 7. Type de tâches élémentaire
Un type de tâches est *élémentaire* si l'institution ou le chercheur du domaine considère qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter la ou les techniques pour ce type de tâches.

Au niveau de l'institution le statut élémentaire est souvent réglé au niveau du contrat didactique et qui évolue dans le temps : ce qui devait être explicité à un moment donné ne l'est plus à un autre moment. Par exemple T_S (Calculer la somme de deux nombres entiers) n'est pas élémentaire au niveau de l'école primaire mais qui devient élémentaire à partir du lycée (plus de 16 ans).

Au niveau du chercheur il peut désigner des types de tâches comme élémentaires dans la construction de son modèle. Ce choix est souvent lié aux questions de recherche.

Revenons sur la description des techniques par des types de tâches. Comme chaque type de tâches admet lui-même sa propre technique qui à son tour est décrite par un ensemble de types de tâches, une question de nature méthodologique se pose : quel est le niveau de granularité pour décrire une technique. Ce qui peut se traduire par la question : quels sont les critères de choix des types de tâches ingrédients d'une technique ?

Considérons la tâche suivante t_6 : résoudre l'équation $x(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$. C'est une tâche qui relève du type de tâches T_{eq3}(Résoudre une équation algébrique de degré 2). En classe de seconde, une mise en œuvre d'une technique attendue peut être transcrite comme suit :

$x(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$
$x(x + 1) - (3 - x)(2x + 2) = 0$
$x(x + 1) - 2(3 - x)(x + 1) = 0$
$(x + 1)[x - 2(3 - x)] = 0$
$(x + 1)(x - 6 + 2x) = 0$
$(x + 1)(3x - 6) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $3x - 6 = 0$
$x = -1$ ou $3x = 6$
$x = -1$ ou $x = 2$

Comment peut-on décrire cette technique à l'aide de types de tâches ? On reconnaît dans ces étapes des types de tâches comme : (Factoriser une expression algébrique), (Réduire une expression algébrique), (Résoudre une équation produit nul), (Résoudre une équation de degré 1), (Regrouper les termes dans un seul membre).

Précisions qu'on ne peut pas considérer en même temps comme ingrédients (Résoudre une équation produit nul) et (Résoudre une équation de degré 1). En effet, le deuxième type de tâches est un ingrédient de la technique du premier.

Considérons le découpage suivant où la technique est être décrite par {(Regrouper les termes dans un seul membre), (Factoriser une expression algébrique), (Réduire une expression algébrique), (Appliquer la règle du produit nul), (Résoudre une équation de degré 1)}.

Regrouper les termes dans un seul membre

$x(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$
$x(x + 1) - (3 - x)(2x + 2) = 0$

Factoriser une expression algébrique

$x(x + 1) - 2(3 - x)(x + 1) = 0$
$(x + 1)[x - 2(3 - x)] = 0$

Réduire une expression algébrique

$(x + 1)(x - 6 + 2x) = 0$
$(x + 1)(3x - 6) = 0$

Appliquer la règle du produit nul

$(x + 1)(3x - 6) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $3x - 6 = 0$

Résoudre une équation de degré 1

$x + 1 = 0$ ou $3x - 6 = 0$
$x = -1$ ou $3x = 6$
$x = -1$ ou $x = 2$

On peut considérer aussi un autre découpage où la technique est décrite par : {(Regrouper les termes dans un seul membre), (Factoriser une expression algébrique), (Résoudre une équation produit nul)}.

Regrouper les termes dans un seul membre

$x(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$
$x(x + 1) - (3 - x)(2x + 2) = 0$

Factoriser une expression algébrique

$x(x + 1) - 2(3 - x)(x + 1) = 0$
$(x + 1)[x - 2(3 - x)] = 0$
$(x + 1)(x - 6 + 2x) = 0$
$(x + 1)(3x - 6) = 0$

Résoudre une équation produit nul

$(x + 1)(3x - 6) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $3x - 6 = 0$
$x = -1$ ou $3x = 6$
$x = -1$ ou $x = 2$

Nous faisons trois remarques concernant ce découpage. La première est que pour le type de tâches (Factoriser une expression algébrique) il est attendu des réductions des expressions factorisées.

Une deuxième remarque est qu'on aurait pu mettre comme ingrédient (Résoudre une équation de degré 2) à la place du type de tâches (Résoudre une équation produit nul). Mais, dans ce cas on aura le type de tâches (Résoudre une équation du degré 2) qui intervient dans sa propre technique et alors dans le processus de description il y aura une boucle qui ne s'arrête pas.

Une troisième remarque est qu'on aurait pu mettre comme ingrédient (Factoriser une expression de la forme $P(x)Q(x) + P(x)R(x) = 0$) à la place de (Factoriser une expression algébrique). Le premier est plus spécifique que le second. Cependant, il n'est pas toujours possible de connaître le niveau de spécification qui dépend de la forme de l'expression à factoriser.

Compte tenu de ces remarques nous avons retenu les critères suivant pour les ingrédients de la technique.

Définition 8. Les ingrédients d'une technique
Soit τ une technique d'un type de tâche T_0 d'un générateur GT. Les types de tâches qui composent la technique τ peuvent être :

(i) des types de tâches intrinsèques
(ii) des types de tâches extrinsèques T_e générés par GT et que T_0 ne soit pas un sous-type de tâches de T_e
(iii) des types de tâches extrinsèques générés par d'autres générateurs de types de tâches mais qui peut être du niveau le plus générique. C'est à dire le type de tâches obtenu par le verbe et par le complément fixe sans aucune instanciation de variables.

La condition (ii) permet d'éviter au processus de ne pas s'arrêter, donc d'éviter la situation « pour accomplir un type de tâches T on applique le type de tâches T ou un type de tâches plus générique ».

Dans la figure ci-dessous (Figure 3) nous avons représenté une structuration de types de tâches autour de deux générateurs GT et GT'. Les types de tâches pouvant être ingrédients de la technique τ du type de tâche T_0 sont :

- T4 : est sous-type de tâches de T_0
- T2 et T3 : ne sont pas des sous-types de tâches de T_0, sont du même générateur GT, T_0 n'est pas sous-type de tâches de T3 et de T2
- T' : est au niveau générique d'un autre générateur de types de tâches GT'.

Les types de tâches T et T1 ne peuvent pas être des ingrédients de la technique τ car T_0 est un sous-type de tâches de T et de T1.

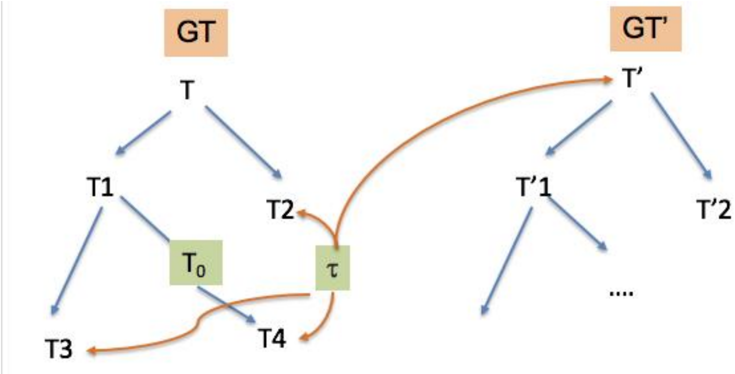


Figure 3 : Les ingrédients possibles d'une technique.

Exemple 6. Reprenons l'exemple ci-dessous. La tâche t_6 peut être considérée comme relevant du type de tâches Teq.6 (Résoudre une équation du second degré du type P1(x) Q1(x) = R1(x) S1(x) où P1, Q1, R1 et S1 sont des polynômes de degré 1 et R1(x) est un multiple de P1(x)). C'est un sous-type de tâches de Teq.3 de l'exemple 2 repris au début du paragraphe 2.2. Il peut être généré à partir du générateur GTeq. Une des techniques peut être décrite par les types de tâches : {TF (Factoriser une expression algébrique), Teq.7 (Résoudre une équation du type P1(x) Q1(x) = 0)}. Dans cette description le type de tâches TF n'est pas du même générateur que Teq.6 et donc il peut être exprimé au niveau le plus générique de son générateur. Alors que Teq.7 et Teq.6 sont du même générateur et Teq.7 peut être à un niveau plus bas de la structuration.

4. Description des technologies et théories

Dans la TAD une technologie est un discours rationnel qui permet de justifier, de produire, de rendre intelligible, de contrôler et d'adapter une technique (Chevallard, 1992).

Nous modélisons la technologie par un ensemble d'énoncés qui ont un statut et un domaine de validité. Le statut peut être : définition, propriété, règle, croyance… Le domaine de validité précise la validité de l'énoncé par rapport à un domaine de référence. Comme la théorie est pour la technologie ce qu'est la technologie est pour la technique nous adoptons la même modélisation pour la théorie.

III. Mises en œuvre du cadre T4TEL pour la conception d'un EIAH

Comme nous l'avons dit au début qu'une des motivations du développement du cadre T4TEL est de produire différents services EIAH avec des considérations didactiques. Mais, ce qui est en amont à la conception des différents services est la construction d'un modèle praxéologique de référence (MPR) selon le cadre T4TEL. Dans Chaachoua et al. (2013) nous avons indiqué les grandes lignes de la construction du modèle, sa représentation informatique et des exemples de mises en œuvre.

Nous présentons dans le paragraphe 3.1 quelques éléments de la représentation informatique du modèle, puis dans les paragraphes 3.2 et 3.3 deux exemples de mises en œuvre de T4TEL dans des recherches autour de la conception d'EIAH développées au sein de l'équipe MeTAH.

1. Représentation informatique des praxéologies

Un premier défi était la représentation informatique de ce modèle dans un EIAH. C'est ce que nous avons relevé d'abord dans le cadre du projet Cartographie des savoirs[8] puis dans d'autres projets en cours.

Dans ce projet nous avons représenté les référentiels de différents domaines de connaissance selon le cadre T4TEL avec un modèle ontologique Ontoprax (Chaachoua et al. 2013). L'objectif est de développer une ontologie des praxéologies qui réponde aux conditions suivantes : constituer une référence pour une communauté de praticiens, être complète et cohérente, être calculable et interopérable, être manipulable par des humains, et enfin fournir des services à des EIAH.

Le modèle Ontoprax repose sur la définition de 4 ensembles : Ensemble de types de tâche (ETT) ; Ensemble de techniques ($E\tau$) ; Ensemble de technologies ($E\theta$) ; Ensemble de théories ($E\Theta$). Mais aussi sur des relations du type :

- Un type de tâche est accompli par une ou plusieurs techniques.
- Une technique est justifiée par une et une seule technologie.
- Une technologie justifie une ou plusieurs techniques.
- Une technologie est intégrée dans une théorie.
- Une théorie intègre une ou plusieurs technologies.

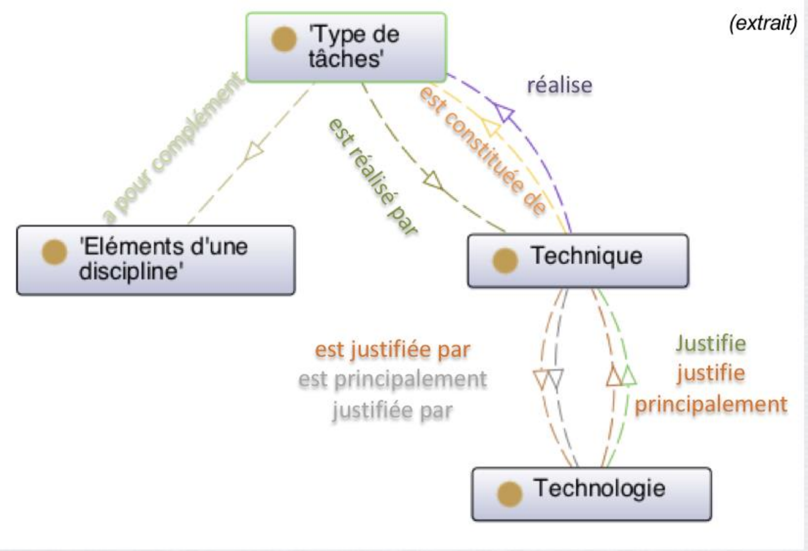


Figure 4 : Ontoprax - représentation ontologique des praxéologies.

Dans ce projet nous avons abouti à la représentation des praxéologies : 413 (resp. 712) types de tâches, et 1473 (resp. 2242) relations obtenues à partir des praxéologies pour les mathématiques en CM1 (resp. le français en CM1). Différents services (production de profils des élèves, production de tests de diagnostic, …) ont été produits par d'autres équipes de recherche, ce qui a montré que notre modèle Ontoprax est interopérable. Une expérimentation a été menée pour valider le modèle et les services produits à grande échelle (7500 élèves).

[8] « Cartographie des savoirs » (http://intranet.cartodessavoirs.fr). C'est un projet e-education 2 (2012-2014).

2. Indexation des ressources

Dans un travail de thèse en cours (S. Jolivet) qui vise à proposer un modèle de description de ressources de type « exercices et problèmes » de mathématiques basé sur des critères didactiques, la place de T4TEL est centrale pour au moins trois raisons :

- L'utilisation des variables permet une structuration d'un modèle praxéologique de référence permettant de rechercher des relations entre différents types de tâches présents dans une même ressource ;
- L'intégration en cours des ostensifs dans le modèle T4TEL permet de les prendre en compte dans la description des ressources ;
- La dimension calculable de la représentation permet de placer le travail dans une perspective EIAH avec d'une part un processus d'indexation adapté à un volume important de ressources pour un coût raisonnable et d'autre part une augmentation « automatisée » de la description à partir de calculs sur le MPR.

La description d'une ressource dans la modélisation de Jolivet repose sur cinq qualités

- Etre basée sur des critères didactiques ;
- Etre indépendante du descripteur ;
- Etre inscrite dans une perspective EIAH, pour sa réalisation et pour son exploitation ;
- Permettre de déterminer les adéquations institutionnelles d'une ressource ;
- Permettre de déterminer l'adéquation à un ou des projets d'étude d'une organisation mathématique.

3. Exploitation des praxéologies personnelles

Un premier travail sur les praxéologies personnelles en EIAH a été développé par Croset (2009) dans le micromonde d'algèbre Aplusix. Il s'agissait de diagnostiquer les techniques et les technologies des élèves à partir des traces de manipulations d'expressions algébriques. Le processus de diagnostic a été présenté dans Croset (2009) et Chaachoua (2010). Ici nous nous centrons sur l'exploitation des techniques diagnostiquées en vue de produire des rétroactions à l'élève, à l'enseignant ou au système.

Soit t une tâche que l'élève doit accomplir au sein d'une institution I. Elle relève d'un type de tâches T généré dans un MPR. On suppose qu'il y a une technique τ_I qui accomplit t et attendue par I[9]. Nous présentons quelques éléments du modèle de traitement d'une technique personnelle une fois diagnostiquée (Figure 5). On note τe la technique de l'élève pour le type de tâches T[10].

Si le diagnostic indique l'absence de la technique alors trois cas se présentent : (i) T est un type de tâches élémentaire pour l'institution I, auquel cas c'est normal qu'il ne soit pas nécessaire de produire une technique, (ii) l'élève considère que c'est un type de tâches élémentaire, (iii) il y a un manque d'équipement praxéologique pour l'élève.

Si une technique τe est diagnostiquée appartient au MPR deux cas se présentent : (i) elle est égale à τ_I et donc elle est correcte et conforme au rapport institutionnel ; (ii) elle est correcte et différente de τ_I alors il faut prendre en compte d'autres informations sur le type de tâches T.

[9] Il peut y en avoir plusieurs.

[10] Le diagnostic d'une technique à partir d'une tâche ne permet pas d'inférer au type de tâches institutionnel car cela suppose une stabilité sur un ensemble de tâches à caractériser et qui correspond au type de tâches personnel. Ce problème a été largement étudié par Croset (2009) où elle a développé des critères de stabilité inter et intra-élèves. Cependant, le coût de ce diagnostic est important et donc nous avons opté pour un choix de ne pas chercher la stabilité.

Si une technique τe diagnostiquée appartient au MPR alors deux cas se présentent : (i) l'erreur est au niveau des ingrédients de τe (cf. Figure 5 pour les différents sous cas) ; (ii) l'erreur est au niveau de la technique d'un ingrédient T de τe. Dans ce cas on itère le processus sur la technique de cet ingrédient.

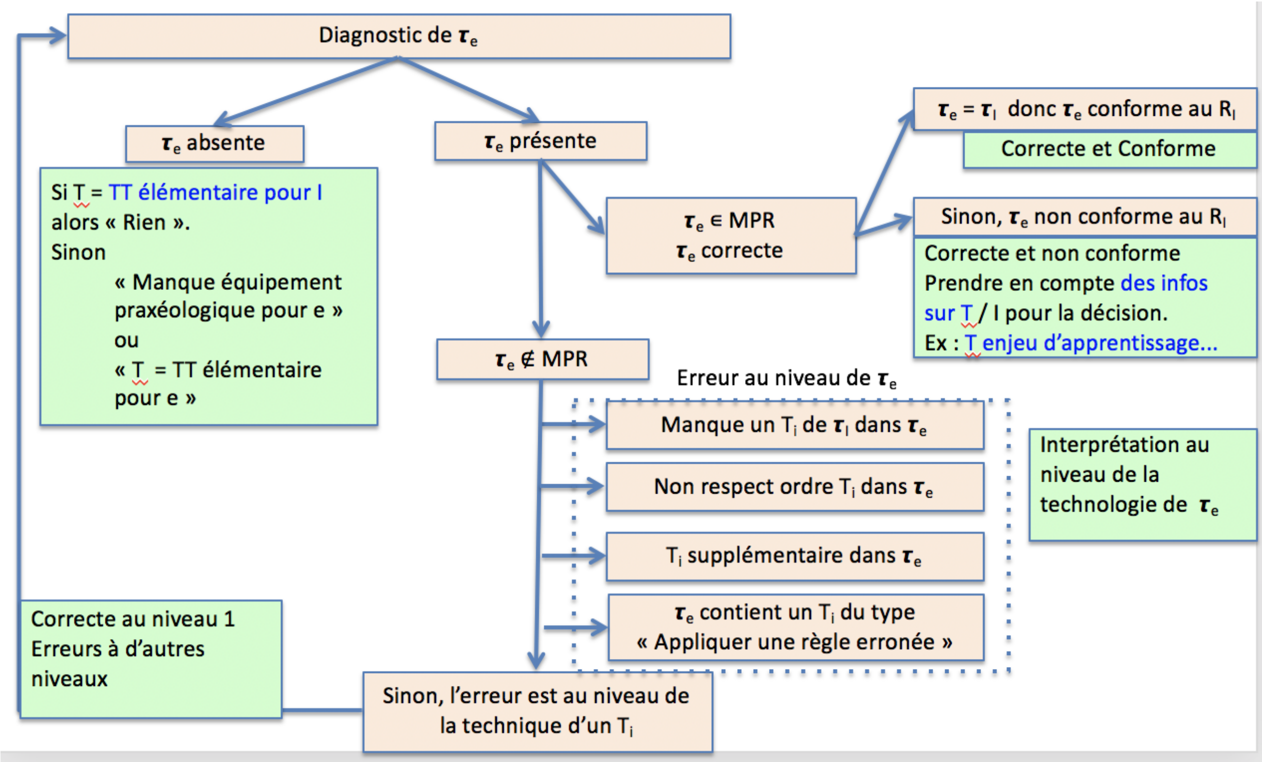


Figure 5 : Modèle de traitement d'une technique de l'élève diagnostiquée.

A partir de cette catégorisation on construit une fonction qui à chaque catégorie associe un type de rétroaction pour le système, pour l'élève ou l'enseignant. Cette fonction est en cours de construction.

Ce modèle a été utilisé dans la thèse de Bonnat (2017). L'étude porte sur une modélisation de l'erreur dans une situation de conception expérimentale en biologie proposée dans une plateforme informatique. Cela se traduit par une modélisation de praxéologies personnelles a priori qui s'appuie sur de possibles erreurs portant sur la technique du type de tâches ou bien sur la valeur de variable de la tâche. La modélisation a été enrichie par l'analyse de productions d'élèves et participera dans un second temps à l'évolution de la plateforme vers la mise en place d'un diagnostic automatique des erreurs.

IV. CONCLUSION

Dans les recherches en EIAH basées sur des modèles didactiques, la représentation informatique de ces modèles rend nécessaire leur transformation pour répondre à certains critères comme la calculabilité et la généricité. L'exigence de généricité signifie que le modèle ne doit pas être conçu de façon instanciée à un domaine de connaissances donné. Il a été mis en œuvre dans différentes disciplines, mathématiques, français, physique, chimie et biologie.

Le modèle T4TEL apporte une réponse à ces exigences. Nous avons représenté des structures praxéologiques avec des relations permettant de produire différents services EIAH en sciences expérimentales et en mathématiques autour des services : diagnostic et rétroactions, outil d'orchestration pour un professeur, indexation de ressources. Un exemple de mise en œuvre en sciences expérimentale est présenté par Girault et al. (2018) dans la conception d'un EIAH, TitrAB, dédié à la conception d'expériences de titrage en chimie, à la fois dans la sélection des tâches de l'activité travaillées dans TitrAB ainsi que dans la production de rétroactions automatiques.

Pour arriver à ces résultats des travaux en didactiques des mathématiques sont nécessaires. Par exemple, la thèse de Brasset (2017) porte sur la modélisation didactique et informatique de décisions didactiques fournit des résultats pour la conception d'un EIAH et plus précisément, pour produire un système capable d'accompagner l'enseignant dans sa pratique mais aussi un système tuteur capable de fournir à l'élève des feedbacks favorables à la construction d'une connaissance visée. Un autre exemple est le travail de thèse en cours de Jolivet sur l'indexation de ressources du type exercice.

Au-delà de la finalité EIAH, ces travaux contribuent également à faire avancer des recherches en didactique des mathématiques. En effet, la thèse de Brasset propose une modélisation des décisions didactique dans le cadre de la TAD. La thèse de Jolivet contribue à la modélisation de la notion de tâches et aussi la notion d'intentions didactiques.

Enfin, soulignons que le développement de T4TEL se fait aussi dans des champs hors EIAH comme dans les travaux de Tang (2014) sur l'analyse comparative des rapports institutionnels en France et au Vietnam à l'objet « représentation en perspectives » à partir un modèle praxéologique de référence pour construit dans le cadre de T4TEL.

Deux développements, hors champ EIAH, sont en cours dans la thèse Kaspary : intégration conceptuelle des ostensifs dans T4TEL et caractérisation des conditions et contraintes des rapports institutionnels à l'aide des variables. Un autre développement en cours concerne la construction des parcours d'étude et de recherche en s'appuyant en particulier sur le jeu des variables.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BONNAT, C. (2017). *Etayage de l'activité de conception expérimentale par un EIAH pour apprendre la notion de métabolisme cellulaire en terminale scientifique*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques (19/1),* 77-124.

BRASSET, N. (2017). *Les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH Etude de facteurs de type histoire didactique*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorées par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 28 (2),* 135-182.

CHAACHOUA, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves*. Note de synthèse HDR, Grenoble : Université Joseph Fourier.

CHAACHOUA, H. & BESSOT, A. (2018, sous presse). Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*.

CHAACHOUA, H., FERRATON, G. & DESMOULINS, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*, Toulouse.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 108.* Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12.1,* 73 - 112.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques, 19 (2),* 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In J. L. Dorier & al. (Eds.), *Actes de la 11e école de didactique des mathématiques*. (pp. 41-56) Grenoble : La Pensée Sauvage.

CIRADE, G. & MATHERON, Y. (1998). Équations du premier degré et modélisation algébrique. *Actes de l'université d'été de la Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. IREM de Clermont-Ferrand.

CROSET, M-C. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte*. Thèse de doctorat, Grenoble : Université Joseph Fourier.

CROSET, M-C., WAJEMAN, C. & D'HAM, C. (2018, sous presse). Modèle de construction d'un EIAH pour une activité de conception expérimentale. *Actes du 6e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*.

GIRAULT, I. & CHAACHOUA, H. (2013). How do students deal with the chemical knowledge during an experimental design in SCY-Lab? *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*.

KASPARY, D. (2018, sous presse). Relations entre deux institutions noosphériennes : effets d'un système d'évaluation de manuels didactiques. *Actes du 6e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique.*

TANG, M.D. (2014). *Une étude didactique des praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace, en France et au Viêt Nam*. Thèse de doctorat, Grenoble : Université Joseph Fourier.

SIMULER LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS : OUTIL DE RECHERCHE

Fabien **EMPRIN**

URCA - CEREP EA 46 92

fabien.emprin@univ-reims.fr

ORCID : 0000-0002-0166-8489

Résumé

Nous avons fait le choix d'aborder la question de l'intérêt de l'usage de la simulation informatique en commençant par la replacer dans la problématique plus générale de l'importation des pratiques professionnelles dans la formation des enseignants.

Nous analysons ensuite le processus de conception de deux simulateurs développés et mis en œuvre à l'université de Reims. Cette analyse nous amène à questionner la nature et la place des savoirs et connaissances de formation.

Mots clés

Simulateur, formation des enseignants, savoirs professionnels, connaissances professionnelles

I. INTRODUCTION

1. La place des pratiques professionnelles dans la formation des enseignants

Nous prenons comme question de départ la place des pratiques professionnelles dans la formation des enseignants en France depuis la création des ESPE[1] (Écoles Supérieures du Professorat et de l'Éducation). Cette question était bien évidemment présente dans les dispositifs antérieurs de formation (IUFM[2] – Instituts Universitaires de Formation des Maîtres et école normale[3]), notre visée n'est pas de dresser un historique, mais plutôt de regarder un état actuel de la formation des enseignants. Les lauréats des concours de l'enseignement sont formés en ESPE et assurent un mi-temps dans un établissement scolaire en tant que fonctionnaires stagiaires, à l'exception des stagiaires ayant déjà une expérience d'enseignement d'au moins 18 mois durant les trois années avant leur obtention du concours. Ces fonctionnaires doivent suivre une formation, que ce soit dans le cadre d'un master 2 pour ceux qui n'en sont pas titulaires ou dans une formation adaptée pour les titulaires ou dispensés des titres requis, et assumer à mi-temps leur travail en responsabilité.

[1] Composante des universités en charge de la formation des enseignants du premier et du second degré dans le cadre de diplômes de Master Métiers de l'Enseignement l'Éducation et la Formation (MEEF).

[2] Instituts indépendants à l'origine des Universités chargés de préparer les enseignants du premier et second degré et de former les enseignants fonctionnaires stagiaires.

[3] Jusqu'en 1990 et 1991 les écoles normales d'instituteurs étaient chargées de la formation des enseignants du primaire.

La perception de la formation par les enseignants stagiaires

Les évaluations et les analyses des mentions de master dans le cadre des accréditations, par l'HCERES (Haut Conseil de l'Évaluation de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur), la DGESIP (Direction Générale de l'Enseignement Supérieur et de l'Insertion Professionnelle), les rapports de l'IGAENR (Inspection Générale de l'Administration de l'Éducation Nationale et de la Recherche) ou les ESPE eux-mêmes mettent en évidence une séparation très importante entre la formation et les pratiques professionnelles « de terrain ». Prenons pour exemple quelques citations de propos de stagiaires lors de l'évaluation de formation par les stagiaires à l'ESPE de Lille Nord de France[4] : *« C'est une formation qui ne fait pas du tout le lien entre ce que l'on fait sur le terrain et la théorie des années précédentes. », « La formation ne correspond en aucun cas à la réalité du terrain. », « L'absence de cohérence terrain et ESPE. », « L'écart entre les cours et la réalité ! », « L'incompatibilité avec le terrain. »*. Ce ressenti peut être expliqué par les résultats de la recherche et notamment les difficultés de construction de l'identité professionnelle (Lanéelle & Perez-Roux, 2014) ainsi que la rupture entre le statut d'étudiant et celui de professionnel. Ces analyses portent un regard particulier sur la formation et concordant sur la difficulté de lier pratiques professionnelles et formation.

Une analyse des difficultés des stagiaires sur le terrain

Pour avoir un autre regard sur cette difficulté de mise en relation des contenus de formation et des pratiques de terrain nous avons effectué, au sein de l'ESPE de l'académie de Reims, une analyse des rapports de validation des fonctionnaires stagiaires. Notre corpus est constitué, pour l'instant, de 320 rapports permettant d'évaluer le stage du semestre 3 (premier semestre de l'année de Master 2 et donc de stage) pour les années 2016 et 2017. Ces rapports sont rédigés par les tuteurs terrain (professionnels de l'éducation nationale) et/ou les tuteurs ESPE (enseignants à l'université). Nous avons effectué un traitement de ce corpus par une analyse factorielle des correspondances sur les cooccurrences dans des segments de texte, méthode Reinert (2008) en utilisant le logiciel IRaMuTeQ (Ratinaud & Marchand, 2012). Cette méthode est basée sur le fait que segments de textes riches en cooccurrences permettent de définir de modes lexicaux stabilisés. Le logiciel a été paramétré de façon à permettre d'identifier si les segments de texte significatifs d'un point de vue statistique appartiennent à des rapports concernant des stagiaires du premier ou du second degré, et que leur conclusion propose de valider ou non l'unité d'enseignement « stage ». Les rapports non validés sont caractéristiques de formulations signalant, dans le premier degré, des difficultés dans la conception et la mise en œuvre des situations, des manques quant à la préparation des séances (pas de cahier journal, etc.) et des stagiaires ne parvenant pas à analyser leur pratique professionnelle. Pour le second degré, les difficultés concernent principalement la mise en œuvre des situations d'apprentissage en classe, la prise en compte des élèves ou l'évaluation formative et la non-maîtrise didactique et disciplinaire.

Un point remarquable dans ces rapports est que le discours sur les technologies numériques, quel que soit le degré ou le fait que le stagiaire soit validé ou non, est « isolé » des autres discours (les termes cooccurrents liées aux discours sur la mise en œuvre, la préparation de séances… sont donc significativement absent des parties traitant du numérique) et il porte sur des termes techniques. Cet isolement du discours nous amène à l'hypothèse que les technologies, dans l'accompagnement des stagiaires ne sont abordées que sous l'angle technique et non didactique ou pédagogique.

[4] LNF, enquête 2016 disponible en ligne : http://www.espe-lnf.fr/IMG/pdf/eqfef-rapport-evaluation_m1_m2_du-espe_lille_nord_de_france-2015-12-04-jh.pdf

Cette analyse montre que les difficultés des stagiaires sur le terrain relèvent en partie de contenus travaillés dans la formation : l'acquisition de connaissances didactiques leur permettant de préparer leur classe et d'analyser les travaux de leurs élèves. Une forme d'imperméabilité entre formation et pratique perçue par les institutions comme par les stagiaires est également révélée dans l'analyse des rapports de validation.

Une des pistes pour aider les stagiaires à faire le lien entre enseignements en formation et pratiques est de faire entrer les pratiques de terrain dans les formations pour les analyser, les accompagner… Cela est d'autant plus important dans le cadre des pratiques utilisant les outils numériques qui semblent relayées à des aspects techniques.

2. Comment faire entrer la pratique dans la formation et la formation dans la pratique ?

Les dispositifs s'appuyant sur les pratiques de terrain comme l'analyse de pratique, l'analyse de vidéo, la préparation accompagnée sont utilisés, mais ils sont coûteux en temps comme le soulignent Robert et Rogalski (2015) à propos d'une formation de formateurs utilisant l'analyse de pratiques :

> *« On voit la justification d'un temps long pour cette formation, dans la mesure où chaque analyse a un caractère opportuniste, dépendant de ce qui sort dans la séance. Sur la durée, l'aléatoire des apports des participants amène à rencontrer suffisamment de thèmes pour donner matière aux participants pour les adaptations dont ils auront besoin pour conduire leurs propres formations d'enseignants. » (Rogalski & Robert, 2015)*

Dans les temps de pratique, le tutorat, au travers du dispositif de tutorat mixte mis en place par l'arrêté du 27 aout 2013, associe un tuteur terrain et un tuteur ESPE. Il doit permettre d'aider le stagiaire à faire le lien entre les deux parties de la formation.

Nous choisissons de nous concentrer sur une partie de la formation sur laquelle la difficulté semble accrue : la formation des enseignants aux technologies. Par ailleurs nous nous intéressons spécifiquement à l'enseignement des mathématiques.

Pour répondre à cette difficulté, nous nous sommes intéressés à un outil de formation qui doit permettre de questionner les pratiques tout en limitant les aléas liés aux pratiques individuelles (et donc le temps) : la simulation.

II. LE CHOIX DE SCENARIOS DE FORMATION BASES SUR LA SIMULATION

Concernant les formations aux technologies, les recherches menées depuis plus de trente ans ont montré un fort ancrage sur l'homologie, au sens de Houdement & Kuzniak (1996). Abboud Blanchard (1994), à propos du plan IPT (Informatique Pour Tous)5, met en évidence des éléments similaires ainsi que la posture militante des formateurs. Cela a été à nouveau mis en évidence par Abboud-Blanchard & Emprin (2009) au début des années 2000. Ces travaux montrent de plus que, pour le formateur, la confrontation entre les stagiaires et l'ordinateur est considérée comme formatrice intrinsèquement, mais aussi qu'il y a une place importante

[5] Plan massif d'équipement des établissements en matériel informatique et de formation des enseignants lancé en 1985 en France.

réservée aux apports d'informations, de situations modèles du formateur et peu d'échanges entre stagiaires. Par ailleurs très peu de composantes des pratiques au sens de la double approche (Robert, 1999, 2005) sont questionnées, alors que les interventions des stagiaires révèlent ce besoin durant la formation. Cette organisation des séances de formation entraine une confusion entre les genèses instrumentales (Rabardel, 1995) de l'enseignant concepteur de ressources, de l'enseignant dans sa classe et de celle de élève ainsi qu'un décalage entre les attentes des enseignants et les potentialités des TICE présentées par le formateur (Ruthven & Hennessy, 2002 ; Lagrange & Caliskan-Dedeoglu, 2009). Nous proposons un scénario de formation tenant compte de ces résultats.

1. D'un premier scénario aux pratiques simulées

Ces travaux nous ont amenés à proposer l'introduction d'une composante d'analyse réflexive de pratiques ordinaires au travers de scénarios basés sur l'utilisation des vidéos comme outils. Il s'agit, en s'inspirant des scénarios de Pouyanne & Robert (2004) de mettre les stagiaires dans une posture de préparation à la mise en œuvre d'une séance, d'anticipation et de confrontation à ce qui s'est réellement passé dans une classe et enfin de recherche d'alternatives et d'identification d'une problématique.

La recherche sur cette démarche de formation (Emprin, 2007) a permis de montrer sa viabilité et le fait que les stagiaires mettent en évidence des problématiques qui touchent à plusieurs dimensions de leur pratique. Mais cette démarche est chronophage et elle dépend fortement du formateur. Nous nous sommes donc intéressés à d'autres dispositifs qui permettraient de faire entrer la pratique de classe dans la formation.

Dans le monde de la formation professionnelle, apprendre par la simulation (Pastré, 2005) est une démarche utilisée parce qu'elle présente moins de risques, qu'elle est moins coûteuse (temps, argent, humain…) et qu'elle permet d'accélérer le processus d'acquisition de l'expérience en confrontant les stagiaires à des situations contrôlées et plus nombreuses. Pastré (2005) met en évidence deux types de simulateurs : à échelle complète « Full scale simulators » où le travail se réalise à l'échelle 1:1, avec une recherche de réalisme et à échelle partielle « part scale simulators » où une partie de la réalité seulement est simulée et où le temps n'est pas le temps réel. Si le premier type de simulateur est bien adapté à la répétition de gestes en temps réel et de réaction à des imprévus le second est plus adapté à l'analyse de pratiques et à la réflexivité.

Par sa dimension résolution de problème, c'est le second type de simulation que nous avons retenu pour faire entrer les pratiques de classe dans les formations à la place des vidéos de pratiques, de l'homologie ou des narrations. Un second intérêt du travail sur simulateur à échelle partielle est de mettre à distance certains éléments affectifs qui pourraient gêner l'analyse de pratiques réelles. Lors de l'analyse de vidéo, que l'enseignant filmé soit présent ou non, il peut être difficile de formuler certaines critiques ou de se détacher d'aspects connus du contexte comme le fait que ce soit un formateur ou au contraire un débutant. Les pratiques simulées neutralisent ces effets et nous faisons l'hypothèse qu'elles peuvent faciliter la formulation d'éléments personnels. En effet le contexte étant relativement neutre, pour justifier leurs choix les enseignants doivent préciser leur point de vue et donc exprimer des éléments qui relèvent des composantes personnelles, sociales et institutionnelles de leurs pratiques.

Nous avons identifié deux situations de travail qui peuvent être simulées dans le cadre de la formation : la situation de classe où un enseignant travaille avec des élèves et la situation d'accompagnement où un formateur ou un pair échange avec un enseignant autour de sa pratique de classe. Nous avons construit et expérimenté ces deux types de simulateurs dans le cadre de la formation des enseignants.

2. Le simulateur informatique de classe

Le simulateur informatique de classe (SIC) a été conçu et programmé dans le cadre d'une première recherche de l'IREM de Reims (Emprin, 2011) qui nous a permis d'en vérifier l'acceptabilité puis reprogrammé dans le cadre d'un projet incitatif Amont – La Délégation Régionale à la Recherche et à la Technologie (DRRT) — Champagne Ardenne (Emprin & Sabra, 2014, 2015). Nous ne faisons ici qu'une présentation succincte du simulateur dont la conception et le fonctionnement ont déjà fait l'objet de plusieurs publications. SIC est accessible à l'adresse : http://cerep-sic.univ-reims.fr. Il permet à l'enseignant au moyen d'une interface (à droite figure 1 ci-dessous) de faire des choix dont il voit les effets sur les élèves (à gauche figure 1 ci-dessous). Les informations que l'utilisateur récupère sur l'activité des élèves sont de trois natures : la figure réalisée sur le logiciel de géométrie dynamique, les réponses des élèves quand l'enseignant choisit de les interroger et l'attention des élèves (caractérisée par une barre en dessous de chaque binôme).

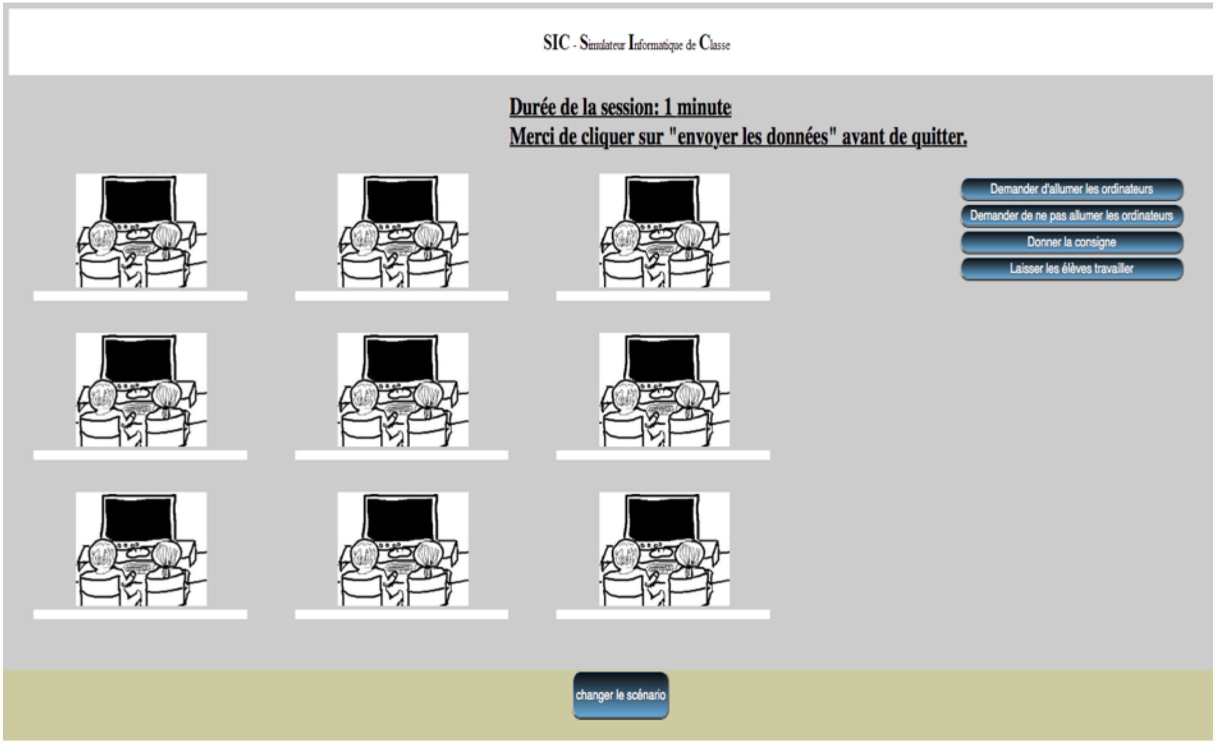


Figure 1 : Interface du logiciel SIC.

Ce simulateur a été expérimenté en troisième année de licence dans le cadre de modules de préprofessionnalisation, en deuxième année de master « Enseignement éducation et formation » mention second degré parcours mathématiques, avec des professeurs des écoles stagiaires en formation initiale et continue. Lors de ces formations, nous faisons passer un questionnaire auprès des utilisateurs, ce qui nous permet d'affirmer que le simulateur est reconnu comme un outil d'analyse de pratiques par les stagiaires. Lors des sessions de formation de deux heures, les enseignants réalisent en moyenne 4,8 essais ce qui montre bien le rôle d'accélérateur d'expérience qui était attendu. Les enseignants repèrent et formulent les contenus attendus pendant cette formation liés à la tâche spécifique proposée : le fait que la situation comporte en fait deux objectifs et deux tâches qui ne peuvent être menées en même temps, la problématique de la relation conjecture/démonstration, les éléments pédagogiques liés à la gestion des interactions individuelles et collectives, à l'usage du logiciel de géométrie dynamique (LGD) et les difficultés des élèves à s'approprier le système de contraintes du LGD.

Ce simulateur a déjà reçu 1840 visites dont 42 % sont des survols (une seule page vue). Cela signifie donc que plus de 1000 simulations ont été réellement initiées.

L'ensemble de ces éléments nous permettent de conclure que ce type de dispositif, par simulation, peut exister dans le système de formation : nous avons en quelque sorte obtenu « une preuve de concept ». L'investissement dans ce type d'outil est donc pertinent et nous invite à en continuer le développement pour l'amener à dépasser l'état de prototype. En effet notre simulateur ne contient actuellement qu'un seul scénario de classe et il nécessite, à chaque nouveau scénario, une reprogrammation quasi complète.

Les pistes de développement de l'outil concernent la mise en place d'un générateur de scénario qui permettrait à des formateurs d'implémenter leurs scénarios, de les utiliser dans leur formation et de les partager.

La relation pratiques professionnelles/formation didactique et disciplinaire ne se limite pas aux cours en présentiel, elle est également en jeu dans la situation d'accompagnement, c'est cette dimension que nous avons travaillée grâce à un logiciel spécifique.

3. Le simulateur d'entretien professionnel

Pour comprendre la situation de conseils, nous nous appuyons sur le travail de Brau-Antony & Mieusset (2013) qui se base sur dix-huit instructions au sosie dans le cadre de la clinique de l'activité (Clot, 2001). Leur analyse permet de dégager neuf facettes de ce travail :

1) accueil, intégration de l'enseignant stagiaire ;
2) travail avec l'enseignant stagiaire sur la conception de l'acte d'enseignement ;
3) observation du travail de l'enseignant stagiaire ;
4) analyse de la pratique professionnelle de l'enseignant stagiaire ;
5) travail avec d'autres professionnels avec et pour l'enseignant stagiaire ;
6) accueil de l'enseignant stagiaire dans la classe du maître de stage ;
7) travail avec l'enseignant stagiaire sur d'autres activités que l'acte d'enseignement ;
8) évaluation de l'enseignant stagiaire ;
9) accès à la fonction de maître de stage et formation à cette fonction.

Parmi ces facettes, le travail avec l'enseignant stagiaire sur la conception de l'acte d'enseignement (facette 2) et l'analyse de la pratique professionnelle de l'enseignant stagiaire (facette 4) relient directement le terrain et la formation didactique/disciplinaire. Par ailleurs ce sont deux facettes qui peuvent être simulées dans la mesure où elles se jouent dans une interaction entre le professeur stagiaire et le maître de stage. Nous avons choisi de simuler d'abord la facette 4 en l'appuyant sur la facette 3, c'est-à-dire l'observation de l'enseignant stagiaire.

Matteï-Mieusset (2013) identifie quatre dilemmes associés à cette facette du travail qu'est l'analyse de pratique :

Transmettre le métier ou faire réfléchir pour permettre à l'ES de construire sa réponse qui est caractérisé par des discours du type :

> « […] quelles difficultés il a rencontrées, quelles difficultés, ça peut être gestion du groupe, ou pour faire passer tel contenu mathématique, comment d'abord il l'a vécue Parce que sinon la réflexion forcément elle s'arrête quoi, il va pas réfléchir si déjà tu lui

donnes la solution Euh tu peux lui demander ce qu'il a pensé de sa séance, comment il l'a vécue ».

Pointer les erreurs et les réussites de l'ES ou l'aider à les faire émerger qui est caractérisé par des discours du type :

> « Je vais essayer de pas lui dire voilà ce que j'ai vu, je vais plutôt l'interroger, tiens j'ai constaté ça, qu'est-ce que tu en penses, comment ça se fait que, est-ce que toi tu as constaté alors je fais quoi là, je lui donne mes solutions ? Après on peut lui donner un éventail de solutions ».

Soutenir l'ES ou l'évaluer qui est caractérisé par des discours du type :

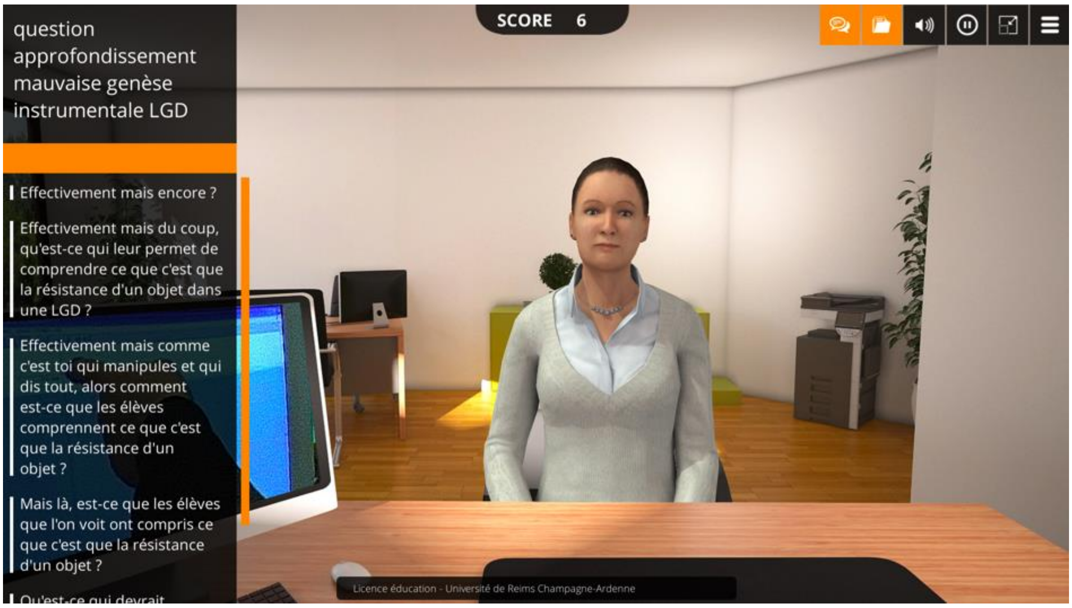
> « Parce que encore une fois, j'évalue, et ils ont peur qu'on dise qu'ils s'en sortent pas, moi je veux dire, je le comprends bien ça. Psychologiquement, c'est-à-dire que, l'affectif, même si on peut trouver quelqu'un agréable, il faut aussi qu'on garde, c'est pas une distance, je suis le maître […], mais il faut être bienveillant ».

Guider, imposer un cadre, des outils à l'ES ou le laisser libre de ses choix qui est caractérisé par des discours du type :

> « Mais dans ce que tu dois transmettre à un futur enseignant, jusqu'à quel point tu dois poser un regard par rapport à ce que toi tu ne tolères pas ou ce que tu tolères, et ça je trouve, ça me pose toujours un problème ».

Un simulateur d'analyse de pratique (SAP) a donc été programmé. Il doit permettre à l'utilisateur de prendre conscience et de se positionner par rapport aux dilemmes liés à l'analyse de pratiques : est-ce que ma pratique de l'entretien me situe bien où je pense être ? Comme le SIC, cet outil de simulation n'a pas été pensé pour être utilisé seul, mais au cœur d'un dispositif de formation permettant une réflexion collective sur les contenus transmis lors des temps d'analyse de pratique.

Pour cela nous avons utilisé le logiciel Virtual Training Software[6] qui permet de simuler une situation d'entretien. L'utilisateur choisit parmi une liste, les interventions et les actions qu'il veut faire. Cette liste peut être, par exemple, sur la gauche comme sur la figure 2 qui est une capture d'écran.



[6] https://www.seriousfactory.com/virtual-training-suite/, licence accordé à l'université de Reims Champagne Ardenne (URCA).

Figure 2 : Capture d'écran de la simulation d'analyse de pratique.

Le contexte de l'entretien a été choisi pour correspondre aux usages de maîtres de stages qui indiquent s'installer dans un lieu isolé au calme avec leur stagiaire (Matteï-Mieusset, 2013).

Les questions et les réponses sont entendues par l'utilisateur, les avatars présents sont animés et peuvent exprimer différents sentiments par la voix, mais aussi par les attitudes faciales comme sur la figure 3 ci-dessous :

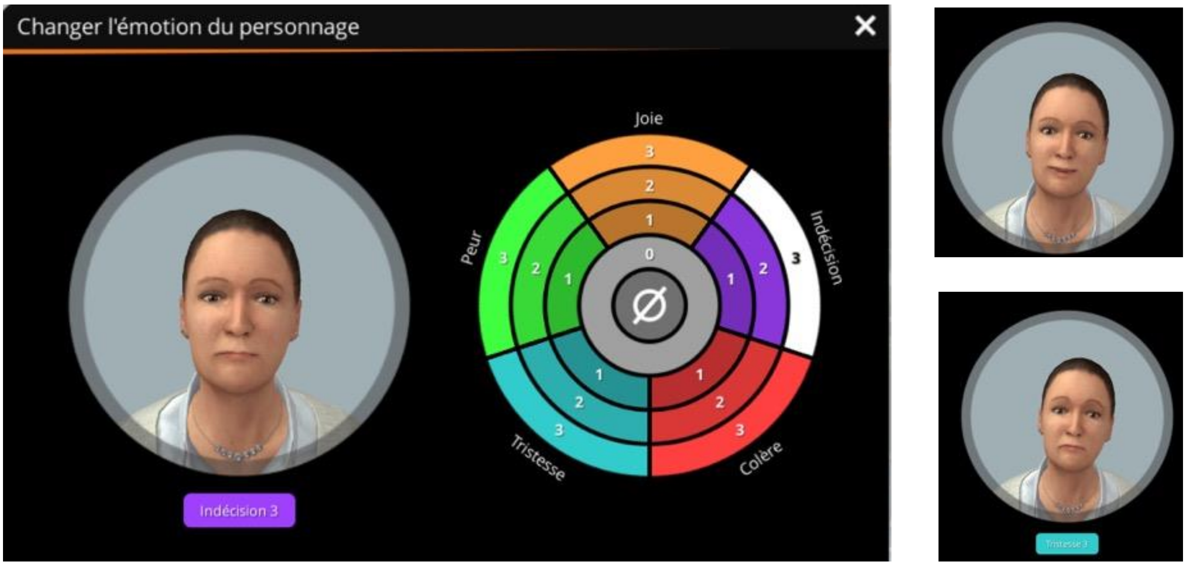


Figure 3 : Attitudes faciles dans le logiciel VTS.

À la fin du scénario, les utilisateurs reçoivent des informations sur les effets de leur entretien. D'abord par un temps de questions-réponses ils doivent dire s'ils pensent que leur stagiaire a repéré différents éléments qui pouvaient être en jeu lors de l'entretien, comme indiqué dans la capture d'écran figure 4. La stagiaire répond pour dire si c'est vrai ou non.

Figure 4 : Questionnaire final, identifier ce que la stagiaire a repéré ou non.

Une fois le travail terminé le logiciel renvoie à l'utilisateur son positionnement, tiré de ses choix, par rapport aux différents dilemmes. Par exemple pour « transmettre » ou « faire réfléchir », « transmettre » est au centre du diagramme radar et « faire réfléchir » à l'extérieur. Dans la figure 5 ci-dessous on voit clairement que l'utilisateur est du côté de « transmettre », « pointer les erreurs », « guider » et plutôt vers « évaluer ». Le dernier score concerne l'appropriation des contenus didactiques possibles dans la séance. Le score de 2 sur 60 possible montre que la stagiaire n'a quasiment pas travaillé sur les concepts didactiques lors de cet entretien.

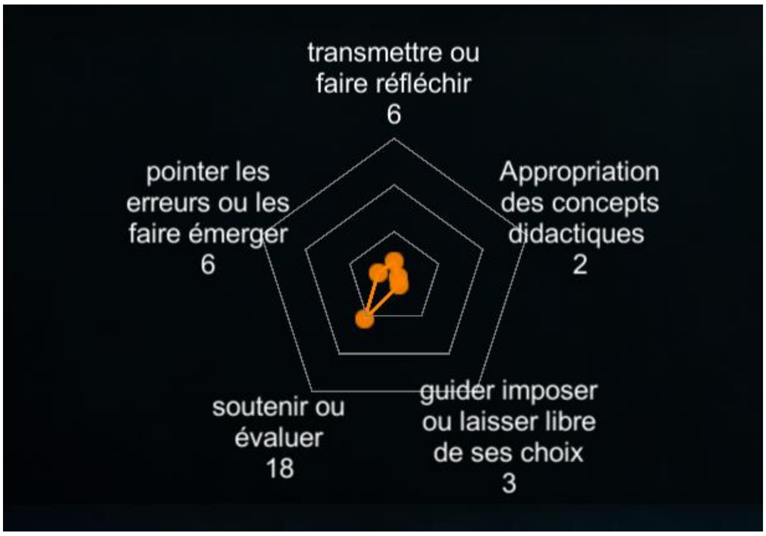


Figure 5 : Diagramme final : positionnement dans les différents dilemmes.

Il est clair pour nous que ce positionnement final est discutable, chaque choix pouvant être interprété en fonction du contexte, mais c'est justement l'intérêt de ce travail qui doit permettre lors d'une formation d'engager une discussion entre stagiaire et avec le formateur. Ces échanges doivent prendre en compte les composantes institutionnelle, personnelle et sociale des pratiques. Notre choix est donc de susciter des discussions qui mettent en jeu réellement ces composantes et qui nécessitent donc de la part des stagiaires de formuler des éléments personnels, liés à leur contexte d'enseignement, leur représentation du métier, des mathématiques, etc.

En travaillant avec un avatar et non une personne réelle, la simulation réduit les éléments affectifs à la perception des émotions programmées dans le logiciel. Elle permet ainsi de se centrer sur les éléments professionnels.

Notre hypothèse peut sembler paradoxale, mais en travaillant dans un contexte neutre et dépersonnalisé nous pensons que les utilisateurs sont plus amenés à préciser des composantes personnelles qui ont guidé leur choix.

Un scénario de formation remplaçant l'analyse de pratiques filmées par le travail sur ce simulateur a été mis en place après de master 2 MEEF mathématique. Il est en cours d'analyse. D'autres scénarios de formation, avec des formateurs d'enseignants cette fois sont en cours de mise en œuvre. Pour mener ces analyses, nous nous basons sur une méthodologie inspirée par l'ingénierie didactique (Artigue, 1988) en émettant des hypothèses sur les processus d'apprentissage et de formation a priori et en vérifiant a posteriori. Ce processus de validation interne est au cœur du travail que nous menons depuis plusieurs années sur les simulateurs et il soulève des questions liées aux connaissances et aux savoirs en jeu dans la formation.

III. LES QUESTIONS POSEES PAR LA SIMULATION DE PRATIQUE

Tout d'abord nous avons fait le choix de faire la distinction entre connaissances et savoirs en nous appuyant sur les travaux de (Margolinas, 2012) :

> *« Ce que l'on peut retenir schématiquement de ces distinctions, c'est déjà que la connaissance vit dans une situation, alors que le savoir vit dans une institution. » (p. 8)*

Comme tout simulateur, les simulateurs de pratiques sont programmés avec des règles de fonctionnement. C'est en analysant les réactions du simulateur que les apprentissages potentiels des utilisateurs se réalisent puisque l'outil que nous utilisons est centré sur la réflexivité. En programmant, le concepteur embarque donc des connaissances et des savoirs potentiels qui pourront ou non être acquis lors de la formation.

Cela veut dire que d'une part le concepteur, mais également le formateur doivent identifier les savoirs et les connaissances qu'ils veulent faire travailler. Nous analysons maintenant l'approche des connaissances et des savoirs dans nos deux simulateurs.

1. SIC : Une approche heuristique pour identifier des savoirs de formation

Pour concevoir SIC nous nous sommes basés sur la captation, la transcription, l'analyse de la même situation de classe à plusieurs reprises et dans plusieurs contextes. Nous avons également mené des entretiens avec les enseignants. Nous avons enregistré, transcrit et analyser des séances de formation utilisant les captations des situations de classe comme support pour en dégager des choix et des informations sur les différentes dimensions des pratiques.

L'ensemble de ce travail préalable nous a permis de construire un modèle d'interactions basé sur des connaissances et des savoirs issus de la didactique, d'aspects plus liés à la gestion de la classe et aux gestes professionnels (Bucheton & Soulé, 2009). En mettant en place les formations utilisant le simulateur nous avons pu observer l'émergence d'un corpus de connaissances et de savoirs qui recouvre et dépasse les corpus que nous avions pu observer lors des sessions utilisant la vidéo.

Nous appelons ce corpus : les connaissances de formation pour celles qui sont spécifiquement attachées à la situation et les savoirs de formation pour ceux qui sont formulés par les stagiaires et dépassent le cadre de la situation dans laquelle ils ont émergé.

Les connaissances de formation

Dans la situation analysée, il y a, en fait, deux situations avec deux objectifs différents qu'il faut identifier et ne pas confondre : la construction sur Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD) et son utilisation pour la conjecture.

Il est impossible de mener les deux objectifs à terme dans le cadre d'une séance de classe de 55 minutes. Plusieurs stratégies sont alors possibles :

Faire deux séances : une pour la construction, une pour la conjecture et la démonstration. Dans ce cas la première séance peut se faire sur ordinateur ou tablette, la seconde peut nécessiter un aller-retour entre support informatique et papier-crayon.

Diminuer la pression sur la tâche de construction en donnant des fichiers partiellement réalisés pour permettre à tous les élèves de travailler sur une figure correcte ou donner le début de la construction déjà réalisée

Donner la construction géométrique déjà réalisée et se centrer sur la tâche de conjecture et de démonstration.

Le travail sur la conjecture nécessite pour l'élève de voir une sous-figure dans la figure construite. Elle permet de prendre conscience ou de réutiliser des propriétés du rectangle, notamment le fait que les diagonales du rectangle sont isométriques.

Les savoirs de formation

Nous listons maintenant ce qui est formulé par les stagiaires lors d'une formation utilisant le simulateur et qui a un statut indépendant de la situation. Tout d'abord les stagiaires formulent que : dans une situation il faut clairement identifier l'objectif visé ; leur expérience sur simulateur leur a montré qu'ils n'avaient pas une idée suffisamment précise des enjeux ; la construction dans un LGD nécessite l'utilisation de primitives qui traduisent des propriétés mathématiques ; l'usage du LGD permet l'appropriation de la figure, travaille la rigueur dans l'expression ; la résistance des objets est spécifique au LGD et elle est un critère de validation de la construction (cette dernière crée une rétroaction spécifique de la situation qui permet de garantir qu'une construction résistante a été construite en utilisant les propriétés de la figure) ; cette « façon de dessiner » nécessite une appropriation que nous pouvons analyser grâce au cadre des genèses instrumentales (Rabardel, 1995) ; le concept de sous-figure et de sur-figure apparaît dans l'analyse du travail.

L'usage du LGD pose donc la question du statut du dessin dans un tel environnement : cette figure résistante correspond à une sorte de « classe d'équivalence » de toutes les figures ayant les mêmes propriétés, la figure à un moment donné étant un représentant.

Ce travail dans un environnement spécifique pose aussi la question de la preuve : conviction vs preuve. En effet le LGD comme d'autres outils numériques comme la calculatrice algébrique symbolique (CAS) permet d'acquérir la quasi-certitude de la véracité de la conjecture, comment justifier alors l'importance de la démonstration.

Les stagiaires formulent, sur le plan des gestes professionnels, le fait que le travail avec les outils numériques nécessite une attention particulière dans la phase de consigne. Cette affirmation est transférable à tout usage de matériel.

Enfin, toujours autour de gestes professionnels, ils mettent en évidence le fait que les interactions collectives sont plus rapides, mais peuvent avoir une forte déperdition alors que le fait d'intervenir de façon individuelle auprès d'une élève est plus efficace, mais chronophage. Ils concluent qu'il faut gérer l'alternance entre les deux modes d'interaction en fonction de l'enjeu de l'intervention.

En basant le travail de conception du simulateur sur l'analyse de séance de classe et de formation, nous avons obtenu un corpus stable de connaissance et savoirs travaillés par la formation. Nous évoquons l'idée de stabilité, car à chaque fois que nous menons ces formations ce sont bien ces savoirs qui sont énoncés et ces connaissances qui apparaissent. Il nous reste à regarder si ce corpus est également robuste, c'est-à-dire qu'il émerge indépendamment du formateur. Pour cela nous devons analyser des formations s'appuyant sur notre simulateur, mais menées par d'autres formateurs que nous.

2. Une approche par un ingénierie

Pour la construction du SAP (Simulateur d'Analyse de Pratiques), nous avons adopté une démarche différente basée sur un processus d'ingénierie au sens de Le Boterf (2011). Nous sommes partis de l'analyse des représentations des étudiants et des formateurs sur les pratiques utilisant les technologies puis nous avons analysé les savoirs et connaissances de formation en nous appuyant sur nos recherches antérieures et sur les recherches existantes. Nous avons ensuite implémenté le logiciel de façon à faire apparaître ces connaissances et savoirs dans les réponses possibles de l'utilisateur et dans les rétroactions du logiciel. Une phase d'expérimentation permet de revenir sur les hypothèses de départ et de modifier le logiciel. En l'état actuel de notre travail, nous sommes en phase d'analyse des expérimentations. Nous illustrons ce processus par le schéma, figure 6 ci-dessous.

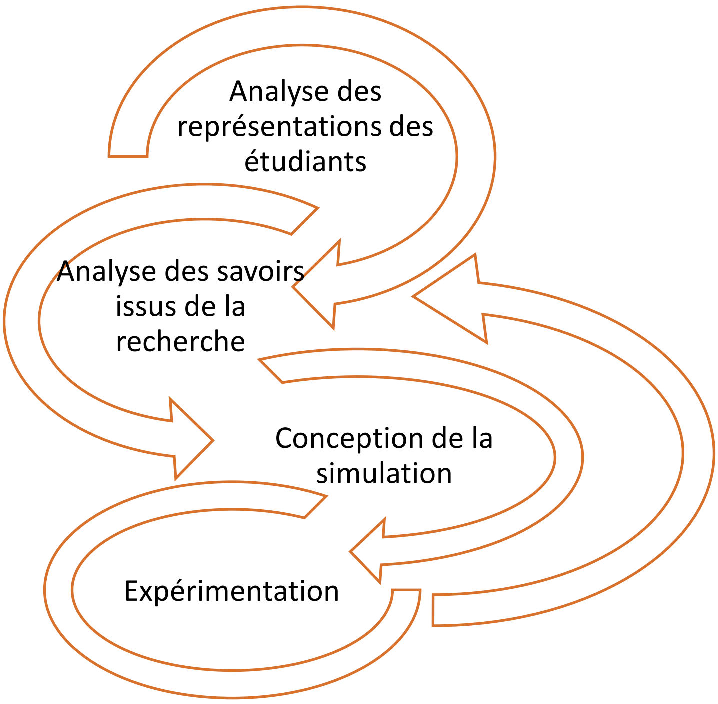


Figure 6 : Processus d'ingénierie pour la création de SAP.

L'analyse des représentations initiales des étudiants

Pour analyser les besoins des étudiants et des tuteurs en termes de formation nous avons d'une part utilisé les travaux existants tels que ceux de (Matteï-Mieusset, 2013) que nous avons souhaité compléter par un recueil des représentations de nos étudiants spécifiquement sur les usages de technologies. Pour cela nous avons utilisé un dispositif de formation que nous appelons « par la contraposée » (Emprin & Jourdain, 2010). Nous demandons aux étudiants de trouver les différentes façons de « faire échouer une séance avec les technologies ». L'intérêt de ce dispositif est de pouvoir accéder de façon moins biaisée aux représentations des étudiants. En effet si la question avait été : « comment utiliser les technologies pour faire réussir les élèves » ils auraient utilisé pour répondre non seulement ce qu'ils savent, mais aussi ce qu'ils pensent que l'on attend, en tant que formateur, comme réponse. L'effet de surprise lié à la question et le fait que les enseignants ne savent pas ce qui est attendu provoquent des réponses plus libres et plus proches de leurs représentations. La fin du dispositif de formation consiste à faire catégoriser puis inverser les réponses pour obtenir un état des lieux, à un temps « t », des stratégies pour faire réussir les élèves avec les technologies. Cela peut amener le formateur à identifier des manques c'est-à-dire des éléments qui ne sont pas relevés par les étudiants et donc orienter sa formation en conséquence.

Nous avons réalisé, deux années de suite, ce travail avec deux promotions d'étudiants en master MEEF 2^{d} degré, mathématiques et obtenus les catégories suivantes :

Ne pas préparer sa séance (pas suffisamment) ;
Ne rien préparer/Contenus mal adaptés ;
Faire une séance où le numérique n'est pas adapté ;
Pas d'intérêt : transformer la séance en jeu/ne pas la transformer en jeu ;
Être confronté à un impondérable extérieur/logistique ;
Ne pas s'y être préparé ;
Ne pas assurer la gestion de la classe ;
Ne pas maîtriser la technologie.

Nous avons reproduit ci-dessous le document final obtenu lors d'une formation, après classification des idées.

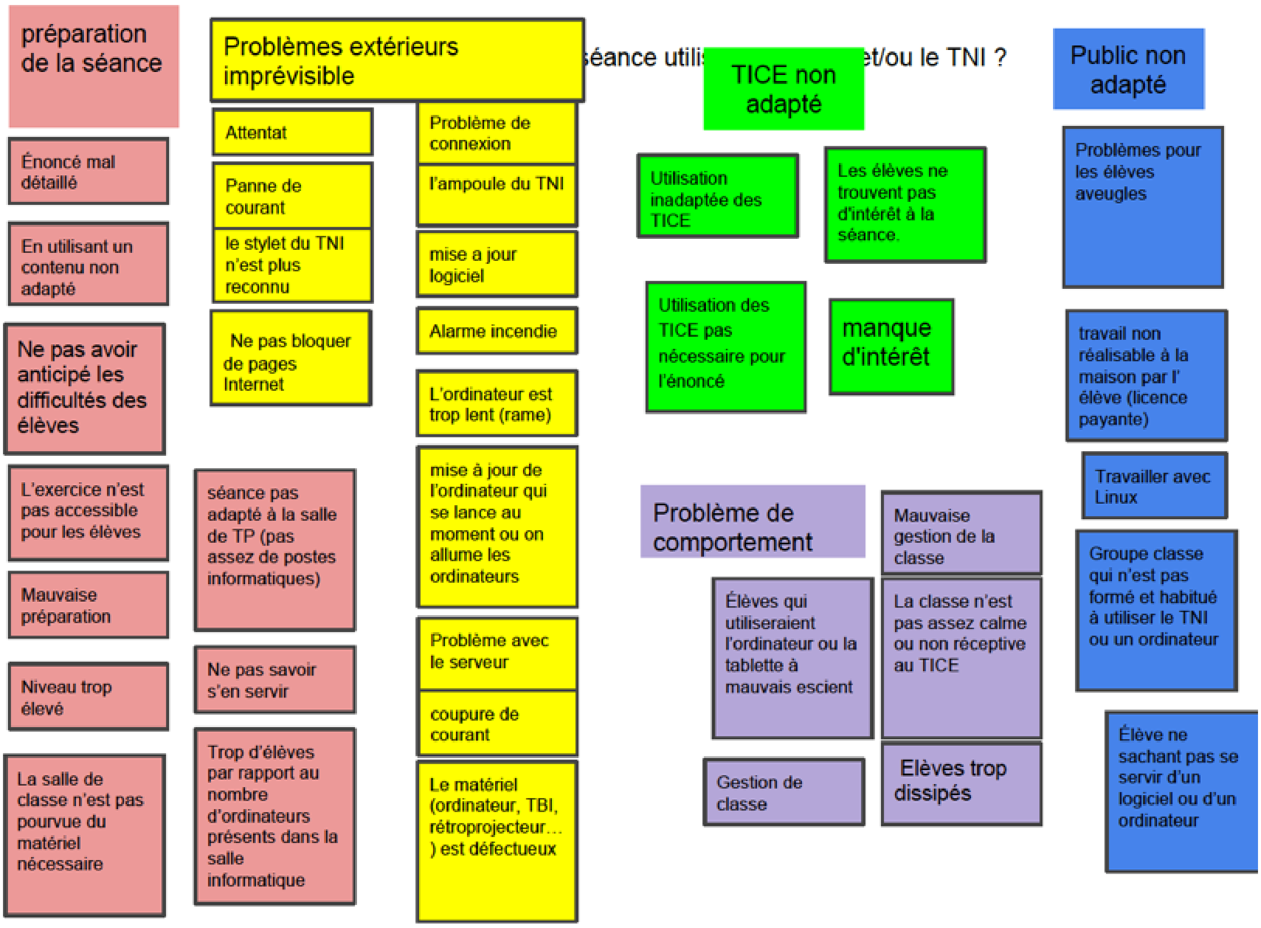


Figure 7 : Tableau de contraposée après classification.

L'analyse de ce dispositif montre une prédominance des facteurs liés à la préparation de la classe, aux impondérables, à la gestion de classe et aux aspects techniques (connaissances techniques de l'enseignant et problèmes techniques). L'adaptation de l'usage des technologies à la séance apparaît également, mais de façon moins importante que les autres facteurs.

Ce travail, certes exploratoire, nous amène à identifier plusieurs aspects à prendre en compte dans la formation pour qu'elle réponde aux besoins :

Les aspects « gestion de la classe » avec les technologies ;
Les aspects logistiques et techniques : maîtrise suffisante de l'environnement et des outils pour travailler sereinement ;
Le fait d'adapter l'usage des outils aux besoins en termes d'apprentissage des élèves.

Ce dernier aspect apparaît en creux dans les catégories « préparation de la classe » « adaptation des technologies », car si la séance n'est pas préparée, l'enseignant n'a pas anticipé la façon de provoquer des apprentissages en utilisant des technologies.

SAP est donc programmé pour que l'utilisateur prenne conscience des facettes et des dilemmes liés à l'activité d'entretien d'analyse de pratique et qu'il identifie des savoirs qui permettent de mettre en évidence le rôle des technologies dans les apprentissages des élèves. Nous avons fait le choix de nous centrer sur l'usage d'un LGD dans le cadre d'une conjecture puis d'une démonstration.

L'usage des technologies pour enseigner la géométrie

Nous nous appuyons sur la littérature de recherche pour identifier les connaissances et savoirs qui pourraient être transmis lors d'une formation.

Concernant la géométrie dynamique, un point central apparaît : la résistance des objets (Laborde, 2000 ; Restrepo, 2008). En effet l'espace dans lequel les élèves travaillent au sens de Berthelot & Salin (1992) est spécifique puisqu'il apporte un système de contraintes inédit. Une construction correcte est une construction qui résiste au déplacement. Ce système de contraintes nécessite d'ailleurs une appropriation par l'élève que l'on peut analyser en termes de genèses instrumentales (Rabardel, 1995). Le travail de Restrepo (2008) met en évidence ces processus de genèses instrumentales.

L'analyse du travail des élèves peut également se faire en regardant le LGD comme un milieu résistant permettant les apprentissages (Laborde & Capponi, 1994). Un LGD peut également permettre des constructions molles (qui s'opposent aux constructions résistantes) (Laborde, 2000). Ces constructions permettent à l'élève de conjecturer des propriétés. Les tracés géométriques obtenus dans le logiciel nécessitent, pour être analysés, de mobiliser un cadre permettant de les distinguer des dessins papier-crayon et des objets mathématiques idéaux. Nous proposons d'utiliser la distinction dessin/figures et les représentations sémiotiques (Duval, 1994).

Pour comprendre les usages du LGD nous proposons de le différencier des autres outils numériques qui permettent de faire de la géométrie :

les instruments virtuels comme ceux qui sont présents dans « instrument en poche »[7] ou les logiciels pour tableaux numériques interactifs (TNI) tels que Activinspire®, Smart note® ou open Sankoré. Ces instruments simulent la manipulation d'objets réels ;
les interpréteurs de langage comme Rédigeo, tiré de la suite « les langagiciels [8]» et qui permet de mesurer la différence entre ce que l'élève dit et ce que ce qu'il dit veut dire. Le logiciel interprète un discours écrit réalisé par l'élève ;
les logiciels qui travaillent sur la démonstration comme GeometriX[9]. Ce logiciel s'appuie sur une construction géométrique pour ensuite travailler sur la mise en relation entre hypothèses, théorème et conclusion.

[7] https://instrumenpoche.sesamath.net
[8] https://www.langagiciels.com
[9] http://geometrix.free.fr/site/index.php

La problématique sous-jacente à ce travail peut être celle de l'impact de l'usage d'un LGD sur la conjecture et sur la preuve. En effet les élèves peuvent être convaincus par la manipulation sur le logiciel. Est-ce que cette conviction modifie leur relation à la démonstration ?

La programmation de SAP

La simulation est donc programmée pour faire apparaitre des propositions d'interactions qui mettent en évidence les différents dilemmes et les savoirs didactiques en jeu. Par exemple l'intervention : « *Je te propose de lancer la vidéo de ta séance, on la regarde ensemble et tu arrêtes quand tu veux, à un moment qui te semble intéressant.* » se situe plutôt dans l'idée de faire émerger les représentations de l'enseignant, de ne pas trop le guider alors que celle-ci : « *Je vais te montrer des extraits de ta séance et je vais te poser des questions sur tes choix.* » est plus guidante et cette dernière : « *Je peux te dire ce que j'ai vu, en fait tu as demandé à tes élèves la définition de la médiatrice, ils t'ont dit on construit une médiatrice et tu leur as expliqué que l'on ne disait pas UNE médiatrice, mais LA médiatrice.* » est réellement guidante.

Les choix donnés à l'utilisateur fournissent des éléments de connaissances didactiques ou liés à la gestion de classe par exemple :

> « Pour moi c'est clair que les élèves qui bougent un sommet du triangle et s'étonnent que l'une des médiatrices ne bouge pas, ces élèves-là ne se sont pas suffisamment approprié et la figure, et le fonctionnement du LGD. Ça veut dire que tu n'as pas passé assez de temps sur la construction, parce que, là, tu passes à la conjecture sur un truc qui n'est pas du tout clair pour les élèves. Si tu décides de faire faire la figure aux élèves, il faut que tu ailles au bout du processus. »

Ou

> « Tout d'abord, j'ai remarqué que tu fais à la place de l'élève. Pour certains de tes élèves, la résistance des objets n'est pas comprise. Ils ne la prennent pas comme un critère de vérification du dessin. Enfin tu n'utilises pas assez le fait de faire bouger les points de base du dessin, justement comme critère. Enfin, tes dernières interventions sur l'unicité de la médiatrice changent de sujet alors que les élèves sont en pleine construction. »

Ainsi la programmation du logiciel utilise des connaissances et des savoirs visés dans la formation.

La conception et l'usage des simulateurs font donc apparaître le besoin d'identifier et de définir des connaissances et des savoirs de formation, mais quel est leur statut ? Leur nature ? La façon dont le formateur peut les identifier et les choisir ? Quelle est l'épistémologie de ces savoirs et quels sont les cadres théoriques qui permettent d'y accéder ?

IV. LA PLACE DES CONNAISSANCES ET DES SAVOIRS DANS LE TRAVAIL SUR LA SIMULATION

Une des spécificités du simulateur est qu'il met au cœur du travail du concepteur et du formateur la question des connaissances et des savoirs de formation. Pour le concepteur, la programmation des outils nécessite qu'il identifie des « lois » qui régissent le fonctionnement du logiciel. Ce sont ces lois qui seront perçues, analysées voire discutées par l'utilisateur de la simulation et donc qui feront l'objet du travail de formation. La simulation rend donc publics les connaissances et les savoirs de formation que les concepteurs ont embarqués au sein du simulateur. Le formateur quant à lui doit concevoir un dispositif de formation qui permette de faire émerger les connaissances de formation et de faire formuler les savoirs. Définir et comprendre les connaissances et les savoirs de formation est donc crucial dans le travail sur la simulation.

1. Quelle épistémologie des savoirs de formation ?

Nous prenons comme définition de l'épistémologie celle de (Piaget, 1967) qui amène à poser trois questions : la question gnoséologique : qu'est-ce que la connaissance ? ; la question méthodologique : comment est-elle constituée ou engendrée ? ; Comment est appréciée la valeur ou la validité de cette connaissance ? Cela amène la caractérisation de l'enquête épistémologique par les questions suivantes :

Qu'est-ce qu'une connaissance ?
Comment est-elle produite ?
Comment est-elle validée ?
Sur quoi se fonde-t-elle ?
Comment les connaissances sont-elles organisées ?
Comment progressent-elles ?

Concernant les connaissances et les savoirs de formation, il nous semble que nombre de ces questions n'ont pas encore trouvé de réponses. Prenons par exemple quelques-unes des connaissances issues de notre travail et essayons d'émettre des hypothèses sur leur épistémologie :

C1 : s'assurer de l'attention des élèves durant la phase de consigne avec du matériel demande des stratégies spécifiques

Elle est liée à la gestion de la classe, elle semble fournir un point de vigilance qui permet à l'enseignant de prendre des décisions à chaud ou en amont de la séance pour assurer la bonne transmission de la consigne. Elle n'apparaît pas comme clairement formulée et certains enseignants l'utilisent de façon implicite, en acte. Elle pourrait être produite, validée et se fonder sur l'expérience individuelle ou celle d'une communauté. Il semble que la validité de ce type de geste professionnel ne soit pas de portée générale, en effet à de nombreuses reprises les enseignants nous ont dit faire différemment, avoir d'autres habitudes avec leurs classes, dans leur établissement ou ne pas pouvoir mettre en place certaines stratégies avec leurs élèves. Si les stratégies semblent avoir une valeur locale, l'attention à porter à ce moment, elle, semble générale. Le concept de geste professionnel semble propice pour analyser l'organisation et l'évolution de cette connaissance.

C2 : l'intersection des médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit à ce triangle et connaissance d'au moins une démonstration.

Cette connaissance semble plus simple à analyser dans la mesure où elle appartient à une science : les mathématiques ont une épistémologie propre. Néanmoins, le fait que cette connaissance soit également une connaissance professionnelle amène que sa valeur et son fondement ne dépendent pas que de la science mathématique, mais également des mathématiques enseignées. L'intérêt de cette connaissance dans l'enseignement au collège, le fait qu'elles apparaissent ou non dans les programmes nous amène à émettre l'hypothèse qu'en tant que savoir de formation elle a une épistémologie propre.

C3 : La connaissance de la résistance des objets dans un LGD

Cette connaissance est issue des recherches en didactique, elle est validée par les travaux de recherche qui ont été menés et publiés. Elle se fonde sur des cadres théoriques déjà explicités : milieu (Douady, 1994), types d'espaces (Berthelot & Salin, 1992) qui permettent d'analyser son fonctionnement.

C4 : connaître et comprendre des dilemmes inhérents au travail d'analyse de pratique professionnelle lors d'un entretien de formation.

Cette connaissance porte sur le travail du tuteur. Elle est issue de la recherche sur la formation et l'analyse du travail. Elle se fonde sur des cadres théoriques comme la clinique de l'activité (Clot, 2001).

Ce premier travail, sur quelques exemples, d'émission d'hypothèses montre la complexité et la diversité de l'épistémologie des savoirs de formation.

2. Identifier les connaissances et savoirs de formation et analyser leurs épistémologies

Pour déterminer l'épistémologie des savoirs de formation, il faut d'abord les identifier. Le rapport « Vers un nouveau modèle de formation tout au long de la vie » (Filâtre, 2016) place en recommandation n° 1 :

> *« Considérer la formation à partir de l'exercice du métier et du développement professionnel.*
>
> *- Recommandation 1 – Expliciter les attendus de la profession au-delà des principales compétences professionnelles décrites dans le référentiel des métiers du professorat et de l'éducation. »*

Cela confirme notre hypothèse de savoirs et connaissances de formation en grande partie impensés, tout du moins explicités.

Les formations actuelles des enseignants visent bien l'acquisition de connaissances et de savoirs, mais lesquels ? En faisant un premier travail de recueil, mais aussi de compréhension de la façon dont ces connaissances et savoirs sont déterminés par les formateurs nous pourrons mieux appréhender leur épistémologie spécifique. Au regard des analyses des travaux sur le simulateur plusieurs questions se posent :

Quelle est la place de la recherche et de ses résultats ?

Quelle est la place des communautés de formateurs (collègues, circonscription, COPIRELEM, IREM, APMEP, AGEEM..) ?

Quelle est l'influence des ressources disponibles (Grand N, petit X, ERMEL…) ?

Pour mener ce travail, nous envisageons de mener des entretiens avec des formateurs et d'analyser en détail les programmes de formation initiale et continue des enseignants. Ce travail nous permettrait de caractériser et catégoriser les savoirs et connaissances de formation actuellement développés.

Une question théorique va alors se poser, celle des cadres permettant d'appréhender la nature de ces connaissances. Puisque ces savoirs sont liés à la pratique professionnelle, est-ce que les cadres d'analyse des pratiques pourraient permettre, en identifiant sur quelles dimensions des pratiques ces savoirs jouent, une première catégorisation. Dans ce cas, la double approche (Robert, 1999), la structuration du milieu (Margolinas, 2002), la théorie de l'action conjointe (Sensevy, 2008 ; Schubauer, Leutenegger, Ligozat, & Fluckiger, 2007), *the four parameters* (Saxe, 1991), le praticien réflexif (Schon, 1983), la clinique de l'activité (Clot, 2001), la didactique professionnelle (Pastré, 2011) et la théorie de l'activité (Engestrom, 2000) sont des cadres à considérer au regard des savoirs que nous allons identifier. Par ailleurs au moins un cadre spécifique, PCK : pedagocical content knwolegde (Hill, Ball, & Schilling, 2008) aborde explicitement une typologie de connaissances à et pour enseigner. Ce cadre devra donc également être analysé. Enfin, notre travail porte sur les pratiques d'enseignement des mathématiques utilisant les technologies et le cadre PCK a été étendu en incluant ces usages : Technological Pedagogical Content Knowledge TPCK (Koehler & Mishra, 2008). Là encore il nous faudra explorer les potentialités de ce cadre.

V. CONCLUSION

En partant de l'analyse des pratiques de formation et de celle des difficultés des enseignants, nous avons identifié le besoin de faire, de façon plus étroite, le lien entre la pratique professionnelle et la formation disciplinaire/didactique. Cela nous a conduits à proposer des dispositifs permettant d'importer la pratique professionnelle dans la formation didactique. Ces dispositifs sont centrés sur l'analyse a priori, la confrontation à une pratique par l'usage de la vidéo, l'analyse de pratiques, le recherche d'alternatives et l'identification de problématiques générales (Pouyanne & Robert, 2004). Robert et Rogalski (2015) alors même qu'elles travaillent avec ce modèle de formation pour un public de formateurs, identifient la problématique de la nécessité d'un temps long.

Ce type de formation repose également sur la capacité du formateur à saisir les apports des participants pour faire émerger les problématiques générales. Comment alors importer ce type de dispositifs dont les caractéristiques nous permettent de répondre aux besoins de formation des enseignants, dans une formation initiale (master MEEF) ou continue, contrainte en temps ? Comment rendre ce type de formation moins dépendante du formateur et des enseignants ? Pour répondre à ces questions, l'usage de la simulation en lieu et place de la vidéo nous permet de contrôler les situations, d'augmenter le nombre de confrontations possibles et d'anticiper sur les connaissances et les savoirs de formation.

Nous avons donc construit deux simulateurs : un simulateur informatique de classe (SIC) et un simulateur d'analyse de pratiques (SAP). L'expérimentation de ces deux outils nous a permis d'abord de vérifier leur acceptabilité par les stagiaires et les étudiants et de montrer la stabilité des connaissances et savoirs qui émergent par un processus de validation interne : ce sont bien ceux que nous avions anticipés et ils apparaissent indépendamment du public. Ce travail ouvre de nombreuses pistes. Après avoir vérifié la stabilité des connaissances et savoirs, il nous faut tester ce que nous appellerons leur robustesse c'est-à-dire le fait qu'ils puissent émerger indépendamment du formateur. Il nous faut également développer des scénarios de formation sur les autres aspects identifiés comme besoins de formation. Si pour cela nous avons un outil adapté aux conditions de l'analyse de pratiques, il nous faut encore trouver un logiciel permettant de programmer des simulations informatiques de classe.

La simulation, en offrant au chercheur une situation intégralement contrôlée permet de déployer des méthodologies qui sont impossibles sinon. Nous avons par exemple recueilli les choix de plusieurs centaines d'enseignants sur le SIC ce qui nous permet de tester des hypothèses comme la relation entre l'ancienneté du formateur, son niveau d'étude, son sexe et ses choix didactiques. La grande quantité de données recueillies et le fait que les situations soient strictement identiques permettent cette analyse. Avec le SAP, il est possible de jouer sur l'aspect de l'avatar : un homme, une femme, une personne jeune, une personne qui semble plus expérimentée ainsi que ses attitudes faciales joie, tristesse, colère, indécision… Est-ce que ces paramètres ont une influence sur les choix opérés par l'utilisateur ? Il est vrai que ce type de question nécessite un travail avec d'autres disciplines comme la sociologie ou la psychologie et qu'il porte sur les pratiques simulées et non réelles, mais il permettrait d'émettre des hypothèses qui pourraient être testées avec d'autres méthodologies.

En travaillant à la conception et à l'utilisation des simulateurs, nous avons été amenés à identifier et instancier dans les logiciels des connaissances et des savoirs professionnels. Or ces derniers semblent peu apparents dans les formations et leur épistémologie mal connue. Ce travail d'identification et d'enquête épistémologique est pour nous un enjeu important à venir.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABBOUD-BLANCHARD, M. (1994). *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire des mathématiques : symptômes d'un malaise : Un exemple : l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège. Histoire et perspectives sur les mathématiques.* Thèse de doctorat, Université Denis Diderot Paris VII.

ABBOUD-BLANCHARD, M. & EMPRIN, F. (2009). Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE. *Recherche & formation, 62 (3)*, 125-140.

ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. Recherches en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3),* 281-308.

BERTHELOT, R. & SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065/document

BRAU-ANTONY, S. & MIEUSSET, C. (2013). Accompagner les enseignants stagiaires : une activité sans véritables repères professionnels. *Recherche et formation*, *72*, 27-40.

BUCHETON, D. & SOULE, Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées. *Éducation & didactique*, 3(3), 29-48.

CLOT, Y. (2001). Méthodologie en clinique de l'activité. L'exemple du sosie. *Les méthodes qualitatives en psychologie*, 125-147.

DOUADY, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères-IREM*, *15*, 37-61.

DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, *17*, 121-138.

EMPRIN, F. (2007). *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII. Consulté à l'adresse http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00199005

EMPRIN, F. (2011). Construction d'un Simulateur Informatique de Classe (SIC) pour la formation des enseignants. *In* M. BETRANCOURT, C. DEPOVER, V. LUENGO, B. DE LIEVRE & G. TEMPERMAN. (EDS), *Actes du colloque EIAH 2010* (pp.409-422). MONS : Éditions de l'UMONS - ATIEF (Association des Technologies de l'information pour l'Education et la Formation).

EMPRIN, F. & JOURDAIN, C. (2010). Les représentations des enseignants sur l'échec scolaire : étude à partir d'une question contraposée. *In L.* Mottier Lopez, C. Martinet, & V. Lussi (Eds), *Actes du congrès international AREF (Actualité de la recherche en éducation et en formation)*. (pp.1-9). Genève.

EMPRIN, F., & SABRA, H. (2014). Classroom Simulator, a new instrument for teacher training. The case of mathematical teaching. *in* FUTSCHEK, G. & KYNIGOS, C. (EDS), *Proceedings of the 3rd international constructionism conference,* Vienna, Vol. 1, 247-257.

EMPRIN, F. & SABRA, H. (2015). Simulateur informatique de classe pour la formation des enseignants : l'enseignement de la résolution de problèmes. *Actes du XLIIe colloque COPIRELEM.* Besançon : Association pour l'élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école (ARPEME). Paris.

ENGESTROM, Y. (2000). Activity theory as a framework for analyzing and redesigning work. *Ergonomics, 43(7),* 960-974.

FILATRE, D. (2016). Rapport sur la formation continue : vers un nouveau modèle de formation tout au long de la vie. *Comité national de suivi de la réforme de la formation des enseignants et personnels d'éducation*, 32.

HILL, H. C., BALL, D. L. & SCHILLING, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372‑400.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 289-322.

KOEHLER, M. J. & MISHRA, P. (2008). *Introducing tpck. Handbook of technological pedagogical content knowledge (TPCK) for educators*, 3-29.

LABORDE, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44(1-2)*, 151-161.

LABORDE, C. & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14(1)*, 165-210.

LAGRANGE, J.-B. & CALISKAN-DEDEOGLU, N. (2009). Usages de la technologie dans des conditions ordinaires : le cas de la géométrie dynamique au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(2), 189-226.

LANEELLE, X. & PEREZ-ROUX, T. (2014). Entrée dans le métier des enseignants et transition professionnelle : impact des contextes de professionnalisation et dynamiques d'acteurs. *L'orientation scolaire et professionnelle*, *43(4)*, 1-19. https://journals.openedition.org/osp/pdf/4488

LE BOTERF, G. (2011). *L'ingénierie de la formation : quelles définitions et quelles évolutions* ? Dunod.

MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur, In J.-L. DORIER, M. ARTAUD, M. ARTIGUE, R. BERTHELOT & R. FLORIS (Eds.), *Actes de la 11e École d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS, C. (2012). Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières ? *Acte du colloque Sociologie et didactiques : vers une transgression des frontières*, Haute Ecole pédagogique de Vaud, 17-44.

MATTEÏ-MIEUSSET, C. (2013). *Les dilemmes d'une pratique d'accompagnement et de conseil en formation. Analyse de l'activité réelle du maître de stage dans l'enseignement secondaire*. Thèse de doctorat, REIMS.

PASTRE, P. (2005). *Apprendre par la simulation : de l'analyse du travail aux apprentissages professionnels*. Octarès.

PASTRE, P. (2011). La didactique professionnelle. *Éducation Sciences & Society*, 2(1), 83.

PIAGET, J. (1967). Logique et connaissance scientifique. *In Encyclopédie de la Pléiade.* Gallimard, coll.

POUYANNE, N. & ROBERT, A. (2004). Formation d'enseignants de mathématiques du second degré : élément pour une formation, Document pour la formation des enseignants. *Cahier bleu de DIDIREM*.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

RATINAUD, P. & MARCHAND, P. (2012). Application de la méthode ALCESTE à de « gros » corpus et stabilité des « mondes lexicaux » : analyse du « CableGate » avec IRaMuTeQ. *Actes des 11eme Journées internationales d'Analyse statistique des Données Textuelles,* 835-844.

REINERT, M. (2008). Mondes lexicaux stabilisés et analyse statistique de discours. *Actes de la JADT 2008*, 981-993.

RESTREPO, A. M. (2008). Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6^{e}. Thèse de doctorat, Université J. Fourrier.

ROBERT, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia*, *15*, 123-157.

ROBERT, A. (2005). Sur la formation des pratiques des enseignants du second degré. *Recherches et Formation*, *50*, 75-90.

ROGALSKI, J. & ROBERT, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs. Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. In V. Lussi Borer, M. Durand & F. Yvon. *Analyse du travail et formation dans les métiers de l'éducation* (pp.93-113). Louvain-la-Neuve : De Boeck Supérieur. Consulté à l'adresse https://www.cairn.info/analyse-du-travail-et-formation-dans-les-metiers--9782804194079-p-93.htm

RUTHVEN, K., & HENNESSY, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational studies in mathematics, 49(1)*, 47-88.

SAXE, G. (1991). *Culture and Cognitive Development: Studies in Mathematical Understanding*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

SCHON, D. (1983). *The reflective practitioner*. London : Routledge.

SCHUBAUER, M.-L., LEUTENEGGER, F., LIGOZAT, F. & FLUCKIGER, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. In G. Sensevy & A. Mercier. *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp.51-91). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

SENSEVY, G. (2008). Le travail du professeur pour la théorie de l'action conjointe en didactique. *Recherche & formation, 1*, 39-50.

CADRES THEORIQUES POUR ANALYSER L'ACTIVITE INSTRUMENTEE DE L'ENSEIGNANT DE MATHEMATIQUES

Maha **ABBOUD**

Janine **ROGALSKI**

Laboratoire de Didactique André Revuz

Maha.abboud-blanchard@univ-paris-diderot.fr

rogalski.muret@gmail.com

Résumé

L'utilisation des technologies numériques en classe de mathématiques continue à se développer. Cependant, cette utilisation reste complexe et demeure régie par des incertitudes lors des mises en place avec les élèves même quand les séances sont bien préparées en amont. Cet article présente des cadres et des outils théoriques pour analyser l'activité d'enseignants lors de séances intégrant des logiciels de mathématiques. Nous présentons d'abord notre cadre théorique et nous le comparons ensuite à un autre, proche, anglais. Nous montrons ensuite que malgré la différence des contextes, des notions mathématiques en jeu et des choix méthodologiques, les résultats en termes d'analyse des pratiques enseignantes sont très proches. Ils participent à la compréhension de la complexité de l'intégration des technologies dans les pratiques ordinaires des enseignants et des décisions qu'ils sont amenés à prendre in situ et sur le long terme.

Mots clés

Technologies, enseignants, activité, tensions, perturbations, hiccups

Préambule

Ce texte ne reprend pas exactement l'exposé fait lors du séminaire national de février 2018. La recherche qui a été présentée lors du séminaire a déjà fait l'objet d'un article détaillé publié dans le n° 37 de la revue RDM (Abboud & Rogalski, 2017) auquel nous renvoyons le lecteur. Nous choisissons pour le texte présent de discuter d'une comparaison avec un cadre théorique anglais portant sur la même thématique de recherche et que nous avions évoqué, sans le détailler, dans notre exposé oral. Cette comparaison a été faite conjointement avec les collègues anglais au sein d'un projet commun franco-anglais, dont les résultats feront l'objet d'un numéro spécial de la revue Annales de didactique et de sciences cognitives (Abboud & Coles (Ed.), 2018).

I. INTRODUCTION

L'intégration de la technologie dans le travail de classe est un processus complexe pour les enseignants (Hoyles & Lagrange, 2005 ; Clark-Wilson, Robuti & Sinclair, 2014). Des études qui ont déjà exploré la nature de cette complexité (Abboud-Blanchard, 2013 ; Clark-Wilson,

2010) ont montré le besoin de cadres théoriques et d'outils méthodologiques qui permettraient à la fois aux chercheurs de comprendre la complexité des pratiques enseignantes et aux formateurs d'aider les enseignants à développer ces pratiques en conséquence.

En Angleterre comme en France, les enseignants de mathématiques ont introduit dans leurs pratiques des environnements numériques en vue d'aider les élèves à s'engager dans l'étude des notions mathématiques et de leur donner du sens (Ruthven, Hennessy & Deaney, 2008). Les enseignants, suivant souvent en cela les recommandations du curriculum, conçoivent des tâches basées sur l'utilisation d'environnements numériques où les élèves travaillent sur le mode de l'investigation, impliquant d'abord l'émission de conjectures visant ensuite la généralisation. Toutefois, cette ouverture à l'exploration des élèves conduit les enseignants à rencontrer le défi pédagogique de gérer les réponses multiples des élèves et leurs interactions avec ces environnements. Dans ce papier, nous présentons et comparons deux cadrages théoriques différents visant à analyser l'activité de l'enseignant dans ces environnements.

Le premier cadre (le contexte français) s'appuie à la fois sur la Double Approche (Robert & Rogalski, 2005) étendue aux environnements technologiques (Abboud-Blanchard, 2013) et sur l'Approche Instrumentée (Rabardel, 1995). Ce cadre, considère l'utilisation de la technologie par l'enseignant comme une gestion d'un environnement dynamique 'ouvert' (qui accroît les incertitudes de l'enseignant dans la classe). Y sont introduites, les notions de tensions et de perturbations de l'itinéraire cognitif prévu pour les élèves qui permettent d'analyser finement l'activité des enseignants en classe (Abboud & Rogalski, 2017).

Le second cadre (le contexte anglais) s'appuie sur la théorie de Vérillon et Rabardel (1995) de l'activité instrumentée du sujet dans des environnements avec médiation technologique. Il introduit la notion théorique de '*hiccup'*,[1] qui décrit la rupture épistémologique que rencontre l'enseignant lorsqu'il développe sa connaissance professionnelle à travers sa pratique, développement stimulé par l'utilisation que font les élèves des technologies (Clark-Wilson, 2010).

Les deux cadres relèvent tous les deux de la théorie de l'activité instrumentée (Rabardel, 1995). Nous explorons leurs différences en ce qui concerne la relation entre chercheurs et enseignants dont l'activité est étudiée. En particulier, deux points de vue différents sont utilisés dans la manière dont chacun 'entre' dans la classe de mathématiques pour essayer de comprendre les aspects de la connaissance des enseignants (et celle des élèves) qui sont en jeu dans l'utilisation de la technologie. Alors que le contexte, les objectifs de la recherche et les outils théoriques et méthodologiques diffèrent, il apparaît que les résultats (en termes de pratiques des enseignants) sont proches dans les deux cadres. Cela soulève la question de savoir si on peut connecter les deux perspectives théoriques et, si oui, comment.

II. CADRE ET CONTEXTE FRANÇAIS

Comme précisé plus haut, le texte de cette partie est basé sur des extraits d'un article paru dans RDM (Abboud & Rogalski, 2018)

[1] En anglais, le mot « hiccup » (hoquet en français) a un sens supplémentaire : petit problème ou difficulté qui ne dure pas longtemps.

L'objectif de cette recherche est de comprendre ce qu'expérimente un enseignant "ordinaire" utilisant un outil technologique d'une façon non régulière mais en essayant de l'intégrer dans la pratique habituelle de la classe. D'une part, nous cherchons à identifier ce qui détermine le choix des tâches/activités prévues de l'élève et leur devenir pendant le déroulement de la séance. D'autre part, nous visons à analyser l'activité de l'enseignant pendant le déroulement de la séance en étudiant les caractéristiques de la gestion qu'il met en place pour maintenir les élèves dans l'itinéraire cognitif prévu (Robert et Rogalski, 2005), les incertitudes qu'il éprouve et qui sont inhérentes à ce type d'environnement dynamique ouvert (Rogalski, 2003).

Nous situons notre travail dans le cadre de la double approche ergonomique et didactique (Robert et Rogalski, 2002, 2005) et l'adaptation qui en avait été faite pour l'étude de l'activité de l'enseignant utilisant les technologies par Abboud-Blanchard (2013, 2015). La double approche est inscrite dans la théorie de l'activité au sens où ce sont les activités des sujets en situation (enseignants, élèves) qui organisent les observations et les analyses. En nous plaçant dans le cadre de la théorie de l'activité, nous reprenons aussi à notre compte l'idée développée par Beguin et Rabardel (2000) que la relation entre le sujet (pour nous : l'enseignant) et l'objet de son activité (le rapport entre savoir mathématique et élève) passe par la médiation de l'instrument et que ce dernier n'est pas neutre.

Nous introduisons une notion centrale pour les analyses que nous effectuons : il s'agit de la notion de tensions. Ce sont des manifestations de conflits entre la visée de l'enseignant de maintenir l'itinéraire cognitif voulu et la nécessité de s'adapter aux phénomènes qui surgissent et qui sont dus à la dynamique de la situation de classe. Ces tensions, lorsqu'elles ne sont pas gérées ou le sont de façon inappropriée conduisent à des perturbations qui éloignent le travail mathématique en classe de l'itinéraire prévu.

Dans notre approche, nous nous séparons de la manière dont Kaptelin et Nardi, (2012) utilisent les termes de tensions et de perturbations, dans leur sens commun, quand ils présentent le concept de contradictions qui est central dans le cadre théorique d'Engeström pour étudier comment les systèmes d'activité se développent (Engeström, 2008). La contradiction comme moteur de développement du système d'activité enseignant concernerait éventuellement le long terme de la vie professionnelle, mais nous considérons ici le court terme de la situation de classe.

Dans notre approche, la notion de tension relève non pas d'une contradiction mais est liée à une "compétition" entre les buts de l'enseignant. Un exemple typique en est celui de la tension entre poursuivre l'itinéraire cognitif prévu pour la séance et traiter une erreur qui peut être largement partagée et nécessiterait un retour en arrière (remise à niveau). Nous considérons dans cet article des tensions et perturbations relatives au niveau local d'une séance de classe ; néanmoins il existe des tensions à un niveau plus global de l'activité de l'enseignant. Un exemple classique en est la tension entre « finir le programme » et assurer des acquisitions conceptuelles chez tous les élèves.

En reprenant le schéma de l'activité instrumentée de Beguin et Rabardel (2000) dans le contexte d'un enseignant préparant sa séance avec un outil technologique puis en la menant avec sa classe, nous pouvons illustrer notre propre utilisation des notions de tensions et perturbations comme suit :

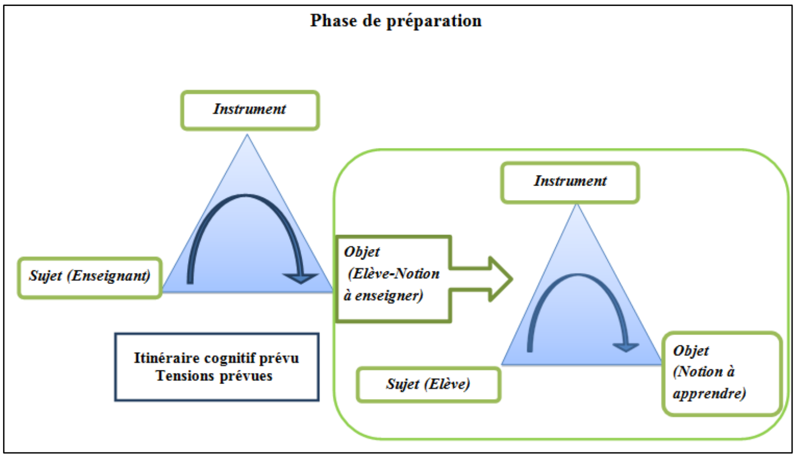


Figure 1 : Activité instrumentée de l'enseignant en phase de préparation.

Lors de la phase de préparation, l'objet de l'activité de l'enseignant est le rapport élève-notion à enseigner, la relation avec cet objet étant médiée par un instrument technologique, voire par un ensemble d'instruments (technologique et papier/crayon). Il y envisage un itinéraire cognitif prenant en compte l'activité instrumentée supposée de l'élève. Sa genèse d'usages, personnel et professionnel, des technologies (Abboud-Blanchard, 2013) y joue un grand rôle. Il peut ainsi prévoir des tensions qui peuvent survenir et les façons de les gérer. Un exemple fréquent en est lorsque les élèves partent dans une stratégie d'essais-erreurs qui se déroulent très rapidement, sans réelle analyse de la rétroaction de la machine. On a observé plusieurs fois que dans ces cas, l'enseignant prévoit de demander aux élèves de mettre par écrit (sur papier) les essais qu'ils ont faits ainsi que leurs issues (Abboud-Blanchard, Cazes &Vandebrouck, 2013).

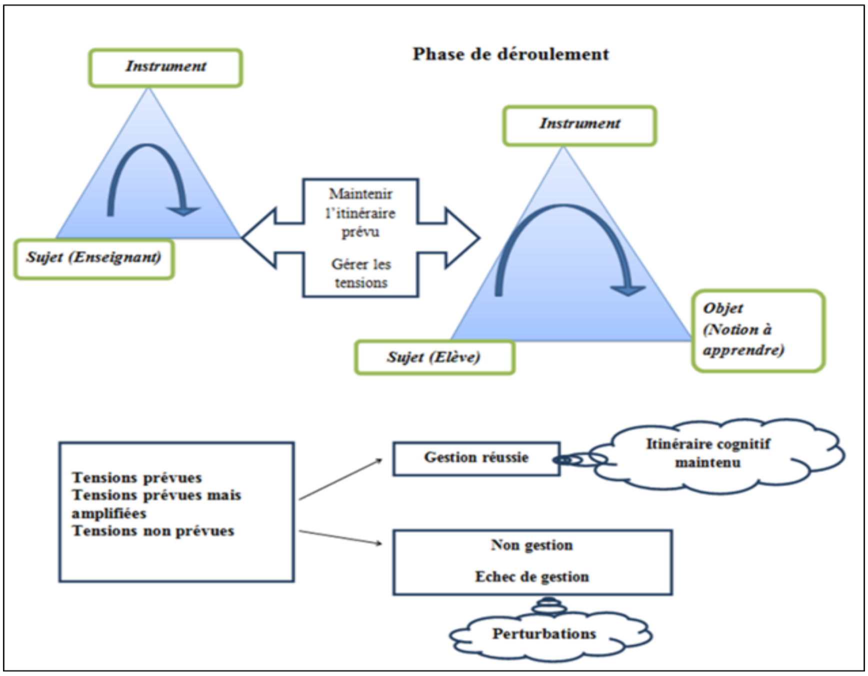


Figure 2 : Tensions et perturbations dans l'activité instrumentée de l'enseignant dans la phase de déroulement.

Pendant la phase de déroulement en classe, l'activité de l'enseignant entre en interaction avec l'activité de l'élève et sa relation avec la notion à apprendre, médiée par les instruments de l'élève (prévus ou non par l'enseignant). Dans le cas de l'utilisation d'un instrument technologique, l'enseignant est souvent confronté à des tensions dues au rôle que l'environnement technologique joue dans l'activité de l'élève. Certaines de ces tensions surgissent comme prévu lors de la préparation et l'enseignant en a anticipé la gestion, qu'il met en œuvre. Elles peuvent également avoir été prévues mais apparaître d'une façon amplifiée non attendue. D'autres enfin n'ont pas été prévues. Dans les deux derniers cas, deux issues sont possibles. Soit, l'enseignant arrive à maintenir l'itinéraire prévu en gérant la tension a minima ou a maxima. Cette gestion de l'imprévu est souvent due à des routines de sa pratique et/ou à une genèse avancée d'usage professionnel des technologies. Soit, l'enseignant n'arrive pas, ou gère mal, la tension ce qui conduit à des perturbations faisant dévier l'itinéraire cognitif prévu des élèves. Notons que les tensions peuvent concerner les différents pôles du système et présenter différentes formes (cognitive, pragmatique, temporelle ou relative au contrat didactique).

Dans la dynamique de l'activité de l'enseignant, des tensions peuvent avoir été anticipées, avec des réponses préparées ; elles peuvent être non prévues, et dans ce cas soit être traitées en temps réel par l'enseignant qui met en œuvre des routines, soit identifiées mais sans que l'enseignant ait les moyens d'y faire face immédiatement, soit non perçues sur le moment. Dans les deux derniers cas, il va se produire des perturbations, au sens où le déroulement va diverger de l'itinéraire cognitif prévu.

Une tension prévue par l'enseignant dans l'activité instrumentée des élèves peut être un déterminant de l'itinéraire cognitif prévu et des formes de déroulement.

Certaines des tensions non prévues par l'enseignant l'amènent à prendre des décisions in situ qui vont réorienter son activité effective par rapport à l'activité didactique qu'il avait prévue. Il peut réagir en se focalisant sur le traitement de la tension, en perdant de vue son objectif didactique principal. Moins l'enseignant est familier avec l'instrument utilisé, plus le nombre des tensions non prévues est important et plus le traitement de ces tensions risque de se traduire par des perturbations dans l'activité prévue (aussi bien de l'enseignant que de l'élève).

Nous faisons l'hypothèse que comprendre et qualifier ces tensions et ces perturbations est essentiel pour décrire la dynamique des relations entre les différents éléments du système de l'activité et appréhender les difficultés des enseignants lors de l'intégration d'un instrument technologique. Ceci nous permettra aussi de comprendre les facteurs déterminant le développement professionnel de l'enseignant relativement à l'usage des technologies.

1. Des choix méthodologiques

Nous nous sommes refusées à formater les modes d'observation du travail des enseignants, au risque sinon de le perturber ou même de dénaturer- ce qui serait particulièrement problématique pour la recherche : nous n'aurions plus l'activité "naturelle" de l'enseignant, mais une activité sous contrainte. Nous avons donc laissé une large latitude aux enseignants sur les modes d'enregistrement et sur le choix des séances. Pour la constitution des données, nous avons choisi de partir d'enregistrements ne faisant pas intervenir les chercheurs dans la classe. Les enseignants s'enregistrent (vidéos) eux-mêmes ou se font enregistrer par un collègue, en choisissant leur séance : il s'agit de réduire au maximum l'influence d'un observateur chercheur sur les activités (enseignant / élèves) dans la classe. Les enseignants fournissent également des documents de préparation de la séance, et d'autres utilisés au cours de la séance (les leurs et parfois des documents "élèves"). Des entretiens différés (pour éviter des interventions sur la séance étudiée) peuvent spécifiquement concerner ou non les séances, mais visent l'accès à des déterminants personnels et sociaux de l'activité de l'enseignant.

III. CADRE ET CONTEXTE ANGLAIS

Nous traduisons ici librement des extraits d'un article écrit conjointement avec Alison Clark-Wilson (Abboud et al., 2018)

Le but de ce travail de recherche est d'étudier la manière dont les enseignants de mathématiques de l'enseignement secondaire apprennent de leurs expériences de classe pour s'approprier de nouveaux outils technologiques dans leur enseignement (Clark-Wilson 2010 ; Clark-Wilson & Noss, 2015). Au point de départ se trouve la théorie de l'Activité Instrumentée de Vérillon et Rabardel (1995) qui a été adoptée pour avoir des idées sur la nature des interactions entre le Sujet (ici, le focus a été fortement mis sur l'enseignant), l'Instrument (l'outil technologique choisi dans la classe) et l'Objet de l'activité (l'enseignement d'un contenu de mathématique en classe).

Le développement professionnel des enseignants est conceptualisé comme un « apprentissage situé », l'enseignant développant sa connaissance professionnelle 'dans et à travers' sa pratique de classe (Lave 1988). Cette connaissance professionnelle concerne les notions mathématiques en jeu, comment elles sont enseignées et apprises, quelles ressources peuvent être utilisées en plus de la connaissance institutionnelle du curriculum.

Les analyses de soixante-six leçons d'une cohorte de quinze enseignants sur la période d'une année scolaire ont montré que les enseignants rapportaient régulièrement (dans leurs réflexions d'après séance) qu'ils avaient rencontré dans leur classe des incidents qu'ils n'avaient pas anticipé dans la préparation de la séance. Ces '*hiccups*' ont été définis comme les perturbations vécues par les enseignants pendant la séance, qui sont déclenchées par l'utilisation de la technologie, et qui semblaient éclairer des discontinuités dans leur connaissance et ouvrir des opportunités pour leur développement épistémologique (Clark-Wilson, 2010). L'idée principale de ce nouveau concept théorique est que l'enseignant doit avoir repéré le hiccup pour pouvoir développer sa pratique. En effet, on peut interpréter les hiccups comme des éléments contribuant de manière cruciale d'un apprentissage professionnel situé de l'enseignant.

1. Des choix méthodologiques

Le point central de la méthodologie utilisée dans la recherche a été d'utiliser une approche ethnographique pour observer de près les mises en œuvre en classe, les réflexions sur les tâches et le développement des enseignants. Pour cela, il a fallu développer avec les enseignants une relation professionnelle assez proche pour qu'ils se sentent suffisamment en confiance avec le chercheur pour qu'il observe et enregistre leur enseignement, et pour qu'ils s'expriment librement dans des entretiens et échanges après les séances de classe. De plus, les enseignants ont partagé avant les séances les éléments de préparation (les fichiers informatiques, les transparents de présentation, le plan écrit de la séance, le travail des élèves). Arès les séances, ils ont rédigé une réflexion sur leur enseignement, qui a souvent inclus une tâche redéfinie.

IV. CONTRASTE ET COMPARAISON DES DEUX CADRES

Si on contraste les études anglaise et française, une différence majeure est relative au positionnement des chercheurs. Dans l'étude anglaise, c'est une relation 'd'intériorité' qui est établie entre le chercheur et l'enseignant participant, ce qui appelé « un processus itératif de conception, innovant, appuyé sur une base théorique – pour obtenir des résultats développementaux fiables » (Jaworski, 2004 – notre traduction). Dans l'étude française, les chercheurs travaillent à partir de vidéos d'une séance choisie par l'enseignant, et identifient les tensions et perturbations d'un point de vue 'extérieur'. Même si des interactions entre les chercheurs et l'enseignant peuvent avoir lieu ultérieurement, l'enseignant n'est pas impliqué dans le processus de recherche, et est considéré comme un enseignant 'ordinaire'. Le processus de recherche vise une certaine généralisation pour l'analyse de l'activité de l'enseignant et pour la formation.

Un second contraste concerne la manière dont les incidents de classe sont identifiés et situés dans un cadre théorique. Dans la recherche anglaise, les hiccups sont considérés comme un 'construit' épistémologique permettant d'identifier des aspects de l'apprentissage professionnel (mathématique) de l'enseignant. En comparaison, l'étude française considère l'existence de tensions (et de perturbations possibles) comme inhérente aux caractéristiques de la situation de l'enseignement impliquant des environnements technologiques – comme outils à la fois pour l'enseignant et pour ses élèves. La recherche n'est pas centrée sur l'évolution de la connaissance professionnelle de l'enseignant mais sur la dynamique de la gestion des tensions, et sur les facteurs influençant cette dynamique : d'une part, elle dépend des 'contingences' de la vie mathématique de la classe, et d'autre part, elle est orientée par plusieurs types de déterminants de l'activité de l'enseignant (des déterminants institutionneles à des déterminants personnels).

De la comparaison entre les analyses relatives aux deux cadres plusieurs thèmes emergent qui concernent les perspectives théoriques respectives, les approches méthodologiques, l'unité pertinente d'analyse, les issues de la recherche et les visées à long terme. La discussion va ici aborder chacun de ces thèmes.

En termes de perspectives théoriques, dans la recherche anglaise, la notion de 'hiccup' est employée pour mettre en relation l'apprentissage professionnel des enseignants au cours du temps lorsqu'ils intègrent la technologie numérique dans leurs séances de mathématiques. Dans la recherche française, l'idée des tensions et perturbations vise une compréhension meilleure des questions impliquées dans l'intégration de la technologie dynamique mathématique dans les séances conduites par des enseignants 'ordinaires'.

La méthodologie de la recherche française comporte l'analyse de cours basée sur un enregistrement vidéo de la séance, avec un entretien post-séance avec l'enseignant (offrant des informations sur les déterminants de ses pratiques), l'analyse des tâches proposées aux élèves et de la manière dont il les met en œuvre dans la classe. Dans la recherche anglaise, la méthodologie implique des entretiens avant et après la séance, l'observation de la séance (enregistrée par ailleurs par vidéo), avec l'analyse des artefacts tels que le plan de l'enseignant pour la séance, les fichiers informatiques, les productions des élèves, etc.

Étant donnée la perspective théorique de la recherche anglaise, l'unité d'analyse est l'apprentissage professionnel individuel de l'enseignant. Ici, la 'granularité' est à la fois 'micro' en termes d'analyse détaillée de chaque 'hiccup' et 'macro' en cherchant à identifier les trajectoires d'apprentissage des enseignants au cours du temps relatives à leur connaissance mathématique, technologique et pédagogique. Dans la recherche française, étant donnée la perspective théorique, l'unité d'analyse est l'anticipation et l'adaptation dans la mise en œuvre de la leçon de la part de l'enseignant observé. La granularité est 'micro' quant à l'analyse détaillée des tensions et des perturbations, 'meso' en termes d'analyse des adaptations par l'enseignant durant la séance elle-même et dans une séance ultérieure, et 'macro' en termes d'inférences sur les déterminants de l'activité de l'enseignant.

L'intention à long terme de chacun des projets est de produire une compréhension plus profonde des moyens par lesquels les enseignants utilisent les outils mathématiques technologiques, de sorte à outiller la conception et la mise en œuvre d'activités orientées vers le développement professionnel. Du côté anglais, l'hypothèse est qu'il pourrait être possible de traiter des types de 'hiccups' courants dans les tâches professionnelles des enseignants en formation initiale ou continue pour encourager la réflexion sur et par la pratique de classe. Du côté français, un but supplémentaire est de produire des outils théoriques et méthodologiques qui puissent être utilisés par les formateurs de manière à améliorer leur compréhension de la complexité des pratiques d'enseignants ordinaires relatives à la technologie et d'adapter en conséquence leur pratiques de formation. Les entreprises communes aux deux approches contribuent à répondre à l'appel fait par Sinclair et al. (2016, p. 704) à « poursuivre les recherches sur la préparation que font les enseignants [dans l'usage de la technologie] pour les aider à assurer à leurs élèves une meilleure compréhension des notions et de la théorie géométriques » (notre traduction[2]).

V. CONCLUSION

En conclusion, comme le montrent les éléments de discussion présentés ci-dessus, les études française et anglaise éclairent les deux faces d'une même pièce, celle des pratiques d'enseignants avec la technologie numériques en classe. En effet, l'analyse française est plus particulièrement orientée vers les raisons qui produisent des tensions et des perturbations, alors que l'analyse anglaise met l'accent sur les conséquences de 'hiccup' pour l'apprentissage professionnel de l'enseignant.

Alors que le contexte (des 'classes ordinaires') et les intentions à long terme des deux études (contribuer aux cadres théoriques à propos de l'intégration de la technologie) sont convergentes, les complexités de l'intégration de la technologie dans les classes de mathématiques sont éclairées de manière qui explique les décisions de l'enseignant en classe et au cours du temps. En contrastant les deux études nous avons mis en lumière les nombreux défis auxquels les enseignants sont confrontés pour intégrer la technologie dans leur classe.

Dans ce texte, nous avons montré comment les hiccups, tensions et perturbations qui ont lieu lors de l'intégration des technologies numériques dans la classe de mathématique conduit à un apprentissage pour l'enseignant. Cependant, ces mêmes hiccups, tensions et perturbations peuvent potentiellement éloigner définitivement l'enseignant de l'utilisation de cette technologie ou le conduire à une utilisation a minima. Jones (2011, p. 44) a proposé le notion de 'canalisation', un terme utilisé pour indiquer qu'il y a une voie normale de développement, pour rendre compte de l'idée que quand les complexités de l'introduction de la technologie

[2] Develop « further research on the preparation of teachers [in the use of technology] to help them ensure that students gain deeper understanding of geometrical concepts and theory ».

dans la classe de mathématiques sont mieux connues , alors l'utilisation de cette technologie « *a plus de chance d'atteindre un point de non-retour et de conduire l'enseignement sur une voie radicalement nouvelle* » [notre traduction[3]]. Notre recherche contribue à une meilleure compréhension des complexités d'une telle intégration de la technologie dans la classe de mathématiques vers ce qui pourrait être un tel point de non-retour.

La théorisation que montrent les études française et anglaise est issue de l'analyse de séances utilisant des technologies numériques Toutefois, les notions théoriques élaborées (hiccups, tensions, perturbations) peuvent tout à fait être utiles pour analyser des séances de classe dans lesquelles les technologies numériques ne sont pas utilisées. Cela appelle une validation par des études ultérieures.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABBOUD-BLANCHARD, M. (2013). *Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Etudes des pratiques et de la formation des enseignants. Synthèses et nouvelles perspectives.* Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris Diderot.

ABBOUD, M., CLARK-WILSON, A., JONES, K. & ROGALSKI, J. (2018). Analysing teachers' classroom experiences of teaching with dynamic geometry environments: Comparing and Contrasting two approaches. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* Special English-French issue, 93-118.

ABBOUD, M. & COLES, A. (EDS.) (2018). Anglo-French use of theory in mathematics teaching, teaching development and teacher education. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* Special English-french issue.

ABBOUD-BLANCHARD, M., CAZES, C. & VANDEBROUCK, F. (2013). Théorie de l'activité et double approche : genèses d'usage de bases d'exercices en ligne. In J.B. Lagrange (Ed.), *Les technologies numériques pour l'enseignement : usages dispositifs et* genèses (pp. 37-54). Toulouse : Octarès.

ABBOUD, M. & ROGALSKI, J. (2017). Des outils conceptuels pour analyser l'activité de l'enseignant "ordinaire" utilisant des technologies en classe. *Recherches en didactique des mathématiques, 37 (2/3),* 161-216.

BEGUIN, P. & RABARDEL, P. (2000). Concevoir pour les activités instrumentées. *Revue d'intelligence artificielle, 14(1-2),* 35–54.

CLARK-WILSON, A. (2010). Emergent pedagogies and the changing role of the teacher in the handheld mathematics classroom. *ZDM mathematics education, 42(7),* 747-761.

CLARK-WILSON, A. & NOSS, R. (2015). Hiccups within technology mediated lessons: a catalyst for mathematics teachers' epistemological development. *Research in Mathematics Education, 17(2),* 92-109.

CLARK-WILSON, A., ROBUTTI, O. & SINCLAIR, N. (EDS.) (2014). *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development*. London: Springer.

ENGESTRÖM, Y. (2008). Quand le centre se dérobe : la notion de knotworking et ses promesses. (When the center does not hold: The concept and prospects of knotworking). *Sociologie du travail, 50,* 303–330.

HOYLES, C. & LAGRANGE, J.B. (EDS.) (2010). *Digital technologies and mathematics education. Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*. New York: Springer.

JAWORSKI, B. (2004). Insiders and outsiders in mathematics teaching development: the design and study of classroom activity. *Research in Mathematics Education, 6***,** 3-22.

JONES, K. (2011). The value of learning geometry with ICT: lessons from innovative educational research. In A. Oldknow & C. Knights (Eds), *Mathematics Education with Digital Technology* (pp. 39-45). London: Continuum.

KAPTELIN, V. & NARDI, B. (2012). *Activity Theory in HCI: Fundamentals and reflections*. Morgan and Claypool.

LAVE, J. (1988). *Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life.* New York: Cambridge University Press.

RABARDEL P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

RUTHVEN, K., HENNESSY, S.,

& DEANEY, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers and Education, 51(1),* 297-317.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies (RCESMT / CJSMTE), 2(4),* 505-528.

[3] Technology use « may be more likely to reach a 'pipping point' and move the pathway of education to a radically new route ».

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th grade class. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 269-298.

ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23(3),* 343-388.

SINCLAIR, N., BUSSI, M. G. B., DE VILLIERS, M., JONES, K., KORTENKAMP, U., LEUNG, A. & OWENS, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM: Mathematics Education*, *48(5),* 691-719

VERILLON, P. & RABARDEL, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10(1),* 77-102.

DUO D'ARTEFACTS NUMERIQUE ET MATERIEL POUR L'APPRENTISSAGE DE LA GEOMETRIE AU CYCLE 3

Anne **VOLTOLINI**

IFE, Ens Lyon, laboratoire S2HEP

Anne.voltolini@ac-grenoble.fr

Résumé

La recherche présentée ici porte sur l'introduction des technologies numériques pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3, spécifiquement lorsque celles-ci sont utilisées conjointement à des activités papier-crayon. Le premier objectif est de caractériser la notion de duo d'artefacts numérique et matériel tirée des travaux de Maschietto et Soury-Lavergne (2013). L'approche instrumentale de Rabardel (1995) permet d'établir les critères d'une articulation fructueuse, entre un artefact numérique et un artefact matériel, favorisant les conditions d'un apprentissage au sens de Brousseau (1998). L'enjeu suivant est alors d'élaborer un duo d'artefacts incluant le compas matériel en vue de la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. Des expérimentations en classe ont été le moyen de valider deux hypothèses : le duo en situation provoque l'élaboration d'un nouvel instrument compas pour faire pivoter un segment et induit une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. En outre, la mise en cohérence du modèle des conceptions de Balacheff (1995) et la notion d'instrument de Rabardel (1995) permet d'identifier l'évolution des conceptions des élèves sur le triangle au fil de la situation, en particulier, l'apparition d'une vision 1D du triangle comme une ligne brisée fermée.

Mots clés

Situation didactique, duo d'artefacts, genèses instrumentales, conceptions, géométrie, déconstruction dimensionnelle, manipulation, EIAH (Environnements Informatiques pour l'apprentissage humain), école primaire

I. LE PROBLEME ETUDIE ET LES OBJECTIFS DE CE TRAVAIL

Dans cette recherche (Voltolini, 2017), je me suis interrogée sur la possibilité d'élaborer des situations didactiques (Brousseau 1998), intégrant les technologies numériques, pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3 (fin de l'école primaire, début du collège). L'idée de départ, est d'introduire le numérique dans des pratiques ordinaires de classe, sans qu'il vienne se substituer aux activités de manipulation dans l'espace sensible ou aux activités papier-crayon déjà pratiquées. Mon expérience d'enseignante m'a convaincue que la différence de résolution d'une même tâche dans les deux environnements, numérique et papier-crayon, pouvait être une potentialité à exploiter. C'est donc dans la perspective d'une mobilisation conjointe des deux environnements, numérique et papier-crayon, que s'est inscrit ce travail. L'objectif de cette recherche est donc d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à des activités papier-crayon afin de proposer des situations didactiques qui engagent les élèves dans l'acquisition de connaissances géométriques sur les figures. Mon hypothèse est que des manipulations de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur peuvent être une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et des tracés géométriques aux instruments.

Dans un premier temps, ce texte explicitera les points clés sur lesquels se focaliser pour élaborer une situation didactique, d'enseignement de la géométrie au cycle 3, incluant les technologies numériques. La deuxième partie de ce texte exposera les caractéristiques établies pour définir le concept de duo d'artefact numérique et matériel. Dans sa troisième partie, le texte présentera un duo d'artefacts particulier dédié à la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. Enfin, la quatrième partie sera consacrée aux expérimentations et à l'analyse de l'effet du duo d'artefacts sur les apprentissages.

1. Apprendre la géométrie au cycle 3

Elaborer des situations d'enseignement de la géométrie au cycle 3, réclame d'analyser ce que signifie faire de la géométrie à la fin de l'école primaire. Duval (2005) précise que faire de la géométrie nécessite de décomposer toute forme en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions. Mettre en œuvre la déconstruction dimensionnelle des formes est selon Duval un processus indispensable pour permettre un travail géométrique sur les figures. La vision « surfaces » est la vision première des figures chez les enfants. Dans les premières années de la scolarité, la figure est la trace d'un objet matériel, une surface avec un bord. L'apprentissage de la géométrie aura pour objectif d'ajouter à cette vision initiale une vision « lignes » et une vision « points » (Perrin-Glorian & Godin, 2014). Par exemple au cours de la scolarité un triangle est successivement : une forme de bois ou plastique que l'on peut déplacer et manipuler (Cycle 1, école maternelle) ; une surface que l'on peut tracer sur papier avec un gabarit ou un pochoir (Cycle 2) ; une figure à trois côtés que l'on construit à l'aide d'instruments (Cycle 3) ; enfin un réseau de trois droites, un ensemble de trois points, des relations entre segments, droites et points, des propriétés caractéristiques. *« Le rapport des élèves aux figures est l'un des points clé de leur entrée dans la géométrie »* (Duval & Godin, 2005 p 7). Il s'agit donc d'amener les élèves à changer de regard sur la figure et de les accompagner à passer d'une vision « surfaces » d'une figure à une vision faisant apparaître des unités figurales 1D et 0D.

Duval (2005) estime que la construction de figures est l'entrée nécessaire dans la géométrie. En effet les figures géométriques euclidiennes ont la particularité d'être constructibles à l'aide d'instruments. Parmi les instruments permettant des tracés graphiques certains produisent des formes 2D, par exemple les gabarits ou les pochoirs. D'autres produisent des formes 1D comme la règle, le compas, certains gabarits. Les outils usuels de géométries, incluant les logiciels de géométrie dynamique, sont essentiellement producteurs de tracés 1D. Ainsi la construction d'une figure s'appuie sur sa déconstruction en tracés 1D et 0D constructibles à l'aide d'un instrument. Saisir la procédure de tracé d'une figure aux instruments est une chose mais comprendre pourquoi les instruments utilisés sont adéquats pour réaliser cette construction en est une autre. L'usage d'un instrument ne va pas de soi, il doit être élaboré (Perrin-Glorian, Mathe & Leclercq, 2013) et l'enseignement de la géométrie doit contribuer à cette élaboration. Rabardel (1995) distingue l'artefact qui est l'objet donné à un sujet et l'instrument qui est construit au cours du processus de genèse instrumentale. Un instrument est une entité mixte constituée de l'artefact mobilisé par l'individu et d'une composante psychologique, les schèmes personnels d'utilisation pour un type de tâche donnée. L'artefact devient un instrument quand le sujet se l'est approprié et l'a intégré dans son activité. En géométrie cohabitent deux types d'artefacts : les artefacts tangibles (la règle, le compas, les gabarits… ainsi que les outils de géométrie dynamique) et les artefacts théoriques (les objets mathématiques, les théorèmes) (Houdement, 2007). L'utilisation d'un instrument plutôt qu'un autre pour produire une figure peut induire une vision différente de la figure. L'objectif est donc de proposer des problèmes de construction mobilisant différents types d'artefacts conduisant à de nouveaux instruments et permettant d'intégrer des visions géométriques différentes sur les figures.

Un problème du cycle 3 : la construction du triangle à la règle et au compas

Le choix de cet apprentissage, la construction du triangle à la règle et au compas, résulte des programmes du cycle 3, et d'une analyse théorique du triangle reposant sur sa déconstruction dimensionnelle. Dans l'enseignement, cette construction (Figure 1) n'est souvent associée qu'à une procédure de tracé et non à la conceptualisation du triangle.

La règle graduée, un obstacle à franchir

La construction du triangle à la règle et au compas est un apprentissage qui résiste au sens où les élèves tracent spontanément le triangle à la règle graduée uniquement. Tant que, dans leur scolarité les élèves n'ont mobilisé que la règle graduée pour tracer des segments de longueurs données et donc pour tracer les côtés d'un polygone, la règle graduée est alors l'instrument naturellement associé au tracé du triangle ; elle permet de tracer ses trois côtés de mesures données. L'utilisation de la règle graduée pour construire un triangle de longueurs des côtés données peut être vue comme un obstacle. La résistance de cet obstacle tient à une vision 2D du triangle comme « une surface délimitée par trois côtés » ; elle tient aussi au fait que souvent les longueurs des côtés sont données par leur mesure.

Une construction qui repose sur la conceptualisation du point

Construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, c'est montrer que le triangle existe théoriquement et produire un tracé de ce triangle, ou montrer que le triangle n'existe pas théoriquement, c'est-à-dire que les trois longueurs données ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. La construction attendue (Figure 1) consiste à tracer à la règle un segment d'une des trois longueurs souhaitées, puis à tracer avec le compas deux cercles (arcs de cercle) centrés sur les extrémités de ce segment avec pour rayon chacune des deux autres longueurs. Le compas en produisant un cercle, produit tous les points qui sont à distance fixe de son centre. Les intersections des deux cercles permettent de trouver deux points situés à des distances données de chaque extrémité du premier segment tracé. Ces deux points, s'ils existent, sont les sommets de deux triangles symétriques construits de part et d'autre du segment initial. Construire un triangle nécessite donc de décomposer le triangle en tracés constructibles, en particulier il s'agit de construire le 3ème sommet du triangle comme intersection de deux cercles (arcs de cercle) à tracer.

Figure 1 : Illustration de la construction du triangle à la règle et au compas.

La construction du triangle à la règle et au compas présente donc plusieurs difficultés. D'une part, cette construction repose sur une déconstruction du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D obtenu comme intersection de deux lignes, difficilement appréhendé par les élèves de l'école primaire. D'autre part le compas ne produit pas le contour du triangle mais produit des tracés auxiliaires, des cercles (arcs de cercle) n'appartenant pas au triangle et il doit être vu comme un instrument permettant de réaliser des égalités de longueurs.

Trois enjeux pour l'élaboration d'une situation didactique

A la lumière des travaux de Duval, Perrin-Glorian et Godin (Duval & Godin, 2005; Perrin-Glorian & Godin, 2014), trois idées directrices soutiennent l'élaboration d'une situation.

Occasionner une déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point
Le premier enjeu est d'adopter une démarche qui tienne compte du développement cognitif des élèves. Mettre un accent particulier sur la déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point, difficilement appréhendable par les élèves, est au cœur de cette démarche. Il s'agit donc d'élaborer une situation favorisant l'émergence d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle.

Amener la pertinence géométrique du compas dans la construction du triangle
Le deuxième enjeu est de dépasser la procédure d'utilisation du compas et d'induire sa pertinence géométrique dans la construction du triangle. Il s'agit de faire prendre conscience à l'élève de la nécessité d'un nouvel instrument, autre que la règle graduée, pour réaliser cette construction. La situation doit donc provoquer une nouvelle genèse instrumentale du compas.

Caractériser le cercle, objet mathématique, pour identifier une distance
Faire évoluer les connaissances des élèves sur le cercle, est le troisième enjeu. La situation doit donc aussi permettre d'amener le cercle, objet mathématique, comme instrument pour identifier une distance dans la construction du triangle.

2. Rôle des technologies numériques

De nombreuses études issues de la recherche en didactique reflètent un optimisme pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques avec les technologies numériques (Hoyles & Lagrange, 2010; Sinclair & Baccaglini-Franck, 2015; Drijvers et al., 2016; Moyer-Packenham, 2016). Les environnements, sensible et papier-crayon, ne sont pas pour autant négligés mais il apparaît que majoritairement, les technologies numériques sont utilisées pour remplacer une activité de manipulations d'objets matériels ou une activité papier-crayon. Si les deux environnements, numérique et matériel, sont mobilisés, les tâches proposées dans les différents environnements, sensible, papier-crayon, numérique, sont la plupart du temps disjointes. Des études comme par exemple celle de Gueudet, Bueno-Ravel et Poisard (2014) relatent une utilisation simultanée d'un outil matériel et d'un outil numérique. Dans ces travaux, ni la cohérence entre l'utilisation de chaque outil, numérique et matériel, ni l'élaboration de l'artefact numérique étant donné l'artefact matériel ne sont interrogées. De plus, à ma connaissance, aucune recherche n'a été réalisée sur la façon dont les élèves adaptent leurs connaissances de l'environnement papier-crayon à un environnement numérique ou réciproquement. C'est donc dans la perspective d'une utilisation conjointe des environnements, numérique et matériel ou papier-crayon, et de leur complémentarité que cette étude se fait. L'utilisation conjointe d'un environnement numérique et d'un environnement papier-crayon dans une même situation didactique peut-elle être une plus-value pour les apprentissages ?

Avant d'étudier la valeur ajoutée d'une utilisation conjointe des environnements numérique et papier-crayon il est important de rappeler le potentiel et la plus-value des environnements de géométrie dynamique pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie.

Potentialités de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie

L'utilisation des environnements de géométrie dynamique induit pour les élèves de nouvelles façons d'apprendre et de comprendre les concepts mathématiques (Laborde et al., 2006). Souvent, les élèves se contentent d'appliquer des procédures pour résoudre un problème, sans donner de sens à celles-ci. La géométrie dynamique permet de créer des représentations dynamiques d'objets mathématiques qui peuvent être facilement manipulées et ainsi peut engendrer des pratiques pédagogiques qui favorisent l'expérimentation et l'étude des objets mathématiques et pas uniquement l'apprentissage de procédures de résolution. Les environnements de géométrie dynamique, sont des outils de visualisation, de réification, et de manipulation directe de représentations d'objets mathématiques et de certaines de leurs propriétés (Artigue, 2008). Les logiciels de géométrie dynamique qui permettent la manipulation directe proposent à l'utilisateur d'agir directement sur les objets mathématiques et ainsi transforment la façon habituelle (dans l'environnement papier-crayon) d'agir sur ceux-ci (Laborde & Laborde, 2014). Avant d'entreprendre une action, les élèves ont à prendre des décisions qui sont influencées par leurs connaissances sur les objets en jeu. Les représentations dynamiques d'objets mathématiques offrent donc aux élèves une nouvelle fenêtre pour la conceptualisation et peuvent être un moyen de favoriser la transition d'une appréhension perceptive des figures vers une appréhension géométrique.

Les environnements numériques sont donc favorables à la création de milieux (Brousseau, 1998) et conduisent à l'élaboration de nouveaux types de tâches, engageant l'élève à interagir avec l'environnement, qui ne peuvent exister dans l'environnement papier-crayon (ibid). Le fait que ce soit l'environnement qui réagit, indépendamment de l'enseignant, contribue à une meilleure appropriation du problème par les élèves ; un environnement de géométrie dynamique permet à l'utilisateur d'invalider les stratégies erronées et d'être soutenu dans la recherche d'une stratégie.

La géométrie dynamique en complément et en interaction avec l'utilisation des instruments usuels de géométrie : question de recherche

L'objet de ce travail est d'utiliser les potentialités d'un environnement de géométrie dynamique pour organiser un milieu qui permette d'explorer le triangle au travers d'une analyse visuelle différente de celle induite par la règle graduée et le compas. Les technologies numériques peuvent-elles être un moyen pour accompagner la conceptualisation 1D du triangle ? L'élaboration d'un artefact numérique qui permet de travailler hors de l'environnement papier-crayon et donc hors de l'utilisation des instruments usuels de géométrie peut-il être un moyen de franchir l'obstacle de la règle graduée et d'amener la nécessité de l'usage d'un nouvel instrument compas autre que la règle graduée pour réaliser la construction d'un triangle de longueurs des côtés données ?

L'enjeu est donc d'introduire la géométrie dynamique articulée à l'usage du compas matériel. Il s'agit de développer un environnement numérique, qui inclut une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentant dynamiques d'objets mathématiques, articulé à l'usage du compas matériel. La question sous jacente est alors d'étudier les conditions d'une articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel qui soit une plus-value pour les apprentissages. Comment une telle articulation peut-elle influencer la conceptualisation ? Ce qui conduit à définir la notion de duo d'artefacts numérique et matériel.

II. LE CONCEPT DE DUO D'ARTEFACTS NUMERIQUE ET MATERIEL

L'objectif ici, est de caractériser ce qui fait duo : à quelles conditions la mobilisation conjointe de deux artefacts, numérique et matériel, dans une situation peut-elle être qualifiée de duo d'artefacts ?

1. Une proposition de définition d'un duo d'artefacts

Dans un premier temps, il est utile de justifier les choix de vocabulaire, matériel et numérique. L'adjectif matériel est préféré à l'adjectif tangible, au sens où les objets et/ou les outils considérés sont réels, faits de matière. Ces objets et/ou outils matériels, peuvent être manipulés, touchés, ils sont donc aussi tangibles. Cependant, des objets numériques peuvent aussi être tangibles. En particulier lors de l'usage de technologies tactiles, les doigts sont directement en contact avec l'écran, les interactions se font par le toucher. Laborde et Laborde (2014) parlent aussi de représentations dynamiques et tangibles à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique. L'adjectif numérique est choisi même si en mathématiques le terme numérique se rapporte aussi aux nombres et peut donc, dans certaines situations, prêter à confusion. Le mot virtuel est rejeté car il se rapporte à ce qui n'est qu'en puissance, qu'en état de simple possibilité par opposition à ce qui est en acte. Or justement, comme il a été dit précédemment, les environnements numériques permettent de re-matérialiser les objets mathématiques abstraits, qui sont invisibles et virtuels.

Dans le prolongement des travaux de Machietto et Soury-Lavergne (2013, 2015) un duo d'artefacts est défini comme l'articulation fructueuse d'un artefact numérique et d'un artefact matériel au sein d'une même situation didactique. Les travaux de ces auteures se font dans la perspective d'une articulation, avec une recherche de continuités et de ruptures, entre les deux artefacts, numérique et matériel. Elles montrent que la complémentarité et les ruptures entre les deux artefacts, numérique et matériel, peuvent être favorables à la conceptualisation. La clé d'une utilisation enrichissante des potentialités d'une technologie numérique consiste à y créer un artefact articulé à un artefact matériel donné, de manière à ce que cette articulation induise une valeur ajoutée pour la conceptualisation. Cette articulation, pour être un réel gain didactique, doit répondre à des critères précisés dans les deux prochains paragraphes.

Une situation didactique pour faire exister le duo

« Les outils n'ayant de sens que par rapport aux situations dans lesquelles ils sont mis en œuvre » (Bruillard & Vivet, 1994), l'utilisation d'artefacts, numérique et matériel, ne permet l'apprentissage que lorsqu'ils sont mobilisés dans une situation didactique. Composer un duo d'artefacts c'est donc organiser un milieu, en lien avec l'apprentissage visé, comprenant les deux artefacts et susceptible de rétroactions favorables à cet apprentissage. La situation didactique problématise le recours aux artefacts numérique et matériel, éléments essentiels du milieu et met en œuvre l'articulation entre les manipulations avec chaque artefact. Dans un duo d'artefacts la façon dont l'outil numérique est conçu et exploité conjointement à un outil matériel donné est primordiale. L'élaboration de l'outil numérique et des tâches qui le mobilisent doit permettre de tirer profit du potentiel didactique d'un environnement numérique afin de favoriser certaines trajectoires d'apprentissage. Le cœur d'un duo repose sur la plus-value que peut apporter l'artefact numérique pour la conceptualisation. L'objectif est que chaque artefact enrichisse l'autre, en particulier que l'artefact numérique sollicite de

nouvelles stratégies de résolution; il est primordial que les stratégies suscitées par un artefact complètent celles suscitées par l'autre. Ainsi, dans l'élaboration d'un duo d'artefacts et de la situation qui lui permet d'exister, il s'agit de faire en sorte que l'artefact numérique soit une simulation qui offre une gamme de stratégies et d'interactions, contrôlées par l'utilisateur, qui enrichissent celles avec l'artefact matériel.

Des genèses instrumentales associées

Une analyse des genèses instrumentales et des schèmes d'utilisation (Rabardel, 1995) de l'artefact matériel participe à l'élaboration d'un artefact numérique en termes de continuité et discontinuité entre les deux artefacts. L'approche instrumentale fournit le cadre théorique pour élaborer l'artefact numérique et l'articulation entre les deux artefacts numérique et matériel. Dans une situation mobilisant un duo d'artefacts, numérique et matériel, chaque artefact entraine le développement de schèmes et par conséquent les deux genèses instrumentales s'entremêlent. Dans un duo d'artefacts, le projet est que chaque artefact enrichisse l'autre afin que les instruments construits en bénéficient. Articuler les artefacts c'est donc les mettre en relation tant en continuité qu'avec certaines discontinuités judicieusement choisies. L'articulation des artefacts doit autoriser, dans un premier temps, des tentatives d'assimilation des schèmes d'utilisation de manière à ce que les éléments qui font l'objet de l'apprentissage soient reliés à ce que le sujet connaît déjà. Dans un second temps, il faut qu'un déséquilibre apparaisse afin que des processus d'accommodation des schèmes soient mis en œuvre pour retrouver un nouvel équilibre et induire un apprentissage (Figure 2). De tels déséquilibres sont provoqués par une discontinuité entre les deux artefacts ; l'artefact numérique doit inclure des éléments supplémentaires relativement à l'artefact matériel. La continuité entre les deux artefacts participera quant à elle à ce que les schèmes d'utilisation construits soient plus puissants, plus polyvalents ; ils pourront ainsi être mobilisés dans un plus grand nombre de tâches. Les instruments fondés par le sujet lors de la mobilisation d'un duo ne sont pas simplement deux instruments juxtaposés ; l'instrument 2 incorpore l'instrument 1. Ce qui conduit à formuler une première hypothèse de recherche : Un duo d'artefacts, numérique et matériel, provoque des genèses instrumentales associées qui conduisent, en particulier, à une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel.

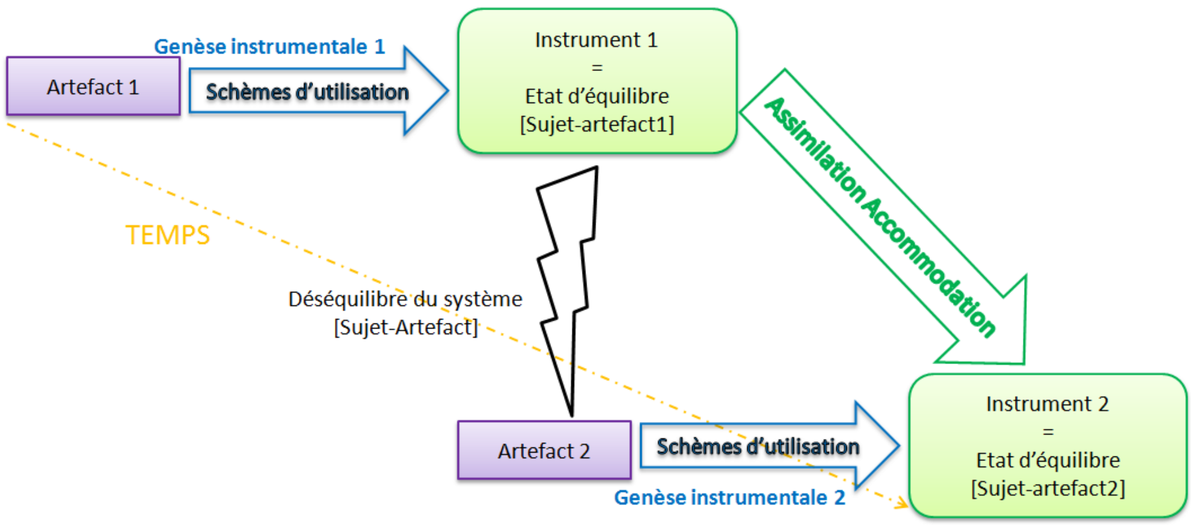


Figure 2 : Un duo d'artefacts engendre des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre.

2. Dualité instrument-conception

Au-delà de la caractérisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel, il s'agit d'étudier les processus d'apprentissage engagés dans la mobilisation d'un duo d'artefacts dans une situation. Dans cette étude, la notion d'instrument de Rabardel (1995) et la notion de conception de Balacheff (1995) sont mises en cohérence.

Caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument

C'est au fond de l'action que se trouve la conceptualisation (Vergnaud, 1996). C'est donc au travers des actions avec les artefacts, numérique et matériel, que la conceptualisation est regardée. Rabardel explique que pour un type donné de tâches, réalisées à l'aide d'un artefact, l'utilisateur développe des structures cognitives, les schèmes d'utilisation, et ainsi élabore un instrument. Les schèmes d'utilisation développés par le sujet en activité ont une fonction épistémique qui traduit la conceptualisation (Rabardel, 1995). Vergnaud (1990) précise lui aussi que c'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances en acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. *« Les schèmes reposent toujours sur une conceptualisation implicite »* (ibid, p. 139). Ainsi un instrument constitué par un sujet est une connaissance du sujet. La mobilisation de cet instrument dans une tâche est donc une instanciation de cette connaissance-instrument par une situation. Le modèle cK¢ de Balacheff (1995) est un moyen de caractériser les connaissances implicites du sujet liées à la constitution d'un instrument. Ce modèle permet d'expliciter des indicateurs pour identifier les conceptions d'un sujet en situation. Balacheff distingue le concept abstrait, de la connaissance d'un sujet ou d'une institution et d'une conception qui est une instanciation de la connaissance d'un sujet par une situation. Dans le modèle cK¢, une conception C est définie par un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel P est un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire ; R est un ensemble d'opérateurs qui permettent la transformation des problèmes ; L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R ; Σ est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de C. Les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire sont situés dans les opérateurs et les contrôles. Un opérateur permet l'action, caractérisée comme la conséquence d'un prédicat. Un contrôle, contient les éléments de décision sur le bien-fondé de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état de résolution d'un problème. Un instrument, dans sa partie schèmes d'utilisation, intègre donc des opérateurs qui mobilisent l'artefact et des contrôles : d'une part des contrôles permettant de juger de la validité et des modalités de son utilisation et d'autre part, des contrôles relatifs aux représentations des concepts en jeu. C'est pourquoi dans cette étude, les schèmes d'utilisation sont identifiés à partir d'opérateurs et de contrôles, ce qui permet de caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument. Les genèses instrumentales résultent donc de combinaisons d'opérateurs et de contrôles.

Le système [sujet-milieu] enrichi grâce au duo

Les ressorts de la conceptualisation apparaissent comme l'interaction du sujet avec le milieu (Brousseau, 1998). La mobilisation d'un duo d'artefacts dans une situation, à travers l'articulation des artefacts, augmente les occasions de rencontre sujet-milieu ; différents milieux se confrontent. Le duo en situation rend possible la réitération d'expériences en faisant varier les contraintes au cours de l'alternance entre actions instrumentées numériques et actions à l'aide des instruments matériels, et ainsi favorise l'émergence et la transformation des connaissances. Grâce au duo, le système [sujet-milieu] est enrichi et multiplie les occasions d'émergence et de transformation des conceptions au cours de la situation. Un duo est favorable à la mise en œuvre d'un parcours de conceptions d'un état initial supposé à un état final attendu du système [sujet-milieu] au cours de l'alternance entre les actions instrumentées avec les instruments numériques et celles utilisant les instruments matériels. Cela conduit à la formulation d'une seconde hypothèse de recherche : Un duo d'artefacts numérique et matériel, mobilisé dans une situation, favorise l'évolution des conceptions du sujet et l'acquisition de connaissances.

III. UN DUO D'ARTEFACTS ET UNE SITUATION POUR LA CONCEPTUALISATION DU TRIANGLE

L'enjeu est de composer un duo d'artefacts dédié à la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. L'artefact matériel du duo est le compas. Il s'agit alors de développer conjointement un artefact numérique articulé au compas matériel et une situation qui mobilise le duo. L'objectif est de donner du sens à l'usage du compas dans ce problème de construction et simultanément de favoriser la conceptualisation du triangle.

L'apprentissage est un processus permettant le passage d'une conception à une autre. Modéliser l'apprentissage nécessite donc d'organiser les conceptions relatives à une connaissance et de définir une problématique d'évolution. Ceci nous amène à caractériser, a priori, les conceptions du triangle et leur évolution.

1. Une problématique d'évolution des conceptions du triangle

L'idée est de définir une problématique d'évolution des conceptions du triangle qui mette en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle 1D jusqu'au 0D. La construction du triangle à la règle et au compas nécessite de passer d'une conception triangle-2D, une surface à trois côtés qui est l'appréhension première du triangle pour les enfants, à une conception qui nécessite l'appréhension du 0D pour identifier le troisième sommet comme intersection de lignes. Le projet est donc d'étudier la possibilité de faire exister une conception triangle-1D qui mobilise des opérateurs et des contrôles qui relèvent de la dimension 1. Un parcours de conceptions du triangle est ainsi envisagé (Figure 3).

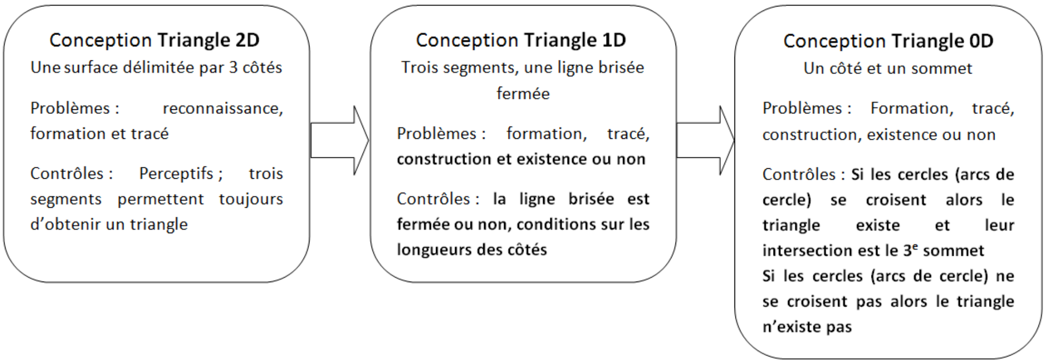


Figure 3 : Parcours de conceptions du triangle.

Chaque conception permet la résolution de nouveaux problèmes et induit un apprentissage. La conception triangle-2D permet de résoudre des problèmes de reconnaissance et de formation de triangles et même des problèmes de tracés de triangles sans contrainte sur les longueurs. Cette conception triangle-2D qui engage des contrôles perceptifs ne permet pas de construire un triangle à la règle et au compas. La conception triangle-1D permet de résoudre des problèmes de construction de triangles et des problèmes d'existence ou non du triangle. De nouveaux contrôles sur l'existence ou non du triangle sont introduits ; ces contrôles étant inexistants dans la conception triangle-2D. Le passage de la conception triangle-1D à la conception triangle-0D amène le cercle pour identifier une distance. Elle introduit des contrôles sur les cercles caractérisés comme ensemble de points équidistants d'un autre et leur intersection qui détermine ou non le troisième sommet du triangle. Dans cette conception le cercle objet mathématique devient un artefact.

2. Méthodologie de composition du duo d'artefacts et analyse de ses effets

L'objectif est d'élaborer une situation didactique engageant l'utilisation d'un duo d'artefacts, l'artefact matériel compas et un artefact numérique associé, permettant l'évolution des connaissances relatives au triangle et au cercle. Dans ce travail deux autres visées sont aussi en jeu. D'une part la situation mobilisant le duo d'artefacts doit pouvoir être intégrée dans de réelles pratiques de classe. D'autre part, il s'agit d'amener la géométrie dynamique à l'école primaire. Ces deux dernières visées interviennent également dans les choix faits au cours de l'élaboration de la situation et de la composition du duo.

Une ingénierie didactique collaborative

Le duo d'artefacts et la situation en quatre phases (Figure 4), sont élaborés lors d'un travail collaboratif entre chercheurs et enseignants. Ce travail, se réalise au cours d'un processus itératif qui articule des phases d'élaboration de la situation et de composition du duo et des phases d'expérimentations en classe. Ces expérimentations conduites en conditions réelles de classe visent à mettre à l'épreuve de l'expérimentation le duo d'artefacts et la situation et ainsi à les faire évoluer au fil du temps. La prise en compte des observations et résultats des expérimentations alimente, par rétroaction, le processus de composition du duo et conduit à modifier la situation. Les choix de composition du duo sont constamment révisés en se basant sur l'expérience et l'analyse des données recueillies, jusqu'à l'obtention d'une version considérée comme optimale (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004).

Phase 1 Phase 2 Phase 3 Phase 4

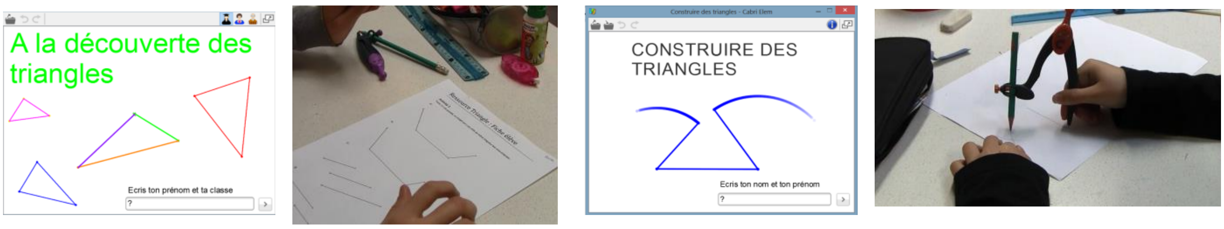


Figure 4 : Une situation en quatre phases qui alterne cahiers informatisés et activités papier-crayon.

Associer des enseignants à la composition du duo semble bénéfique dans la mesure où, dans ce travail, les hypothèses de recherche concernent l'effet du duo sur les apprentissages des élèves. Tester ces hypothèses dans de réelles conditions de classe est donc primordial. En outre, la composition du duo concerne la fonction pragmatique des instruments. Cette fonction est visible pour les enseignants qui peuvent intervenir dans l'élaboration des artefacts et leur articulation dans une situation. En effet, dans leur classe les enseignants observent les actions des élèves et leurs productions à l'aide des différents instruments. La fonction épistémique des instruments, le développement de schèmes et donc de connaissances est moins évidente pour les enseignants. C'est pourquoi, dans le cadre de ce travail, les enseignants n'ont plus été associés à la phase d'évaluation de l'ingénierie didactique. L'évaluation de la confrontation analyse a priori, analyse a posteriori a été faite uniquement par la chercheuse.

Une orchestration (Trouche, 2005) du duo d'artefacts numérique et matériel est pensée a priori dans le processus d'élaboration. Le choix est fait d'alterner les activités dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon. Chaque phase, cahier informatisé ou activité papier-crayon, est traitée individuellement par les élèves et après chaque phase une synthèse en classe entière est faite par les enseignants. Ces synthèses conduisent à discuter les propositions des élèves et à faire un bilan des apprentissages de la phase. L'appropriation de la situation par d'autres enseignants et donc la mise en œuvre d'autres orchestrations n'est pas étudiée dans ce travail.

Des expérimentations en condition réelle de classe trois années consécutives

La situation est élaborée sur trois années consécutives, ainsi plus de 130 élèves ont testé le duo d'artefacts au cours de son évolution. Les expérimentations ont toutes été réalisées dans des classes de CM2 (deux classes par année) de la même école élémentaire. Elles ont été réalisées en condition réelle de classe ; les consignes et les synthèses étaient conduites par les enseignants. Des captures vidéo du travail de chaque élève dans les cahiers informatisés ont été réalisées les trois années. Les deux premières années, seuls trois élèves par classe étaient filmés dans les activités papier-crayon. Toutes les productions étaient ramassées. Ces productions finales ne rendent pas compte du déroulement des actions des élèves, des étapes intermédiaires misent en œuvre et sont donc insuffisantes pour extraire des informations pertinentes relativement à l'évolution des conceptions des élèves sur le triangle et relativement aux instruments compas élaborés. La troisième année, trois élèves sur quatre ont donc été filmés dans les activités papiers-crayon.

Des analyses a priori et a postériori en termes d'opérateurs et de contrôles

L'évaluation des effets du duo d'artefacts en situation est fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori. Le modèle cK¢ (Balacheff, 2013) permet de déterminer des observables, décrits à l'aide d'opérateurs et de contrôles, pour d'une part, construire l'analyse a priori et d'autre part, interpréter les observations et proposer une explication des actions des élèves en termes d'instrumentation et de conceptualisation. Le modèle cK¢ est utilisé d'une part, pour décrire par des quadruplets (P, R, L, Σ) différentes conceptions du triangle, et d'autre part, pour décrire a priori des stratégies de résolution des différentes tâches proposées par la situation dans chaque environnement numérique ou papier-crayon. Les stratégies ainsi décrites, par un enchainement d'opérateurs et de contrôles, peuvent être confrontées aux observations. L'analyse consiste alors à étudier les opérateurs et les contrôles effectivement engagés par les élèves pour caractériser, au fil des quatre phases de la situation, des stratégies de résolution réellement mises en œuvre, les différents instruments élaborés, des conceptions révélées sur le triangle, ainsi que des parcours de conceptions.

3. Une situation qui articule compas matériel et cahiers informatisés

Soutenue par la caractérisation de l'apprentissage par adaptation à un milieu (Brousseau, 1998), l'élaboration d'une situation didactique consiste à organiser un milieu représentant les savoirs à acquérir. L'enjeu est de provoquer la conceptualisation 1D du triangle ainsi qu'une nouvelle genèse instrumentale du compas, grâce à des actions sur les segments côtés du triangle, unités visuelles 1D. Notre intention est de proposer des tâches qui détachent les côtés du triangle de la surface qu'ils délimitent et qui permettent d'identifier des relations entre les côtés. Le but est de coordonner des manipulations de segments dynamiques de longueurs fixes données à des activités à partir de segments tracés dans l'environnement papier-crayon. Les choix de variables didactiques ainsi que les problèmes à résoudre, au fur et à mesure de la situation, doivent permettre l'élaboration de stratégies et donc l'acquisition et l'évolution des connaissances des élèves. Trois variables didactiques sont en jeu. La première est la longueur des segments proposés. S'intéresser à la construction d'un triangle de longueurs des côtés données amène à se poser la question de l'existence ou non du triangle. Souhaitant prendre en compte cette question dans la situation, les longueurs des segments proposées vérifient ou non l'inégalité triangulaire. Une potentialité d'un environnement de géométrie dynamique étant le déplacement des objets, la deuxième variable didactique en jeu est le déplacement des segments proposés. Enfin, la construction de figures se faisant aux instruments la troisième variable didactique concerne les artefacts disponibles aussi bien dans l'environnement papier-crayon que dans l'environnement numérique. Quatre types de problèmes sont à résoudre au fil des quatre phases de la situation (Figure 4): des problèmes de formation de triangle, des problèmes de tracés de triangles, des problèmes de construction de triangles et des problèmes d'existence ou non du triangle.

Des segments numériques d'apparence et de comportement asymétriques

La technologie qui, dans cette recherche, permet de développer des environnements informatisés est le logiciel Cabri Elem[1]. Le compas de géométrie dynamique est proposé par cet environnement, cependant l'artefact numérique instrumenté dans le duo est le déplacement d'un point par rotation. En effet, l'environnement numérique développé inclut une approche expérimentale basée sur des manipulations directes de représentations dynamiques de segments. Le premier cahier d'activités informatisé nommé « A la découverte des triangles » comprend cinq pages d'activités numérotées de 1 à 5 (Figure 5).

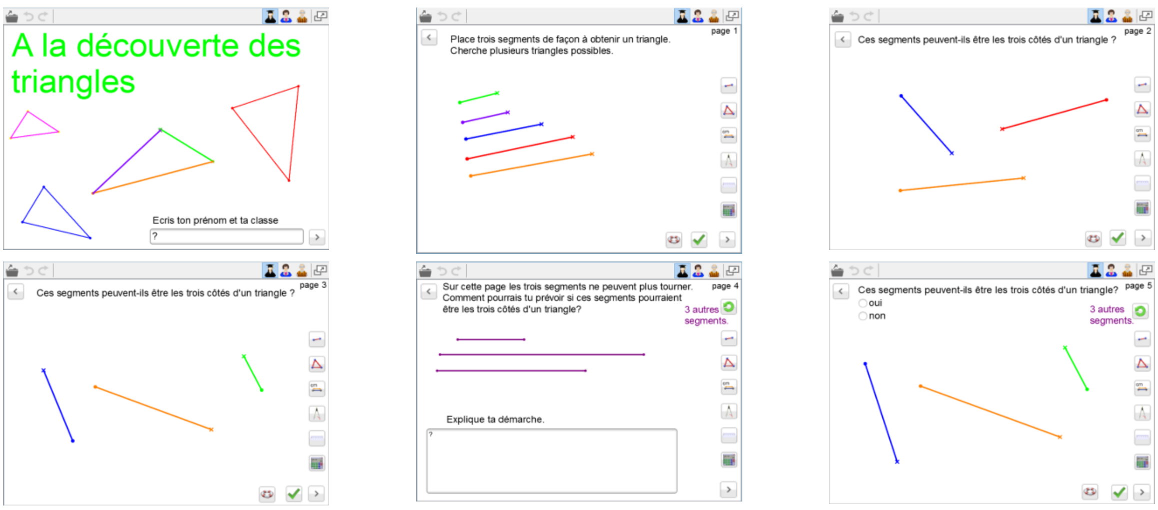


Figure 5 : Les différentes pages du premier cahier informatisé.

Ce cahier informatisé, amène à traiter deux tâches : former des triangles par manipulations directes de segments de longueurs fixes donnés (page 1), et déterminer si trois segments

[1] Le logiciel Cabri Elem est développé par la société Cabrilog et utilisé dans mon travail dans le cadre d'une collaboration scientifique entre l'entreprise Cabrilog et l'Institut Français de l'Éducation.

donnés peuvent être les trois côtés d'un triangle (page 2, 3, 4 et 5). La deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui problématise la recherche et la formation d'un triangle et donc le recours aux déplacements des segments.

L'environnement numérique permet de contraindre deux déplacements différents pour un segment. Les segments proposés sur les pages 1, 2, 3 et 5 sont donc asymétriques à l'écran dans leur représentation et au cours de leur mouvement. Deux déplacements sont possibles pour un segment : déplacer le segment entier par translation en attrapant le segment ou son extrémité ronde ; faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe en attrapant le segment par son extrémité cruciforme (Figure 6).

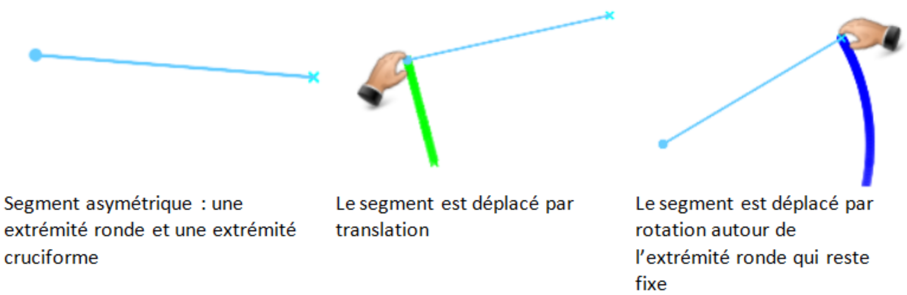
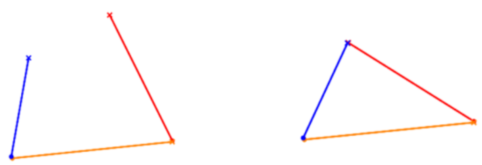


Figure 6 : Des segments asymétriques à l'écran et dans leur comportement.

La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment. Cette asymétrie de déplacement des segments participe à la dynamique de la situation et à la mise en place de stratégies porteuses de savoirs et de sens. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas oblige la dissociation des deux déplacements, par translation ou par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe, et induit la mise en valeur de la rotation indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques. Ceci n'est pas le cas avec des manipulations d'objets matériels comme des pailles ou des baguettes lors desquelles les deux déplacements sont réalisés conjointement. Cette contrainte de double déplacement provoque donc la genèse instrumentale d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique autour d'une extrémité qui reste fixe. De plus cette asymétrie de mouvement des segments induit une stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement numérique. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas rend fastidieuse la stratégie par ajustement qui consiste à positionner successivement trois segments et à les ajuster progressivement pour former le triangle. Les ajustements efficients sont les ajustements par rotation. Une stratégie efficace pour former un triangle consiste donc à former, avec trois segments, une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes. Le triangle est ensuite obtenu en faisant pivoter les deux segments extrêmes de la ligne brisée (Figure 7).



Un triangle est une ligne brisée fermée

La ligne brisée ne peut être fermée pour obtenir un triangle

Figure 7 : La stratégie ligne brisée pour former un triangle ou constater que le triangle n'existe pas.

L'environnement numérique permet donc de créer un milieu dont les segments d'apparence et de comportement asymétriques sont des éléments essentiels qui provoquent l'élaboration d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment autour d'une extrémité qui reste fixe et qui conduisent à la mise en œuvre d'une stratégie ligne brisée. Cette stratégie ligne brisée amène à penser la ligne brisée que l'on ne peut fermer pour obtenir un triangle et donc l'inexistence du triangle (Figure 7).

Un duo déplacement par rotation et compas matériel

Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas ne rend pas visibles les segments côtés du triangle. La technologie numérique permet de les rendre visibles dans le premier cahier informatisé. Dans l'environnement papier-crayon, il s'agit pour les élèves de poursuivre l'exploration du triangle à partir de ses trois côtés. Une des caractéristiques d'un duo, mobilisé dans une situation, est que l'articulation des artefacts se fasse dans une certaine continuité. C'est pour cette raison que sont intégrés dans le milieu constitué par la première activité papier-crayon les objets sur lesquels la stratégie ligne brisée fonctionne dans le cahier informatisé : la ligne brisée et les segments côtés. La première activité papier-crayon consiste à tracer des triangles dont les côtés sont donnés sous forme de segments tracés sur la feuille. Les segments proposés sont soit disposés en ligne brisée soit parallèles les uns aux autres. Plusieurs configurations de trois segments sont proposées (Figure 8). Dans un souci de continuité avec les manipulations des segments dynamiques dans le cahier informatisé, la consigne est encore formulée en termes de segment et non en termes de longueurs. Dans chaque cas, la consigne est la même : « Peut-on obtenir un triangle avec les segments proposés ? Si oui, le tracer ». Dans le prolongement du premier cahier informatisé, dans cette première activité papier-crayon des triplets de longueurs vérifient l'inégalité triangulaire et d'autres ne la vérifient pas. Pour réaliser ces tâches, une boîte à outils de géométrie contenant, le crayon, la règle graduée, l'équerre et le compas, est disponible.

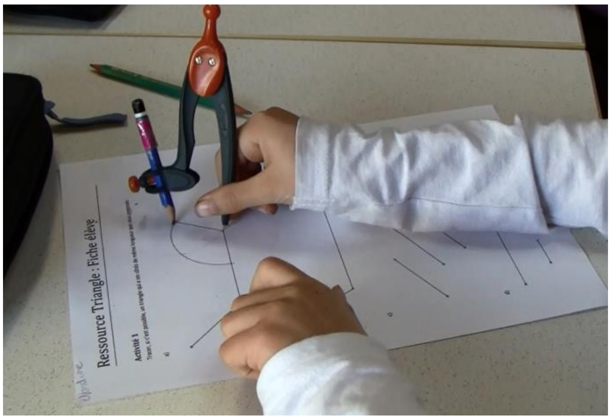


Figure 8 : Illustration de la première activité papier-crayon.

La ligne brisée est l'élément de continuité du duo ; c'est elle qui va permettre de passer du déplacement par rotation au compas matériel (Voltolini, 2014). Les manipulations directes et continues des segments n'étant plus possibles, les outils de géométrie vont être mobilisés pour remplacer les déplacements par translation et rotation de l'environnement numérique. Un nouvel instrument compas est élaboré : le compas pour pivoter un segment. Pivoter le compas revient à pivoter un segment entre ses branches. Dans l'environnement numérique c'est le même segment qui se déplace mais dans l'environnement papier-crayon le compas produit un cercle (arc de cercle) qui est la trace de l'extrémité du segment pivoté. Le segment résultat du pivotement doit donc être tracé de même longueur que le segment initial (Figure 9).

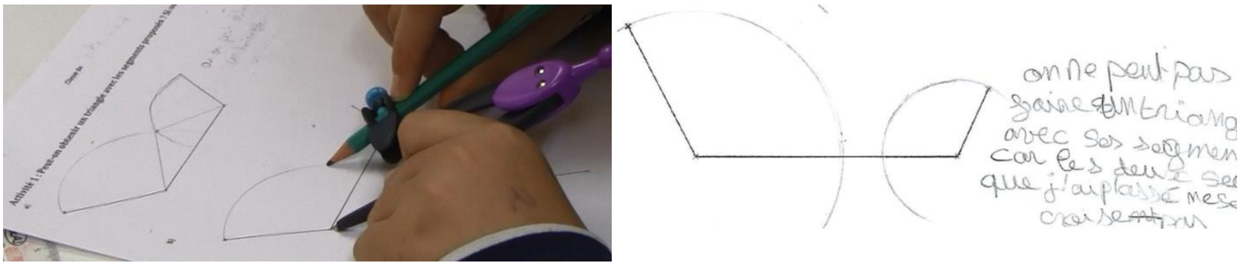


Figure 9 : Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment dans la construction du triangle.

La mobilisation du compas matériel est ainsi coordonnée au déplacement par rotation autour d'une extrémité d'un segment numérique dans le premier cahier informatisé. D'une part, le segment numérique asymétrique dans sa représentation à l'écran et dans ses déplacements rappelle le compas matériel : une pointe qui reste fixe et une mine qui tourne. D'autre part, l'instrumentation du déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique produit des schèmes d'utilisations qui peuvent s'étendre par assimilation et accommodation à des schèmes d'utilisation du compas matériel. On peut décrire par un enchainement d'opérateurs (r) et de contrôles (Σ) un schème d'utilisation pour pivoter un segment numérique : distinguer les deux extrémités du segment (ΣExtr) puis attraper l'extrémité cruciforme et déplacer par rotation le point extrémité (rRot+ ΣRot). On peut décrire un schème d'utilisation pour pivoter un segment à l'aide du compas matériel : distinguer les deux branches du compas et piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe (ΣPointe), écarter les branches pour poser la mine sur l'extrémité à pivoter (ΣMine), puis pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe et produire une trace visible (rPi1), enfin tracer le segment résultat du pivotement (rPi2 + ΣS). On identifie des assimilations et des accommodations entre les schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre. Dans chaque schème d'utilisation pour pivoter un segment, dans l'environnement numérique ou dans l'environnement papier-crayon, il faut distinguer : les extrémités du segment ; les branches du compas. Dans chaque schème il faut pivoter : le segment ; le compas. Lors de l'utilisation du compas matériel des accommodations sont nécessaires : il est essentiel de maintenir l'écartement du compas matériel fixe (la permanence des longueurs n'est pas automatique); le compas produit une trace visible, trace de l'extrémité du segment qui pivote ; le segment initial ne pivotant pas il faut tracer le segment résultat du pivotement.

Une conception 1D du triangle incluse dans la stratégie gagnante

La stratégie ligne brisée, stratégie gagnante de l'environnement numérique, est encore une stratégie efficace pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon. Tracer une ligne brisée constituée des trois segments puis pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l'aide du compas (Figure 9) permet d'apprendre la construction du triangle à la règle et au compas sans aller jusqu'à la conceptualisation du point. Cette stratégie, d'une part provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas pour pivoter un segment entre ses branches et, d'autre part, induit une conception 1D du triangle. La conception triangle-1D-ligne brisée : un triangle est une ligne brisée fermée de trois segments, permet de résoudre le problème de construction du triangle ainsi que le problème d'existence ou non du triangle (Figure 9). Ce dernier problème ne pouvait être résolu avec une conception triangle-2D. La stratégie ligne brisée est donc une stratégie porteuse d'apprentissage. C'est une première étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle 1D. Elle est associée à une conception 1D du triangle qui apporte une structure de contrôle nouvelle sur l'existence ou non du triangle par rapport à la conception triangle-2D.

Les cercles sous-jacents à la construction du triangle

Les deux dernières phases de la situation n'ayant pas été présentées lors du séminaire de l'ARDM, elles ne sont décrites ici que succinctement. Le second cahier informatisé, «Construire des triangles», a pour objectif d'amener les cercles sous-jacents à la construction du triangle. La construction de cercles doit être la stratégie gagnante efficace pour résoudre le problème. La technologie Cabri Elem permet de mettre à la disposition de l'utilisateur certains outils de géométrie dynamique bien choisis. Cette opportunité est utilisée pour contraindre l'utilisation de l'outil cercle dans les stratégies. En effet, dans ce second cahier informatisé, c'est par un jeu sur les outils disponibles que le cercle devient l'outil de la situation. Dans un premier temps, l'outil cercle est utilisé pour vérifier si une ligne brisée peut-être le contour d'un triangle ou non. D'outil pour vérifier, il devient ensuite outil pour produire. Dans un second temps, il s'agit d'utiliser l'outil cercle pour déterminer le troisième sommet du triangle. La situation se termine par une deuxième activité papier-crayon mobilisant le compas matériel dans la construction de triangles. Cette deuxième activité papier-crayon consiste à tracer si cela est possible, des triangles dont les longueurs des côtés sont données par leurs mesures. Cette activité marque la fin de la situation et permet de faire un bilan des apprentissages menés à bien grâce à la mobilisation des artefacts numériques articulés au compas matériel.

IV. EXPERIMENTATIONS ET RESULTATS

1. Instrument et conception deux états d'équilibre du système [sujet-milieu] mis en relation

La conceptualisation en termes de genèses de conceptions et de parcours de conceptions est analysée grâce au modèle cK¢ de Balacheff. Dans cette étude ce modèle permet de relier instrumentation et conceptualisation et de caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument. Une conception n'est pas une sous partie, un zoom des connaissances implicites sur lesquelles repose l'opérationnalité des schèmes d'utilisation d'un instrument. C'est une ré-ouverture, une mise en relation. Instrument et conception sont deux états d'équilibre du système [sujet-milieu] « réversibles » (Figure 10).

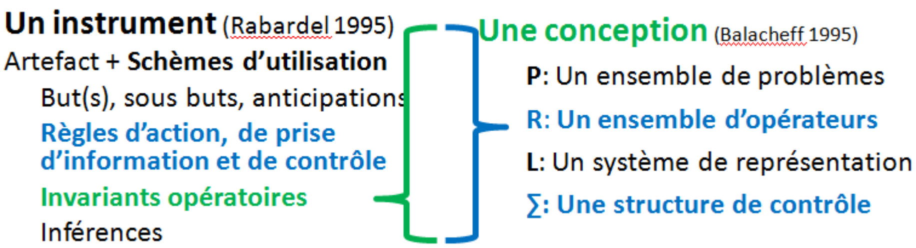


Figure 10 : Une dualité « réversible » entre instrument et conception.

D'un côté, les schèmes d'utilisation d'un instrument reposent sur des connaissances implicites caractérisées en conceptions. De l'autre côté, les problèmes sur lesquels une conception est opératoire incitent à la mobilisation des instruments. Les opérateurs qui permettent la résolution des problèmes et les contrôles qui assurent la non contradiction de la conception comprennent des règles d'action et de contrôle sur les artefacts.

2. Une conception 1D du triangle qui résulte du duo d'artefacts en situation

L'analyse de 34 productions d'élèves de la dernière année d'expérimentation (les 34 élèves pour lesquels des captures vidéo des quatre phases de la situation étaient disponibles) a permis d'identifier les effets du duo d'artefacts sur les apprentissages. Le duo d'artefacts, déplacement par rotation et compas matériel, mobilisé dans la situation permet à 31 élèves sur 34 de mettre en œuvre la construction d'un triangle de longueurs des côtés données à la règle et au compas (Figure 11).

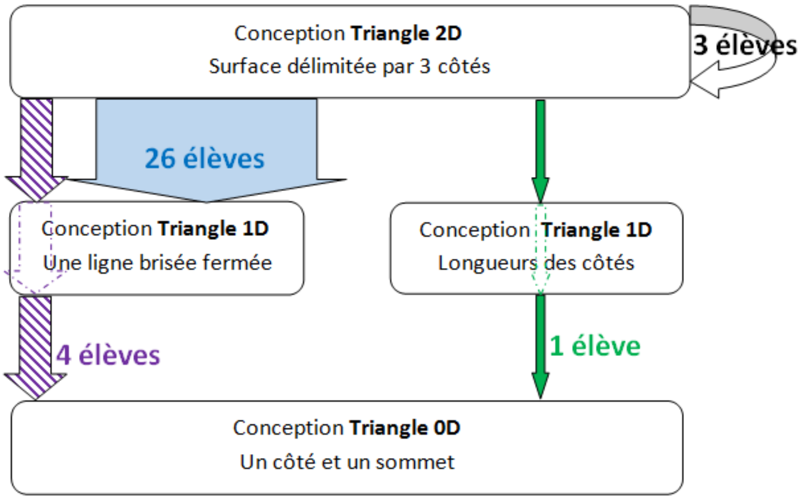


Figure 11 : Une évolution des conceptions du triangle du 2D→1D→0D.

Dès la première page du premier cahier informatisé on observe des interactions des élèves avec les segments numériques afin de les déplacer. Les élèves voudraient pouvoir pivoter les deux extrémités de chaque segment. Dans un premier temps l'extrémité ronde est attrapée et le pointeur est déplacé dans un mouvement circulaire. Dans un second temps le double déplacement des segments est appréhendé ; l'élève comprend que seule une action sur l'extrémité cruciforme permet de pivoter le segment. La stratégie ligne brisée apparait comme la stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement numérique constitué par le premier cahier informatisé. Elle est transposée dans l'environnement papier-crayon (Figure 9) par 30 élèves sur 34 (Figure 11). Cette stratégie provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas utilisé pour pivoter un segment. Les captures vidéo permettent de relever le discours de Luna : *« La ligne brisée ça nous aide parce qu'avant on savait pas qu'il fallait utiliser le compas pour tracer un triangle ».*

Un triangle en tant que ligne brisée fermée est une nouvelle conception 1D du triangle qui résulte du duo d'artefacts en situation. La ligne brisée constitue une étape de dimension 1 dans la déconstruction dimensionnelle du triangle qui n'oblige pas, dans un premier temps, à la conceptualisation du point dans la construction du triangle à la règle et au compas. L'analyse des 34 productions fait aussi ressortir une autre conception triangle 1D-longueurs des côtés. Cette conception permet de résoudre le problème d'existence ou non du triangle par comparaison de la somme des petites longueurs à la plus grande, mais ne permet de résoudre le problème de construction du triangle à la règle et au compas. Enfin on observe que 5 élèves construisent le triangle à la règle et au compas sans le tracé intermédiaire de la ligne brisée. Ces élèves ont donc développé une conception du triangle intégrant le 0D.

3. Des parcours d'instruments et de conceptions du triangle

Des parcours individuels d'instruments et de conceptions du triangle ont été réalisés pour chacun des 34 élèves, à partir de l'identification des opérateurs (r) et contrôles (Σ) réellement mobilisés. Par exemple, le travail d'un élève conduit aux parcours de la Figure 12. Dans le premier cahier informatisé, cet élève élabore un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment puis, dans la première activité papier-crayon il mobilise le compas matériel comme instrument pour pivoter un segment. Les tâches proposées dans le second cahier informatisé l'amène à mobiliser le cercle de la géométrie dynamique, d'une part pour pivoter les segments extrêmes d'une ligne brisée et d'autre part, pour identifier une distance et déterminer le troisième sommet du triangle. De retour dans l'environnement papier-crayon dans la quatrième phase de la situation, il effectue la construction du triangle à l'aide du tracé intermédiaire de la ligne brisée. Il mobilise à nouveau l'instrument compas pour pivoter un segment. Cet élève a donc clairement développé une conception triangle-1D-ligne brisée avec un passage « furtif » par une conception triangle-0D dans le second cahier informatisé. Cette conception triangle-0D nécessite encore d'être consolidée.

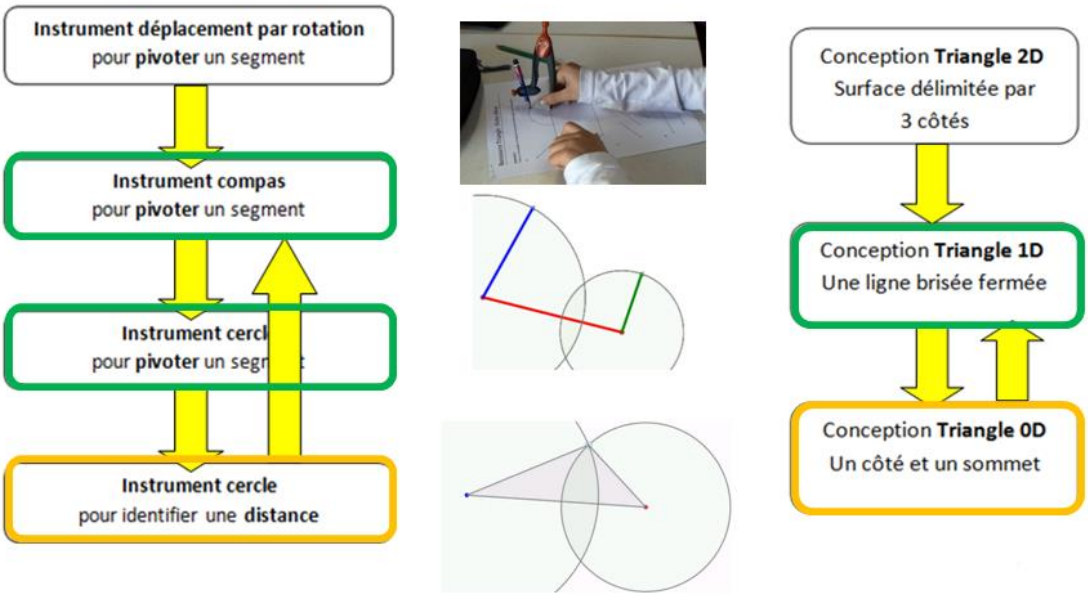


Figure 12 : Les parcours d'instruments et de conceptions du triangle d'un élève.

Les limites de la situation : faire évoluer les conceptions sur le cercle

Un des enjeux de ce travail était d'amener le cercle, objet mathématique, dans la construction du triangle et de faire évoluer les conceptions des élèves sur le cercle. L'instrument compas pour pivoter un segment entre ses branches devrait être un moyen de développer une conception du cercle comme la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote. En outre, le cercle de la géométrie dynamique devait amener le cercle objet mathématique comme outil pour identifier une distance. Les expérimentations n'ont pas permis de pouvoir caractériser les conceptions du cercle engagées par les élèves. Deux hypothèses peuvent être formulées pour l'expliquer : d'une part, la situation ne problématise pas le cercle et d'autre part, utiliser l'outil cercle de la géométrie dynamique nécessite une identification du centre et du rayon du cercle ce qui implique une déconstruction dimensionnelle du cercle en son rayon 1D et en son centre 0D difficile à mettre en œuvre par les élèves de l'école primaire.

V. CONCLUSION

L'objet de cette recherche était d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à des activités papier-crayon pratiquées dans des situations ordinaires de classe. A partir d'un apprentissage du cycle 3, le problème de la construction du triangle à la règle et au compas, les éléments caractéristiques à la composition d'un duo d'artefacts numérique et matériel et son incidence sur les apprentissages ont été illustrés. Afin de favoriser la connaissance individuelle des élèves, les deux caractéristiques principales d'un duo d'artefacts numérique et matériel, sont d'une part d'être sollicité au sein d'une situation didactique et d'autre part, que les artefacts numérique et matériel s'enrichissent l'un l'autre. Un duo d'artefacts en situation engendre des genèses instrumentales associées qui conduisent en particulier à une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel. En outre, un duo d'artefacts en situation rend possible la réitération d'expériences en faisant varier les contraintes au cours de l'alternance des actions instrumentées numériques et matérielles et ainsi favorise l'émergence et la transformation des connaissances des élèves. L'exemple du duo d'artefacts composé à partir du problème de la construction du triangle à la règle et au compas, met en évidence comment l'articulation entre des manipulations dans un environnement de géométrie dynamique et l'utilisation du compas matériel permet aux élèves d'élaborer un nouvel instrument compas pour pivoter un segment. De plus le duo d'artefacts conduit à l'élaboration de stratégies porteuses d'apprentissage. La stratégie ligne brisée, qui consiste à former une ligne brisée de trois segments et à faire pivoter les segments extrêmes, stratégie efficace dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon, permet de mettre en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle et participe à l'élaboration d'une conception 1D du triangle comme une ligne brisée fermée. Le duo d'artefacts en situation est donc une valeur ajoutée au compas matériel qui aide à franchir l'obstacle de la règle graduée et à induire la pertinence géométrique du compas dans la construction du triangle et qui participe à l'élaboration et à l'évolution des connaissances des élèves sur le triangle.

Cette recherche montre qu'il est possible de faire de la géométrie 1D sans nécessairement aller jusqu'à la conceptualisation du point à l'école primaire. Elle ouvre ainsi de nouvelles perspectives de recherche. Il pourrait en effet être intéressant de prolonger la réflexion en composant d'autres duos d'artefacts pour la conceptualisation 1D d'autres figures géométriques usuelles. D'autres duos d'artefacts pourraient aussi être envisagés pour observer la conceptualisation des objets de base de la géométrie (le cercle, le segment, la droite, le point) en relation avec les instruments qui permettent de les construire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (2008). L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques, contenus et pratiques. *Actes du séminaire DGESCO de février 2007*.

BALACHEFF, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In Denise Grenier (Ed.) *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaire 1994-1995* (pp. 219–244). Grenoble : Université Joseph Fourier.

BALACHEFF, N. (2013). cK¢, a model to reason on learners' conceptions. In M. V. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.) (pp. 2–15). Chicago IL, USA. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853856

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

BRUILLARD, E. & VIVET, M. (1994). Concevoir des EIAO pour des situations scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(1.2), 275–304.

COLLINS, A., JOSEPH, D. & BIELACZYC, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15–42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

DRIJVERS, P., BALL, L., BARZEL, B., HEID, M. K., CAO, Y., & MASCHIETTO, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education; A concise topical survey*. New York: Springer. Retrieved from http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-33666-4

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5–55.

DUVAL, R., & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7–27.

GUEUDET, G. BUENO-RAVEL, L. & POISARD, C. (2014). Teaching Mathematics with Technologies at Kindergarten: Resources and Orchestrations. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 213–240). Springer.

HOUDEMENT, C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, *67*, 69–84.

HOYLES, C. & LAGRANGE, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13). Boston, MA: Springer US. Retrieved from http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0

LABORDE, C., KYNIGOS, C., HOLLEBRANDS, K., STRÄßER, R., GUTIERREZ, A. & BOERO, P. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future* (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.

LABORDE, C. & LABORDE, J.-M. (2014). Dynamic and Tangible Representations in Mathematics Education. In S. Rezat, M. Hattermann & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 187–202). New York, NY: Springer New York. Retrieved from http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-3489-4_10

MASCHIETTO, M. & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 959–971. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3

MOYER-PACKENHAM, P. S. (Ed.). (2016). *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Vol. 7). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1

PERRIN-GLORIAN, M.-J. & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole*, *222*, 28–38.

PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHE, A.-C. & LECLERCQ, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans ? *Repères-IREM*, *90*, 5–41.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France: Armand Colin.

SINCLAIR, N. & BACCAGLINI-FRANCK, A. (2015). Digital technologies in the early primary school classroom. In *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (pp. 662–686). Lyn D. English; David Kirshner.

SOURY-LAVERGNE, S. & MASCHIETTO, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, *47*(3), 435–449. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0694-3

TROUCHE, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécéssité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*, 91–138.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2.3), 133–170.

VERGNAUD, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J-M, Barbier (pp.275-292). *Savoirs théoriques et savoirs d'action.* Paris: Presses Universitaire de France.

VOLTOLINI, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, *94*, 25–46.

VOLTOLINI, A. (2017). *Duos d'artefacts matériel et numérique pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon France.

LE TRAVAIL HORS LA CLASSE DE COLLEGIENS : LE CAS DES EQUATIONS

Stéphane **SIREJACOB**

LDAR, Université Paris Diderot 7

stephanesirejacob@hotmail.fr

Résumé

Cet article synthétise notre travail de thèse (Sirejacob, 2017) et s'articule autour de deux axes majeurs : d'une part, l'étude personnelle hors la classe de collégiens, sujet d'actualité peu abordé en didactique des mathématiques ; d'autre part, l'enseignement des équations du premier degré à une inconnue en collège, thème agrégeant plusieurs notions d'algèbre élémentaire et source de difficultés pour les élèves. Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), nous réiterrogeons ces difficultés d'un point de vue institutionnel : nous faisons l'hypothèse que certains besoins d'apprentissages, tant relatifs aux gestes d'étude hors la classe que disciplinaires (équations), sont implicitement laissés à la charge des élèves ou ignorés de l'institution (Castela, 2008), alors que ces apprentissages sont nécessaires à la construction d'un rapport personnel idoine aux équations. En appui sur une organisation mathématique épistémologique de référence (Bosch et Gascon, 2005) relative aux équations du premier degré et sur une synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle, nous construisons un modèle de l'étude personnelle et analysons les effets de la mise en œuvre d'un Parcours d'Etude et de Recherche sur les apprentissages de collégiens.

Mots clés

Travail hors la classe, travail personnel, équations

I. ENJEUX ET QUESTIONS INITIALES SUR LE TRAVAIL HORS LA CLASSE

1. Un travail hors la classe nécessaire aux apprentissages et pourtant peu explicitement organisé par l'institution

Les acteurs du système éducatif considèrent l'étude personnelle hors la classe comme un déterminant de la réussite scolaire. Celle-ci est fréquemment décrite en termes de manque voire d'inexistence pour expliquer certains échecs. La nécessité de l'accomplissement de cette étude personnelle provient de la poursuite de deux objectifs : d'une part, faire rencontrer en classe à tous les élèves une liste d'objets de savoirs du programme officiel dans un temps limité et incompressible, d'autre part provoquer les apprentissages de tous les élèves alors que ces derniers les construisent à des vitesses différentes avec des besoins bien distincts. Il existe ainsi une tension entre l'avancée du temps didactique, c'est-à-dire le temps « officiel » rythmé par la liste de savoirs à rencontrer, et l'avancée du temps praxique, c'est-à-dire le temps nécessaire aux élèves pour construire les apprentissages en jeu dans l'ensemble des tâches qu'ils rencontrent dans leur parcours scolaire (Castela, 2007, 2008).

Les élèves qui ont le plus besoin d'accomplir une étude personnelle hors la classe sont ceux pour qui l'avancée du temps didactique n'a pas coïncidé en classe avec celle du temps nécessaire aux apprentissages. Or bien souvent, il s'agit d'élèves dont les besoins d'apprentissages sont les plus importants, et qui sont le moins à même d'assumer l'autonomie nécessaire pour accomplir cette étude personnelle.

Les textes officiels, dans leur proposition de dispositifs divers tels que l'aide aux devoirs ou l'accompagnement dit personnalisé, semblent très peu prendre en compte les spécificités des mathématiques pour en organiser l'étude personnelle et se limitent la plupart du temps à des préconisations générales d'ordre méthodologique.

2. Contexte de recherche et questions initiales

Cette dernière remarque justifie en partie notre choix de spécifier notre travail sur un objet de savoir, les équations du premier degré à une inconnue, nos recherches s'inscrivant dans le champ de la didactique des mathématiques.

Le choix de centrer notre travail sur les équations du premier degré s'explique aussi par le fait que nos recherches se placent dans la continuité de recherches antérieures relatives aux expressions algébriques, entres autres celles de Grugeon-Allys, Chenevotot-Quentin et Delozanne (2012) et Pilet (2012).

De plus, les équations, parce qu'elles agrègent plusieurs notions mathématiques anciennes et nouvelles et sont donc susceptibles d'accentuer les tensions entre avancées respectives des temps didactique et praxique, constituent un thème particulièrement intéressant pour spécifier nos recherches.

Nos questions initiales sont les suivantes : en quoi consiste l'étude personnelle hors la classe ? Quelle explicitation auprès des élèves et quelle organisation en classe sont réalisées par les enseignants ?

Nous précisons dans ce qui suit les cadres théoriques et les principaux éléments méthodologiques utilisés pour traiter et faire évoluer ces questions (section II), puis nous présentons un modèle de l'étude personnelle (section III) et une organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations du premier degré (section IV), points d'appui d'une construction et d'une mise en œuvre d'un Parcours d'Etude et de Recherche (section V). Nous concluons avec notamment quelques éléments de perspective (section VI).

II. Cadres theoriques, problematique et premiers elements methodologiques

1. Une approche multidimensionnelle

Nous avons réinterrogé et fait évoluer nos questions initiales au prisme d'une approche multidimensionnelle dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) pour prendre en compte le savoir mathématique et sa transposition didactique dans diverses institutions, ainsi que pour disposer d'un modèle de l'activité mathématique et de l'organisation didactique du savoir.

Rappelons brièvement que dans ce cadre théorique, on suppose que l'activité mathématique d'un élève procède de *praxéologies* : l'élève doit réaliser des *tâches* mathématiques relevant de *types de tâches*, à l'aide de méthodes ou de moyens appelés *techniques*, techniques justifiées par des discours rationnels appelés *technologies*, eux-mêmes justifiés à un niveau supérieur par des *théories*. Nous illustrerons ceci par des exemples dans la suite.

Nous avons également eu recours à un cadre théorique secondaire, la théorie des situations didactiques, pour pouvoir obtenir une autre granularité dans nos analyses lorsque nous en avons eu besoin.

2. Hypothèses de travail et problématique de recherche

Les deux principales hypothèses de travail que nous posons sont les suivantes : le décalage entre avancée du temps didactique et avancée du temps praxique, et l'existence d'enjeux d'apprentissages non pris en charge explicitement par l'institution, sont potentiellement à l'origine de la construction par les élèves de rapports personnels aux équations non idoines.

Sous ces hypothèses, nous formulons notre problématique ainsi : comment l'enseignant peut-il organiser l'étude des équations en classe de quatrième pour favoriser une évolution des rapports personnels des élèves aux équations vers des rapports idoines ? Quels gestes d'aide à l'étude peut-il accomplir pour les accompagner hors la classe à réaliser une étude personnelle favorisant les apprentissages ?

3. Hypothèses de recherche et éléments méthodologiques

Nous émettons deux hypothèses de recherche principales. En classe de quatrième en France (et désormais en fin de cycle 4 dans les programmes actuels), nous supposons que la construction par les élèves de rapports personnels idoines aux équations du premier degré est favorisée d'une part par la mise en œuvre d'une certaine organisation explicite de l'étude personnelle en classe et hors classe par l'enseignant ; d'autre part par la mise en place d'un Parcours d'Etude et de Recherche sur les équations prenant en compte ces besoins, en appui sur les principaux éléments épistémologiques relatifs aux équations.

Pour traquer les enjeux d'apprentissages non explicitement pris en charge par l'institution autour de l'étude personnelle et des équations, nous avons construit un modèle de l'étude personnelle (section III) et une organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations (section IV), que nous avons opérationnalisés pour analyser les savoirs à enseigner dans les programmes et les manuels, et les savoirs enseignés et appris en classe et hors classe, afin de repérer d'éventuels déficits praxéologiques.

Pour faire évoluer les rapports personnels des élèves aux équations vers des rapports idoines, nous avons ensuite construit et mis en œuvre un Parcours d'Etude et de Recherche dans une classe de quatrième d'un collège d'un réseau d'éducation prioritaire (section V).

III. UN MODELE DE L'ETUDE PERSONNELLE HORS LA CLASSE

1. Des travaux existants prenant peu en compte les spécificités d'un secteur d'étude et le rôle de l'institution

À partir d'une synthèse de travaux sur l'étude personnelle (entre autres : Milhaud 1998 ; Esmenjaud-Genestou, 2005 et 2006 ; Castela, 2002 et 2007 ; Félix, 2004 ; Rayou, 2008 ; Blochs, 2012 ; Farah, 2015) nous avons pu repérer plusieurs obstacles relatifs à l'organisation de cette dernière. En particulier, un obstacle majeur est la difficulté à définir explicitement en quoi consiste l'étude personnelle hors la classe et en particulier en mathématiques, comme nous l'avons déjà souligné plus haut. Les élèves, ne saisissant pas de contrat didactique explicite autour de cette étude personnelle, peuvent alors réaliser des gestes très variés. Certains travaux comme ceux de Félix (2004) ou Castela (2002) indiquent notamment que les élèves dits « en difficulté » accomplissent des gestes comme la simple relecture ou la mémorisation intensive et qui prennent peu en compte les spécificités de la discipline, tandis que les élèves dits « en réussite » parviennent à identifier des types de tâches et à leur associer des techniques et des technologies pour réaliser ces derniers, témoignant ainsi de connaissances sur le fonctionnement mathématique (Castela, 2000).

Dans la recension de travaux sur l'étude personnelle que nous avons réalisée, un faible nombre relevait de la didactique des mathématiques et prenait en compte les particularités de la discipline. Nous avons trouvé très peu de travaux qui simultanément mettent en relation les gestes enseignants avec les gestes des élèves, prennent en compte les spécificités de l'activité mathématique sur un thème donné et le rôle de l'institution dans l'organisation de l'étude. C'est pourquoi nous avons eu besoin d'élaborer un modèle de l'étude personnelle adapté à nos questions de recherche.

2. Une première étude exploratoire dans un collège REP

Eléments de contexte

Nous avons tout d'abord voulu vérifier expérimentalement les résultats des travaux de recherche sur l'étude personnelle, qui ne portaient pas simultanément et sur le collège et sur un thème donné.

Nous nous sommes rendu dans un collège d'un réseau d'éducation prioritaire. Nous avons filmé et nous sommes entretenu avec huit élèves en train d'accomplir leur étude personnelle hors la classe en mathématiques au cours d'une séquence sur le calcul d'expressions algébriques. Les deux enseignants avec qui nous avons travaillé ont eux-mêmes choisi les élèves interrogés selon une catégorisation classique, « bon », « moyen » et « en difficulté », suivant des critères non explicités.

Trois niveaux d'analyse pour l'étude exploratoire

Nous avons analysé les réponses selon trois niveaux. Un premier niveau porte sur les organisations mathématiques (abrégées OM par la suite) mobilisées par les élèves. Un deuxième niveau d'analyse est relatif aux gestes d'étude pour apprendre à construire et à articuler les OM. Enfin, suivant un troisième et dernier niveau d'analyse, nous avons cherché à mettre en relation les gestes d'étude des élèves avec les gestes d'aide à l'étude de leur professeur.

Les OM mobilisés par les élèves hors la classe

Nous donnons ici quelques exemples pour montrer comment nous faisons fonctionner la grille d'analyse précédemment décrite. Tous les prénoms ont été modifiés pour garantir l'anonymat des élèves et des enseignants.

Vincent, un élève dit « en difficulté », avait pour tâche hors la classe de développer une expression algébrique : $3 \times (a + 5)$. Voici ce qu'il a fait : « *J'ai fait trois fois… Enfin, a plus cinq… Donc ça fait cinq a fois trois. Donc du coup, ça fait quinze a.* » Autrement dit, Vincent a concaténé $a + 5$ en $5a$ avant de multiplier le tout par 5 pour finalement obtenir $15a$. Remarquons qu'en plus de cette réécriture incorrecte, Vincent n'explicite pas spontanément d'élément technologique pour justifier ses actions et qu'il ne contrôle pas son résultat, par exemple en s'appuyant sur la structure de l'expression ou en recourant à la substitution pour tester l'égalité $3 \times (a + 5) = 15a$.

Tamara, une élève dite « en réussite », parvient à réaliser correctement la même tâche que celle accomplie par Vincent : « *J'ai utilisé la distributivité. Ca fait… l'égalité… trois fois a plus trois fois cinq.* » Notons que Tamara justifie spontanément la technique employée par un discours technologique correct. Elle non plus toutefois ne vérifie pas la correction de son résultat.

De façon générale, sur les élèves interrogés, nous avons constaté que les élèves dits « en réussite » parvenaient à réaliser correctement les tâches et à expliciter des éléments de technique et de technologie, ce qui était moins le cas des élèves dits « en difficulté ». Nous avons également pu faire des premiers liens entre les OM enseignées en classe et celles mobilisées par les élèves hors la classe. Par exemple, nous avons noté tout à l'heure que les deux élèves ne contrôlaient pas leurs résultats ; nous relions cette observation au fait que leur enseignant n'avait pas, en classe, proposé de moyens de contrôle.

Les gestes pour apprendre à construire les OM accomplis par les élèves hors la classe

Voici une deuxième série d'exemples qui concernent le deuxième niveau d'analyse de notre grille. Nous avons posé aux élèves des questions toujours en lien avec les organisations mathématiques mais cette fois-ci sur la manière d'apprendre à les construire et à les articuler. L'une des questions portait sur les types de tâches que les élèves pensaient devoir affronter le jour de l'évaluation.

À la question « Qu'y aura-t-il comme type d'exercices le jour de l'évaluation ? », Marianne, une bonne élève, répond : « ***Réduire****. […] Il y a… je sais plus comment ça s'appelle, mais en gros, c'est l'****agrandir****. […]* ***Calculer*** *[…] Si c'est trois a, on va faire trois fois le nombre qui est donné.* » Marianne a été capable de nous donner une liste assez complète de types de tâches, accompagnée de surcroît d'exemples de tâches et d'une résolution correcte de ces tâches.

Géraldine, en revanche, qui est une élève dite « moyenne », a montré moins d'aisance à expliciter les types de tâches : « *Il y aura par exemple… euh… par exemple les x […]* ***faire les x*** *[…] il y aura par exemple les…* ***a égal à deux, a égal cinq*** ». Elle n'a su ni reconnaître la totalité des types de tâches lorsque nous lui en présentions, ni réaliser ces types de tâches.

Cette capacité à identifier des types de tâches, présentée comme un levier dans certains travaux de recherche en didactique (Castela 2000 ; Castela 2007 ; Esmenjaud-Genestoux, 2005 ; Milhaud, 1998), nous est apparue comme une nécessité première pour pouvoir accomplir d'autres gestes d'étude, comme celui de réguler ses propres besoins d'apprentissages en vue de préparer une évaluation. Tamara, la bonne élève que nous avons déjà rencontrée, nous a dit par exemple lors d'un entretien : « *Je fais un exercice sur la notion qu'on a vue. Donc **si on a vu six notions, ben je vais faire six exercices*** ». Ses camarades, dits « élèves moyens », se sont quant à eux entraînés sur des séries d'exercices sélectionnés de manière aléatoire, parfois en grand nombre. C'est le cas de Mehdi, élève « moyen » : « *Je prends **une file d'exercices** et je les suis, je les suis […]* ***au hasard****. Je prends… par exemple, on va dire, j'ai l'exercice 31, je fais l'exercice 31 jusqu'à l'exercice 35.* » C'est aussi le cas d'Annabelle, élève « en difficulté », qui dit faire des exercices en les prenant « *au pif* ». La manière de travailler de ces élèves n'est donc ni économique ni ciblée sur des types de tâches précis.

Nous avons également pu repérer des différences flagrantes sur la manière « d'apprendre la leçon », injonction pédagogique générale souvent prononcée par les enseignants. Les « bons » élèves trouvaient peu d'intérêt à revenir sur la leçon (Tamara : « *je vois pas l'intérêt de réviser la leçon* ») tandis que ceux avec des besoins d'apprentissages plus forts se lançaient dans des efforts intenses de mémorisation (Mehdi : « *Apprendre [la leçon], pour moi,* ***c'est par cœur*** » ; Annabelle : « *Je* ***mémorise*** *[la leçon] […] Je* ***mémorise*** *[les corrections d'exercices]* »).

Les observations que nous avons pu faire rejoignent donc finalement certains résultats de travaux de recherche sur l'étude personnelle. Nous avons relié la variabilité des gestes d'étude selon le profil des élèves aux implicites inhérents aux recommandations pédagogiques du type « apprendre », « relire » ou « réviser » émis par les enseignants.

3. Le modèle de l'étude personnelle

Cette première étude exploratoire nous a conduit à approfondir les analyses sur ces trois niveaux : analyse des praxéologies mathématiques mobilisées par les élèves, analyse de leurs gestes heuristiques, et mise en relation des gestes d'étude des élèves avec les gestes d'aide à l'étude des enseignants. Nous en arrivons ainsi à présenter le modèle de l'étude personnelle que nous avons élaboré au cours de nos recherches.

Définition de l'étude personnelle et des praxéologies d'étude

Dans ce modèle, l'étude personnelle relative à un objet de savoir est définie comme étant l'ensemble des gestes accomplis par l'élève dans une institution donnée pour construire les apprentissages mathématiques en vue d'établir un rapport personnel idoine à cet objet de savoir. Cette étude n'est pas obligatoirement explicitement organisée par l'institution alors qu'elle peut s'avérer nécessaire à l'établissement de rapports personnels idoines.

Nous avons également défini ce que nous avons appelé des *praxéologies d'étude*. Il s'agit de praxéologies non mathématiques au sens où elles ne portent pas sur le produit de l'activité mathématique mais plutôt sur son déroulement. Elles font référence à des gestes heuristiques, pour apprendre à construire, utiliser, articuler, situer les unes par rapport aux autres des organisations mathématiques.

En utilisant le terme de praxéologie, nous affirmons l'existence de techniques d'étude et d'un *logos* à leur sujet, que l'enseignant peut mettre en scène en classe à travers une organisation didactique explicite. La question est de savoir comment l'enseignant peut accompagner les élèves dans leur organisation de l'étude personnelle pour qu'ils développent des praxéologies d'étude favorisant une activité mathématique idoine.

Les praxéologies d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine

Avec cette définition de l'étude personnelle, nous considérons les injonctions du type « réviser », « revoir », « apprendre » comme relevant de praxéologies d'étude pédagogiques générales puisque ne donnant pas la primauté aux spécificités de la discipline. Nous leur opposons des praxéologies d'étude que nous supposons permettre une activité mathématique idoine, à savoir :

- identifier un type de tâches mathématiques ;
- mettre en relation un type de tâches avec une technique et une technologie ;
- situer et articuler des organisations mathématiques nouvelles et anciennes entre elles ;
- diagnostiquer puis réguler ses besoins d'apprentissages.

Si nous nous sommes risqué dans notre travail (Sirejacob, 2017) à proposer des techniques d'étude qui en l'état mériteraient des assises théoriques plus solides et des confirmations expérimentales, nous ne sommes pas prononcé sur les technologies d'étude. En effet, nous n'avons à ce jour pas connaissance de discours rationnels largement partagés dans la communauté enseignante sur le sujet.

Schéma du modèle de l'étude personnelle

Le schéma ci-dessous (figure 1) synthétise une partie de la complexité des phénomènes liés à l'étude personnelle que nous avons cherché à analyser. Dans ce schéma, l'étude personnelle hors la classe prend place dans un système didactique auxiliaire (SDA) piloté par le système didactique principal (SDP) classe (Chevallard, 2002). Nous supposons que la construction de certaines praxéologies d'étude en classe et la gestion didactique de l'enseignant favorise (ou non) l'émergence de conditions pour que cette étude soit accomplie de manière adéquate, et permet (ou non) à l'élève d'occuper des positions d'étudiant autonome dans le modèle de structuration du milieu (Margolinas, 2003 ; Castela, 2006).

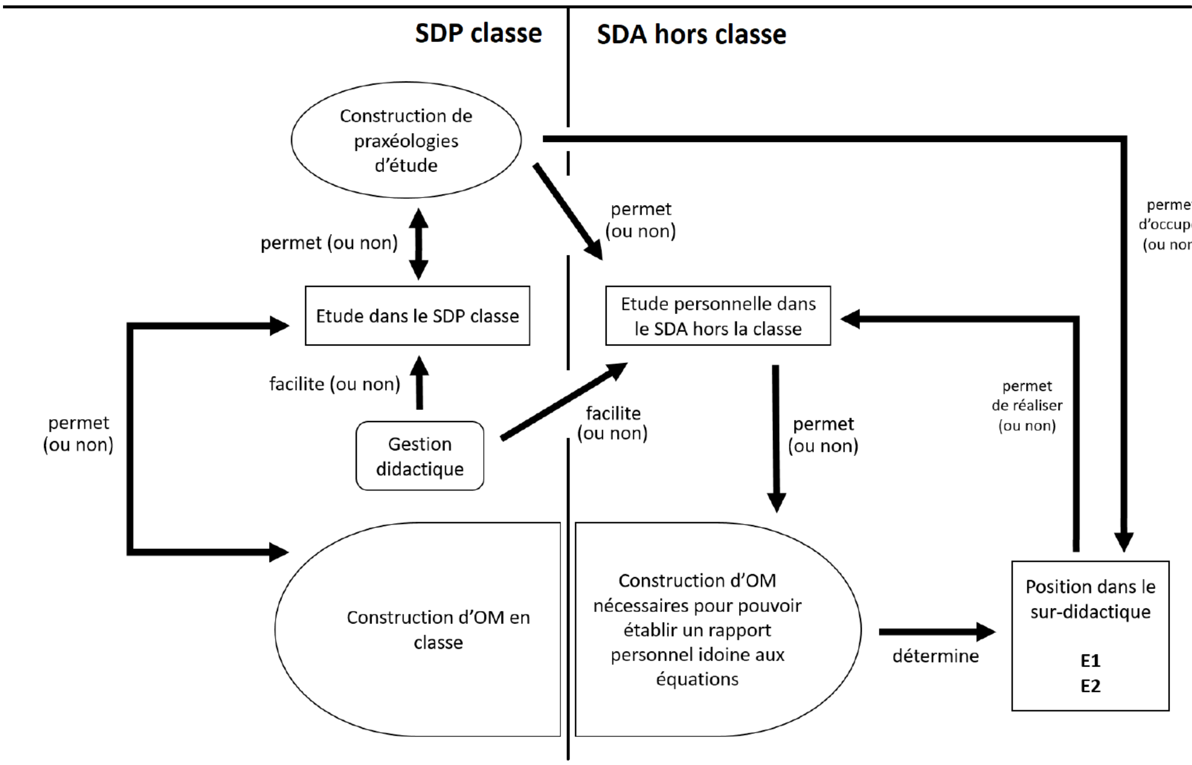


Figure 1 : Un modèle de l'étude personnelle hors la classe.

Opérationnalisation du modèle sur trois niveaux

Nous avons opérationnalisé le modèle de l'étude personnelle pour analyser cette dernière suivant les trois niveaux que nous avons déjà présentés (§ III. 2) mais que nous avons affinés.

À un premier niveau, nous comparons d'une part les OM travaillées en classe avec celles « visiblement » mobilisées par les élèves hors la classe, d'autre part les OM enseignées avec celles de l'OM épistémologique de référence sur les équations que nous présenterons plus bas

À un deuxième niveau, nous mettons en perspective d'une part les praxéologies d'étude développées en classe avec celles utilisées par les élèves hors la classe, d'autre part ces mêmes praxéologies d'étude avec celles dont nous avons supposées qu'elles favorisaient l'accomplissement d'une étude idoine.

À un troisième niveau, nous analysons la gestion didactique de l'enseignant. Comment ce dernier mène-t-il les phases de recherche en classe ? Comment prend-il en compte les techniques mobilisées par les élèves durant ces phases et celles de validation ? Quelle institutionnalisation est réalisée ? Porte-t-elle sur les OM mais aussi sur les praxéologies d'étude ?

Nous avons croisé chacun des trois niveaux d'analyse précédents avec les six moments de l'étude (Chevallard, 1998), c'est-à-dire les moments « incontournables » qui organise l'étude : première rencontre avec un type de tâches, exploration de ce type de tâches et élaboration d'une technique pour le résoudre, constitution de l'environnement technologico-théorique, travail de la technique, évaluation de cette technique.

Nous montrerons plus loin comment nous faisons opérer le modèle sur des exemples précis. Avant cela, nous présentons l'organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations du premier degré à une inconnue

IV. UNE ORGANISATION MATHEMATIQUE (OM) EPISTEMOLOGIQUE DE REFERENCE RELATIVE AUX EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

1. Une OM construite à partir d'une approche anthropologique et d'une approche cognitive

Nous avons élaboré cette organisation de référence à partir d'une synthèse de travaux de recherche en didactique de l'algèbre sur les équations et en adoptant deux approches. La première, anthropologique (Bosch et Gascon, 2005 ; Chevallard, 1985, 1989, 1998 ; Gascon, 1994 ; Ruiz-Munzon, 2010), nous permet de situer la place et la fonction des équations dans les curricula et prend en compte les phénomènes transpositifs du savoir. À cette première approche, nous en coordonnons une seconde, cognitive (Coulange, 1998 ; Douady, 1986 ; Duval, 1993 ; Filloy, Puig et Rojano, 2008 ; Kieran, 2007 ; Sfard, 1991 ; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1987), afin de déterminer les sources de signification des équations et les processus de conceptualisation des élèves liés à la génération et à la manipulation des équations.

Prenant place dans l'organisation mathématique globale algèbre, l'organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations du premier degré à une inconnue est une organisation mathématique régionale qui intègre et articule des OM locales relativement complètes. Chacune de ces dernières est pilotée par des éléments technologico-théoriques. Nous allons seulement présenter en détail les deux premières organisations (se reporter à Sirejacob (2017) pour la troisième).

OM1 : mise en équation

La première organisation mathématique locale (OM1) porte sur la mise en équation. Elle fait intervenir les activités de formation, de représentation et de coordination inter-registres de représentation sémiotique et fournit un environnement technologico-théorique pour justifier les techniques de production, de traduction et d'association de relations entre grandeurs données dans des registres différents. D'après la synthèse de travaux de didactique de l'algèbre que nous avons réalisée et en particulier selon les travaux de Ruiz-Munzon (2010), les équations se situent à la deuxième étape d'un processus de reconstruction de l'algèbre à partir de programmes de calcul : elles sont utiles pour répondre au type de tâches problématique « deux programmes de calcul étant donnés, quelles sont toutes les valeurs d'entrée possibles telles que les résultats finaux des deux programmes soient égaux ? ». Les programmes de calcul sont paramétrés par des valeurs de variables didactiques telles que leur égalisation conduit à la production d'une équation algébrique non arithmétique, c'est-à-dire une équation de la forme $ax + b = c$ d'inconnue x et dont la résolution peut se faire en inversant les opérations (remontée arithmétique). Cette production nécessite d'effectuer des changements de registres de représentation sémiotique. D'après les travaux de Duval (1993), les conversions sémiotiques et la coordination inter-registres sont sources de signification pour l'élève. La mise en équation, type de tâches relevant de l'algèbre, s'accompagne de plus de ruptures épistémologiques avec l'arithmétique : l'égalité change de statut et devient une fonction propositionnelle dont on interroge la valeur de vérité, et les opérations peuvent demeurer suspendues.

OM2 : Résolution algébrique

La deuxième organisation mathématique locale (OM2) porte sur les transformations algébriques à opérer sur une équation en vue d'en trouver l'ensemble des solutions. Elle ne comprend que des types de tâches nécessitant le recours à une technique de résolution algébrique, puisque l'OM de référence est une OM régionale prenant place au sein de l'OM globale algèbre. La mise en équation d'un problème d'égalisation de programmes de calcul « bien » paramétré conduit à une équation qu'il faut traiter dans le registre des écritures algébriques à l'aide d'une technique de résolution algébrique. En effet, l'inconnue étant présente dans les deux membres, la technique par remontée arithmétique est inopérante, et la solution à trouver étant fractionnaire non décimale, la technique par essais/erreurs est mise en échec elle aussi. La résolution de cette équation nécessite une coupure didactique (Filloy, Puig & Rojano, 2008), les opérations devant porter sur l'inconnue et obéissant à de nouveaux discours technologiques liés à l'application des propriétés de conservation de l'égalité.

OM3 : Structure et solutions

La troisième et dernière OM locale (OM3) est liée à la structure des équations et à leurs solutions. Elle est pilotée par des éléments technologico-théoriques justifiant les techniques de substitution pour tester une solution ou encore de reconnaissance de structure pour guider la résolution algébrique.

2. Une OM épistémologique opérationnelle pour analyser les OM à enseigner relatives aux équations dans les programmes et les manuels

Nous avons opérationnalisé l'organisation mathématique épistémologique de référence pour pouvoir réaliser une analyse praxéologique des programmes officiels et des manuels scolaires (l'analyse détaillée peut être trouvée dans Sirejacob (2016)). En la comparant aux organisations mathématiques à enseigner, nous interprétons les écarts comme d'éventuels déficits praxéologiques susceptibles d'être à l'origine de la construction de rapports personnels aux équations non idoines.

L'analyse praxéologique des programmes indique que les directives générales sont imprécises concernant les variables didactiques des problèmes de mise en équation à proposer aux élèves pour motiver le recours aux équations. Certains types de tâches, comme la reconnaissance de la structure d'une équation, fondamentale pour guider l'intelligence des calculs dans la résolution algébrique, et qui relève de la troisième organisation mathématique locale, sont peu présents. De plus, les injonctions relatives au socle commun affaiblissent potentiellement les raisons d'être des équations en rendant dispensables ces dernières dans la résolution de certaines tâches. Les documents d'accompagnement comblent en partie ces déficits praxéologiques mais, de par leur caractère marginal, nous en interrogeons l'utilisation qui en est effectivement faite par les enseignants.

Concernant l'analyse de manuels, nous avons cherché à déterminer le poids de chaque organisation mathématique locale dans quatre manuels : Horizon 4$^{\text{ème}}$ (2011, Ed. Didier), Myriade 4$^{\text{ème}}$ (2011, Ed. Bordas), Phare 4$^{\text{ème}}$ (2011, Ed. Hachette), Transmath 4$^{\text{ème}}$ (2011, Ed. Nathan). Nous avons identifié les types de tâches présents et ceux qui le sont moins, et les discours technologiques utilisés.

Au niveau du poids des organisations mathématiques locales, celle sur la résolution algébrique est la plus présente dans tous les manuels (entre 53% et 65% des OM locales travaillées). Le type de tâches « résoudre algébriquement une équation du premier degré » est le plus travaillé. En revanche, la reconnaissance de la structure des équations, type de tâches de la troisième organisation mathématique locale, est quasiment absente, ce qui fait écho à sa faible présence dans les programmes officiels.

Pour ce qui est des problèmes donnés à résoudre aux élèves, près de la moitié d'entre eux peuvent être solutionnés à l'aide d'une technique non algébrique, c'est-à-dire une technique ne s'appuyant pas sur les propriétés de conservation de l'égalité, dans les quatre manuels. Nous interrogeons le choix des auteurs de proposer une si grande proportion de types de tâches ne motivant pas le recours à la technique de résolution algébrique et les effets sur les apprentissages des élèves qui persistent dans l'utilisation d'anciennes techniques arithmétiques ou par essais/erreurs.

V. CONSTRUCTION ET MISE EN ŒUVRE D'UN PARCOURS D'ETUDE ET DE RECHERCHE RELATIF AUX EQUATIONS

Nous avons montré dans la section précédente qu'il existait des déficits praxéologiques portés par les savoirs didactiquement transposés dans les programmes et les manuels. À ces déficits, nous répondons par la proposition d'un Parcours d'Etude et de Recherche appuyé sur les principaux éléments de la référence épistémologique et intégrant les éléments supposés favoriser le développement de praxéologies d'étude adéquates.

1. Fondements théoriques du Parcours d'Etude et de Recherche

Nous articulons des outils de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des situations didactiques pour concevoir ce parcours d'étude et de recherche. Nous le balisons par des questions génératrices motivant la construction de complexes praxéologiques par un travail équilibré des trois organisations mathématiques locales de l'organisation épistémologique de référence et nous suggérons une organisation didactique explicite de l'étude en classe et hors la classe appuyée sur les moments didactiques. Les situations que nous proposons, avec des milieux riches, donnent des raisons d'être aux types de tâches, aux techniques et aux technologies mathématiques. Une partie de ces situations préexiste dans le champ de la recherche en didactique, notamment dans les travaux de Combier, Guillaume et Pressiat (1996) dans leur ouvrage *Au pied de la lettre.*

2. Un parcours en trois étapes

Nous avons structuré le Parcours d'Etude et de Recherche (abrégé PER dans la suite) en trois étapes.

La première étape motive la production d'une équation pour résoudre un problème de mise en équation à base de programme de calcul, suivant le processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon (2010). Dans cette étape, le milieu contient un solveur d'équations qui prend temporairement en charge la résolution de l'équation. Les types de tâches travaillés relèvent principalement des OM locales OM1 et OM3 de l'OM épistémologique de référence.

La deuxième étape du PER donne des raisons d'être à la technique de résolution algébrique. La question génératrice de cette étape est : « comment trouver la valeur d'une variable x dans une égalité de la forme $ax+b=cx+d$? », les coefficients a,b,c,d étant « bien » choisis. L'objectif est de construire une technique fonctionnant quels que soient les coefficients a,b,c,d. Le milieu ne contient plus le solveur d'équations mais comporte un logiciel prenant en charge une partie des transformations algébriques à opérer sur l'équation. Dans cette étape, les types de tâches relèvent principalement de OM2 et OM3.

La troisième et dernière étape du PER concerne la résolution de problèmes algébriques divers, avec un jeu important sur les variables didactiques qui module la complexité de ces problèmes.

Dans un souci de renforcer les raisons d'être des OM relatives aux équations, nous avons proposé des tâches préparatoires avant les étapes du PER. Dans ces tâches est prolongé le moment du travail des techniques arithmétiques et par essais/erreurs et des OM relatives au numérique et aux expressions algébriques.

3. L'organisation didactique au sein du PER

Chaque étape du parcours voit s'opérer un cycle de moments de l'étude pour le principal type de tâches relatif aux équations travaillé. De manière fortement articulée avec le travail des OM, nous proposons des pistes pour faire développer des praxéologies d'étude aux élèves.

Par exemple, dans le schéma ci-après (figure 2), où nous nous situons à l'étape 1 du PER, les premiers moments didactiques correspondent à l'évaluation de techniques anciennes et à l'élaboration de la nouvelle technique de résolution algébrique. Il nous semble possible durant ces moments de faire travailler des techniques d'étude pour apprendre aux élèves à situer les nouvelles OM par rapport aux anciennes, ou encore pour identifier la nouvelle technique comme telle.

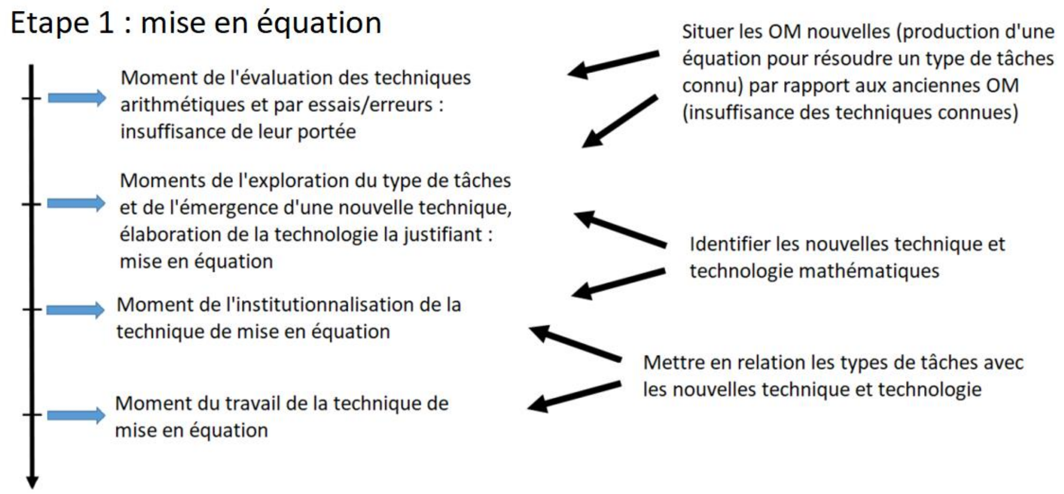


Figure 2 : Des articulations possibles entre OM et praxéologies d'étude à l'étape 1 du PER.

À titre d'illustration, un exemple de type de tâches mathématiques proposé à faire en autonomie à l'étape 2 du PER est présenté dans la figure 3 ci-après. Il s'agit dans cet exemple de résoudre des équations algébriques. Nous avons fait varier sur les valeurs des variables didactiques, avec l'explicitation ou non de signes multiplicatifs ou la présence ou non de produits parenthésés. À ce stade du PER, les élèves ont déjà plusieurs fois rencontré l'objet équations, en ont produites et en ont résolues. Nous nous situons dans le moment du travail de la technique de résolution algébrique. Il nous paraît donc possible pour l'enseignant de réaliser un travail sur quelques praxéologies d'étude : par exemple, il peut amener les élèves à identifier la tâche comme relevant d'une « résolution d'équation » à partir de la donnée de la consigne et des quatre équations en présence, et leur faire associer la technique de résolution algébrique. Au cours de la résolution des équations, il peut également leur faire remarquer en quoi les changements de variables didactiques – sans utiliser les termes de variables didactiques bien entendu – ont conduit à adapter certains éléments de la technique de résolution algébrique, en appui sur la reconnaissance de la structure des expressions en jeu. C'est alors l'occasion de situer les OM relatives aux expressions algébriques par rapport aux OM relatives aux équations et de mettre en avant leur articulation.

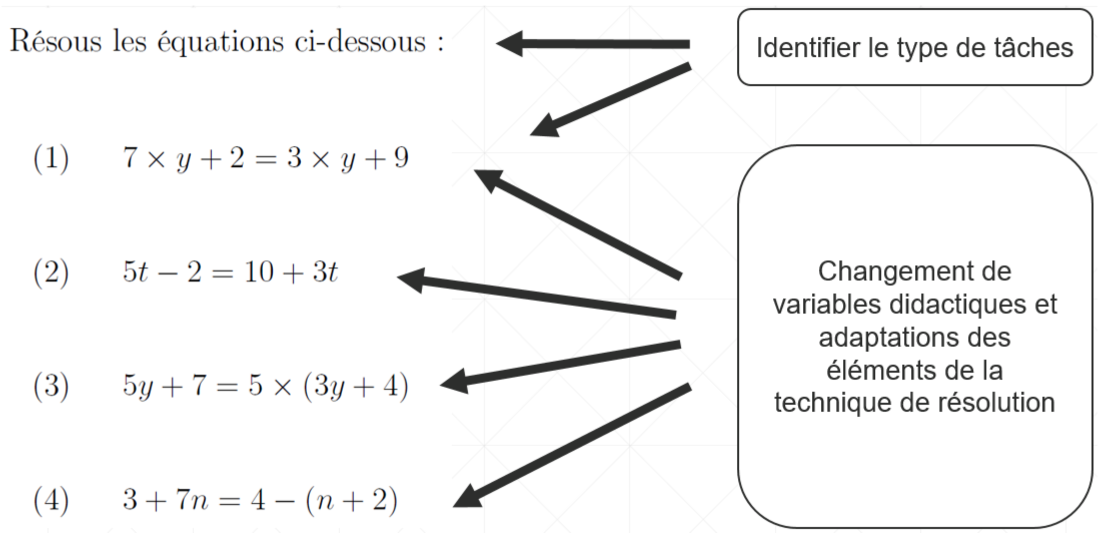


Figure 3 : Un exemple de type de tâches donné à travailler hors la classe.

Afin d'accompagner l'élève dans l'organisation de son étude personnelle hors la classe, nous avons suggéré pour chaque étape du parcours des tâches mathématiques à réaliser en autonomie. Ces tâches ont été choisies pour correspondre à des tâches relevant du même type et qui ont été réalisées en classe. Pour chaque tâche, nous avons fourni un ensemble d'aides de différentes natures, que nous avons différenciées en fonction des besoins d'apprentissages repérés par le test diagnostique automatique. Nous avons fait l'hypothèse que la richesse du milieu ainsi construit pour l'élève étudiant hors la classe et les rétroactions fournies par ce milieu – notamment par les différentes aides – lui permettraient de développer des praxéologies d'étude parmi celles supposées favoriser une activité mathématique adéquate.

Les types d'aides que nous avons proposés sont multiples et comme nous l'avons déjà dit en lien avec les praxéologies d'étude que nous avons voulu faire développer par les élèves :

- Les aides de renvoi, comme leur nom l'indique, renvoient l'élève vers des tâches du même type que celle qu'il a à réaliser en autonomie.
- Les aides comparatrices suggèrent à l'élève de comparer des formulations d'énoncés ou des corrigés, là aussi afin de développer l'identification du type de tâches.
- Les aides pour mobiliser une technique ou pour appliquer une technique donnent des indications à l'élève sur la technique à utiliser ou sur la façon de l'appliquer, par exemple à travers des tâches résolues.
- Les aides régulatrices se présentent sous la forme d'arbres où j'ai anticipé plusieurs réponses possibles d'élèves. En fonction de la réponse donnée, et en appui sur les analyses *a priori* des tâches, nous proposons une aide adaptée aux besoins de l'élève.
- Enfin, les aides au contrôle fournissent à l'élève des moyens de contrôler ce qu'il fait quand il réalise une tâche.

4. Mise en œuvre du PER dans une classe de collège et analyses *a posteriori*

Nous passons à présent à la mise en place du PER dans une classe de collège REP et à l'analyse *a posteriori* de l'expérimentation.

Eléments de contexte de la mise en œuvre du PER

Un enseignant, que nous baptisons ici Marc, a mis en œuvre le PER dans une de ses classes de niveau quatrième. Dans cette classe se trouvaient trois élèves à qui nous avons fait passer les premiers entretiens. Le fait de pouvoir nous entretenir de nouveau avec ces mêmes élèves nous a permis de comparer leurs gestes d'étude hors la classe.

Sept séances d'une heure ont été nécessaires à l'enseignant Marc pour la mise en scène du PER. Une heure supplémentaire a été consacrée à l'évaluation écrite des productions des élèves sur les équations.

Nous avons filmé l'ensemble des séances et travaillé sur leurs transcriptions. Nous avons également filmé les entretiens passés avec les trois élèves sur un mode opératoire identique à celui utilisé pour les tout premiers entretiens.

Des genres de tâches qui auraient pu être travaillés de manière moins inégale

Nous avons analysé les transcriptions en utilisant la grille à trois niveaux que nous déjà présentée (section III.2) et que nous allons maintenant faire fonctionner.

Nous avons tout d'abord constaté un travail relativement équilibré des OM locales de l'OM de référence relative aux équations (OM1 : 42% ; OM2 : 29% ; OM3 : 29%). Toutefois, certains genres de tâches ont été moins travaillés que d'autres, comme « Identifier la structure d’une équation », « Prouver l’équivalence de deux équations » et « Tester si un nombre est solution », alors qu’ils sont en particulier utiles pour contrôler les calculs sur les équations.

Nous nous sommes ensuite particulièrement intéressé à ce qui est laissé à la charge des élèves : réalisent-ils les tâches données à faire et qui explicitent les techniques et les éléments technologiques, ou bien est-ce l’enseignant ? Sur l’ensemble du PER, nous avons observé que dans plus de la moitié des cas, l’enseignant prenait la responsabilité d’accomplir les tâches travaillées en classe et d’expliciter la technique ou la technologie correspondantes.

Des praxéologies d’étude qui auraient pu prendre en compte davantage les spécificités du secteur d’étude

Au niveau des praxéologies d’étude développées en classe, nous avons constaté une présence importante de praxéologies pédagogiques « générales », du type « réaliser une tâche mathématique » ou « réviser un contrôle ». À l’inverse, l’identification des types de tâches mathématiques est peu développée. Or, nous avons fait l’hypothèse que sans cette identification, l’ensemble des autres praxéologies d’étude supposées favoriser une activité mathématique idoine en autonomie hors la classe avait peu de chance d’être développé.

Durant la mise en place du parcours, nous avons également observé une part importante de ce que nous avons appelé des « occasions manquées », c’est-à-dire des occasions pour l’enseignant de développer des praxéologies d’étude signalées et suggérées dans le parcours initial. Par exemple, sur la cinquantaine de tâches mathématiques réalisées en classe, nous pensons que l’enseignant aurait pu identifier les types de tâches parents plus souvent, ou situer les OM nouvelles par rapport aux anciennes sur les tâches qui agrégeaient les OM ponctuelles d’OM régionales différentes.

Nous avons toutefois noté une croissance dans le nombre de praxéologies d’étude développées en classe au cours des séances : celles-ci ont été plus travaillées dans les dernières séances et les élèves avaient davantage la charge de mobiliser ces praxéologies.

L’ensemble de nos observations est à nuancer en regard des moments de l’étude. Par exemple, nous avons remarqué que lors du moment du travail de la technique, les praxéologies d’étude sont davantage développées en classe et ce, par les élèves.

Une autonomie des élèves en classe qui aurait pu être plus importante

Nous nous sommes également focalisé sur l’autonomie dans laquelle les élèves étaient placés. Nous avons pu constater sur l’ensemble des séances analysées que les temps où les élèves étaient autonomes étaient globalement beaucoup moins important que ceux où l’enseignant donne des indications ou réalise les tâches étudiées. En moyenne et en proportion, les élèves sont autonomes environ un cinquième du temps qu’ils passent en classe. Nous interrogeons ceci : comment les élèves dont les besoins d’apprentissages sont les plus forts peuvent-ils occuper des positions d’étudiants au moins localement autonomes hors la classe s’ils font peu en classe l’expérience de cette autonomie ?

Un travail hors la classe des genres de tâches qui aurait pu être plus équilibré

Toujours sur le hors la classe, nous avons observé de plus près les tâches données à faire hors la classe et repéré un déséquilibre. Si de manière peu étonnante, les élèves ont beaucoup résolu d’équations, nous avons remarqué qu’ils ont à l’inverse peu été confrontés à la réalisation de tâches faisant spécifiquement travailler la reconnaissance de la structure, la preuve d’équivalence entre équations ou le test de solutions. Ceci s’est en partie retrouvé dans les traces écrites des élèves où les tâches relevant des genres de tâches les moins travaillés ont été les moins correctement réalisés.

Des effets encourageants sur les apprentissages disciplinaires

Concernant ces traces écrites, nous avons analysé celles de vingt élèves à une évaluation co-construite avec l'enseignant (figure 4). Cette évaluation comportait les principaux types de tâches mathématiques travaillés en classe, entre autres résoudre une équation du premier degré à une inconnue, mettre en équation un problème algébrique du premier degré en égalisant deux programmes de calcul, tester si un nombre est solution d'une équation.

Exercice 2 **Résoudre les équations ci-dessous en détaillant les étapes :** *(5 points)*

$5 \times x + 8 = 3 \times x + 2$	$8x - 4 = -3x + 9$	$3 \times (x + 5) = x + 3$

Exercice 3 *(2 points)*

1] Le nombre 2 est-il solution de l'équation $3x + 5 = 7x - 1$? Justifie.

2] Sam a résolu l'équation $2x + 9 = 3 - 4x$ et a trouvé -1 comme solution. A-t-il raison ? Justifie.

Exercice 4 *(4 points)*

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
• Choisir un nombre • Le multiplier par 11 • Soustraire 4 au résultat	• Choisir un nombre • Lui ajouter 2 • Multiplier le résultat par 6

Alice et Benjamin choisissent le même nombre de départ.

Alice teste le programme A et Benjamin teste le programme B.

Alice et Benjamin trouvent le même résultat final.

Quel nombre de départ ont-ils choisi ? Justifie ta réponse.

Figure 4 : Tâches proposées lors de l'évaluation écrite sur les équations.

Nos analyses indiquent que les élèves semblent majoritairement mobiliser la technique de résolution algébrique pour l'exercice sur la résolution d'équations (exercice 2) : 17 élèves sur 20 ont eu recours à cette technique pour résoudre les équations proposées. Nous relions ceci avec le fait que la résolution d'équations est le genre de tâches qui a été le plus largement travaillé en classe et hors la classe. Les erreurs de calcul que nous avons pu voir dans les traces écrites portent majoritairement sur des OM anciennes. Dans la résolution algébrique des équations, les élèves se trompent dans le calcul sur les nombres relatifs ou sur le développement d'un produit parenthésé avec des expressions algébriques, mais utilisent les propriétés de conservation de l'égalité.

Pour résoudre le problème d'égalisation de programmes de calcul (exercice 4), près de la moitié des élèves ont recours à la technique de mise en équation ; seuls 4 élèves ont tenté d'utiliser la technique par substitution. Cependant, un nombre assez élevé d'équations incorrectes a été constaté, alors que le type de tâches « égaliser deux programmes de calcul » a été lui aussi beaucoup travaillé en classe. Nous avançons au moins deux hypothèses pour expliquer ces résultats. La première est que dans l'évaluation, l'équation traduisant l'égalisation des programmes de calcul comportait un produit parenthésé ; or, en classe, les tâches du même type conduisaient toujours à des équations sans produit parenthésé. Une seconde hypothèse est que le test des solutions et la reconnaissance des structures font partie des genres de tâches les moins travaillés en classe de manière explicite.

Bien que la construction d'un rapport personnel idoine aux équations en classe de quatrième nécessite d'agréger différentes OM, nous considérons comme encourageants les effets obtenus sur les apprentissages des élèves relatifs aux équations après la mise en place du parcours.

Des praxéologies d'étude qui restent à faire évoluer

Pour ce qui est des praxéologies d'étude développées hors la classe, nous avons interrogé trois élèves, pour des raisons liées aux contraintes du terrain. Les résultats que nous avons obtenus sont donc à prendre avec des précautions et des expérimentations à plus grande échelle mériteraient d'avoir lieu.

Pour les élèves qualifiés de « moyens » par leur enseignant, nous n'avons pas constaté d'évolution positive dans leur manière d'organiser leur étude personnelle hors la classe relativement au thème des équations. Ces deux élèves ont continué à réaliser des gestes de lecture ou de mémorisation intensive de la leçon. Ils semblent avoir été peu sensibles aux changements de pratiques de leur enseignant sur les sept séances qu'a nécessité la mise en place du PER. Seule Marianne, l'élève qualifiée de « bonne élève » (section III.2), a changé sa façon d'étudier personnellement : elle qui au premier entretien nous avait dit ne jamais « réviser » les contrôles de mathématiques nous a expliqué qu'elle avait réalisé des tâches relevant des principaux types de tâches relatifs aux équations. Son rapport personnel aux équations nous paraissait déjà idoine à ce niveau scolaire.

Il nous semble hautement probable que l'échelle de temps sur laquelle nous avons analysé les gestes des élèves est très insuffisamment longue pour pouvoir conclure de manière définitive sur les effets d'un travail à long terme des praxéologies d'étude.

VI. CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Dans notre travail, nous avons construit un modèle de l'étude personnelle opérationnalisé pour analyser les praxéologies d'étude développées par les élèves et les mettre en perspective avec celles travaillées en classe sous la direction de l'enseignant. Prenant en compte les spécificités de la discipline, et plus précisément celles du thème des équations du premier degré à une inconnue, nous avons fait fonctionner ce modèle en appui sur une référence épistémologique, à travers notamment l'élaboration et l'opérationnalisation d'une OM de référence épistémologique relative aux équations. Face aux déficits praxéologiques repérés dans les programmes et les manuels, nous avons proposé un PER relatif aux équations intégrant les éléments précédents. La mise en place de ce PER au sein d'une classe semble avoir eu des effets positifs sur les apprentissages disciplinaires des élèves.

Le thème de l'étude personnelle hors la classe est peu abordé dans le champ de la didactique des mathématiques. Nous avons conscience d'avoir mené des travaux sur un terrain encore largement en chantier, des interrogations qu'ils peuvent soulever et des nombreux prolongements potentiels à qui ils peuvent donner naissance. Nous en proposons ici quelques-uns.

Nos recherches peuvent être prolongées sur d'autres secteurs d'étude. En particulier, les OM de référence relatives aux expressions algébriques et aux équations du premier degré, présents dans nos travaux et ceux de Pilet (2015) peuvent servir de point d'appui à la construction d'autres OM de référence en algèbre élémentaire, comme celles relatives aux systèmes d'équations ou aux inéquations.

Le modèle de l'étude personnelle que nous avons élaboré nous paraît transférable, moyennant évidemment des adaptations, à d'autres secteurs, domaines, voire à d'autres disciplines.

Certains éléments du PER que nous avons conçus peuvent être selon nous informatisés pour améliorer l'organisation de l'étude personnelle hors la classe des élèves. Nous avons fait distribuer aux élèves de très nombreux documents écrits durant nos expérimentations, peu pratiques à utiliser surtout pour des élèves avec de forts besoins d'apprentissages. En particulier, les aides fournies correspondaient à de grands blocs de textes peu lisibles et gagneraient à prendre corps au sein d'une interface dynamique et ergonomique.

Enfin, nous pensons qu'une piste prometteuse pour favoriser la construction de techniques d'étude efficaces en mathématiques chez les élèves consiste à poursuivre les recherches sur la manière d'organiser didactiquement le travail sur les praxéologies d'étude et ce, en appui sur les moments didactiques. Comment organiser le moment de l'élaboration de nouvelles techniques d'étude et montrer aux élèves l'insuffisance éventuelle d'anciennes techniques d'étude qu'ils employaient jusqu'alors ? Sur quels types de tâches d'étude, en lien avec les types de tâches mathématiques travaillés, pourrait-on faire émerger puis travailler ces nouvelles techniques d'étude ? Comment organiser le moment de leur institutionnalisation ? Quel discours technologique, à diffuser auprès de la communauté enseignante, pourrait-on élaborer et utiliser pour les justifier ?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOSCH, M. & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e Ecole d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 août 2003* (pp. 107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCHS, B. (2012). Le cahier de cours au collège : une œuvre du professeur ? un instrument pour l'élève ? *Rcherches en Didactique des Mathématiques, 32*(2), 159-193.

CASTELA, C. (2000). Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 20(3),* 331-380.

CASTELA, C. (2002). Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison de deux institutions, université et classes préparatoires aux grandes écoles. *Cahier de Didirem,40* . Paris : IREM Paris 7.

CASTELA, C. (2007). Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de première scientifique. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2006* (pp. 33-77). Paris : IREM Paris 7.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28(2),* 135-182.

CHEVALLARD, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5,* 51-94.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x, 19,* 43-72.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirfalise (Ed.), *Actes de l'Ecole d'été de la Rochelle, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle* (pp. 91-120). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 19(2),* 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2002). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée : raisons d'être, fonctions, devenir. *Actes des Journées inter-Irem didactique,* Dijon, 1-26.

COMBIER, G., GUILLAUME, J.-C. & PRESSIAT, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !* Institut National de Recherche Pédagogique (INRP).

COULANGE, L. (1998). Les problèmes « concrets » à « mettre en équations » dans l'enseignement. *Petit x, 47,* 33-58.

DELOZANNE, E., PRÉVIT, D., GRUGEON, B. & CHENEVOTOT, F.. (2010). Vers un modèle de diagnostic de coméptences. *Revue Techniques et Sciences Informatiques, 29*(8-9), 899-938.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-32.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 5,* 37-65.

ESMENJAUD-GENESTOUX, F. (2005). Le travail 'personnel' au collège ou le partage des responsabilités didactiques entre le professeur, l'élève et ceux qui accompagnent la réalisation de devoirs en mathématiques. Partie 1 : La partie 'privée' du travail des élèves et de l'accompagnement aux devoirs. *Petit x, 69,* 58-77.

ESMENJAUD-GENESTOUX, F. (2006). Le travail 'personnel' au collège ou le partage des responsabilités didactiques entre le professeur, l'élève et ceux qui accompagnent la réalisation de devoirs en mathématiques. Partie 2 : Le professeur accompagne le travail personnel des élèves. *Petit x, 70,* 48-72.

FARAH, L. (2015). *Etude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.

FELIX, C. (2004). Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste. *Spirale, 33,* 483-505.

FILLOY, E., PUIG, L. & ROJANO, T. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and Empirical Approach* (Vol. 43). New York : Springer.

GASCON, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée ». *Petit x, 37,* 43-63.

KIERAN, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At The Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnings* (pp. 707-762).

MILHAUD, N. (1998). Le travail personnel des élèves. *Petit x, 11*(3), 51-78.

PILET (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.

PILET (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 35(3)*, 273-312.

RAYOU, P. (2008). Logiques cognitives et logiques sociales du travail hors la classe. *Communication présentée lors du colloque international Efficacité et équité en éducation.* Consultable sur https://esup.espe-bretagne.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_rayou.pdf

RUIZ-MUNZON (2010). *La introduccion del algebra elemental y su desarollo hacia la modelizacion funcional*. Thèse de doctorat, Université Autonome de Barcelone.

SFARD (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

SIREJACOB, S. (2016). Les organisations de savoirs mathématiques à enseigner : les équations au collège. *Petit x, 102,* 27-55.

SIREJACOB, S. (2017). *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens: le cas des équations du premier degré à une inconnue*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.

VERGNAUD, G., CORTES, A. & FAVRE-ARTIGUE, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 259-288). La Pensée Sauvage.

DES ILLUSTRATIONS QUI ACCOMPAGNENT LES PROBLEMES A LA CONSTRUCTION DE REPRESENTATIONS SCHEMATIQUES PAR LES ELEVES : QUELS ENJEUX FACE AUX PROBLEMES STANDARDS ET PROBLEMATIQUES ?

Annick **FAGNANT**

Université de Liège, Belgique

afagnant@uliege.be

Résumé

La résolution de problèmes nécessite la mise en œuvre d'un processus complexe de modélisation mathématique (Verschaffel & De Corte, 2008) au sein duquel la construction d'une représentation appropriée de la situation joue un rôle central (Thevenot, Barrouillet, & Camos, 2015). Les illustrations qui accompagnent les problèmes ont pour objectif d'enrichir la représentation (le modèle mental) construite par les élèves ou de soutenir la construction d'une schématisation externe (schéma à compléter ou « modèle » à réinvestir). Les recherches mettent en lumière des enjeux diversifiés et des résultats controversés en fonction du type d'illustrations proposées (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007) et du caractère standard ou problématique des problèmes analysés (Dewolf, Van Dooren, & Verschaffel, 2017). Par ailleurs, même si les résultats de recherches semblent s'accorder quant à l'importance d'apprendre aux élèves à construire des représentations schématiques externes, le type même de schématisation et la façon de les introduire demeurent sujets à débat (Fagnant & Vlassis, 2013). Au départ d'un panorama de recherches centrées sur les illustrations et sur les schématisations face à des problèmes standards ou problématiques, quelques enjeux, complémentarités et opportunités pour les pratiques de classe sont discutés.

Mots-clés

Construction d'un modèle mental, illustrations, schématisations, problèmes standards, problèmes problématiques

I. INTRODUCTION

A l'heure actuelle, il est généralement admis de considérer la résolution de problèmes comme un processus complexe de modélisation mathématique. La figure 1 illustre ce processus en présentant simultanément ce qui correspondrait à une démarche « experte » de résolution, au sens où elle prendrait adéquatement en compte les différentes étapes-clés du processus, et des démarches « superficielles », au sens où elles court-circuiteraient une ou plusieurs étapes-clés de celui-ci.

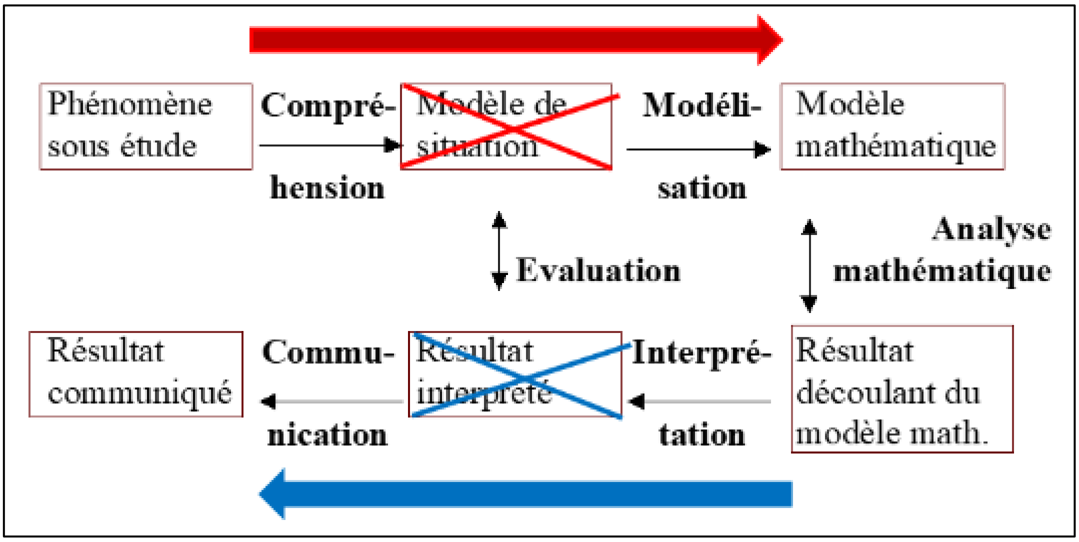


Figure 1 : Le processus complexe de modélisation mathématique et les démarches superficielles (d'après Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

Même si la figure 1 donne l'impression d'une certaine linéarité de la démarche (tout comme l'explication qui suit), celle-ci doit être considérée comme cyclique dans la mesure où des allers-retours entre les différentes étapes sont possibles, voire nécessaires pour résoudre correctement certains problèmes.

Dans la démarche que nous avons qualifiée de « démarche experte », le point de départ est le phénomène sous étude. Il correspond à la description de certains aspects de la réalité, considérés comme potentiellement capables d'être soumis à une analyse mathématique. La première étape implique la compréhension de la situation décrite et la construction d'un modèle de situation. La construction de ce modèle peut nécessiter de faire appel à des connaissances de la vie réelle ; elle peut aussi être médiatisée par des représentations externes, mettant en évidence les variables importantes de la situation, ainsi que les relations temporelles et causales entre ces variables. La deuxième étape (la modélisation) consiste à transformer le modèle de situation en un modèle mathématique, c'est-à-dire à exprimer sous une forme mathématique les relations qui unissent les éléments importants de la situation étudiée. La troisième étape consiste à appliquer une analyse mathématique au modèle mathématique. La disponibilité des ressources joue alors un rôle important, tant pour l'analyse elle-même que pour une anticipation des résultats découlant du modèle. La quatrième étape consiste alors à interpréter la ou les solution(s) en relation avec le modèle de situation. Plusieurs modèles alternatifs peuvent encore être comparés à ce stade. Les résultats interprétés doivent encore être évalués en fonction du modèle de situation : la solution obtenue a-t-elle du sens ? Si ce n'est pas le cas, le modèle de situation peut être soumis à une nouvelle analyse et le processus cyclique peut redémarrer… Une fois la solution trouvée, interprétée, évaluée et acceptée, la dernière étape consiste à la communiquer en fonction des requêtes de la tâche.

Les « démarches superficielles », mentionnées précédemment et représentées par les flèches épaisses sur la figure 1, consistent généralement à négliger une ou plusieurs étape(s) de cette démarche « experte », généralement l'étape de compréhension (ou de construction d'un modèle de situation) et les étapes d'interprétation et/ou d'évaluation. La figure 2 illustre ce type de démarches superficielles face à trois problèmes assez différents les uns des autres.

P1 - Pierre a joué deux parties de billes. Il a **perdu** 8 billes à la première partie et il a **perdu** 3 billes à la seconde partie. Combien de billes a-t-il **perdues** en tout ?

> Démarche superficielle consistant à s'appuyer sur les mots-clés présents dans l'énoncé pour choisir l'opération à effectuer, sans procéder à la construction d'une représentation (un modèle de situation) mettant en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent : « perdre » évoque une soustraction, l'élève applique alors l'opération erronée « 8-3 = 5 ».

P2 - John court le 100 m en 15 secondes. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 1 km ?

> Démarche superficielle consistant à ne pas prendre en compte ses connaissances de la vie réelle pour construire un modèle de situation approprié : la situation décrite dans l'énoncé évoque un problème de vitesse, l'élève applique alors un modèle proportionnel sans se poser la question de savoir si celui-ci a du sens dans la situation décrite : 10 x 15 secondes = 150 secondes

P3 - Un bus de l'armée peut contenir 36 soldats. Si 1128 soldats ont besoin de se rendre à leur camp d'entraînement en bus, combien de bus sont nécessaires ?

> Démarche superficielle consistant à ne pas interpréter la solution mathématique obtenue au terme des calculs effectués (« 31,33 bus ») ou à procéder à l'arrondi à l'unité (« 31 bus »). Dans les deux cas, la plausibilité de la réponse n'est pas évaluée en regard du modèle de situation (la solution « 31,33 bus » n'a pas de sens d'un point de vue réaliste et la solution « 31 bus » laisse quelques soldats sur le carreau).

Figure 2 : Exemples de démarches superficielles face à des problèmes standards et problématiques.

En référence à la distinction proposée par l'équipe de Leuven (Verschaffel et al., 2000), le premier problème est un « problème standard », au sens où il peut être résolu par l'application directe d'une opération au départ des données de l'énoncé (P1). Les deux autres sont des « problèmes problématiques » pour lesquels la simple application d'une opération pose question à partir du moment où des connaissances réalistes liées à la situation sont prises en considération (P2) ou qui nécessitent une interprétation réaliste de la solution (P3).

Les problèmes standards et les problèmes problématiques posent évidemment des questions différentes en termes d'enjeux pour l'enseignement. Ainsi, les réponses « étonnantes » produites par les élèves face aux problèmes problématiques peuvent sans doute en partie s'expliquer par une rupture du « contrat didactique » (Brousseau, 1990) dans la mesure où ces problèmes vont à l'encontre des « normes socio-mathématiques » (Yackel & Cobb, 1996) établies dans les classes. Elles questionnent quant aux pratiques de classe qui conduisent justement les élèves à penser que le « contrat » est de faire des calculs pour donner une réponse numérique précise face à tout problème proposé en classe et/ou à ne pas interpréter la solution mathématique obtenue. Parallèlement, les démarches superficielles produites face aux problèmes standards questionnent également quant aux raisons qui poussent les élèves à penser que l'on peut se fier aux mots-clés (ex. perdre = soustraction) ou à d'autres « indices », comme les nombres proposés dans l'énoncé (ex. 75 et 3 = division) ou la dernière opération découverte en classe (ex. hier, on a vu la proportionnalité, c'est donc ce modèle mathématique qu'il convient d'appliquer aujourd'hui). Finalement, qu'il s'agisse de problèmes standards ou problématiques, un enjeu important de l'enseignement est d'amener les élèves à développer des démarches expertes et réflexives de résolution de problèmes, consistant à mettre en œuvre un processus complexe de modélisation mathématique dans lequel la construction d'une représentation appropriée (d'un modèle de situation) joue un rôle central (Thevenot, Barrouillet, & Camos, 2015).

Dans cet article, nous allons nous intéresser à deux « pratiques » assez répandues dans le domaine de la résolution de problèmes : accompagner les énoncés d'illustrations et inviter les élèves à construire des schématisations externalisées sur papier (schémas, dessins…). Nous avons choisi de situer nos propos dans le domaine des « problèmes d'application » face auxquels on attend des élèves qu'ils mobilisent des connaissances mathématiques acquises préalablement pour faire face aux situations qui leur sont proposées. Dans ce type de situations, on peut considérer que les illustrations qui accompagnent les problèmes et les représentations externes produites par les élèves eux-mêmes ont toutes deux pour but d'aider à la construction d'une représentation mentale (un modèle de situation) permettant de résoudre le problème en mobilisant un modèle mathématique approprié. Mais les illustrations aident-elles réellement les élèves (*et qu'en est-il face aux problèmes standards vs problématiques*) et la construction de schématisations par les élèves peut-elle constituer un outil d'enseignement/apprentissage porteur (*et si oui, quel type de schématisation et comment les introduire*) ? Sans prétention d'exhaustivité, la suite du texte apporte quelques éléments de réponse à ces questionnements en cherchant à mettre en évidence les enjeux, les complémentarités et les opportunités de ces « illustrations » et « schématisations » pour les pratiques de classe.

II. LES ILLUSTRATIONS QUI ACCOMPAGNENT LES PROBLEMES

De nombreuses études se sont intéressées à l'impact des illustrations qui accompagnent les énoncés de problèmes standards (Berends & Van Lieshout, 2009 ; Elia, 2009 ; Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007 ; Fagnant & Vlassis, 2013 ; Pantziara, Gagatsis, & Elia, 2009 ; Reuter, Schnotz & Rasch, 2015) ou problématiques (Dewolf, Van Dooren, Ev Cimen, & Verschaffel, 2014 ; Dewolf, Van Dooren, & Verschaffel, 2017 ; Fagnant & Auquière, à paraître). Pour présenter quelques constats et enjeux liés à ces illustrations, il nous est apparu pertinent de nous appuyer sur la typologie proposée par Elia et Philippou (2004) qui distingue quatre types d'illustrations définies comme suit :

> *"Decorative pictures do not give any actual information concerning the solution of the problem. Representational pictures represent the whole or a part of the content of the problem, while organizational pictures provide directions for drawing or written work that support the solution procedure. Finally, informational pictures provide information that is essential for the solution of the problem; in other words, the problem is based on the picture." (p. 328)*

Dans les points qui suivent, nous allons nous intéresser à l'effet de ces différents types d'illustrations lorsqu'elles accompagnent des problèmes standards d'abord, des problèmes problématiques ensuite.

1. Les illustrations qui accompagnent les problèmes standards

Ciblées sur des problèmes standards, correspondant à des structures additives de type « changement » (selon la typologie de Riley, Greeno & Heller, 1983 ; ou de type « Etat-Transformation-Etat », selon l'analyse de Vergnaud, 1990), les recherches menées par Berends et Van Lieshout (2009) auprès de 135 élèves de grade 5 (10-11 ans) aux Pays-Bas et par Elia et al. (2007) auprès de 1447 élèves des grades 1 à 3 (6-7 à 8-9 ans) à Chypre conduisent à des résultats assez convergents. Tout d'abord, les illustrations « décoratives » et les illustrations « représentationnelles » (qualifiées aussi d'évocatrices) ont globalement peu d'effet ; elles semblent être considérées comme inutiles par les élèves et n'affectent pas les taux de réussite observés. Les illustrations « informationnelles », quant à elles, ont un effet contre-productif qui semblerait s'expliquer par une augmentation de la charge mnésique et témoigner des difficultés éprouvées par les élèves pour combiner la prise d'informations dans le texte et dans les illustrations. Enfin, les illustrations « organisationnelles », supposées donner des indications sur la procédure de résolution à mobiliser, présentent des résultats assez disparates selon les études. En effet, dans l'étude de Berends et Van Lieshout précitée, elles impactent négativement les résultats des élèves faibles et elles n'ont pas d'effet auprès des élèves plus compétents. Ces résultats, qui peuvent paraître surprenants, peuvent sans doute en partie s'expliquer par le fait que ces auteurs ont choisi de tester l'impact des illustrations face à un problème très simple pour des élèves de grade 5 (un problème de type changement présentant l'inconnue à l'état final, c'est-à-dire l'un des problèmes les plus élémentaires de la typologie additive). Mais qu'en est-il de l'effet de ce type d'illustrations face à des problèmes plus complexes ?

Dans une étude menée auprès de 194 élèves chypriotes de grade 6 (11-12 ans), Pantziara et al. (2009) ont mis en œuvre un testing en deux étapes impliquant des problèmes que les auteurs qualifient de non-routiniers[1] et qu'ils définissent comme suit, par opposition aux problèmes routiniers :

> *"English (1996) defines non-routine problems as the problems that do not involve routine computations, but the application of a certain strategy, in this case a diagram, is most often required in order to solve a problem. Non-routine problems are considered more complicated and difficult than routine problems in which only the application of routine computations is involved in their solution (Schoenfeld, 1992)." (Pantziara et al., 2009, p. 43)*

Dans un premier temps, un test comprenant six problèmes non-routiniers a été proposé aux élèves qui étaient invités à les résoudre comme ils le souhaitaient et à développer par écrit leur démarche de résolution. Dans un second temps (une semaine plus tard), les élèves ont reçu un test comprenant six problèmes parallèles à ceux du premier test, mais étant cette fois accompagnés d'une illustration (qualifiée par les auteurs de *diagramme*) que les élèves devaient utiliser pour résoudre le problème. Ces *diagrammes* peuvent être considérés comme des illustrations « organisationnelles » incomplètes devant aider les élèves à se représenter le problème et à dégager une démarche de résolution appropriée.

La figure 3 présente un exemple de problème non-routinier accompagné de l'illustration à compléter ; elle montre aussi une production d'élève indiquant que ce dernier s'est emparé de cette « ébauche » pour compléter la schématisation et résoudre le problème sur cette base.

Globalement, les résultats de l'étude de Pantziara et al. (2009) montrent que la présence des illustrations ne conduit pas à une augmentation des performances moyennes en résolution de problèmes. Face à ces problèmes non-routiniers, accompagner les énoncés d'illustrations (dans le cas présent, sous la forme de schémas prédéfinis à compléter) semble être une aide pour certains élèves alors que cela semble en perturber d'autres.

[1] Ces problèmes non-routiniers n'en demeurent pas moins des problèmes « standards » au sens où il est possible de les résoudre en appliquant une ou plusieurs opération(s) au départ des nombres de l'énoncé. C'est donc par opposition aux problèmes « problématiques » (face auxquels on attend des élèves qu'ils fassent appel à leurs connaissances de la vie réelle pour questionner le modèle mathématique que l'on pourrait appliquer à la situation) qu'on conviendra ici de les considérer comme « standards ».

Mr. Andreas is standing in a rung of a ladder and cleans the building's windows. Then, he stepped up three rungs to clean the rest of the windows. Next, he went down five rungs to clean other windows. Then he climbed up seven rungs to clean the rest of the windows and he was at the ninth rung of the ladder. In which rung did Mr. Andreas stand when he first started cleaning the windows?

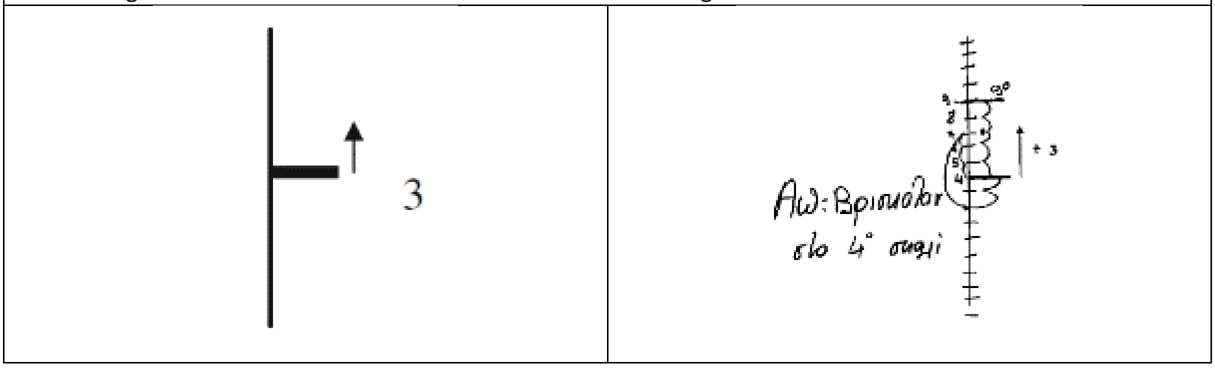


Figure 3 : Problème non-routinier accompagné d'une illustration organisationnelle (Extrait de Pantziara et al., 2007, p. 57) et exemple de production d'élève (Ibid., p. 52).

Dans la lignée de l'étude de Pantziara et al. (2009), une étude comparable a été menée auprès de 146 élèves de grade 4 (élèves de 9-10 ans) au Luxembourg (Fagnant & Vlassis, 2013). Un testing en trois étapes, constituées chacune de 4 problèmes non-routiniers inspirés de ceux proposés dans l'étude précitée, a été mis en place en vue d'analyser l'impact de deux types de schématisations : l'un, proche des *diagrammes* des auteurs chypriotes, mais présentant cette fois toutes les données du problème, l'autre, plus proche de dessins produits spontanément par les enfants face à ce type de problèmes et conservant des éléments de contexte. La figure 4 illustre ces deux types d'illustrations pour un problème parallèle au laveur de vitre (figure 3).

A snail tries to climb a brick wall. First it climbs up the first four bricks, but is then exhausted, stops and falls asleep. While it is asleep it slips down one brick. When it wakes up it climbs up six bricks, then goes to sleep again and slips down two bricks. On its last attempt it reaches the tenth brick. How many bricks did the snail climb on its last attempt?

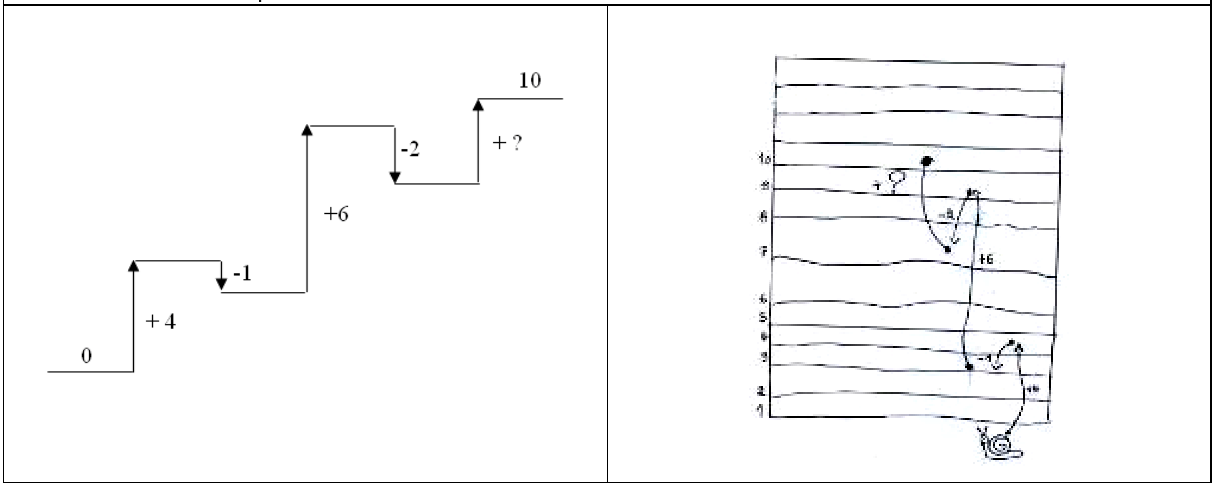


Figure 4 : Problème non-routinier accompagné de deux types d'illustrations organisationnelles (Extrait de Fagnant & Vlassis, 2013, p. 165).

Lors de la première phase de test, les problèmes étaient présentés sans illustration. Lors de la deuxième phase (qui survenait tout de suite après), des problèmes parallèles étaient proposés, accompagnés de l'un ou l'autre type d'illustrations (par ex. le problème du laveur de vitre – figure 3 – était proposé en étape 1 sans illustration et le problème des escargots –figure 4 – était proposé en étape 2 accompagné d'un des deux types d'illustrations). Pour éviter un effet-classe, les deux types d'illustrations étaient répartis au hasard dans chaque classe. Lors de la troisième phase, qui se déroulait une semaine plus tard et sur laquelle nous reviendrons dans la deuxième partie de cet article, les élèves étaient invités à produire eux-mêmes une schématisation, en s'inspirant de celles qu'ils avaient rencontrées à l'étape 2.

Les résultats montrent une augmentation des performances lors de l'étape 2, lorsque les énoncés sont accompagnés d'illustrations organisationnelles de type *diagramme* ou *dessin schématique*. Les progrès observés sont relativement importants, mais ils ne permettent pas de montrer la plus-value d'un des deux types d'illustrations par rapport à l'autre. Par ailleurs, tout comme dans l'étude de Pantziara et al. (2009), les résultats sont assez variables selon les élèves. De plus, les taux de réussite à l'ensemble du test restent relativement bas, montrant assez nettement que plusieurs élèves ne se saississent pas de l'aide (soi-disant) apportée par ces illustrations.

Dans une approche similaire, l'étude de Reuter et al. (2015), réalisée auprès de 199 élèves de grade 4 (9-10 ans) en Allemagne, n'a montré aucun impact significatif de la présence d'illustrations accompagnant des problèmes non-routiniers. Les dessins et les *diagrammes* (ici, de type tableaux à double entrée) accompagnant les énoncés ne semblent pas avoir facilité le processus de résolution de problèmes. Lorsqu'un léger effet se marque, il est généralement en faveur des dessins, mais les effets sont variables en fonction des problèmes et en fonction des compétences initiales des élèves. Au final, on s'accordera avec leur conclusion générale selon laquelle la présence d'illustrations est insuffisante pour soutenir efficacement le processus de résolution de problèmes et qu'il est donc nécessaire de développer « *an early training in diagram literacy* » (p. 1387).

2. Les illustrations qui accompagnent les problèmes problématiques

Le point qui précède soulignait le fait que les illustrations « décoratives » et les illustrations « représentationnelles » (qualifiées aussi d'évocatrices) avaient globalement peu d'effet et semblaient s'avérer somme toute peu utiles à la résolution du problème (Berends & Van Lieshout, 2009 ; Elia et al., 2007). Face aux problèmes standards, la distinction entre ces deux types d'illustrations n'est d'ailleurs pas facile à établir et semble en réalité dépendre de l'interprétation qu'en fait le sujet. Les propos d'Elia (2009) sont éclairants :

> *« Si on considère la situation concrète globale du problème, l'image est évocatrice. Mais si on considère que seules les données du problème sont importantes — (...) ce qui revient à considérer l'évocation d'une situation concrète comme inutile — l'image est décorative. En fait la distinction entre image décorative et image évocatrice est non pertinente pour les énoncés de problèmes ». (p. 11)*

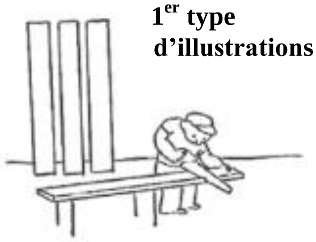
Si l'on peut s'accorder avec cette façon de voir les choses dans le cas de problèmes standards, la distinction entre les deux types d'illustrations garde au contraire tout son sens face aux problèmes problématiques. En effet, face à ces derniers, l'objectif des illustrations « représentationnelles » est justement de conduire les élèves à évoquer la situation concrète à laquelle l'énoncé fait référence, de façon à les inciter à faire appel à leurs connaissances de la vie réelle et à éviter de se précipiter dans l'application d'une opération directement appuyée sur les données de l'énoncé. Autrement dit, lorsqu'elles accompagnent des problèmes problématiques, ces illustrations représentationnelles visent à amener les élèves à construire un « modèle de situation » plus riche et plus réaliste.

Dans une première étude, Dewolf et al. (2014) ont proposé des problèmes problématiques à 402 élèves de grade 5 (10-11 ans) provenant d'écoles situées en Communauté flamande de Belgique. Ils ont comparé plusieurs conditions expérimentales en vue d'évaluer l'effet de la présence d'illustrations « représentationnelles » sur le réalisme des réponses fournies. Contrairement aux hypothèses des chercheurs, la présence de ces illustrations n'a eu aucun effet significatif sur la propension des élèves à produire des réponses réalistes.

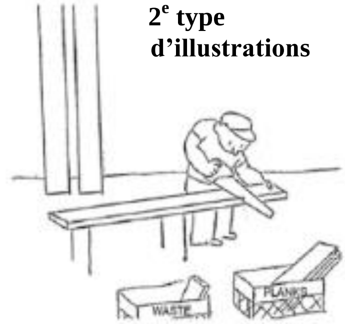
Prolongeant ces travaux, Dewolf et al. (2017) ont alors comparé l'effet de trois types d'illustrations en soumettant des problèmes problématiques à 288 élèves de grades 5-6 (10-12 ans). Ce qui distingue les trois modalités comparées, c'est que les premières représentent simplement le contexte dans lequel se situent les problèmes (comme dans l'étude de 2014) alors que les deux autres contiennent un élément supplémentaire, ciblé sur la particularité de la situation d'un point de vue réaliste. Dans la troisième modalité, cet élément est mis en évidence à l'aide d'un marquage de couleur (voir figure 5). Comme dans l'étude de Fagnant et Vlassis (2013), les trois types d'illustrations étaient distribuées aléatoirement au sein de chaque classe. Dans toutes les classes, les élèves recevaient aussi deux avertissements visant à attirer leur attention sur le fait que certains problèmes étaient un peu particuliers et les invitant à regarder attentivement les illustrations.

Steve has bought 4 planks of 2.5 m each to make a bookshelf.
How many planks of 1 m can he get out of these planks?

1er type d'illustrations



2e type d'illustrations



3e type d'illustrations

La boîte contenant les déchets (*waste* sur la 2e image) est mise en évidence par un marquage orange.

Figure 5 : Les illustrations utilisées dans l'étude de Dewolf et al. (2017, p. 343).

Les résultats qu'ils obtiennent ne permettent toujours pas de mettre à jour des différences significatives selon le type d'illustrations. Les deux nouveaux types d'aide visuelle n'apportent aucune plus-value substantielle alors qu'elles visaient pourtant à mettre en exergue un élément-clé du problème. Parmi les hypothèses évoquées pour expliquer ces résultats, les auteurs estiment que les illustrations ont pu être considérées comme purement décoratives par les élèves, qui les ont alors sans doute ignorées ou analysées très superficiellement.

En vue d'obliger les élèves à prendre en compte les illustrations proposées, Fagnant & Auquière (à paraître) ont transformé le 3e type d'illustrations en illustrations « informationnelles », en présentant les données numériques du problème au sein même de l'illustration (et uniquement dans celle-ci) comme illustré à la figure 5. Dans ce cas, l'élève est obligé de prendre en compte l'illustration pour y retirer les données utiles à la résolution du problème.

Le dispositif mis en place est tout à fait parallèle à celui de l'étude de Dewolf et al. précitée : les problèmes proposés, les consignes et les deux premiers types d'illustrations sont identiques ; seul le troisième type d'illustrations est modifié. Le test a été soumis à un échantillon composé d'environ 500 élèves de grades 5-6 (10-12 ans) provenant d'écoles situées en Belgique francophone.

Steve a acheté des planches de même longueur pour fabriquer une étagère. Combien de petites planches d'étagère peut-il faire avec ces planches ?

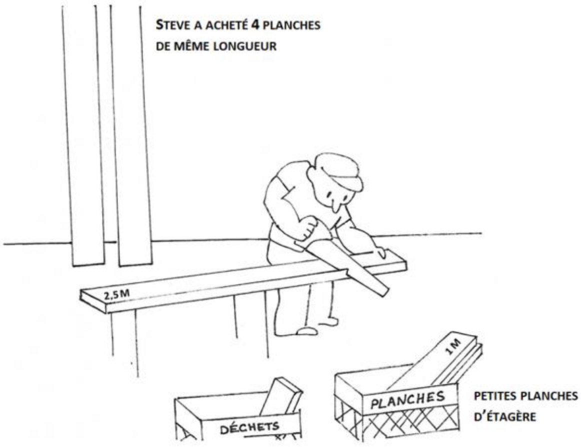


Figure 6 : Exemple d'illustration informationnelle utilisée dans l'étude de Fagnant & Auquière (à paraître).

Les résultats, issus d'un premier codage brut, montrent un léger impact des illustrations « informationnelles » (légère augmentation des réponses réalistes attendues et diminution des réponses non réalistes comparativement aux deux autres types d'illustrations), mais aussi une très grande variabilité selon les problèmes proposés. Un élément interpellant est que les représentations informationnelles semblent aussi avoir engendré davantage de démarches erronées ne correspondant pas aux réponses non réalistes attendues. Ce constat, qu'il conviendra d'éclairer par des analyses ultérieures, pourrait traduire un effet délétère des illustrations informationnelles, comme cela a été constaté face aux problèmes standards. En définitive, le codage en réponses réalistes *vs* non réalistes s'avère plus complexe (et peut-être plus limitatif) que ce que les écrits antérieurs sur la question ne le laissaient entendre (voir Fagnant & Auquière, à paraître, pour une discussion sur la problématique du codage). Quoi qu'il en soit, le premier codage brut contenant (pour chacun des problèmes et pour chacun des trois types d'illustrations) une proportion importante de réponses « autres » (i.e. ne correspondant ni aux réponses réalistes attendues, ni aux réponses non réalistes traduisant les erreurs courantes), des analyses complémentaires sont nécessaires pour affiner les résultats.

Au final, il semble que l'on peut compléter la conclusion formulée au point 1 en indiquant qu'accompagner les problèmes problématiques d'illustrations ne semble pas non plus suffisant pour favoriser la prise en compte de conceptions réalistes par les élèves ou, pour le dire autrement, pour faciliter la résolution de ce type de problèmes.

III. LA CONSTRUCTION DE SCHEMATISATIONS PAR LES ELEVES

Puisque fournir des illustrations aux élèves ne suffit pas, il convient sans doute de les aider à construire eux-mêmes des schématisations efficaces. Mais quel type de schématisations et comment les faire apprendre aux élèves ?

De nombreuses études se sont focalisées sur les schématisations externes pouvant soutenir l'étape de construction de la représentation du problème (d'un modèle de situation). Plusieurs études ont montré qu'il était possible de s'appuyer sur les dessins spontanément construits par les élèves (Csíkos, Szitányi, & Kelemen, 2012 ; Van Essen & Hamaker, 1990) ou de leur apprendre à utiliser des schématisations prédéfinies, spécifiques aux structures classiques de problèmes additifs (Willis & Fuson, 1988) ou multiplicatifs (Levain, Le Borgne, & Simard, 2006). D'autre études ont montré qu'il était possible d'apprendre aux élèves à utiliser des *diagrammes* (cf. étude de Pantziara et al., 2009 citée précédemment) adaptables à des problèmes non-routiniers (Diezmann, 2002) ou encore des schématisations « standardisées » (*schémas « range-tout » ou strip diagrams*) qui s'adaptent aux différentes structures additives ou multiplicatives de problèmes (Beckmann, 2004 ; Polotskaia & Consultant, 2010 ; Savard & Polotskaia, 2014). Quelle que soit finalement leur forme spécifique, les schématisations efficaces sont celles qui aident à construire une représentation mentale permettant de mettre en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent (Hegarty & Kozhenikov, 1999 ; Uesaka et al., 2007).

Dans le cadre de cet article, nous allons nous centrer sur deux études menées par notre équipe de recherche. La première confronte l'utilisation de dessins libres et de *diagrammes* tels que ceux utilisés dans l'étude de Pantziara et al. (2009 ; voir aussi Diezman, 2002) ; la seconde s'intéresse aux schématisations « range-tout » tels qu'utilisées dans les études canadiennes (Polotskaia & Consultant, 2010 ; Savard & Polotskaia, 2014).

1. Les *diagrammes* et *les dessins schématiques* comme soutien à la résolution de problèmes

Revenons tout d'abord sur l'étude de Fagnant et Vlassis (2013) menée au Luxembourg auprès d'élèves de grade 4 (9-10 ans). Pour rappel, cette étude comportait trois étapes : lors de la première étape, les problèmes étaient présentés sans illustration ; lors de la deuxième étape, des problèmes parallèles accompagnés de dessins schématiques ou de *diagrammes* (voir figure 4) étaient proposés ; lors de la troisième étape (une semaine plus tard), les élèves étaient invités à résoudre une nouvelle série de problèmes parallèles à ceux des étapes précédentes en produisant eux-mêmes une schématisation, inspirée de celles rencontrées à l'étape 2. Nous avions déjà noté que la présence d'illustrations (étape 2) avait conduit à une augmentation des performances comparativement à l'étape 1, sans que l'on puisse conclure à un effet plus marqué des *diagrammes* ou des dessins schématiques (dans les deux cas, les différences se marquaient par une ampleur de l'effet[2] proche de 0.65). Qu'en est-il alors de l'invitation à réinvestir le « modèle » rencontré une seule fois ?

Lors de l'étape 3, l'invitation à réinvestir les schématisations rencontrées à l'étape précédente s'accompagnait d'un rappel ciblé. Pour les élèves qui avaient été confrontés aux *diagrammes*, le rappel mentionnait les exemples rencontrés (diagrammes fléchés, tableaux à double entrée et diagramme de Venn représentant une relation partie-tout), mais aucune indication n'était fournie quant au type de *diagramme* à utiliser face à tel ou tel problème. Pour les élèves qui avaient été confrontés aux dessins schématiques, on précisait qu'il fallait réaliser des dessins qui pouvaient prendre n'importe quelle forme, mais qui devaient contenir certaines informations (les données importantes, l'inconnue et les relations qui les unissent). Les résultats obtenus à l'étape 3 sont certes un peu plus faibles que ceux observés à l'étape 2 (lorsque les schématisations étaient fournies aux élèves), mais ils sont plus élevés qu'à l'étape 1 (la comparaison entre les étapes 1 et 3 de l'épreuve se traduit par une ampleur de l'effet modérée, proche de 0.50).

[2] L'ampleur de l'effet est calculée sur la base des moyennes et des écarts-types (M1 - M2 / √[(12+22) / 2]). Généralement, en référence à Cohen (1992), on considère une ampleur de l'effet de 0.2 comme faible, de 0.5 comme modérée et de 0.8 comme élevée. L'ampleur de l'effet renseigne sur la taille de la différence entre deux moyennes observées, mais n'autorise pas forcément les généralisations.

Après une très brève intervention, consistant simplement à les confronter à un outil possible d'aide à la résolution de problèmes, les élèves peuvent en partie produire des représentations schématiques efficaces et améliorer leurs performances de résolution de problèmes. Les schématisations produites s'inspirent des schématisations rencontrées, mais elles présentent également certaines adaptations au contexte du problème. Enfin, notons aussi que certaines résolutions correctes ne sont pas accompagnées de schématisations ou sont accompagnées de schématisations incomplètes, rappelant par-là que l'enjeu essentiel est bien la représentation mentale que l'élève se construit de la situation-problème. La figure 7 illustre quelques exemples de schématisations produites par les élèves face au problème des « puces » qui correspond au problème de réinvestissement du laveur de vitre (figure 3) et des escargots (figure 4).

Paul est dresseur de puces. Il a appris un tour fabuleux à sa championne Pioupioute. Il aligne des crayons et il fait sauter Pioupioute au-dessus des crayons. Elle fait 6 bonds en avant, 1 bond en arrière, 5 bonds en avant, 2 bonds en arrière… puis elle s'arrête pour saluer les spectateurs. Elle fait encore quelques bonds en avant et elle s'arrête après avoir sauté au-dessus du 14e crayon. Combien de bonds en avant Pioupioute a-t-elle fait après avoir salué les spectateurs ?

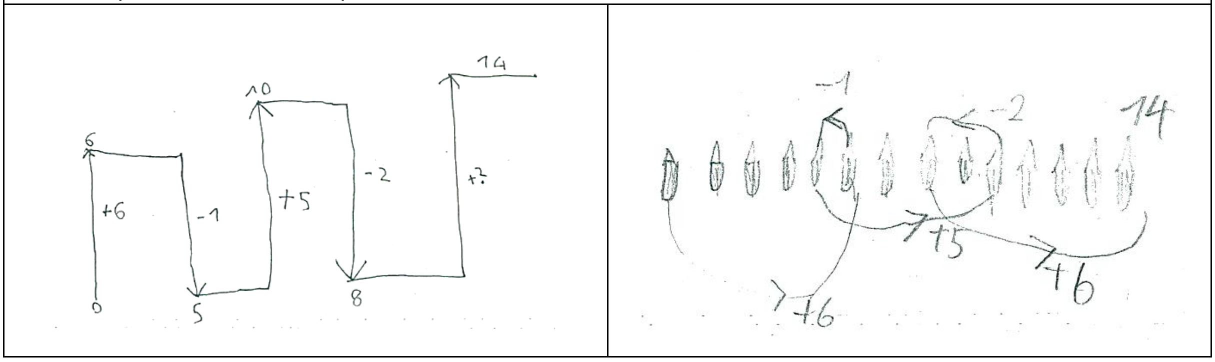


Figure 7 : Exemples de schématisations produites par les élèves face au problème des puces – Extrait de la recherche de Fagnant & Vlassis (2013) – Résultats non publiés.

Si les schématisations externalisées sur papier sont intéressantes, c'est non seulement parce qu'elles peuvent soutenir le processus de construction d'une représentation mentale, mais aussi parce qu'elles constituent un outil potentiel de communication entre l'enseignant et les élèves. Dans l'étude qui vient d'être détaillée, aucune phase d'enseignement/apprentissage proprement dite n'a été organisée. Les progrès observés témoignent du « potentiel » offert par ces représentations schématiques, mais ils montrent aussi qu'une simple présentation de celles-ci n'est pas suffisante pour la majorité des élèves. En effet, une analyse plus détaillée des résultats montre que les progrès moyens traduisent en réalité des divergences importantes entre élèves : si les représentations schématiques semblent avoir aidé certains d'entre eux (39% en moyenne pour l'ensemble des problèmes), elles paraissent aussi en avoir perturbé d'autres (7% en moyenne) et avoir eu très peu d'effet sur plus de la moitié de l'échantillon. Au final, les résultats sont variables selon les problèmes et selon les élèves et il n'est pas possible de dégager clairement la plus-value d'une forme de schématisations en particulier (même si les résultats sont légèrement en faveur des *diagrammes*). Mais qu'en est-il si on procède à une phase d'enseignement/apprentissage plutôt qu'à une simple exposition aux schématisations ?

En prolongement de cette étude, Auquière (2013) a mis en œuvre une étude exploratoire dans laquelle ces deux types de schématisations ont fait l'objet de cinq séances d'enseignement/apprentissage dans des classes de grade 4 (élèves de 9-10 ans). Dans une classe, les dessins libres étaient introduits en suivant l'approche didactique proposée par Demonty, Fagnant et Lejong (2004) dans le manuel « Résoudre des problèmes : pas de problème ». En aucun cas, un « modèle » de représentation n'est proposé ; il s'agit de partir des schématisations produites spontanément par les élèves, de les exploiter en insistant sur les éléments importants d'une représentation efficace et de les inviter à retravailler leurs représentations spontanées de façon à ce qu'elles soient opérationnelles et les aident à résoudre le problème (voir Fagnant, 2008 pour une présentation plus détaillé). Dans l'autre classe, les différents *diagrammes* de l'étude de Pantziara et al. (2009) étaient introduits tour à tour par l'enseignant, puis les élèves étaient invités à les réinvestir face à des problèmes du même type. Les différents types de problèmes étaient ensuite mélangés de façon à amener les élèves à sélectionner, parmi le répertoire de *diagrammes* qu'ils avaient rencontrés, lequel ou lesquels pourrai(en)t s'adapter au problème soumis (voir approche proposée par Diezmann, 2002).

Les cinq séances d'enseignement/apprentissage étaient encadrées par un pré-test et un post-test. De façon à évaluer les capacités de transfert, le test était composé non seulement de problèmes proches de ceux utilisés durant l'intervention, mais aussi de problèmes de structures différentes. Les résultats de l'intervention ont été comparés à ceux obtenus dans des classes contrôles dans lesquelles seuls les tests ont été administrés. Les résultats sont assez positifs dans la mesure où l'on note des progrès notables au post-test (ampleur de l'effet très importante dans les deux classes expérimentales – proche de 1.00 dans une classe et de 1.20 dans l'autre – et léger – proche de 0.20 – dans les classes contrôles). Une analyse plus fine (non présentée ici) montre que la plupart des élèves ont progressé, parfois de façon très importante. Comme on pouvait s'y attendre, les résultats sont toutefois moins marqués sur les problèmes de transfert que sur les problèmes du même type que ceux travaillés en classe. Globalement, l'approche centrée sur les *diagrammes* semble un peu plus efficace que l'approche centrées sur les « dessins libres », mais les différences sont faibles et dépendent des types de problèmes.

Finalement, on pourrait reprendre à notre compte la conclusion de Pantziara et al. (2009) qui plaidaient pour une complémentarité entre les diagrammes et d'autres constructions plus « inventives » : "*teachers could give students opportunities not only to use presented diagrams but also to invent or search for their own solution strategy*" (p. 56) de façon à permettre à chacun des élèves de trouver une approche qui lui convient et qui l'aide à construire une représentation mentale correcte et opérationnelle des différents types de problèmes proposés. Rencontrer des schématisations différentes et inviter les élèves à réfléchir quant au meilleur usage de celles-ci permettrait sans doute aussi d'aider les élèves à faire preuve de « flexibilité représentationnelle » (Nistal, Van Dooren, Calrebout, Elen & Verschaffel, 2009), en s'accordant avec l'idée que le choix d'une représentation appropriée ne dépend pas seulement du type de problème, mais aussi des élèves et sans doute d'une interaction entre ces deux variables. En réalité, certains types de schématisations pourraient s'avérer plus ou moins efficaces selon qu'ils s'accordent ou non avec les démarches spontanées des élèves. C'est notamment cette idée de « (non) congruence » que nous avons explorée dans une autre étude, qui s'appuie cette fois sur les schématisations « range-tout » développées par l'équipe canadienne susmentionnée (Polotskaia & Consultant, 2010 ; Savard & Polotskaia, 2014).

2. Les *schématisations « range-tout »* comme soutien à la résolution de problèmes

Plusieurs études menées par Polotskaia et ses collaborateurs (Ducharme & Polotskaia, 2008, 2009 ; Gervais, Savard & Polaskaïa, 2013 ; Polotskaia, 2009 ; Polotskaia & Consultant, 2010) montrent qu'il est possible d'apprendre aux élèves à utiliser des schématisations qu'ils qualifient de « range-tout », et ceci, dès le début de l'enseignement primaire (Savard &

Polaskaïa, 2014). Ces schématisations auraient l'avantage d'être adaptables à des problèmes de structures différentes et d'aider les élèves à se focaliser sur les relations existant entre les quantités connues et inconnues. La figure 8 illustre ces schématisations pour les trois structures de problèmes issues de la classification de Riley et al. (1983), ainsi que face à une structure de problème combinant plusieurs de ces relations de base.

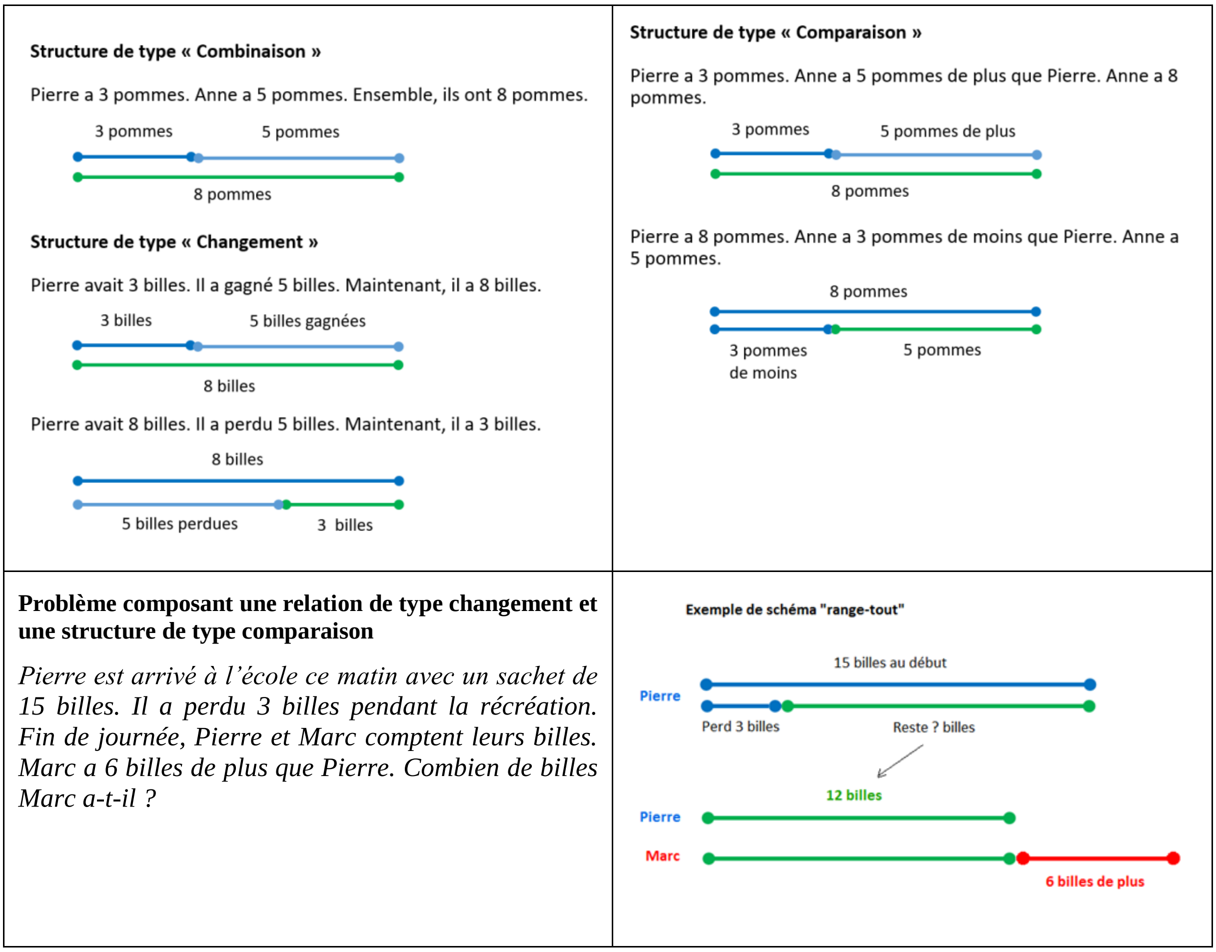


Figure 8 : Schématisations « range-tout » pour des structures de types combinaison, changement et comparaison, ainsi que pour un problème composant deux de ces structures de base – Extrait de Auquière, Demonty & Fagnant (à paraître).

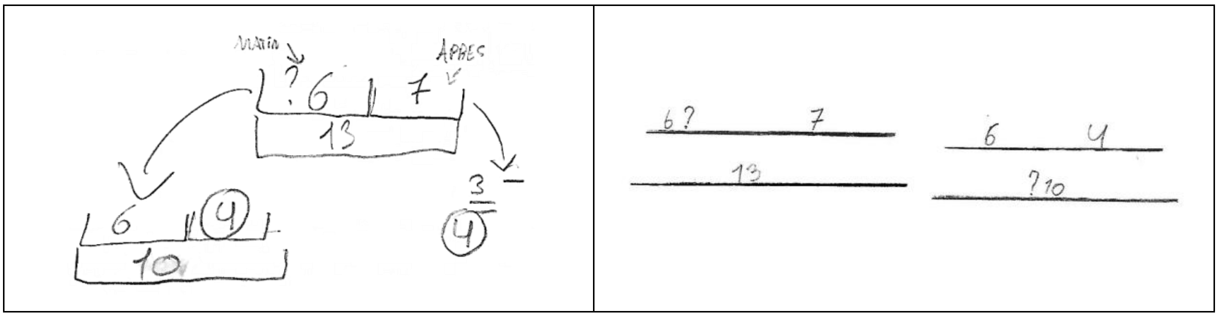
Dans une étude exploratoire menée auprès d'élèves de grade 4 (9-10 ans – Auquière et al., à paraître), ces schématisations ont été brièvement introduites aux élèves lors d'une séance focalisée sur des problèmes de type combinaison ; elles ont ensuite été réinvesties face au problème présenté à la figure 8. Avant l'introduction de ces schématisations, les élèves ont été soumis à un test composé de trois problèmes de structures différentes : un problème de type combinaison et deux problèmes composant plusieurs structures (changement et comparaison, d'une part ; combinaison et comparaison, d'autre part). En nous appuyant sur des études menées préalablement par Gamo et ses collaborateurs (Gamo, Sander & Richard, 2010 ; Gamo, Taabane & Sander, 2011), on s'attendait à ce que les élèves développent une procédure de résolution économique (procédure-comparaison) face au problème de type « changement-comparaison » (voir figure 9) et à ce que cette procédure entre en conflit avec la représentation séquentielle induite par les schématisations « range-tout ». Lors d'un post-test survenant juste après la micro-intervention et étant composé de trois problèmes parallèles à ceux du pré-test, les résultats montrent un effet positif léger pour les problèmes de types « combinaison » et « combinaison-comparaison » (ampleur de l'effet de 0.33 et de 0.17) alors que c'est un effet négatif qui est constaté face au problème de type « changement-comparaison » (ampleur de l'effet de de -0.25).

Les résultats négatifs obtenus au problème de type « changement-comparaison » s'expliquent notamment par une évolution des démarches de résolution développées par les élèves entre le pré-test et le post-test (voir figure 9). L'évolution est notable puisque près d'un quart des démarches correctes s'appuie maintenant sur une « procédure-complément » (non économique), alors que celle-ci était pratiquement inexistante au pré-test. Parallèlement, on note une diminution de la « procédure-comparaison » qui est nettement plus économique et qui, comme attendu, étaient la plus fréquemment utilisée spontanément par les élèves au pré-test. L'augmentation des « procédures hybrides » peut sans doute aussi se comprendre dans cette logique, dans la mesure où elle conduit à mettre à plat l'état initial, même si celui-ci n'est finalement pas utilisé pour comparer les états finaux.

Problème de type « *Changement-comparaison* » proposé au post-test A midi, Farid et Julie terminent la partie de fléchettes commencée à dix heures. Farid avait déjà quelques points après la partie de la matinée. À midi, il gagne 7 points. Il a maintenant un total de 13 points. Julie avait le même nombre points que Farid ce matin. À midi, elle gagne 3 points de moins que lui. Combien de points Julie a-t-elle à la fin de la partie ?		
Nombre de résolutions correctes et proportion de chaque type de procédures observées lors du pré et du post-test	Pré-test (N=76)	Post-test (N=63)
Procédure-complément (6)+7=13, 7-3=(4) et 6+4=(10)	1% (N=1)	24% (N=15)
Procédure hybride (6)+7=13 et 13-3=(10)	10% (N=8)	24% (N=15)
Procédure-comparaison 13-3=(10)	86% (N=65)	52% (N=33)
Non identifiable *Calcul et schématisation absents ou incodables*	2 (3%)	-

Figure 9 : Evolution des démarches de résolution correctes observées entre le pré et le post-test face au problème de type « changement-comparaison » (Extrait de Auquière et al., à paraître).

La figure 10 illustre les trois types de démarches observées : les deux premiers exemples traduisent une « procédure-complément » (toutes les étapes sont représentées dans le premier cas, la deuxième étape est réalisée mentalement dans le second) ; les deux suivants correspondent respectivement à une « procédure-hybride » et à une « procédure-comparaison ».



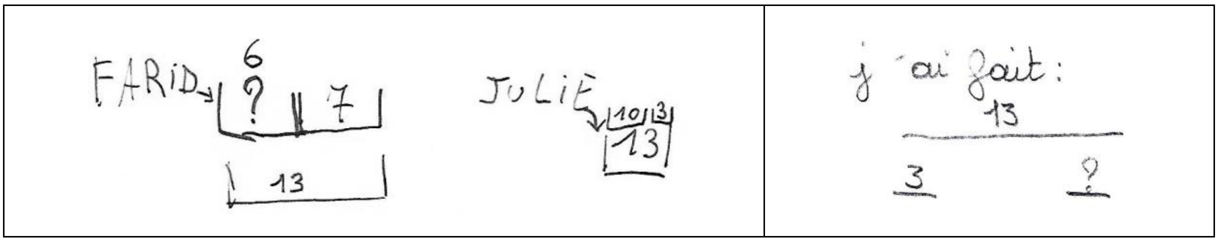


Figure 10 : Exemples de schématisations « range-tout » correspondant au problème de type changement-comparaison (Extrait de Auquière et al., à paraître).

Finalement, les résultats de cette étude exploratoire sont assez mitigés. Les schématisations « range-tout » semblent aider les élèves (ou tout au moins certains d'entre eux) face à certains problèmes, alors que leur utilisation semble plutôt contre-productive face à d'autres problèmes, notamment lorsque cette manière de procéder entre en conflit avec une démarche de résolution plus économique. Rappelons toutefois que l'intervention menée était très courte et que l'efficacité limitée observée ne doit pas faire perdre de vue le potentiel offert par cette approche.

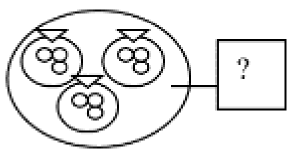
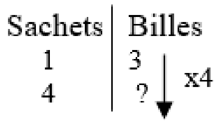
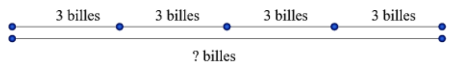
Certes, la démarche non économique (« procédure-complément ») est ici moins efficace à court terme, mais ne témoigne-t-elle pas pour autant d'une bonne compréhension des différentes étapes du problème ? L'aspect séquentiel de la résolution ne serait-il pas à plus long terme une plus-value pour aider à mettre en œuvre un processus de « qualification » consistant à identifier chaque résultat intermédiaire, en relation avec le contexte de l'énoncé (Houdement, 2011, 2014) ? L'appropriation de ce type de schématisations par les élèves semble assez complexe, non seulement parce qu'elles demandent un certain formalisme pour représenter les quantités par des segments, mais aussi un certain degré d'abstraction pour représenter tous les problèmes sous la forme de relations parties-tout. Avec les « range-tout », il s'agit de construire une schématisation en organisant soi-même la mise en relation entre les données et l'inconnue au départ d'un canevas adaptable aux différentes situations rencontrées. Si, à court terme, cette façon de procéder semble plus complexe que de faire appel à un schéma spécifique à un type de problèmes (voir Willis & Fuson, 1988 ; voir aussi Gustein et Romberg, 1995), elle pourrait s'avérer plus efficace à long terme, notamment en évitant le développement de stratégies superficielles consistant à rechercher des mots-clés indicateurs du « bon » schéma (critique couramment posée aux approches précitées). Par ailleurs, les schématisations « range-tout » se caractérisent par une focalisation sur les relations unissant les données, ce qui pourrait favoriser un raisonnement de nature algébrique, porteur pour les apprentissages mathématiques ultérieurs, comme l'expliquent clairement les auteurs canadiens qui défendent l'intérêt de ces schématisations et dont nous reprenons ici quelques propos :

> *« Nous avons remarqué que dans la situation de résolution d'un problème d'addition à énoncé verbal, l'élève peut se concentrer :*
>
> *• soit sur les données (nombres concrets) et les opérations possibles pour calculer la réponse ;*
>
> *• soit sur les relations entre les quantités (le rôle de chaque donnée dans la situation) et les différentes méthodes de solution.*
>
> *Dans le premier cas, le raisonnement de l'élève est de nature arithmétique. Dans le deuxième cas, son raisonnement est purement algébrique. En accord avec l'opinion de Sophian (2007), nous pouvons formuler l'hypothèse que les difficultés dans l'apprentissage de l'algèbre sont grandement liées à l'habitude acquise par les élèves de considérer de préférence les nombres eux-mêmes (raisonnement arithmétique) plutôt que les relations entre les nombres (raisonnement pro-algébrique). Cette habitude, causée par un manque d'entraînement à l'analyse de relations entre les quantités, se développe durant les années passées à l'école primaire. La question est : comment développer chez les jeunes l'habitude d'analyser la situation ou le problème pour identifier les relations mathématiques essentielles ? » (Polotskaïa, & Consultant, 2010, p. 13)*

Enfin, notons encore que ces schématisations « range-tout » sont très proches de celles utilisées dans la « méthode de Singapour© ». Intitulées « *Strip diagrams* » dans la littérature anglo-saxonne, ces schématisations sont aussi présentées comme soutenant un raisonnement pré-algébrique permettant notamment à de jeunes élèves de résoudre des problèmes assez complexes (voir Beckmann, 2004 pour une illustration de cette approche).

Mais ces schématisations s'avèreraient-elles efficaces face à des problèmes non-routiniers tels que ceux utilisés dans l'étude de Pantziara (2009) et ses collègues ? Ne serait-il pas contre-productif de représenter, par exemple, le problème du laveur de vitres, des puces ou de l'escargot avec ce type de schématisations ? Et si de telles schématisations « range-tout » peuvent s'adapter à certaines structures multiplicatives (comme entre autres les problèmes de type « isomorphisme de mesures » de la classification de Vergnaud, 1990), comment les adapter à des problèmes de « produits de mesure » (ou « combinaison multiplicative »), comme on en retrouve dans l'étude de Pantziara et al. (2009), schématisés par des tableaux à double entrée ou des arbres de décomposition ? La figure 11 illustre différentes schématisations adaptables à ces deux types de structures multiplicatives.

<table>
<tr><td colspan="3">Structure de problèmes de type « isomorphisme de mesures » (Vergnaud, 1990)

Il y a 3 billes dans 1 sachet et 4 sachets de billes. Combien y a-t-il de billes en tout ?</td></tr>
<tr><td>Dessin schématique</td><td>Schématisation centrée sur la structure multiplicative (d'après Vernaud, 1990 ; voir aussi Levain et al., 2006)</td><td>Schématisation « range-tout »</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Structure de problèmes de type « produits de mesure » (Vergnaud, 1990) ou « combinaison multiplicative » (Pantziara et al., 2009 ; voir aussi Fagnant & Vlassis, 2013)

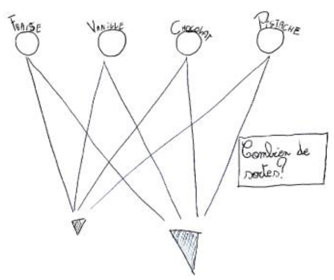
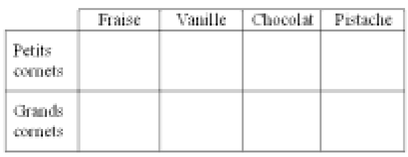
Le marchand de glace de mon quartier vend des boules de glace à la fraise, à la vanille, au chocolat et à la pistache. Il propose deux sortes de cornets : des petits cornets et des grands cornets. Combien de sortes de cornets de glace à une boule ce marchand peut-il faire ?</td></tr>
<tr><td>Dessin schématique</td><td>Schématisation centrée sur la structure multiplicative</td><td>Schématisation « range-tout »</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>?</td></tr>
</table>

Figure 11 : Exemples de schématisations adaptables à différentes structures de problèmes multiplicatifs.

IV. EN GUISE DE CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté plusieurs études qui s'intéressent aux illustrations qui accompagnent les problèmes et/ou aux schématisations construites par les élèves. Dans les deux cas, le point de vue soutenu était que ces deux types d'« outils » avaient pour but d'aider à la construction d'une représentation mentale appropriée des situations proposées. Alors que la construction de représentations schématiques par les élèves semble constituer une aide à la résolution de problèmes, les résultats sont plus controversés en ce qui concerne l'aide apportée par la présence d'illustrations qui accompagnent les problèmes, et ceci tant pour les problèmes « standards » que « problématiques ».

Au niveau des illustrations qui accompagnent les problèmes, la conclusion qui s'impose est d'inviter les enseignants à la plus grande prudence avec leur utilisation. Il est évident qu'il serait incorrect de les considérer comme de simples « décorations » qui auraient pour seule fonction de motiver les élèves en donnant un caractère plus ludique à la résolution de problèmes.

En ce qui concerne la construction de représentations schématiques par les élèves, les résultats sont plutôt encourageants, mais ne permettent néanmoins pas de trancher formellement quant au type de représentations schématiques à privilégier et quant à la meilleure façon de les introduire. S'il paraît essentiel d'apprendre aux élèves à utiliser ce type d'outils, plusieurs approches semblent pouvoir s'avérer efficaces et il n'est pas aisé de statuer sur la plus-value d'une approche comparativement à une autre. Tout dépend sans doute des objectifs que l'on vise, des problèmes que l'on propose et de la façon dont on en discute en classe avec les élèves. On s'accordera dès lors à la conclusion de Thevenot et al. (2015) invitant les enseignants à proposer une variété de problèmes de structures différentes et à insister sur leur analyse et leur interprétation, plutôt que de faire apprendre « mécaniquement » aux élèves des démarches ou des schématisations liées à des types de problèmes particuliers. Dans le domaine de la résolution de problèmes d'application, il paraît en effet essentiel de proposer des problèmes variés, non-routiniers, mais aussi problématiques, pour amener les élèves à considérer la résolution de problèmes comme un véritable processus de modélisation mathématique. Il s'agit de modifier la culture de classe (ou le contrat didactique), non seulement en modifiant les types de problèmes proposés, mais aussi en changeant la façon de les traiter en classe (voir Verschaffel & De Corte, 1997 ; Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts & Ratinckx, 1999 pour des études ayant montré l'efficacité d'approches de ce type).

Même si les premières études sur les problèmes problématiques datent de la fin des années 90 (voir Verschaffel et al., 2000 pour une synthèse), force est de constater que les pratiques de classe doivent encore évoluer. Ainsi, Depape, De Corte et Verschaffel (2015) ont montré que, même si les problèmes proposés en classe cherchent davantage que par le passé à s'approcher des expériences de vie des élèves, ils n'en demeurent pas moins « stéréotypés » au sens où la plupart requièrent la simple application d'une opération arithmétique au départ des données de l'énoncé. Dans le même ordre d'idées, les enseignants déclarent valoriser l'importance de créer des connexions entre les problèmes proposés en classe et les éléments issus de la vie réelle, mais ils critiquent parallèlement les éléments qui dépeignent des relations trop complexes entre les situations décrites et les modèles mathématiques à mobiliser, ainsi que l'ajout d'éléments factuels qui enrichissent les situations décrites mais ne sont pas nécessaires à la résolution. Finalement, les problèmes sont souvent traités dans une approche

« pragmatique », essentiellement focalisée sur les aspects mathématiques, plutôt que dans une approche « narrative » mettant l'accent sur les aspects réalistes lors de l'entrée dans le problème et de l'interprétation de la solution. Finalement, il ne s'agirait pas seulement de proposer des problèmes variés en classe, mais il serait tout aussi important d'amener les élèves à les reformuler et à en débattre (Mellone, Verschaffel & Van Dooren, 2017) dans des situations de communication où les schématisations prennent sens.

En accord avec la perspective socioculturelle vygotskienne, ne pourrait-on s'accorder avec l'idée selon laquelle « apprendre à résoudre des problèmes », c'est participer à des activités dans lesquelles la communication et les interactions sociales, médiatisées par des signes tels que le langage, l'écriture, les gestes, les schémas, les dessins... sont considérées comme consubstantielles à l'apprentissage et au développement de la pensée (Vlassis, Fagnant & Demonty, 2015) ? En ce sens, ce sont sans doute les débats autour des problèmes et de leur compréhension, supportés par diverses schématisations traduisant cette compréhension, qui pourraient *in fine* conduire à réellement œuvrer au développement d'un processus complexe de modélisation mathématique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AUQUIERE, A. (2013). *Les représentations schématiques comme soutien à la résolution de problèmes arithmétiques en quatrième primaire. Étude comparative de deux approches d'aide à la construction de représentations de problèmes mathématiques.* Mémoire de Master en Sciences de l'éducation. Université de Liège, document non publié.

AUQUIERE, A., DEMONTY, I. & FAGNANT, A. (à paraître). Impact des structures sémantiques et de l'introduction de schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 23.*

BECKMANN, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demonstrated in Grade 4–6 Texts Used in Singapore. *The Mathematics Educator*, 14(1), 42-46.

BERENDS, I.E. & VAN LIESHOUT, E.C.D.M. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction, 19,* 345-353.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques, 9,* 308-336.

COHEN, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin, 112*(1), 155-159.

CSÍKOS, C., SZITÁNYI, J. & KELEMEN, R. (2012). The effects of using in developing young children's mathemat ical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 47-65.

DEPAEPE, F., DE CORTE, E., & VERSCHAFFEL, L. (2015). Students' non-realistic mathematical modeling as a drawback of teachers' beliefs about and approaches to word problem solving. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.) *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education.* Springer: Advance in mathematics education.

DEMONTY, I., FAGNANT, A. & LEJOING, M. (2004). *Résoudre des problèmes : pas de problèmes. Guide méthologique (8-10 ans).* Bruxelles : De Boeck.

DEWOLF, T., VAN DOOREN, W., EV CIMEN, E. & VERSCHAFFEL, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *The Journal of Experimental Education, 82*(1), 103-120.

DEWOLF, T., VAN DOOREN, W. & VERSCHAFFEL, L. (2017). Can visual aids in representational illustrations help pupils to solve mathematical world problems more reastically? *European Journal of Psychology of Education, 32,* 335-351.

DIEZMANN, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom, 7*(3), 4-8.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2008). Développement du raisonnement algébrique par resolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 1). *ENVOL, 145,* 21-28.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2009). Développement du raisonnement algébrique par resolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 2). *ENVOL, 146,* 33-38.

ELIA, I. (2009). L'utilisation d'images en résolution de problèmes additifs : quel type d'images et quel rôle. *Annales de Didactique des Sciences cognitives, 14,* 5-29.

ELIA, I., GAGATSIS, A. & DEMETRIOU, A. (2007). The effects of different modes of representations on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17,* 658-672.

ELIA, I. & PHILIPPOU, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 327–334). Bergen, Norway: University College.

FAGNANT, A. (2008). Des outils didactiques pour développer la résolution de problèmes dans l'enseignement fondamental. Aperçu des fondements théoriques et entrée au coeur de quelques activités. *Cahiers des Sciences de l'Education (Les),27-28*, 51-94.

FAGNANT, A. & AUQUIERE, A. (à paraître*)*. Impact des illustrations accompagnant les problèmes problématiques : focus sur le codage des réponses. *Colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF 2018)*, Paris, octobre 2018.

FAGNANT, A. & VLASSIS, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, *84*,149-168.

GAMO, S., SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning & Instruction, 20*, 400-410.

GAMO, S., TAABANE, L. & SANDER, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'Année psychologique, 111*, 613-640.

GERVAIS, C., SAVARD, A. & POLATSKAIA, E. (2013) La résolution de problèmes de structures additives chez les élèves du premier cycle du primaire : le développement du raisonnement. *Bulletin AMQ, 53*, 58-66.

GUSTEIN, E. & ROMBERG, T.A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of mathematical Behavior, 14*, 283-.324.

HEGARTY, M. & KOZHENIKOV, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique des Sciences cognitives*, *16*, 67-96.

HOUDEMENT, C. (2014). Des connaissances fonctionnelles (mais ignorées) en résolution de problèmes arithmétiques. *Cahiers des Sciences de l'Education*, (36), 7-33.

LEVAIN, J.P., LE BORGNE, P. & SIMAR, A. (2006). Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA. *Revue Française de Pédagogie*, *159*, 95-109.

MELLONE, M., VERSCHAFFEL, L. & VAN DOOREN, W. (2017). The effect of rewording and dyadic interactions on realistic reasoning in solving word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 46*, 1-12.

NISTAL, A., CLAREBOUT, G., ELEN, J., VAN DOOREN, W. & VERSCHAFFEL, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: A critical review. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 41*, 627-636.

PANTZIARA, M., GAGATSIS, A. & ELIA, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 39-60.

POLOTSKAIA, E. (2009). *Communication de la structure mathématique du problème par les élèves du primaire. Analyse d'un scénario didactique*. Proceedings of CIEAEM 61, 178-183, University of Palermo, Italy.

POLOTSKAIA, E. & CONSULTANT, P. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques – Deux jeux pour apprendre. *Bulletin AMQ, L*(1), 12-28.

REUTER, T., SCHNOTZ, W. & RASCH, R. (2015). Drawings and tables as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school. *American Journal of Educational Research, 3(11)*, 1387-1397.

RILEY, M.S., GREENO, J.G. & HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

SAVARD, A. & POLOTSKAIA, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. *Education & Francophonie, XLII*(2), 138-157.

THEVENOT, C., BARROUILLET, P. & FAYOL, M. (2015). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M. Crahay & M. Dutrevis (Eds). *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 169-197). Bruxelles: De Boeck.

UESAKA, Y., MANALO, E. & ICHIKAWA, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction, 17,* 322–335.

VAN ESSEN, G. & HAMAKER, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83(6),* 301-312.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques, 10(2.3)*, 133-170.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1997). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics : An International Perspective* (pp. 69-97). UK : Psychology Press Ltd.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application: de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds). (2e

édition). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques?* (pp.153-176). Bruxelles: De Boeck.
VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E., LASURE, S., VAN VAERENBERGH, G., BOGAERTS, H. & RATINCKX, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Learning and Thinking, 1*, 195-299.
VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Hollande : Swets & Zeitlinger.
VLASSIS, J., FAGNANT, A. & DEMONTY, I. (2015). Symboliser et conceptualiser, une dialectique intrinsèque aux mathématiques et à leur apprentissage. In M., Crahay & M., Dutrévis (Eds.), *Psychologie des apprentissages scolaires (2e édition)* (pp.221-255). Bruxelles: De Boeck.
WILLIS, G.B. & FUSON, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192-201.
YACKEL, E. & COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

PROBLEMES ARITHMETIQUES BASIQUES : LE CŒUR DU PROBLEME

Catherine **HOUDEMENT**

LDAR (EA 4434), UA-UCP- UPD-UPEC-URN

ESPE, Université de Rouen Normandie

catherine.houdement@univ-rouen.fr

Résumé

La résolution de problèmes est toujours au cœur de l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire. Les programmes de Mathématiques 2016 (cycle 2, cycle 3 ou cycle 4) promeuvent la rencontre avec des problèmes liés à des situations issues de la vie (de classe, quotidienne) ou d'autres disciplines, des problèmes internes aux mathématiques, en appui sur un corpus de connaissances et de méthodes, des réflexes intellectuels et des automatismes. Ils mentionnent aussi des problèmes pour chercher (cycle 2, cycle 3), des activités de recherche liées à des notions ou des objets mathématiques dont la maîtrise n'est pas attendue en fin de cycle (cycle 4). Ils y associent une liste de verbes redéfinis (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer). Comment accompagner l'enseignant dans ce vaste programme ? Quelles connaissances faire passer en formation des enseignants ?

Nous nous intéresserons aux problèmes arithmétiques verbaux des cycles 2 et 3 que nous proposons d'organiser en trois types, avec un accent particulier sur les problèmes arithmétiques « basiques ».

Mots clés

Problèmes, arithmétique, résolution de problèmes

I. INTRODUCTION

Ce texte est une contribution au thème de la résolution de problèmes en cycle 2 et cycle 3 (élèves français de 6 à 12 ans, voire au-delà). Il prend appui sur l'article paru dans le numéro 100 de la revue Grand N (Houdement, 2017) et qui apporte des précisions complémentaires. Il cherche à enrichir la compréhension de ce qui se joue dans la résolution de problèmes plus qu'à développer une ingénierie. Cette contribution se situe à l'interface recherche formation.

Les problèmes sont difficiles pour les enseignants parce qu'ils ne réussissent pas à faire réussir leurs élèves. Beaucoup d'élèves n'aiment pas les problèmes parce qu'ils ne réussissent pas et ne savent pas comment faire pour réussir (Houdement, 2003). La finalité de notre étude sur les problèmes est d'avancer sur ce problème d'enseignement et de partager avec les enseignants des connaissances qui résistent à la grande variabilité interindividuelle (enseignant ; élèves), et collective (classe) et les aideraient à contrôler les choix qu'ils font ou les aides qu'ils proposent.

II. UN CONTEXTE BROUILLE

Les programmes de mathématiques, sur les trente dernières années, ont accumulé un nombre impressionnant de descripteurs pour les problèmes (Artigue & Houdement, 2007 ; Coppé & Houdement, 2010) : leur position dans les progressions thématiques (en amont, au cœur, en aval, en dehors), leur fonction pour l'apprentissage (motiver, introduire, entraîner, réinvestir, légitimer, évaluer, faire chercher…), leur forme (texte minimal ; texte alourdi d'informations ; documents authentiques ; situation vécue ; situation évoquée… , avec questions -ou pas). La multitude de descripteurs cache la nécessité d'envisager une certaine progressivité dans les « types de » problèmes à proposer aux élèves, ainsi que dans les types de gestion de telles séances. Tout cela ne rend pas la tâche facile aux enseignants.

L'idée de « méthodologie » est souvent associée à la résolution de problèmes. Tapez l'expression Résolution de problèmes dans un moteur de recherche et vous trouverez des offres de formation d'adultes qui promettent de « connaître et utiliser efficacement les différents outils qui visent la résolution des problèmes » dans le monde de l'entreprise. Bien sûr cela ne concerne pas le sujet qui nous intéresse ici, mais en réalité certaines propositions pédagogiques[1] pour aider les élèves à réussir les problèmes en général n'en sont pas si loin ! Elles supposent implicitement qu'il existerait une aptitude générale à la résolution de problèmes, indépendante des connaissances notionnelles que le problème convoque. On trouve ainsi, assez classiquement, à propos des problèmes, et en amont de leur résolution, des consignes du type : trouver la question, souligner les informations utiles, barrer les informations inutiles, voire trouver l'opération …. Or ce sont des tâches qui ne peuvent pas être faites sans résoudre le problème, elles sont partie prenante de la résolution, elles ne peuvent pas précéder la résolution. Des travaux plus anciens ont déjà mis en garde sur ces « fausses routes », (Coppé & Houdement 2002 ; Houdement 1999, 2003), mais celles-ci résistent.

Récemment les programmes ont même, sous couvent de descriptifs de la compétence Chercher, réinjecté ces idées fausses en mettant en avant les deux alinéas suivants dans *Chercher* cycle 3 et cycle 4.

> *Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc. (Mathématiques Cycle 3, 2015, p. 199)*
>
> *Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances. (Mathématiques Cycle 4, 2015, p. 367)*

Ce préambule nous amène à préciser comment on réussirait à résoudre des problèmes. Dans ce but nous nous appuyons sur le modèle des schémas, notamment convoqué par Julo (1995, 2002).

[1] Cf. cet extrait de manuel de 6ème : http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/les-etapes-pour-resoudre-un-probleme.

III. COMMENT REUSSIT-ON A RESOUDRE DES PROBLEMES ?

L'objet de cette partie est de faire avancer le lecteur dans cette compréhension, en s'appuyant sur des exemples.

1. Des problèmes à résoudre

Les massifs de fleurs Il s'agit à chaque fois de calculer le nombre de tulipes dans un massif : 2. un massif de fleurs, formé de 60 tulipes rouges et 15 tulipes jaunes ; 3. un massif de 60 rangées de 15 tulipes ; 4. un massif de 60 fleurs, formé de tulipes et de 15 jonquilles ; **5.** 60 tulipes disposées en 15 massifs réguliers

Les quatre problèmes choisis (les massifs de fleurs) nous permettent de contextualiser des questions ou d'interroger des pratiques liées à la résolution de problèmes verbaux. Notre réponse est très rapide, du moins l'opération qui permet le calcul. En général ces problèmes sont « automatisés » pour des adultes. *A priori* c'est aussi ce que vise l'école pour les élèves de fin cycle 3 (France : 9 à 12 ans).

Mais d'où vient cette capacité à discerner que ces quatre problèmes relèvent d'opérations différentes, alors qu'ils sont donnés dans un même contexte et mettent en jeu les deux mêmes nombres ? Le prochain paragraphe nous éclairera sur cette question. A quoi servirait le fait de souligner des informations utiles pour un élève qui échouerait à donner une réponse ? On voit avec ces exemples les limites des tâches « aides méthodologiques » citées plus haut.

Les châtaignes de Charles ©ARMT cat.5 6 7 Charles a récolté 108 kg de châtaignes. Il les met dans trois paniers, un petit, un moyen, un grand. Les châtaignes du panier moyen pèsent le double de celles du petit panier. Les châtaignes du grand panier pèsent le double de celles du panier moyen. Après avoir rempli ces trois paniers, il lui reste quelques kg de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes du grand panier. Combien de kg de châtaignes Charles a–t-il mis dans chaque panier ? Combien de kg lui reste-il ?

Le problème « les châtaignes de Charles », extrait de la banque des problèmes de l'Association du Rallye Mathématique Transalpin (Grugnetti & Jacquet 1997) demande un plus grand temps de résolution. Des élèves de cycle 3 devront pratiquement tous construire une stratégie nouvelle, ils ne pourront pas inférer une procédure automatisée. Pour les élèves d'école primaire, nous placerons ce problème dans une autre catégorie que les massifs de fleurs, le qualifiant de « problème a-typique », alors que les problèmes de massifs de fleurs seront qualifiés de « basiques ». Ces deux termes seront mieux définis plus loin dans le texte.

2. Ce que nous apprennent des recherches de psychologie cognitive

Jean Julo (1995, 2002), psychologue cognitiviste, s'est intéressé relativement tôt aux aides à la résolution des problèmes scolaires ordinaires. Il a insisté sur l'existence de processus spécifiques de l'activité de résolution de problèmes :

> *L'accès aux connaissances et leur instanciation dans une situation donnée ne sont pas des phénomènes triviaux, même dans le cas où l'on a une bonne compréhension et une bonne pratique (entendue comme résultat d'un exercice) de ces connaissances. Ce sont des processus cognitifs ad hoc qui vont faire que l'on est capable ou non de mettre cette situation sous une forme telle que nos connaissances deviennent mobilisables pour les traiter. (Julo, 2002, p.35)*

Ces processus ont un versant représentationnel (développé ci-dessous) et un versant opératoire (évoqué souvent sous le terme de stratégies) en étroite interaction.

Les représentations d'un problème, quel qu'il soit, sont des représentations ponctuelles et occasionnelles, Julo parle de *représentations particularisées.* La représentation du problème ne se réduit pas à la compréhension de son énoncé. La nature d'un problème engage un autre type de représentation.

> *Ce sont les relations complexes entre un but donné et les conditions de réalisation de ce but (les contraintes et les aides qu'introduit l'auteur de l'énoncé) qui caractérisent ce qu'est un problème par rapport à d'autres situations de compréhension de texte. (Julo, 1995, p.16)*

L'enjeu de la résolution de problèmes est aussi spécifique :

> *C'est bien le fait de découvrir par soi-même une solution que l'on n'entrevoyait pas dans un premier temps qui est l'enjeu de cette activité particulière. (Julo, 1995, p.25)*

D'après Julo (1995), interviennent dans la résolution de problèmes des connaissances « liées directement aux situations particulières que nous avons rencontrées auparavant et à l'expérience représentationnelle que nous avons acquise à leur propos » (p.90), ce qu'il désigne sous l'expression « schémas de problèmes ».

> *Ce sont les représentations construites lors de la résolution de différents problèmes qui s'organisent progressivement en schémas2 de problèmes. (Julo 2002, p.43)*

On voit le côté récursif du modèle : résoudre un problème passe par la construction d'une représentation de ce problème et la réussite à ce problème enrichit notre mémoire des problèmes… résolus. D'après Julo (1995), la mémoire des problèmes (sous forme de schémas de problèmes) que nous avons rencontrés et résolus joue un rôle décisif dans la façon dont nous nous représentons un nouveau problème à résoudre.

Des recherches plus récentes (par exemple Sanders, 2007, Gamo et al., 2011) confirment que la seule prise en compte des raisonnements en jeu (la structure formelle du problème) ne peut pas expliquer les comportements de tous les enfants face à un problème. A structure formelle égale, le contexte du problème (par exemple s'il s'agit d'individus *ou* d'objets, si la grandeur en jeu est le Temps plutôt que la Masse ou la Longueur) peut plus ou moins favoriser la réussite ou influer sur la procédure de résolution. Julo (2002, p.41) avait déjà intégré l'influence potentielle du contexte dans son modèle explicatif et dans ses expérimentations autour de la multiprésentation (voir aussi Nguala 2005).

Il se pourrait aussi que pour un sujet, les problèmes soient d'abord représentés en mémoire par un « prototype »[3], une des trois formes supposées par Julo pour les schémas de problèmes (Julo 2002, p.35-36). Cette représentation pourrait s'enrichir au fur et à mesure de la fréquentation des adaptations de ce prototype (au sens de Robert 2008), ce qui permettrait au

---

[2] Attention, il ne s'agit pas de schémas graphiques, mais de schémas cognitifs : des structures cognitives qui stockées dans la mémoire à long terme, sélectionnent et traitent l'information de manière inconsciente (au sens d'automatique).

[3] De la même façon qu'en géométrie plane, le carré est d'abord mémorisé en position prototypique, c'est-à-dire avec des cotés horizontaux et verticaux ou parallèles aux bords de la feuille.

sujet de reconnaître et réussir une plus grande variété de problèmes de même structure formelle.

IV. PREMIERES CONSEQUENCES POUR L'ENSEIGNEMENT

1. Enrichir la mémoire des problèmes

Notre compréhension de la résolution de problèmes est enrichie par la notion de mémoire des problèmes (Julo, 1995, 2002). Pour un élève confronté à un problème, il y aurait deux possibilités extrêmes : soit il active dès la lecture un schéma adéquat qu'il associe, voire adapte au problème à résoudre, soit en l'absence d'instanciation d'un tel schéma, l'élève doit construire « de toutes pièces » une représentation *ad hoc* du problème. Dans notre propos ce schéma peut être lié au contexte du problème.

Ce modèle, relativement stabilisé en psychologie cognitive, change radicalement selon nous le rapport aux problèmes pour l'apprentissage et l'enseignement. **Il devient urgent et crucial d'enrichir la mémoire des problèmes de chaque élève** : l'élève disposerait ainsi de plus de schémas et face à un nouveau problème, serait plus à même de pointer des analogies avec quelque chose de déjà rencontré, au moins en partie. Cet enrichissement passe nécessairement par la rencontre des élèves avec des problèmes qu'ils mènent à terme. Or les pratiques d'enseignement donnent souvent de façon différenciée de telles occasions aux élèves : certes des problèmes leur sont proposés, mais le temps de recherche s'arrête souvent quand les meilleurs ont trouvé, les élèves qui ont des difficultés peuvent rarement mener à terme la résolution du problème. L'enseignant suppose souvent qu'assister à la correction (qu'elle soit magistrale ou proposée par l'entremise de brefs exposés d'élèves sur leurs productions) produira des effets positifs sur la prochaine résolution. Julo suppose que la source des difficultés persistantes des élèves en mathématiques est « une carence en matière de véritable occasion de résoudre des problèmes » (Julo, 2001, p.10).

Mais quels types de problèmes arithmétiques est-il urgent de faire rencontrer et mener à terme aux élèves ? Quels problèmes valent la peine d'être mémorisés au sens défini ci-dessus, pour qu'ils soient résolus de façon quasi immédiate comme les massifs de fleurs du début de cet article ?

2. Les problèmes arithmétiques basiques

Notre hypothèse est qu'il s'agit des « éléments simples » (au sens de la chimie de Mendeleiev) d'un champ notionnel, que nous appelons les « problèmes basiques ». Les problèmes basiques arithmétiques sont les problèmes qui rendent compte des raisonnements élémentaires en relation avec les quatre opérations, donc qui définissent les sens des opérations. Cela recouvre les problèmes à deux données [resp. ($2n$+1) données pour les problèmes liés à la proportionnalité], où il s'agit de déterminer une troisième valeur [resp. une $(2n+2)^{\text{ème}}$], à énoncé court, syntaxe simple, sans information superflue : les *one step problems*, objets d'étude de Vergnaud (1986, 1997) qui a réalisé un apport magistral quand il décrit les structures additives et multiplicatives. Les problèmes de massifs de fleurs cités plus haut en sont des exemples pour la fin d'école primaire.

Vergnaud (1997), Ridley & al.(2003) ont défini ce que nous considérons comme une échelle a priori de la complexité des problèmes additifs /soustractifs : des *one-step problems* (deux données numériques, trouver la troisième), à contextes identiques, avec une syntaxe simple, les mêmes nombres en jeu, sans information superflue) sont hiérarchisables en tenant compte du couple formé par la catégorie dont ils relèvent (composition d'états OU transformation additive/soustractive d'états OU comparaison additive/soustractive d'états OU …) et la place de l'inconnue : par exemple un problème de transformation négative avec recherche de l'état final est moins complexe qu'un problème de transformation positive avec recherche de l'état initial, même si les deux problèmes relèvent de la même écriture arithmétique donnant le résultat. Les problèmes multiplicatifs sont aussi hiérarchisables : Vergnaud (1997) a beaucoup œuvré dans ce sens, mais de façon plus formelle, en étudiant les emboitements de raisonnements : par exemple la réussite des problèmes de proportionnalité s'appuie sur une compréhension minimum des problèmes de comparaison multiplicative (problèmes comportant les expressions n fois plus, n fois moins), ce qui suppose que ces derniers précédent les autres dans la progression d'enseignement sur la proportionnalité.

3. Deux autres « types » de problèmes arithmétiques

Comment appeler les problèmes qui ne seraient pas *basiques* ? Il nous semble judicieux d'en distinguer deux sortes ;

- d'abord les « *problèmes complexes* » (voir paragraphe suivant) qui sont des agrégats de « problèmes basiques », à construire par le sujet. La complexité des problèmes peut venir en effet de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées pour la construction de la réponse ;
- ensuite des « *problèmes atypiques* »[4] définis justement par leur caractère non routinier, le fait qu'on suppose que les élèves ne disposent pas de stratégies connues pour les résoudre, qu'ils doivent en inventer de toutes pièces, en s'appuyant sur leurs connaissances passées, notamment leur mémoire des problèmes.

Le lecteur aura compris que les qualificatifs de basique et a-typique sont dépendants du niveau de connaissances du sujet. Par contre les textes des programmes pourraient comporter des recommandations sur les types de problèmes basiques d'un champ notionnel à tel niveau : c'est possible au moins pour les problèmes arithmétiques du primaire.

V. LES PROBLEMES COMPLEXES

Considérons le problème suivant, donné par l'enseignant en classe de CM, que nous avons spécifiquement étudié dans le cadre d'une recherche sur les connaissances mises en jeu par les élèves dans la résolution de problèmes arithmétiques ordinaires de la classe.

> Au cinéma Royal Ciné[5]
> Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance. A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants. A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants. La recette de la journée est 542€. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

[4] Notamment des « problèmes pour chercher » selon l'expression des programmes du primaire 2002.
[5] Extrait de ERMEL (1997 ; 2005). Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1. Paris : Hatier.

Ce problème n'est pas un problème basique, mais un agrégat de problèmes basiques. Un travail du résolveur est en effet de construire des sous-problèmes (pas nécessairement basiques au sens *one step problems*) qui soient calculables (*id est*, dont on puisse obtenir la réponse avec les données fournies). Le résolveur doit donc (re)connaitre des problèmes calculables, même si tous le lui serviront pas nécessairement pour la réponse finale. Les problèmes basiques sont ici les plus « petits » problèmes (irréductibles) calculables. Illustrons par le tableau ci-dessous (Figure 1).

Exemples de sous problèmes basiques calculables	Exemple de suites (de sous-problèmes) qui conduisent à la réponse
Séance du soir : nombre de personnes Séance du soir : prix que payent les adultes Séance du soir : prix que payent les enfants Séance du soir : prix payé par le public Séance de l'après-midi : prix que payent les adultes Deux séances : nombre d'adultes Deux séances : prix que payent les adultes Etc.	Recette du soir, puis recette de l'après-midi, puis recette de l'après-midi venant des adules, puis venant des enfants, et enfin nombre d'enfants de l'après-midi. OU Recette venant des adultes, puis recette venant des enfants, puis nombre total d'enfants venus, enfin nombre d'enfants de l'après-midi.

Figure 1 : Exemples de sous-problèmes à construire par le résolveur.

Construire ces problèmes nécessite, au-delà du calcul, de mettre en relation, de connecter des informations (souvent éloignées les unes des autres dans le texte). Il s'agit aussi de savoir quels problèmes sont calculables, ce qui nécessite d'avoir mémorisé antérieurement des problèmes basiques résolus. Nous renvoyons le lecteur à Houdement (2017) sur la nécessité pour l'élève de savoir « qualifier » le résultat calculé pour avancer vers la réponse finale.

Dans ce texte, nous ne pointons pas les inférences nécessaires à la compréhension du texte (liée à la construction de la représentation du problème), ni le fait que les calculs à faire puissent être assez différents (nombres en jeu notamment) selon les choix du résolveur.

VI. VERS UN PROGRAMME DE RECHERCHE, DE FORMATION

Il est donc urgent de développer des programmes de recherche en didactique des mathématiques qui visent la réussite des élèves de cycle 2 et cycle 3 sur les « problèmes arithmétiques basiques ». Les pistes sont nombreuses : organiser des milieux matériels permettant des rétroactions sur les réponses ; amener les élèves à pointer des ressemblances entre les problèmes en leur proposant, non pas un seul, mais une série de problèmes vue comme un tout ; amener les élèves à pointer des ressemblances entre les problèmes en s'appuyant sur les « stratégies gagnantes » et les consigner dans un cahier de problèmes ; considérer les écritures arithmétiques comme une conclusion nécessaire à tout problème (indépendamment du fait, non obligatoire, qu'elles permettent de trouver le résultat) ; développer des outils sémiotiques d'aide à la construction de la représentation du problème ou d'une heuristique (schémas, tableaux…) ; solliciter et proposer systématiquement des reformulations oral *versus* écriture arithmétique en ligne ; travailler en décroché les transformations d'écritures, additives *versus* soustractives, multiplicatives *versus* divisives[6].

Il est aussi nécessaire d'éveiller la vigilance des enseignants et de ne pas les engager à suivre de propositions d'aide à la résolution de problèmes qu'on sait, *a priori*, sans effet notoire.

Une question éthique se pose dans la communauté 'recherche en didactique et formation': est-il possible que le formateur et/ou chercheur en didactique, reste honnête vis-à-vis des enseignants et puisse dire : l'état des travaux scientifiques ne nous permet pas encore de proposer des réponses robustes sur cette question !

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. & HOUDEMENT, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *Zentralblatt der Didaktik der Mathematik*, *39***,** 365–382.

COPPE, S. & HOUDEMENT, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N*, *69*, 53–63.

COPPE, S. & HOUDEMENT, C. (2010). Résolution de problèmes à l'école primaire : perspectives curriculaire et didactique. In *Actes du 36ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques* (pp.48–71). COPIRELEM Auch 2009. ARPEME.

GAMO, S., TAABANE, L. & SANDER, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'Année psychologique*, *111*, 613-640.

GRUGNETTI, L. & JAQUET, F. (1997-98). La résolution de problèmes par classes. *Grand N*, *61***,** 61–69.

HOUDEMENT, C. (1999). Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, *63***,** 59–76.

HOUDEMENT, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, *71***,** 7–23.

HOUDEMENT, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *14*, 31–59.

HOUDEMENT, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, *100*, 59–78.

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2001). Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? In *Actes du 27ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques* (pp. 9–28). COPIRELEM Chamonix 2000. IREM de Grenoble.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2015). Programme de mathématiques cycle 3 ET Programme de mathématiques cycle 4. *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*. En ligne http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400

NGUALA, J.B. (2005). La multi-présentation. Un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, 76, 45–63.

RILEY,M.S., GREENO, J.G. & HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem-solving in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking* (pp.153–196). New-York: Academic Press.

ROBERT, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandenbrouck (coord.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.45–57). Paris : Octarès Éditions.

SANDER, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages. *Bulletin de Psychologie*, *60*, 119–124.

VERGNAUD, G. (dir. 1997; 2001). *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes.* Paris: Nathan.

[6] Il s'agit du nécessaire travail pré-algébrique : savoir transformer 85 + ? = 113 en 113 - 85 = ? ; savoir transformer 15 x ? = 135 en 135 : 15 = ?

UNE PERSPECTIVE INTERPRETATIVE SUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES : LE CADRE A-S^3

Emmanuel **SANDER**
Université de Genève, Laboratoire IDEA (Instruction, Développement, Education, Apprentissage)
emmanuel.sander@unige.ch

Résumé

Cet article a pour objet la présentation du cadre A-S^3, fondé sur la distinction entre trois formes d'analogies - de *substitution*, de *scénario* et de *simulation*, interdépendantes mais dissociables, qui influent sur la résolution de problèmes arithmétiques, facilitant, ou au contraire faisant obstacle à, la résolution. Un énoncé de problème fait l'objet d'une interprétation qui repose sur un encodage orienté par les connaissances de la vie quotidienne et qui conduit à se focaliser sur certaines caractéristiques et à en ignorer d'autres. Un énoncé s'avère sujet à une multiplicité de perspectives, chacune pouvant orienter l'élaboration d'une stratégie de résolution ou fonder le transfert d'une stratégie transposée d'un problème résolu antérieurement. Un recodage sémantique est susceptible de conduire une interprétation inadéquate à évoluer au profit d'une autre plus pertinente. Les implications sur le plan de l'élaboration de progressions d'apprentissage et d'évaluations sont discutées.

Mots clés

Résolution de problème, apprentissages arithmétiques, analogie, conceptions intuitives, stratégies informelles, recodage sémantique

I. INTRODUCTION

L'objet de ce texte est de proposer un cadre pertinent sur le plan didactique, s'inscrivant dans l'approche de l'analogie que nous avons développée par ailleurs (Hofstadter & Sander, 2013), applicable à la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux, à la fois dans la perspective de rendre compte des difficultés rencontrées par les élèves, de favoriser l'enseignement de notions mathématiques et d'évaluer les acquisitions de connaissances. La résolution de problèmes y est considérée comme jouant un rôle primordial non seulement dans la mise en œuvre mais également dans la construction même des notions mathématiques.

Le cadre A-S^3 (Sander, 2016a, 2016b) met en avant trois formes d'analogies – de *substitution*, de *scénario* et de *simulation*, interdépendantes mais dissociables, supposément influentes sur la résolution d'un problème arithmétique[1]. Un énoncé de problème y fait l'objet d'une interprétation par un solveur. Cette interprétation repose sur un encodage selon certaines dimensions dépendantes de connaissances issues de la vie quotidienne – telles que le fait que des vases sont dans un rapport de contenance avec des fleurs. Elle intègre certaines caractéristiques d'un énoncé et en ignore d'autres, contraignant ainsi les stratégies de résolution envisageables et le transfert d'apprentissage, car seules les stratégies compatibles

[1] Tout au long du texte, la formulation « problème arithmétique » désignera un « problème arithmétique à énoncé verbal ».

avec l'interprétation du solveur sont susceptibles d'être mises œuvres, et un transfert de stratégie n'est réalisable que si les interprétations de chacun des énoncés concernés sont appariables.

L'approche proposée ici met l'accent sur la diversité des grilles de lecture d'un même énoncé, chacune traduisant un certain encodage de cet énoncé. Les typologies de problèmes arithmétiques les plus connues (Vergnaud, 1982 ; Riley, Greeno & Heller, 1983, pour les problèmes à structure additive à une étape ; Vergnaud, 1988 ; Greer, 1992, pour les problèmes à structure multiplicative) sont généralement envisagées comme s'appliquant aux énoncés eux-mêmes alors que la conception interprétative introduite ici envisage à l'inverse qu'un même énoncé puisse être, selon son encodage, assigné à différents items d'une typologie, ce qui traduit sa polysémie intrinsèque. Cette dernière est vue comme un levier d'apprentissage car une même situation devient sujette à une diversité de perspectives adoptables, chacune pouvant ancrer l'élaboration d'une stratégie de résolution ou fonder le transfert d'une stratégie transposée d'un problème déjà résolu.

Dans cette optique, l'élaboration de progressions d'apprentissage peut s'envisager à travers des activités en classe qui favorisent la construction de nouvelles interprétations par l'élève, qui suscitent la prise en compte de caractéristiques ignorées jusque-là, bien que mathématiquement pertinentes, ou qui aboutissent à l'occultation de propriétés mathématiquement non pertinentes, quoique saillantes sur le plan de la sémantique quotidienne. En effet, une interprétation d'un énoncé est susceptible de mettre en valeur des propriétés non pertinentes mais saillantes, pouvant faire obstacle à la résolution. Par exemple, dans le problème « Paul avait 8 billes. Il en donne 5 à Pierre. Combien lui en reste-t-il ? », dont l'objet est de déterminer une quantité restante, la caractéristique saillante de recherche du résultat d'une perte peut rendre difficile la perception que l'addition et la soustraction sont des opérations réciproques car l'idée qu'en ajoutant ce qui reste à ce qui a été perdu on retrouve la valeur d'origine n'est pas immédiate – ce dernier type où il s'agit de retrouver la valeur initiale par une addition est d'ailleurs l'un des problèmes additifs les plus difficiles en début d'école primaire. La prédominance de l'analogie de substitution de la soustraction comme recherche de la quantité restante peut ainsi expliquer la difficulté de ces élèves à lier « 5+3=8 » et « 8-5=3 » ; l'équivalence entre la forme additive « 5+3=8 » et la forme soustractive « 8-5=3 » ne semble absolument pas perçue en début de primaire (Baroody, 1999).

En revanche, la réciprocité de l'addition et de la soustraction sera plus saillante dans un énoncé de comparaison tel que « Hugo a 2 billes, Théo en a 7 de plus, combien Théo a-t-il de billes ? », qui rend plus apparent que l'opération réciproque à l'ajout de 7 à la quantité de Hugo pour obtenir celle de Théo est le retrait de 7 à la quantité de Théo pour obtenir celle de Hugo. Un énoncé tel que « J'ai 2 pommes et 6 oranges. Combien de fruits ai-je en tout ? » rend quand à lui saillant la commutativité de l'addition, car le fait de débuter par les oranges ou les pommes dans cette réunion de fruits paraît indifférent, contrairement au scénario précédent de comparaison où les statuts diffèrent entre la valeur du référent et le terme de la comparaison, rendant difficile de percevoir que l'interversion des deux valeurs conserve le résultat. Ce phénomène incite à introduire les notions mathématiques par des situations mettant au premier plan des propriétés pertinentes sur le plan mathématique et dépourvues tant que possible de propriétés saillantes non pertinentes, qui biaisent le sens de la notion. Sur un plan plus métacognitif, cela oriente vers des activités qui favorisent la prise de conscience par les élèves qu'un même énoncé peut se lire de plusieurs façons et vers une tentative de lecture alternative lorsqu'une interprétation initiale conduit à l'impasse. Par exemple, dans l'énoncé « Hugo a 2 billes, Théo en a 7 de plus, combien Théo a-t-il de billes ? », la valeur 7 peut être interprétée comme celle d'un écart, ce qui rend saillant la réciprocité de l'addition et de la soustraction, comme nous venons de le voir. Une autre interprétation de cette même valeur 7 est qu'il s'agit de la quantité de billes manquant à Hugo pour qu'il en ait autant que Théo. Cette lecture donne un statut quasiment symétrique aux deux valeurs, qui désignent cette fois le cardinal d'un sous ensemble de 2 billes et celui d'un autre de 7 billes, ce qui peut alors légitimer la commutativité. Ainsi une certaine lecture de cet énoncé favorise la perception de la réciprocité des opérations de soustraction et d'addition, tandis qu'une autre est favorable à celle de la commutativité de l'addition. Un élève qui serait en mesure d'adopter sans difficulté l'une et l'autre de ces lectures et de passer aisément de l'une à l'autre pourrait saisir ces deux aspects. Selon nous (Hofstadter & Sander, 2013), ce phénomène est de même nature que celui de recatégorisation qui permet à une personne de passer d'une catégorisation à une autre de manière flexible, le plus souvent inconsciemment, en fonction du contexte et en particulier du but. Par exemple, une chaise suscite typiquement un usage de siège, mais peut aisément être recatégorisée en objet sur lequel il est possible de monter si le besoin s'en fait sentir, pour changer par exemple une ampoule ; elle peut aussi être catégorisée comme meuble lors d'un déménagement, en objet inutile et encombrant lors d'un vide grenier, en porte veste, en projectile lors d'une crise de colère aigue… Nous envisagerons dans ce texte cette activité de construction d'interprétations alternatives à travers la notion de recodage sémantique des énoncés de problèmes arithmétiques. Un tel recodage sémantique serait susceptible de conduire une interprétation inadéquate (une lecture figée de 7 comme valeur de l'écart qui occulterait la commutativité) à évoluer au profit d'une autre plus pertinente (la perception de 7 comme un ensemble de billes latent, dont le statut serait homologue à celui de l'autre quantité de billes, favorisant la perception du caractère commutatif de l'addition). Préalablement à la présentation du cadre A-S^3 et des activités de recodage sémantique, nous précisons la notion d'analogie.

II. L'ANALOGIE COMME PROCESSUS ADAPTATIF TRANSVERSAL

Une acception contemporaine de cette notion est qu'une analogie « *rend possible de comprendre une situation [la cible] dans les termes d'une autre [la source]* » (Holyoak & Thagard (1995, p. 5). Ainsi, une enfant de 2 ans qui dit « J'ai déshabillé l'orange » (Duvignau, 2003) alors qu'elle l'a épluché, a réalisé une analogie dont la cible est la situation d'épluchage d'orange et la source la notion de déshabillage. L'analogie s'inscrit comme un mécanisme psychologique adaptatif fondé sur la référence au connu pour appréhender la nouveauté (Gick & Holyoak, 1983). Toute situation dans laquelle un individu se trouve comportant une part de singularité, l'expérience ne peut être capitalisée que par ressemblance avec un existant antérieur ; la situation est appréhendée à travers le prisme d'un analogue. Tout comme son expérience du déshabillage donne à Camille un prisme à travers lequel appréhender l'épluchage de son orange, c'est ainsi qu'un individu bénéficie de ses expériences passées. L'analogie conjugue un faible coût cognitif – car la situation source est mobilisée comme cadre interprétatif sans qu'il y ait besoin de construire une structure représentationnelle propre, ce qui serait potentiellement plus coûteux – et un fort pouvoir inférentiel dans la mesure où une fois une source identifiée, les connaissances associées à cette source peuvent être projetées sur la cible et constituer autant d'inférences qui enrichissent la perception de cette cible et auxquelles il aurait fallu aboutir autrement en l'absence de source. Selon la pertinence de la source d'analogie dans un contexte donné, ces inférences peuvent être fécondes ou, à l'inverse, fourvoyer.

Les travaux sur les métaphores conceptuelles, dont le voisinage conceptuel avec l'analogie a été amplement noté (Leary, 1990), montrent l'omniprésence et la persistance de ce phénomène d'appréhension d'une notion (la cible de la métaphore) par le biais d'une autre (sa source). Alors que le vocable d'analogie met l'accent sur la similitude structurale entre le source et la cible (le « rapport » existant, en se fondant sur l'étymologie du terme analogie), celui de métaphore met l'accent sur le transfert opéré (le « transport » sur le plan étymologique). L'idée principale qui unit ces notions est celle d'une cible perçue selon le prisme d'une source en s'appuyant sur la ressemblance ; l'idée selon laquelle une métaphore s'appuie sur un rapport d'analogie n'est pas sujet à controverse. Selon Lakoff et Johnson (1980 ; voir également Lakoff & Nunez, 2000 spécifiquement sur les mathématiques), notre système conceptuel est métaphorique par nature : une notion un tant soit peu abstraite ne peut être conçue autrement que métaphoriquement, la source de la métaphore étant une notion concrète et familière. Ces métaphores, généralement inconscientes, sont qualifiées de conceptuelles pour marquer qu'elles sont « avant tout, affaire de pensée » (Lakoff & Johnson, 1980, p. 153). Elles se repèrent en particulier dans les expressions langagières ; par exemple la métaphore conceptuelle « Un DEBAT est un COMBAT » est mise en évidence par l'existence d'expressions du langage commun empruntées au champ lexical du combat pour qualifier un débat, comme « *Camper sur ses positions* », « *Se retrancher derrière un argument* », « *Combattre une idée* », « *Etre offensif dans son argumentation* », « *Capituler face à un débatteur* », « *Rendre les armes* face à ses détracteurs », « *Repousser les assauts* de ses opposants »…. Du fait que les sources privilégiées de métaphores sont ancrées dans l'expérience concrète, cette théorie place les métaphores sensorielles, comme celles liées à la perception visuelle, au premier rang. Par exemple, la métaphore conceptuelle « COMPRENDRE est VOIR » se manifeste par des expressions qui, pour qualifier la compréhension, s'inscrivent dans ce registre de la perception visuelle, telles que : « *Changer de point de vue* », « *Voir d'un nouvel œil* », « *Adopter un autre regard* », « *Avoir une illumination* », « *Trouver une idée claire, brillante* », « *Bien vu !* », « *C'est encore flou* », « *Changer de perspective* »… Loin d'être de simples moyens pour communiquer à propos de notions abstraites, ces métaphores conceptuelles sont considérées comme constitutives des notions elles-mêmes. Ainsi, la notion de débat serait intrinsèquement pénétrée de celle de combat, celle de compréhension de celle de vision, si bien qu'expurger une source de métaphore conduirait à appauvrir conceptuellement la notion, voire serait inconcevable tellement l'une se construit sur l'autre. Cette approche n'est pas restreintes aux savoirs profanes et concerne aussi les champs disciplinaires. Elle a été en particulier déclinée pour la philosophie (Lakoff & Johnson, 1999) et pour les mathématiques (Lakoff et Nunez, 2000).

Deux constats ayant une portée importante sur le plan de l'éducation ont émergé de travaux sur l'analogie (Hummel & Holyoak, 1997 pour une revue ; voir aussi Richland & Simms, 2015). La première est que le transfert analogique est potentiellement efficace dans la mesure où le fait d'avoir résolu un certain problème favorise en général la résolution d'un autre problème de même structure : disposer de sources d'analogie efficientes est un atout, car celles-ci sont mobilisables pour résoudre des problèmes analogues. Toutefois, de nombreux travaux ont modulé ce constat d'efficacité du transfert analogique car ce dernier est particulièrement marqué lorsque la situation source est explicitement indiquée à l'élève, par exemple lorsqu'un enseignant indique quel problème préalablement résolu en classe est susceptible d'aider à résoudre le problème en cours. En revanche, lorsque l'élève cherche à identifier un problème source approprié, des écueils existent du fait d'un accès en mémoire fondé parfois sur des indices inappropriés (Ross, 1989 ; Trench & Minervino, 2015). Ainsi, un élève ayant appris à résoudre un problème respectant un certain principe de solution peut se trouver démuni pour l'identifier comme source d'analogie pertinente. Un transfert négatif est même parfois observé, caractérisé par la mise en œuvre de la structure de solution d'un problème superficiellement ressemblant mais structurellement non analogue (Novick, 1988).

Un double enjeu éducatif émerge donc, celui de la construction de sources d'analogie pertinentes et celui de la possibilité de leur évocation à bon escient.

Ce double enjeu est reflété par deux facettes du développement des concepts, l'une comme l'autre étroitement liées aux processus d'analogie. La question des liens entre analogie et concepts n'est pas nouvelle (Turner, 1988 ; Ramscar & Pain, 1996), et nous avons développé (Hofstadter & Sander, 2013) un cadre qui les associe étroitement. Chaque concept y est évoqué par les analogies qu'établit notre système cognitif afin d'interpréter ce qui est nouveau et inconnu dans des termes anciens et connus. Outre ce rôle de l'analogie dans l'évocation d'un concept, le développement conceptuel est lui-même piloté par des analogies. Un mécanisme d'extension catégorielle conduit en effet chaque nouvelle situation rencontrée, une fois associée par analogie à une catégorie mentale préexistante, à transformer cette même catégorie ; un tel mécanisme dynamique et cumulatif oriente le développement conceptuel (Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, sous-presse). Alors que ce dernier est soumis à l'arbitraire des expériences de vie individuelles pour les concepts quotidiens, un enjeu éducatif majeur est que l'enseignement oriente cette construction lorsqu'il s'agit de notions scolaires.

III. LE CADRE A-S^3

Le cadre A-S^3 distingue trois formes d'analogies intuitives[2], les analogies de *Substitution*, de *Scénario* et de *Simulation*. Ces trois formes d'analogies reposent sur des connaissances extra-mathématiques, issues de la vie quotidienne, préalables à l'enseignement. Ces analogies orientent les interprétations de l'énoncé par l'élève ; peuvent être facilitatrices comme obstructives selon qu'elles suscitent des inférences pertinentes et favorisent la réussite ou à l'inverse des inférences inappropriées et y font alors obstacle. Les identifier permet de se prononcer sur la plus ou moins grande difficulté de résolution d'un problème. Elles peuvent être mises à profit pour élaborer des progressions d'apprentissage et favoriser une montée en abstraction. Leur prise en compte peut également orienter l'élaboration d'évaluations (Sander, 2007), dans la mesure où les succès ne s'interprètent pas de manière identique selon qu'ils sont obtenus « avec le support de » ou « malgré l'obstacle engendré par » tel ou tel type d'analogie.

1. Les Analogies de Substitution

A la différence des analogies de Scénario et de Simulation, les analogies de substitution portent sur les notions mathématiques elles-mêmes. Elles sont illustrées dans ce texte principalement avec les quatre opérations élémentaires mais peuvent être envisagées pour toute notion mathématique. Elles se repèrent par le fait qu'une notion est conçue par analogie avec une connaissance familière. La terminologie d'analogie de substitution provient du fait que cette connaissance familière se substitue à la notion disciplinaire pour l'individu, qui considère qu'il traite de la notion scientifique alors qu'il s'appuie en fait sur l'analogie de substitution. Une analogie de substitution est attachée à un domaine de validité (Sander, 2008), qui désigne le champ de coïncidence entre la notion mathématique et la source

[2] Ces analogies sont qualifiées d'intuitives au sens de Fischbein (1987), comme une « cognition qui apparaît subjectivement comme évidente, directement acceptable, holistique, coercitive et extrapolable ».

d'analogie et marque les cas où la substitution conduit au succès. Une analogie de substitution est facilitatrice à l'intérieur du domaine de validité et obstructive à l'extérieur. Cette notion d'analogie de substitution est en phase avec celle de modèle tacite (Fischbein, 1989) et de métaphore conceptuelle (Lakoff & Nunez, 2000). Relativement à ces deux cadres, elle offre l'intérêt d'ancrer ces analogies de substitution dans une théorie des concepts, car les sources d'analogie sont des concepts quotidiens. En particulier, il devient pertinent de s'intéresser à la structure même des concepts source avec par exemple la présence de prototypes et de membres atypiques, et à leur développement, avec la possibilité que la source même de l'analogie soit sujette à développement (Sander, 2017).

Prenons le cas de la soustraction et la tâche d'inventer un problème de soustraction qui puisse se résoudre par l'opération 8-3=5. De manière quasi systématique, un énoncé tel que « Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…). Il/Elle en donne (mange, perd, etc…) 3 à (pendant, etc…). Combien lui en reste-t-il ? » est proposé. En dépit de la diversité des scénarios inventés, une structure commune est présente, qui manifeste l'existence de l'analogie de substitution selon laquelle soustraire c'est perdre, retirer, enlever (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nunez, 2000). Plus précisément, une totalité est donnée, dont une partie est retranchée et la question porte sur la partie subsistante (« Combien en reste-t-il ? »). Il apparaît donc que l'analogie de substitution de la soustraction est la recherche de la quantité restante après qu'un événement conduise à faire décroître une quantité initiale donnée. Plus de 90% des élèves de fin d'école primaire, de Master en psychologie ou des enseignants d'école primaire proposent des énoncés obéissant strictement à cette forme (Sander, 2016b, sous-presse). La tâche d'inventer un problème d'addition qui puisse se résoudre par l'opération 5+3=8, va quant-à-elle conduire majoritairement à des énoncés ayant la forme: « Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 5 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…). Il/Elle en reçoit (gagne, etc…) 3 à (pendant, etc…). Combien en a-t-il en tout ? ». L'analogie de substitution de l'opération d'addition est celle de l'ajout (Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000). Plus précisément deux formes d'ajout prédominent dans le cadre de cette analogie de substitution. Soit (i) un état initial est donné, ainsi qu'un accroissement et la question porte sur l'état résultant, soit (ii) deux parties sont données, qui forment un tout et la question porte sur la valeur de ce tout (Sander, 2016b, sous-presse).

En ce qui concerne la multiplication, les tâches « Inventer un problème de multiplication » et « Définir l'opération mathématique de multiplication » montrent, pour la première d'entre elles, que la quasi-totalité des problèmes inventés décrivent une réplication sommative, par exemple « J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien cela fait-il de gâteaux en tout ? », qui peuvent se résoudre comme des additions répétées (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nunez, 2000 ; Sander, 2008). De manière systématique, une des valeurs est un nombre entier et a le statut de multiplicateur. Les définitions construites et unanimement acceptées par des étudiants à l'université reflètent cette conception d'addition répétée (Hofstadter & Sander, 2013) : « Une multiplication est une addition réitérée d'un nombre, un nombre de fois donnée. » ; « Multiplier consiste à ajouter à un chiffre donné ce même chiffre autant de fois qu'on le souhaite. » ; « Multiplier, c'est additionner un certain nombre à lui-même autant de fois que le nombre par lequel on le multiplie l'indique. » ; « La multiplication est un calcul dans lequel on choisit combien de fois on additionne une quantité par elle-même. » L'analogie de substitution de la division est la recherche de la taille de la part dans un contexte de partage équitable (Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000). A la question "Inventer un problème de division" tant les élèves français de 12 ans à 13 ans que des adultes étudiants à l'université en France proposent à plus de 90% de problèmes de partage équitable où la question porte sur la taille de la part (Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008), qui mène à un résultat dans la même unité que la quantité initiale. Quelques exemples d'énoncés produits par des étudiants à l'université (Hofstadter & Sander, 2013) reflètent cette conception de la division : « 4 amis se partagent 12 bonbons. Combien de bonbons chaque ami recevra-t-il ? » ; « Au marché, une maman achète 20 pommes pour ses 5 enfants. Combien de pommes chaque enfant aura-t-il ? » ; « Pour les vacances, on prépare 20 kilos de vêtements à mettre dans 4 valises. Combien va peser chaque valise ? » ; « Un terrain de 90 m2 doit être divisé en 6 parcelles de superficie égale. Quelle sera la superficie de chaque parcelle ? » ; « On utilise 12 mètres de tissu pour fabriquer 4 robes. Combien de mètres de tissu faut-il pour fabriquer une seule robe ? »

Le caractère facilitateur ou obstructif des analogies de substitution dépend de l'inscription ou non de la situation à l'intérieur de champ de validité. Pour la soustraction, la tâche d' « Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5 et dans lequel on ne perd rien, on ne fait que gagner » met en impasse le plus souvent les élèves d'école primaire, voire des adultes, alors que des situations tout aussi concrètes que les précédents énoncés de soustraction existent, qui ont simplement la caractéristique de ne pas se conformer à la recherche de reste. Par exemple, un énoncé orienté vers une recherche de gain, tel que « Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ? » répond à la tâche précédente mais est rarement envisagé. Ainsi, l'analogie de substitution donne sens à la notion, mais induit une focalisation sur un seul type de situation. Elle est nécessaire mais limitante, car elle éclipse la diversité des situations de soustraction (Sander, 2008) : sur la douzaine de catégories de problèmes soustractifs à une étape que comportent les typologies de problèmes qui ont émergé dans les années 1980 (Vergnaud, 1982 ; Riley, Greeno & Heller, 1983), plus de 90% des propositions se concentrent ainsi sur la seule catégorie des recherches de reste dans une situation de retrait. Des situations de comparaison où l'on cherche la valeur de l'écart ou d'un terme de la comparaison, des situations de recherche de gain, ou des situations de recherche d'une partie manquante connaissant la totalité et l'autre partie, ne sont quasiment jamais proposées, ce qui montre la prégnance de l'analogie de substitution. On note aussi qu'un énoncé tel que « Lors d'une course, 108 coureurs prennent le départ. Il y a beaucoup d'abandons : 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ? », proposé en France par la Direction de l'Evaluation de la Prospective et de la Performance (DEPP) auprès d'élèves de CE2 (8 ans) donne lieu à seulement 25% de réussites (DEPP 2014 ; Sander & Richard, 2017). Bien qu'il s'agisse d'un contexte de diminution car des coureurs abandonnent, cette situation sort du domaine de validité de l'analogie de substitution car la valeur du reste est connue et la question porte sur la quantité ôtée. Le cadre A-S^3 rend compte du fait qu'un énoncé questionnant non sur le nombre d'abandons mais sur le nombre de coureurs atteignant la ligne d'arrivée serait nettement mieux réussi (Vergnaud, 1981/1994). On voit poindre deux modes d'intervention scolaire. L'un conduisant à ce que la notion de soustraction embrasse d'autres cas que ceux de recherche de reste, l'autre permettant à un élève de lire différemment l'énoncé et de pouvoir y percevoir une recherche de reste par un glissement d'interprétation (en l'occurrence, que ceux qui ont abandonné la course sont ceux qui restent une fois ôtés ceux qui l'ont terminée).

En ce qui concerne l'addition, la tâche « Inventer un problème d'addition dont la solution est 5+3=8 et dans lequel on ne gagne rien, on ne fait que perdre » laisse sans proposition la grande majorité des adultes, alors qu'un énoncé tel que « Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ? » y répondrait. Là encore, une telle situation est tout aussi concrète que celles des problèmes d'addition proposés en l'absence de contrainte. La difficulté provient du fait qu'elle nécessite de ne pas se restreindre au cadre de l'analogie de substitution qui assimile l'addition à la recherche du résultat d'un accroissement ou à un ajout de deux parties. Parmi les problèmes additifs à une étape, les deux types qui s'inscrivent dans le champ de validité de l'analogie de substitution sont résolus par la totalité des élèves de 6 ans tant que les valeurs numériques sont suffisamment faibles (Riley, Greeno & Heller, 1983). C'est le cas des problèmes « Paul avait 3 billes. Il en gagne 5 à la récréation. Combien a-t-il de billes maintenant ? » et « Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ? ». En revanche, hors du champ de validité de l'analogie substitution, les performances chutent. Ainsi, le problème « Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ? » n'est réussi qu'à 28%, tandis que « Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes de plus que Paul. Combien de billes Pierre a-t-il ? » obtient 17% de réussite au même âge, en dépit du mot « plus » dans l'énoncé dont on pourrait attendre qu'il déclenche une addition par un simple effet de mot clé. Ce phénomène illustre le fait que la conformité à l'analogie de substitution paraît être un facteur majeur de réussite.

Concernant la multiplication, l'analogie de substitution conduit à ce qu'un nombre entier soit systématiquement introduit lors de l'invention d'un problème et que les définitions acceptées de manière consensuelles soient celle d'une addition réitérée, qui ne s'applique pourtant pas pour les produits en général, par exemple lors du calcul de la surface d'un rectangle ou d'une distance parcourue connaissant la vitesse et la durée. Cette analogie conduit également à la croyance erronée que multiplier rend plus grand et rend difficile l'invention d'un problème où multiplier rend plus petit. Elle rend aussi difficile à justifier la commutativité de la multiplication dans la mesure où l'analogie de substitution légitime les notions de multiplicateur et de multiplicande en faisant jouer un rôle asymétrique aux valeurs du produit ; dans le cadre de la multiplication vue comme addition réitérée, la justification que 3x5=5x3 (5+5+5 = 3+3+3+3+3) ne va alors pas de soit. Les explications données par les élèves et certains adultes sont souvent de l'ordre de la règle arbitraire (« parce qu'on a le droit de le faire » ; Sander, 2008). La difficulté de résolution d'un problème de multiplication dépend également de sa conformité à l'analogie de substitution. Ainsi, l'énoncé « Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ? » est réussi seulement par 44% de collégiens anglais de 12 à 15 ans alors que la réussite atteint 100% si c'est le prix d'une valeur entière de gallons qui est recherché (Bell, Swann & Taylor, 1981) ; le premier cas n'est pas assimilable à une addition réitérée alors que le deuxième l'est. De même, auprès cette fois de collégiens italiens, en maintenant les mêmes valeurs numériques mais, selon la place de ces valeurs, en restant ou non dans le domaine de validité de l'analogie de substitution : « Avec un quintal de blé, on obtient 0,75 quintaux de farine. Quelle quantité de farine peut être obtenue avec 15 quintaux de blé ? » obtient 77% de réussite tandis que pour « Le volume d'un quintal de gypse est de 15 cm^3. Quel est le volume de 0,75 quintaux ? », on ne compte plus que 53% de réussite (Fischbein et al., 1985).

Pour ce qui est de la division, nous avons montré que la tâche « Inventer un problème de division avec un résultat plus grand que la valeur initiale » est difficile, car la recherche de la taille de la part conduit toujours à obtenir une quantité moindre que la quantité initiale. Une expérience menée auprès d'élèves de 11 ans et 12 ans au collège en France a conduit à ce que 78% d'entre eux considèrent que c'est impossible (Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008), tandis que la même tâche proposée à des adultes étudiants à l'université conduisait à 74% d'échec, ceux-ci se répartissant de manière à peu près équivalente entre ceux qui disent « Impossible » avec des justifications soulignant l'influence de l'analogie de substitution telles que « Impossible, car diviser c'est découper en plusieurs morceaux » ou encore « Lorsqu'on divise par une moitié, on a plus, mais c'est impossible de diviser par une moitié », ceux qui posent une opération (par exemple : 4/0,2) sans être en mesure d'élaborer un énoncé (« je ne trouve pas de situation qui va avec »), et ceux qui construisent un problème transgressant la consigne (« Jean a 20 bouteilles de vin. Il en vend la moitié à 8 euros la bouteille. Combien d'argent reçoit-il ? ») (Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, 2008). Pourtant, les énoncés pour lesquels « diviser rend plus grand » (par exemple « Combien de verres de 0,25 l peut-on remplir avec une carafe de 2 l ? ») sont aussi concrets que ceux inventés spontanément sans la contrainte de rendre plus grand, mais la nécessité de quitter le champ de validité de l'analogie de substitution rend la tâche particulièrement difficile.

En synthèse, les analogies de substitution offrent l'intérêt de donner sens à une notion mathématique. Elles constituent une entrée pour cette notion. Au même titre que les métaphores conceptuelles apparaissent nécessaires pour développer une conception de toute notion qui n'est pas directement incarnée sur le plan expérientiel, les analogies de substitution sont utiles, voire nécessaires, et offrent une incursion dans la notion, dont la validité, même partielle, explique la prégnance et la robustesse. En effet, comme les cas précédents le montrent, de même que des travaux menés auprès d'enseignants en formation (e.g. Tirosh et Graeber, 1991), ces analogies de substitutions ne sont pas transitoires. Leur influence persiste chez les adultes et, même si nous avons choisi de nous focaliser sur les quatre opérations arithmétiques élémentaires, les notions mathématiques concernées peuvent être plus complexes. Par exemple, une fonction serait conçue par analogie avec une « fine ligne d'encre » et la continuité d'une telle fonction serait conçue comme « une fine ligne d'encre tracée sans lever le stylo » (Fischbein, 1987). De cette analogie de substitution, on peut tirer qu'une fonction continue est dérivable presque partout car si l'on « zoome » d'assez près sur la courbe, on trouve forcément des portions lisses et donc des possibilités de tracer des tangentes à la courbe. De fait, Ampère (1806) lui-même semble avoir été pris au piège de cette analogie en montrant – pensait-il – qu'une fonction continue est dérivable partout sauf en un nombre limité de points.

Mais qu'en est-il des fonctions non traçables ? Bolzano puis Weierstrass ont démontré qu'il était possible pour une fonction continue de n'être dérivable nulle part. La réaction de la communauté des mathématiciens a été pour partie hostile. Ainsi peut-on citer Charles Hermite (1893), particulièrement virulent :

> *« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées »*

tout comme Henri Poincaré (1908) :

> *« La logique parfois engendre des monstres. On vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] de la continuité, mais pas de dérivées [...], on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. »*

Pourtant ces fonctions sont maintenant considérées comme parfaitement « respectables » : elles sont même denses dans l'ensemble des fonctions continues et sont parfaitement intégrées aux mathématiques, notamment avec les objets fractals.

Sur le plan de l'éducation, la question n'est pas de faire disparaître par l'enseignement ces analogies de substitution. Elles ne peuvent ni se déconstruire ni être éradiquées comme les données précédemment présentées semblent le montrer. L'enseignant a à intégrer leur présence chez lui comme chez l'élève. Leur influence persiste au même titre que les métaphores conceptuelles telles que « DEBATTRE est COMBATTRE » ou « COMPRENDRE est VOIR » sont inscrites culturellement et n'ont pas vocation à disparaître, pas plus que « SOUSTRAIRE est RECHERCHER CE QUI RESTE » ou « ADDITIONNER est AJOUTER ». En revanche, un objectif clé de l'éducation est d'aider les élèves à surmonter l'influence puissante de leurs analogies de substitution même si celles-ci resteront toujours des stéréotypes incontournables de la notion. Toutefois, l'objectif est que la notion cesse d'être réduite à son analogie de substitution et que « de combien le nombre de billes a-t-il augmenté? » puisse être vu comme résoluble par une opération de soustraction.

C’est l’enjeu d’un développement conceptuel ancré sur l’analogie de substitution et que l’enseignement contribue à faire évoluer. Cela est notamment concevable en s’appuyant sur des scénarios, car les analogies de substitution sont seulement la partie émergée de l’iceberg, et vont de concert avec des analogies de scénarios.

2. Les Analogies de Scénario

Un énoncé de problème, de même qu’un proverbe, un court récit ou une fable, évoque une catégorie de scénarios, par exemple des situations d’échange, de partage équitable, de gain, de don, de perte, de répartition, etc. Ces catégories de situations quotidiennes ne sont toutefois pas indépendantes des résolutions mathématiques qui leur sont associées. Les situations qu’elles regroupent sont analogues entre elles ; ce qui les lie est d’un niveau d’abstraction qui va au-delà des objets concrets impliqués dans les situations par le fait justement qu’elles constituent par exemple des scénarios d’échanges ou de partage. Ainsi, des billes réparties dans des sacs de billes, des oranges dans des paniers et des tulipes dans des vases dessinent le contour d’un scénario de répartition de contenus dans des contenants. Les résolutions dont la structure mathématique est congruente avec cette catégorisation sont facilitées par l’analogie de scénario car les propriétés activées sont cohérentes avec les propriétés mathématiquement pertinentes alors qu’en cas de dissonance, la difficulté de résolution est accrue.

Si l’on demande à des adultes (Bassok, Chase & Martin, 1998) d’inventer d’une part un énoncé dans lequel il est question d’oranges et de pommes et d’autre part un énoncé dans lequel il est question d’oranges et de paniers, le premier énoncé induira de manière presque systématique un scénario où les deux sortes de fruits ont un statut symétrique (typiquement « Combien y-a-t-il de fruits en tout ? ») alors que la seconde tâche induira un scénario où les rôles sont asymétriques et où la relation fonctionnelle est impliquée (typiquement « Quel est le nombre d’oranges par panier ? »). Les énoncés impliquant les oranges et les pommes, ou plus généralement impliquant des collatéraux d’une même catégorie superordonnée, donnent ainsi lieu à des problèmes se résolvant par une opération d’addition ou de soustraction, alors que les énoncés impliquant les oranges et les paniers, ou plus généralement impliquant des entités entretenant une relation fonctionnelle de type contenance ou répartition, donnent lieu à des problèmes se résolvant par une multiplication ou une division. Il s’avère difficile, y compris pour des enseignants à l’école primaire (Sander, 2016b), de concevoir un énoncé impliquant des oranges et des pommes et se résolvant par une multiplication ou une division. Les manuels scolaires suivent ce mouvement. Bassok, Chase & Martin (1998) ont trouvé que pour 97% des problèmes à résoudre par addition, les objets additionnés appartenaient à des catégories de même niveau (e.g., des pommes et des poires, ou des billes rouges et des billes noires) alors que 94% des problèmes requérant une division faisaient intervenir des objets reliés fonctionnellement (e.g., des billes et des boites). Cette orientation exclut par exemple l’introduction d’un énoncé dans lequel il y aurait dissociation du scénario communément induit et de l’opération mathématique, comme ce serait le cas pour la question « Combien de fois plus de pommes que d’oranges ? ».

Le caractère facilitateur ou obstructif de l’analogie de scénario est déterminant pour la difficulté d’un problème. Ainsi, dans le cas d’énoncés de division, les problèmes « Avec 75 roses, on peut faire 5 bouquets identiques. Combien de roses seront dans chaque bouquet ? » et « 15 amis ont acheté ensemble 5 kg de cookies. Combien chacun en a-t-il reçu ? » donnent lieu à des performances très différentes (93% de réussite pour le premier versus 28% pour le second par des élèves de collège italien ; Fischbein et al., 1985). En effet, le premier est bien conforme sur le plan de l’analogie de scénario dans lequel un certain nombre de contenus est réparti dans un plus petit nombre de contenants alors que pour second, la quantité d’objets partagée paraît moindre que le nombre d’acteurs et la plupart des élèves rétablissent un scénario dans lequel 5 amis se partageraient 15 gâteaux pour proposer, à tort, la solution 15/5. On notera que l'analogie de substitution n'est en effet pas en cause ici, car l'un et l'autre de ces problèmes sont conformes à l'analogie de substitution de la division dans la mesure où il s'agit de cas de partages équitables dans lesquels la taille de la part est recherchée : la composante obstructive provient de l'analogie de scénario.

Comme l'illustre le cas précédent, les caractères facilitateur ou obstructif sur le plan de l'analogie de substitution et sur le plan de l'analogie de scénario sont dissociables. Par exemple, la résolution d'un énoncé tel que « J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien ai-je de gâteaux en tout ? » est supposée facilitée par la conformité sur le plan de l'analogie de substitution (réplication) et sur celui de l'analogie de scénario (relation fonctionnelle de contenance des gâteaux dans les paquets). En revanche, l'énoncé « J'ai 4 oranges. Je reçois 5 pommes en échange de chaque orange. Combien aurai-je de pommes ? » est favorable sur le plan de l'analogie de substitution dans la mesure où il y a réplication des groupes de 5 pommes, en revanche l'analogie de scénario est obstructive pour cet énoncé qui implique des collatéraux d'une même catégorie, qui ne sont pas dans une relation fonctionnelle. Pour un énoncé tel que « Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ? », il n'y a pas cette fois conformité sur le plan de l'analogie de substitution (absence de réplication), mais conformité sur le plan de l'analogie de scénario (recherche d'un prix payé connaissant le prix unitaire d'une certaine marchandise et la quantité de cette marchandise).

Selon le scénario évoqué par l'énoncé, les stratégies envisagées par les solveurs sont susceptibles de changer radicalement (Gros, Thibaut & Sander, 2015 ; Mengue, Richard & Sander, 2015 ; Gamo, 2009 pour la mise en évidence de cet effet parmi une population d'enseignants d'école primaire). Par exemple, le problème « Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ? » est presque toujours résolu par une stratégie en trois étapes tant par des adultes que par des élèves de fin d'école primaire (calcul du prix du classeur : 15 – 7 = 8 ; calcul de la somme payée par Jean : 15 – 3 = 12 ; calcul du prix de l'équerre : 12 - 8 = 4), et ce y compris si de fortes incitations sont faites pour que la solution la comportant le moins d'opérations soit proposée. En revanche, lorsqu'exactement la même consigne est proposée pour l'énoncé « Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ? », une majorité de participants identifie cette fois une solution en un seul calcul (7 – 3 = 4 ; Jeanne a suivi ses cours de danse pendant 4 ans). Or ces deux énoncés sont l'un et l'autre résolubles par les mêmes stratégies, en trois calcul et en un calcul. En revanche, dans le premier cas le type de scénario évoqué oriente vers des résolutions par complémentation et rend presque invisible la solution directe 7-3=4, conduisant à voir le prix de l'équerre comme résultant du fait d'ôter du prix de la trousse l'écart des prix totaux payés par Jean et Laurent. Cette deuxième stratégie devient pourtant saillante dans le second cas, où une comparaison de durée (un écart de 3 ans qui se transpose de l'âge d'arrêt des cours à leur durée) permet de proposer une solution directe. Cet effet est si robuste qu'une large proportion d'adultes étudiants à l'université considère que le problème « Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ? » est insoluble alors qu'une simple soustraction conduit à sa solution et que ce n'est presque jamais le cas pour l'énoncé « Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ? » (Gros, Sander, & Thibaut, 2016). Il se trouve que tous ces énoncés incarnent le théorème selon lequel « Si deux ensembles ont une partie commune, l'écart entre les cardinaux de ces ensembles est le même que l'écart entre les cardinaux de leurs parties non communes », mais il s'avère que selon le type de scénario, l'un mettant l'accent sur des caractéristiques cardinales qui suscitent une stratégie par complémentation, et l'autre mettant l'accent sur des caractéristiques ordinales qui suscitent une stratégie par comparaison, la solution en une opération qui opérationnalise le théorème est soit fréquemment mise en œuvre (cas ordinal, tel que celui des cours) soit rarement (cas cardinal, tel que celui des achats). On notera que lorsque le scénario est favorable à la mise en œuvre de la stratégie directe, cela n'indique pas pour autant une conceptualisation du théorème, car en cas de scénario cardinal, cette stratégie directe cesse d'être perçue par les mêmes participants. La difficulté à percevoir la solution directe pour ces énoncés dans le cas cardinal reste marquée jusque pour des élèves qui ont réussi les concours scientifiques de la rue d'Ulm, montrant la difficulté à percevoir certaines analogies de structure mathématique et la tendance à privilégier des analogies de scénarios, qui conduisent à juger analogues entre eux les scénarios cardinaux et analogues entre eux les scénarios ordinaux et à ignorer l'analogie entre scénarios cardinaux et ordinaux, légitimée pourtant par une structure mathématique commune qui fonde le théorème mentionné plus haut (Gros, Thibaut & Sander, 2015 ; Gros, Sander, & Thibaut, 2016).

Ainsi, tout comme c'était le cas pour les analogies de substitution, la réussite est un indicateur assez pauvre de conceptualisation lorsque l'analogie de scénario est facilitatrice dans la mesure où la même personne peut se trouvée mise en échec dès lors qu'une dissociation est introduite entre le scénario et la structure mathématique. Ce phénomène a été notamment mis en évidence dans le cadre de la résolution de problèmes de combinatoire (Ross, 1987, 1989 ; voir aussi Bassok, Wu & Olseth, 1995 pour une mise en évidence plus systématique encore de ce phénomène). Un problème source était proposé aux participants, adultes étudiants à l'université, accompagné d'une formule pour déterminer sa solution. Le problème source était « Les mécaniciens d'IBM doivent s'assurer que les voitures de la société fonctionnent bien. Ce jour-là, il y a 11 voitures et 8 mécaniciens. Les mécaniciens choisissent au hasard sur quelle voiture ils vont travailler. Ce choix est fait par ordre d'ancienneté. Quelle est la probabilité que les 3 plus anciens mécaniciens, Al, Bud et Carl, choisissent respectivement les voitures du chef du conseil d'administration, du président exécutif et du vice-président ? » et la solution indiquée était « 1/(11x10x9) ». Dans un second temps, les participants étaient scindés en deux groupes. Le premier groupe recevait l'énoncé suivant : « Les mécaniciens d'IBM réparent les voitures des commerciaux de la société. Les mécaniciens choisissent au hasard sur quelle voiture ils vont travailler, le meilleur mécanicien choisissant en premier et ainsi de suite. Ce jour là, il y a 16 voitures de commerciaux et 5 mécaniciens. Quelle est la probabilité que le meilleur mécanicien choisisse la voiture du meilleur vendeur et que le 2ème meilleur mécanicien choisisse la voiture du 2ème meilleur vendeur ? ». Les participants étaient 75% à proposer la solution correcte : 1/(16x15). Un deuxième groupe recevait pour énoncé « Les mécaniciens d'IBM réparent les voitures des commerciaux de la société. Les commerciaux choisissent au hasard le mécanicien qui réparera leur voiture, le meilleur commercial choisissant en premier et ainsi de suite. Ce jour là, il y a 14 voitures de commerciaux et 16 mécaniciens. Quelle est la probabilité que le meilleur mécanicien répare la voiture du meilleur vendeur et que le 2ème meilleur mécanicien répare la voiture du 2ème meilleur vendeur ? ». La même solution correcte 1/(16x15) n'était cette fois proposée que par 37% des participants. Comment expliquer cette baisse de moitié de la performance de transfert ? Le premier énoncé partage avec le problème source un scénario dans lequel l'ensemble dans lequel se fait le tirage est confondu avec les entités inanimées du récit. Si celui qui interprète le problème source comprend que lorsqu'un récit fait intervenir des objets et des individus, le dénominateur est déterminé par les objets, il aboutira à la solution exacte tout en ignorant la notion d'ensemble dans lequel se fait le tirage. A l'inverse, dans le second cas de figure, la même interprétation conduit à proposer la solution erronée 1/(14x13). Ainsi l'analogie de scénario s'avère facilitatrice dans le premier cas car il y a congruence entre les inanimés et l'ensemble dans lequel se fait le tirage ; en revanche il y a non congruence dans le second cas. Le scénario évoqué par le problème incarne une structure dont la congruence avec la structure mathématique est déterminante pour la réussite du problème.

En cas de congruence, qui est le cas par défaut dans les manuels scolaires, il n'est pas possible de distinguer ce qui relève de la conception mathématique de ce qui relève de la sémantique des scénarios évoqués. En cas de non congruence, les analogies de scénarios deviennent obstructives. Il s'agit d'un enjeu éducatif important que les élèves soient en mesure de résoudre des problèmes y compris lorsque le scénario n'est pas un support pour la résolution. Comme l'illustre le deuxième énoncé (Ross, 1987, 1989), c'est ce dernier cas qui est le plus probant d'une conceptualisation mathématiquement satisfaisante.

3. Les Analogies de Simulation

La troisième forme d'analogie du cadre A-S^3 relève de l'approche des modèles mentaux (Johnson-Laird, 2006) selon laquelle lorsque l'on lit un texte, un modèle mental du contenu décrit dans ce texte en est construit, qui est un analogue d'une situation du monde extérieur, qui préserve les caractéristiques des entités décrites dans la situation. Il est possible alors d'opérer sur le modèle mental comme on le ferait dans une situation réelle, mais par simulation mentale. Par exemple, si l'énoncé indique que j'ai 5 bonbons dans ma poche et que j'en mange deux, il est possible de mentalement simuler cette action jusqu'à aboutir à un modèle mental comprenant 3 bonbons, sur la base duquel la solution à ce problème peut être énoncée sans connaissance scolaire en arithmétique car la simulation associée au modèle mental conduit à la solution sans formalisme arithmétique. Ce phénomène renvoie aux travaux sur les stratégies informelles qui conduisent de jeunes enfants non encore scolarisés à trouver par simulation mentale la solution à des problèmes qui seraient également résolubles par des opérations arithmétiques (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema, & Weisbeck, 1993).

Lorsque la simulation mentale de la situation évoquée par l'énoncé mène à la solution, l'analogie de simulation est facilitatrice alors que lorsque la simulation n'est pas praticable pour atteindre la solution, l'analogie de simulation devient obstructive. Une recherche de Schliemann et al. (1998) illustre ce phénomène. Des adolescents brésiliens qui font du commerce de rue mais n'ont pas été scolarisés sont invités à répondre pour la moitié d'entre eux au problème « Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros ? » et pour l'autre moitié « Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros ? ». Selon le cadre A-S^3, ces deux énoncés ont le même statut facilitateur sur le plan des analogies de substitution et de scénario. En effet, il s'agit d'une réplication qui se prête à une addition réitérée, ce qui inscrit l'énoncé à l'intérieur du domaine de validité de l'analogie de substitution. L'analogie de scénario est facilitatrice également car il s'agit de la recherche du prix d'un achat groupé. Pourtant ces deux problèmes diffèrent grandement par leur difficulté, ce dont l'analogie de simulation permet de rendre compte. En effet, la simulation mentale est efficiente dans le premier cas pour aboutir à la solution (50+50+50=150) alors qu'elle ne l'est pas dans le second (3+3+3+….= ?). De fait, 75% des adolescents trouvent la solution dans le premier cas et 0% dans le second. Même si des adultes qui ont été scolarisés sont tout à fait en mesure de résoudre les problèmes en faisant appel aux opérations arithmétiques, il arrive qu'ils les résolvent par simulation mentale lorsque cette dernière est efficiente (Gvozdic & Sander, 2018), ce qui se justifie si cette stratégie est perçue comme la plus directe et si c'est la première qui vient à l'esprit.

Le même phénomène s'observe parmi les problèmes à structure additive. Ainsi, les énoncés « Pierre a 15 billes. Il en perd 3 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ? » et « Pierre a 15 billes. Il en perd 12 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ? » sont supposés être de difficultés différentes en dépit du fait que pour l'un et l'autre les analogies de substitution et de scénario sont facilitatrices (recherche d'un reste et scénario de perte de billes). En effet, la simulation mentale est favorable pour le premier énoncé en ôtant 3 de 15 (comptage à rebours de 3), mais défavorable dans le second car il faudrait alors ôter mentalement 12 de 15 (comptage à rebours de 12) ce qui est coûteux et requiert un contrôle difficile à assurer. Nous montré (Brissiaud & Sander, 2010 ; voir aussi Gvozdic & Sander, 2017) que jusqu'en classe de CE2 l'efficience ou non de la simulation mentale est un facteur déterminant : les performances qui vont du simple au double selon que l'analogie de simulation est facilitatrice, c'est-à-dire que la simulation mentale seule mène à la solution, ou qu'elle est obstructive, c'est-à-dire qu'elle est trop coûteuse pour être mise en œuvre, auquel cas il est nécessaire de faire appel aux propriétés des opérations arithmétiques. L'efficience ou non de la simulation mentale module plus la difficulté que l'appartenance à tel ou tel item d'une typologie de problèmes à structure additive ou que les effets de taille de nombres. Par exemple, parmi les quatre énoncés suivant, « 1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? ; 2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? ; 3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? ; 4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? », le premier et le quatrième sont résolus par 75% des élèves de CE1 alors que le deuxième et le troisième par seulement 40% d'entre eux. Parmi les problèmes faciles comme parmi les difficiles on trouve des énoncés de recherche de gain et de recherche de reste, ainsi que des énoncés avec des grands nombres et des énoncés contenant un petit nombre ; le facteur discriminant est le fait que l'analogie de simulation soit facilitatrice ou non. Les mêmes effets s'observent avec des énoncés de problèmes à structure multiplicative tels que « 1/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 50 images. Combien y a-t-il de tas ? ; 2/ On partage 200 images en 50 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? ; 3/ On partage 200 images en 4 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? ; 4/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 4 images. Combien y a-t-il de tas ? », où recherche de taille ou de nombre de parts, ainsi que les différentes configurations de tailles de nombre se trouvent répartis parmi les problèmes faciles (le 1 et le 3 résolus par 75% des écoliers de CE1, avant même toute étude de la division) et parmi les problèmes difficiles (le 2 et le 4, 20% de réussite). L'efficience de la simulation mentale est là encore le facteur discriminant sur le plan de la difficulté de résolution.

La possibilité de dissociation des trois formes d'analogie peut-être illustrée par les quelques exemples suivant. Ainsi, l'analogie de substitution n'est pas facilitatrice pour « Pierre a 3 billes. Il en gagne à la récréation. Maintenant il en a 15. Combien en a-t-il gagnées ? » car il ne s'agit pas d'une recherche de reste ; l'analogie de scénario est en revanche facilitatrice pour cet énoncé car il s'agit d'un scénario de gain de billes ; l'analogie de simulation n'est quant à elle pas facilitatrice car elle encourage à compter en avançant de 3 à 15. En ce qui concerne, la résolution du problème « Paul a 3 oranges. Il reçoit 10 pommes par orange. Combien de pommes reçoit-il ? », celle-ci est soutenue par l'analogie de substitution car il y a une réplication (succession de groupes de 10 pommes), mais pas par l'analogie de scénario car la pommes et oranges n'orientent pas vers un scénario d'échanges, tandis que l'analogie de simulation (10+10+10) est facilitatrice. Concernant l'énoncé « Combien de verres de 0,5 l peut-on remplir avec une carafe de 2l ? », on reconnaîtra que les analogies de scénario et de simulation sont facilitatrices mais que le problème se situe hors du domaine de validité de l'analogie de substitution.

La résolution aisée d'un problème résoluble par simulation mentale et la difficulté rencontrée par le même élève si la simulation mentale n'est pas efficiente sont des indicateurs que l'élève résout le problème en faisant appel à une compréhension générale de la situation et par la mise en œuvre de stratégies informelles, efficaces dans des contextes spécifiques, mais inadaptées pour faire face à l'ensemble des situations faisant intervenir la notion mathématique, et ne relevant pas d'une conceptualisation satisfaisante de cette notion. En revanche, la résolution d'un énoncé pour lequel la simulation mentale ne permet pas d'aboutir au résultat est indicatrice de conceptualisation de propriétés mathématiques.

IV. DES INTERVENTIONS POUR DEVELOPPER LES NOTIONS

Comme les cas envisagés l'illustrent, les élèves sont souvent en mesure de mettre en œuvre les stratégies de résolution adaptées, mais sont limités dans les contextes dans lesquels ils perçoivent cette possibilité de mise en œuvre. Par exemple, un élève fera une soustraction dans le cas d'un énoncé de recherche de reste mais pas dans celui d'un énoncé de recherche de la valeur qui a été ôtée (DEPP, 2014) ; ou encore il trouvera une stratégie directe dans un contexte ordinal mais pas dans un contexte cardinal (Mengue, Richard & Sander, 2015) ; ou encore, il trouvera une solution en comptant à rebours dans un certain contexte mais pas dans un autre alors que le même comptage à rebours aurait mené à la solution (Brissiaud & Sander, 2010 ; Gvozdic & Sander, 2017). Ainsi, il apparaît que les compétences stratégiques sont régulièrement présentes mais dans des contextes limités aux cas où les analogies intuitives sont facilitatrices alors qu'elles seraient adaptées dans des contextes plus larges. La difficulté est que les élèves se fondent sur un codage situationnel trop spécifique par rapport aux notions mathématiques concernées ; lorsque deux situations relèvent de la même notion sur le plan scolaire, la perception d'une analogie entre elles ne va pas de soi.

Cela oriente vers des enseignements destinés à susciter la perception de l'analogie qui fonde les notions scolaires et justifient par exemple de regrouper sous le label « problème de soustraction » une diversité de scénarios, qui, sur le plan des connaissances quotidiennes évoquées, ont peu en commun. Il s'agit donc d'intervenir pour faire relier et rendre possible la mise en œuvre dans des contextes plus larges qu'initialement des compétences présentes au départ dans le champ restreint des analogies intuitives. C'est l'enjeu du recodage sémantique (Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, 2016 ; Sander & Richard, 2017). L'objectif du recodage sémantique est de faire apparaître la ressemblance profonde entre deux situations qui, en dépit des différences sémantiques, sont analogues sur le plan des notions disciplinaires. Son objet est de faire dépasser une compréhension spontanée (« intuitive »), fondée sur les seules connaissances quotidiennes. Il consiste à attribuer à une situation des propriétés usuellement attribuées à une autre et incite à faire abstraction des différences entre situations et favorise le développement d'une conception plus abstraite qui fonde l'analogie et rend accessible une stratégie qui n'aurait pas été envisagée avec le codage spontanée de la situation. Il peut s'agir de voir différemment la notion même, par exemple d'associer une soustraction pas simplement à une recherche de reste mais aussi à une recherche d'écart. Il peut aussi s'agir de proposer une grille de lecture différente d'un énoncé afin de le lier à la notion telle qu'elle est conçue (Sander & Richard, 2017).

Par exemple, le problème « Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ? » est massivement échoué même en CE1. Il se situe en dehors du domaine de validité de l'analogie de substitution « addition c'est ajouter ». Toutefois un travail en classe peut favoriser un recodage sémantique qui va orienter l'élève vers une réinterprétation de l'énoncé qui rendra envisageable l'addition en montrant l'analogie avec un problème d'ajout. La raisonnement qui sous-tend la mise en œuvre d'une addition est difficile à expliquer dans le problème original pour justifier que c'est en additionnant ce qui reste à ce que l'on a perdu que l'on trouve ce qu'il y avait à l'origine. L'introduction de « situations pivots », dénommées ainsi parce qu'elles se prêtent aisément à plusieurs codages, peut favoriser la perception de l'analogie entre problèmes qui paraissent au départ très différents, et faciliter le transfert de stratégie. Par exemple, un énoncé tel que « Pierre va à l'école avec des billes bleues et des billes rouges. A la récréation, il perd ses 39 billes rouges. Maintenant il lui reste ses 4 billes bleues. Combien de billes Pierre avait-il avant la récréation ? » se perçoit aisément d'une part comme une recherche de la valeur initiale, connaissant la valeur de la perte et la valeur finale, mais aussi comme la recherche de la totalité (le nombre de billes qu'avait Pierre le matin), connaissant la quantité perdue (les billes rouges) et la quantité restante (les billes bleues), ce qui constitue un recodage de la situation et le rend similaire à un problème d'addition canonique dans lequel deux parties sont données afin de trouver le tout. Les problèmes pivots s'avèrent largement mieux réussis que les problèmes classiques et rendent possible la mise en œuvre de stratégies de résolution ignorées dans les formulations standards des énoncés (de Longuemar & Sander, 2016). Nous avons montré qu'en faisant travailler des élèves de CE1 et de CE2 en classe spécifiquement sur des séries de problèmes pivots (Sander & Fort, 2014), leurs progrès était plus importants que s'ils travaillaient sur des problèmes classiques, l'hypothèse étant qu'un recodage était suscité par le travail sur les problèmes pivots et qu'il pouvait ensuite s'appliquer aux énoncés classiques.

Le recodage sémantique peut également être suscité par la comparaison d'énoncés en travaillant avec les élèves à la mise en place d'un codage commun qui rend perceptible les analogies existant entre les énoncés. Il est ainsi possible de faire acquérir à des élèves d'école primaire des points de vue pourtant « invisibles » spontanément à des adultes, dans des classes banales (Gamo, Richard & Sander, 2010) ou en éducation prioritaire (Gamo, Nogry & Sander, 2014). Le recodage sémantique peut être suscité également par les situations introduites et les activités en classe associées, avec la perspective que les élèves développent une appétence particulière pour la recherche de points de vue alternatifs susceptibles de leur faire voir le problème d'une manière qui les aide à le résoudre. Les élèves apprennent par exemple à percevoir que lors de la résolution d'un problème tel que « Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos rouge, 6 stylos bleu et 4 stylos vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ? », le développement et la factorisation ne constituent pas simplement deux algorithmes concurrents mais découlent de deux codages alternatifs d'une même situation qui conduisent à des stratégies distinctes. Dans le cas du développement, c'est le codage par couleur qui est privilégié en procédant à l'addition successive des stylos de chaque couleur : « 5x3 + 5x6 + 5x4 ». Dans le cas de la factorisation, le codage par objets est privilégié en procédant d'abord à l'addition des types de stylo : « 5x(3+6+4) ». Un tel travail de repérage des différents codages possibles auprès d'élèves des deux dernières années d'école primaire (Scheibling-Sève, Sander & Pasquinelli, 2017) a conduit à des progrès importants concernant la mise en œuvre de la factorisation et le fait de pouvoir envisager deux stratégies de résolution pour un même énoncé.

V. CONCLUSION

Sur le plan des relations entre les connaissances quotidiennes et les notions mathématiques, nous espérons, à travers la cadre A-S^3, avoir montré trois formes d'influence. La première, appréhendée par les analogies de substitution, relève de la conception de la notion mathématique elle-même, qui n'est pas directe mais ancrée sur des concepts quotidiens : ainsi, si l'on se cantonne aux quatre opérations arithmétiques, l'opération de soustraction est conçue comme la recherche de la quantité subsistante dans un contexte où une quantité initiale est connue et où une action conduit à la faire décroître ; l'opération d'addition est conçue comme la recherche d'une quantité résultant d'un ajout, que cet ajout soit obtenu par réunion de deux quantités de même nature ou comme un accroissement d'une quantité initiale connue ; l'opération de multiplication s'appuie sur la réplication et est conçue comme un ajout successif de répliques d'une certaine entité quantifiée ; l'opération de division est conçue comme la recherche de la taille d'une part dans le cadre d'un partage équitable.

La deuxième, appréhendée par les analogies de scénario, concerne les scénarios induits par les entités et les contextes dans lesquels ces entités sont mises en scène dans un énoncé de problème. Par exemple, l'introduction de collatéraux d'une même catégorie générale dans un énoncé suscite des scénarios dans lesquels ces entités ont des statuts symétriques alors que l'introduction d'entités qui entretiennent des relations fonctionnelles telles qu'une relation de contenance suscite des scénarios où les entités ont un rôle asymétrique et conforme à cette relation fonctionnelle.

La troisième, appréhendée par les analogies de simulation, concerne la manière dont la représentation de la situation décrite par l'énoncé permet une résolution par simple simulation mentale. Lorsque cette dernière est efficiente, elle est privilégiée par rapport à l'usage de représentations arithmétiques, ce qui conduit à ce qu'il soit par exemple plus facile de soustraire une petite quantité d'une grande dans un cadre de recherche de reste que de recherche de gain et à l'inverse qu'il soit plus facile de soustraire une grande quantité d'une autre pour obtenir un résultat peu élevé dans un cadre de recherche de gain que de recherche de reste : l'efficience de la simulation mentale contraint la stratégie mise en œuvre, et une stratégie arithmétique est proposée moins systématiquement lorsqu'une simple simulation mentale conduit à la solution.

Les travaux qui portent sur analogies intuitives indiquent donc qu'elles sont présentes de manière précoce chez les élèves. Ils indiquent également leur persistance après enseignement et à l'âge adulte, notamment parmi une population enseignante, en particulier pour les analogies de substitution et de scénario, ce qui est conforme aux connaissances sur la psychologie des concepts, qui se développent en restant ancrés sur des conceptions quotidiennes (Fischbein, 1987 ; Lakoff & Nunez, 2000 ; Lautrey, Sander, Rémi-Giraud & Tiberghien, 2008 ; Hofstadter & Sander, 2013). Comme toute catégorie de situations, elles sont sujettes au phénomène de typicalité, autrement dit à l'existence de prototypes des catégories et de cas atypiques, pour lesquels l'appartenance catégorielle est moins évidente. Elles sont également sujettes au phénomène d'extension catégorielle par analogie qui oriente le développement conceptuel (Hofstadter & Sander, 2013; Sander, 2016b, 2017). Ces travaux invitent à une démarche qui oriente le choix des exemples et des situations choisis en classe afin de ne pas accentuer encore l'ancrage des conceptions intuitives.

Le cadre A-S^3 peut ainsi être mobilisé afin de se prononcer sur la difficulté de résolution d'un problème, afin de distinguer les cas « d'expertise apparente » de compréhension plus profonde des notions, de construire des évaluations, de former des enseignants, de développer des progressions d'apprentissage. Les trois formes d'analogie identifiées sont dissociables les unes des autres dans la mesure où toutes les configurations en termes de « facilitateur/obstructif » peuvent être observées. Cette possibilité de dissociation n'exclut pas l'existence d'interdépendances, indiquant que certaines configurations sont plus aisément constructibles que d'autres. Les représentations initiales des élèves s'avèrent orientées par des catégorisations par analogie, qui rattacheront les énoncés de problème ou les notions mathématiques incarnées dans ces énoncés à des catégories mentales préexistantes ; ces rattachements contraindront leurs interprétations, les stratégies mises en œuvre et les transferts d'apprentissage envisageables. Des progressions d'apprentissage peuvent être élaborées afin de faire évoluer les représentations des élèves, notamment par des recodages sémantiques, afin de limiter l'influence des analogies intuitives lorsqu'elles font obstacle. De tels recodages sémantiques favorisent la perception d'analogies qui fondent les notions scolaires et peuvent favoriser un développement de la conceptualisation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AMPERE, A.-M. (1806). Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées. *Journal de l'École polytechnique*, *13*, 148-191.

BAROODY, A.J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, *17(3)*, 137-175.

BASSOK, M., CHASE, V.M. & MARTIN, S.A (1998). Adding and Oranges: Alignment of Semantic and Formal Knowledge. *Cognitive Psycholoy, 35*, 99-134.

BASSOK, M., WU, L.L. & OLSETH, K.L. (1995). Judging a book by its cover: Interpretative effects of content on problem-solving transfer. *Memory and Cognition, 23*, 354-367.

BELL, A., SWANN, M. & TAYLOR, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 399-420.

BRISSIAUD, R. & SANDER, E. (2010). Arithmetic word problem solving: a situation strategy first framework. *Developmental Science, 13 (1)*, 92-101.

CARPENTER, T.P., ANSELL, E., FRANKE, M.L., FENNEMA, E. & WEISBECK, L. (1993). Models of problem solving: a study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 428–441.

DUVIGNAU, K. (2003) Métaphore verbale et approximation. In K. Duvignau, O. Gasquet et B. Gaume (Eds.), *Regards croisés sur l'analogie* (pp. 869-881). Paris : Hermès Sciences

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Reider: Dordrecht.

FISCHBEIN, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning, *For the Learning of Mathematics, 9*, 9-14.

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M. S. & MARINO, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

GAMO, S., NOGRY, S. & SANDER, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire, *Psychologie française, 59(3)*, 215-229.

GAMO, S. (2009). *Rôle des effets de contenu dans la catégorisation des problèmes arithmétiques à plusieurs solutions: Recodage sémantique et transfert de procédures*. Thèse de doctorat, Université Paris 8.

GAMO, S., SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2010). Transfer of strategies by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*, *20*, 400-410.

GICK, M. L. & HOLYOAK., K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology, 15*, 1–38.

GREER, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.276-295). New York: Macmillan Publishing Company.

GROS, H., THIBAUT, J.-P. & SANDER, E. (2015). *Robustness of semantic encoding effects in a transfer task for multiple-strategy arithmetic problems*. In Noelle, D. C., Dale, R., Warlaumont, A. S., Yoshimi, J., Matlock, T., Jennings, C. D. & Maglio, P. P. (Eds.), *Proceedings of the 37th Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (pp. 818-823). Austin, TX: Cognitive Science Society.

GROS, H., SANDER, E. & THIBAUT, J-P. (2016). *"This problem has no solution": when closing one of two doors results in failure to access any.* In A., Papafragou, D., Grodner, D., Mirman, & J.C., Trueswell, (Eds.) (2016). *Proceedings of the 38th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1271-1276). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Gvozdic, K. & Sander, E. (2017). Solving additive word problems: Intuitive strategies make the difference. In G. Gunzelmann, A. Howes, T. Tenbrink & E. Davelaar (Eds.) Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Cognitive Science Society (pp. 2150-2155). Austin, TX: Cognitive Science Society.

GVOZDIC, K. & SANDER, E. (2018). When intuitive conceptions overshadow pedagogical content knowledge: Teachers' conceptions of students' arithmetic word problem solving strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *98*, 157-175.

HERMITE, C. (1893/1905). Lettre à Stieljtes. In B. Baillaud et H. Bourget (Eds.), *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, 2* (pp. 317-319). Paris : Gauthier-Villars

HOFSTADTER, D. & SANDER, E. (2013). *L'Analogie : Cœur de la pensée*. Paris: Odile Jacob.

HUMMEL, J.E. & HOLYOAK, K.J. (1997). Distributed representations of structure: a theory of analogical access and mapping, *Psychological Review,104*,427-466.

JOHNSON-LAIRD, P.N. (1983). *Mental models : Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness.* Cambridge, MA : Harvard University Press/ Cambridge. UK : Harvard University Press.

JOHNSON-LAIRD, P.N. (2006). *How We Reason*. Oxford University Press.

LAKOFF, G. & JOHNSON, M. (1980). *Metaphors we live by.* Chicago, IL: University of Chicago Press.

LAKOFF, G. & JOHNSON, M. (1999). *Philosophy In the Flesh: The Embodied Mind And Its Challenge To Western Thought*. New York, NY: Basic Books.

LAKOFF, G. & NUNEZ, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

LAUTREY, J., RÉMI-GIRAUD, S., SANDER, E. & TIBERGHIEN, A. (2008). *Les connaissances naïves.* Paris, Armand Colin.

LEARY, D. E. (1990). Psyche's muse: the role of metaphor in the history of psychology. In D. E. Leary (Ed.), *Metaphors in the history of psychology* (pp. 1-78). New York: Cambridge University Press.

DE LONGUEMAR & G., SANDER, E. (2016). *Learning to overcome inadequate intuitive strategies in arithmetic word problem solving*. Communication affichée présentée à la Budapest CEU Conference on Cognitive Development, Budapest; 01/2016

MENGUE, E., RICHARD, J-F. & SANDER, E. (2015). Classification des problèmes additifs : statut intermédiaire de la transformation relativement au complément et à la comparaison, *L'Année Psychologique, 115 (4),* 497-531.

NOVICK, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *14*, 510-520.

POINCARÉ, H. (1908). *Science et méthode*. Paris : Flammarion.

RAMSCAR, M. J. A. & PAIN, H. G. (1996). Can a real distinction be made between cognitive theories of analogy and categorisation? In S.E. Cozzens & T.F. Gieryn (Eds.) *Proceedings of the 18th annual conference of the cognitive science society* (pp. 346-351). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

RICHARD, J-F. & SANDER, E. (2015). *Quelles relations établir entre la résolution de problèmes et l'introduction des opérations et de leurs propriétés ? Faut-il systématiquement relier les enseignements à des situations de la vie réelle ou concevoir des situations ad hoc ?* Rapport technique pour la conférence de consensus « Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire » CNESCO, novembre 2015.

RICHLAND, L. E. & SIMMS, N. (2015). Analogy, higher order thinking, and education. *Cognitive Science, 6*(2), 177-192.

RILEY, M. S., GREENO, J. G. & HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsberg (ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153–196). New York: Academic Press.

ROSS, B.H. (1989). Distinguishing types of superficial similarities: Different effects on the access and use of earlier problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition (15)*, 456-468.

SANDER, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages, *Bulletin de psychologie, 60*, 119-124.

SANDER, E. (2008). Les connaissances naïves en mathématiques. In J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander & A. Tiberghien (Dir). *Les connaissances naïves* (pp. 57-102). Paris : Armand Colin.

SANDER, E. (2016a). *Analogies, éducation, conceptions du maître et de l'élève*. Séminaire du Groupe Compas «Education et Cognition », Ecole Normale Supérieure Ulm, 15 février 2016, Paris, France

SANDER, E. (2016b). *L'impératif analogique*. Séminaire international de l'IFÉ Apprendre et Faire apprendre : perspectives internationales, « L'analogie. Quelles conceptions et quelles conséquences éducatives ? », 12e session des 29 et 30 juin 2016, Lyon, France

SANDER, E. (2016c). Enjeux sémantiques pour les apprentissages arithmétiques. *Bulletin de Psychologie, 546(6)*, 463-469.

SANDER, E. (2017). Des concepts quotidiens pour développer des concepts scientifiques : une perspective éducative. *L'homme dans le monde de l'incertitude. Pour le 120e anniversaire de la naissance de Lev Vygotsky* (pp.14-20). Moscou : FIRO.

SANDER, E. (sous-presse). Transformer l'inconnu par le connu. Constructions et interventions analogiques pour les apprentissages scolaires. In J.-M. Barbier & M. Durand (Dir.), *Représenter/transformer : Débats en analyse des activités* (pp.259-279). Paris : L'Harmattan.

SANDER, E. & FORT, C. (2014). *Semantic ambiguity as basis for promoting learning in the case of arithmetic problem solving*. Proceedings of ICAP 2014, 28th international congress of applied psychology, 8-13 July 2014, Paris.

SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2017). Les apprentissages numériques. In R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux et E. Sander (Dir.). *Traité de Psychologie du Développement* (pp. 251-258). Paris : Masson.

SCHEIBLING-SÈVE, C., SANDER, E. & PASQUINELLI, E. (2017). *A recategorization method to improve pupils' cognitive flexibility*. Budapest CEU Conference on Cognitive Development. Budapest, Hongrie, 6-8 janvier.

SCHLIEMANN, A.D., ARAUJO, C., CASSUNDÉ, M.A., MACEDO, S. & NICÉAS, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 422–435.

TIROSH, D. & GRAEBER, A. O. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teachers' thinking about division. *School Science and Mathematics, 91(4)*, 157–163.

TRENCH, M. & MINERVINO, R. A. (2015). The role of surface similarity in analogical retrieval: Bridging the gap between the naturalistic and the experimental traditions. *Cognitive Science*, *39*, 1292-1319.

TURNER, M. (1988). Categories and analogies. In D. H. Helman (Ed.), *Analogical Reasoning* (pp.3-24). Kluwer Academic Publishers.

VERGNAUD, G. (1981/1994). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire***.** Berne : Peter Lang.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds.) Addition and substraction: A cognitive perspective (pp. 39-59). Hillsdale: Erlbaum.

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative structures. In H. Hiebert and M. Behr (Eds.) *Research Agenda in Mathematics Education: Number concepts and operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Hillsdale : Erlbaum.

LES ETUDIANTS ET LEURS CHOIX POUR LA CONSTRUCTION D'UN NOUVEAU CONCEPT : L'INTRODUCTION DU CONCEPT DE LIMITE DE FONCTION

Sonia Maria **MONTEIRO DA SILVA BURIGATO**

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil

soniaburigato@gmail.com

José Luiz **MAGALHÃES DE FREITAS**

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil

joseluizufms2@gmail.com

Cécile **OUVRIER-BUFFET**

Université de Reims Champagne-Ardenne/France

cecile.ouvrier-buffet@univ-reims.fr

Résumé

Dans ce travail[1], nous présentons une partie de notre recherche doctorale dont la problématique centrale consiste à étudier l'introduction du concept de limite, chez les étudiants au Brésil et en France. Nous mettons l'accent sur la recherche des premiers schèmes des étudiants lorsqu'ils commencent à étudier le concept de limite. Au Brésil, nous avons élaboré et expérimenté des activités d'introduction du concept de limite de fonction (limite finie d'une fonction en un point, limites à l'infinie et limites infinies en un point). Nous avons réalisé deux entretiens avec les étudiants pendant l'expérimentation. En France, nous avons suivi l'introduction de ce concept dans une classe de lycée et avons conduit des entretiens avec des élèves de cette classe. Notre première analyse des productions des étudiants indique qu'ils mobilisent des schèmes en lien avec les concepts de fonctions et de nombre réel. Cependant, les invariants opératoires ne sont pas toujours pertinents pour les tâches qu'ils ont besoin de résoudre, les obligeant à réorganiser ou abandonner un schème précédent.

Mots clés

Concept image, concept définition, schèmes, théorème-en-acte, représentations

I. INTRODUCTION

Dans ce texte, nous présentons une partie de notre recherche doctorale. La question générale de notre recherche est : Comment les étudiants du Brésil et de la France construisent-ils une première connaissance du concept de limite ? Nous savons que dans ces pays le concept de limite est présent dans l'enseignement de différentes manières. Ainsi, nous nous demandons si ces différences des modèles du Brésil et de la France feront que les étudiants auront des processus de construction de connaissances très différents.

[1] Recherche financée par le PDSE/CAPES.

Une première différence réside dans le fait que le concept de limite est présenté à différents moments au cours de la scolarité au Brésil et en France. Au Brésil, ce concept est introduit à l'université alors qu'en France le concept de limite est introduit dès le lycée.

Le cours à partir duquel nous avons fait la recherche au Brésil est en licence de mathématiques à l'Université Fédérale de Mato Grosso Sul (UFMS). Le concept de limite est introduit dans la première année du cours, dans des disciplines appelées : « Calcul différentiel et intégral I » ou simplement « Calcul I » représentant environ 100 heures par semestre. Les contenus du programme de cette discipline portent sur les fonctions d'une variable réelle, les limites et la continuité des fonctions, les dérivées, les intégrales et leurs applications.

Nous avons fait notre recherche en France dans le lycée de Lombards dans la ville de Troyes, et plus particulièrement dans une classe de terminale générale scientifique, Sciences de la Vie et de la Terre (SVT) où les étudiants[2] peuvent choisir différentes spécialités (ISN soit Informatique et Sciences du Numérique, ou Physique Chimie, ou SVT, ou Mathématiques).

Nous avons choisi de travailler avec les étudiants sur la présentation de la notion de limite de fonction dans les situations qui permettent de travailler sur des difficultés rencontrées habituellement par les étudiants, telles que l'approximation en un point, ainsi que l'idée de nombre arbitrairement petit et d'infini et l'étude des fonctions. Nous nous inscrivons dans la lignée des recherches antérieures sur l'enseignement et l'apprentissage du concept de limite, recherches de natures épistémologiques et didactiques (compréhension du concept, lignes directrices méthodologiques pour son enseignement) (Artigue, 1995 ; Cornu, 1983 ; Cury, 2004, Santos, 2013, etc.).

Nos études nous ont conduit à délimiter un champ conceptuel (Vergnaud, 1990) pour l'introduction du concept de limite, centré sur les concepts d'inégalités, d'intervalles, de nombres réels et de fonction. Ces concepts sont importants pour la construction de la notion de limite et ils sont considérés comme connus par les étudiants. Cependant, plusieurs aspects de ceux-ci ne sont approfondis que dans les situations de limite (Artigue, 1995) et ces concepts ne sont pas forcément maîtrisés par les étudiants. Pour Vergnaud (1990), l'apprentissage d'un concept implique un ensemble de situations mais aussi un ensemble de concepts qui s'entrecroisent, comme un réseau. L'étudiant traite de nouvelles situations à la recherche de similitudes avec des situations vécues et bien résolues par leurs schèmes. Alors, comment l'étudiant va-t-il apprendre à gérer ces situations d'introduction au concept de limite? Quelles connexions sont pertinentes ou non pour faire face aux situations proposées ? Ces questions et d'autres ont guidé notre enquête. Nous présentons dans ce qui suit l'organisation de notre étude.

II. CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

Notre cadre théorique est principalement basé sur les champs conceptuels (Vergnaud, 1990) car nous cherchons à étudier le processus d'apprentissage des étudiants dans des situations d'introduction du concept de limite. Vergnaud (1990) définit un concept comme un triplet.

Dans notre cas, le concept est celui de limite, et le triplet est le suivant :

- *les situations*: qui donnent du sens au concept de limite ;
- *des invariants opératoires* : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte qui permettent de faire face aux situations ;
- et *les représentations* : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement.

L'autre élément théorique que nous utilisons réside dans les schèmes (Vergnaud, 1990)

[2] Pour faciliter la lecture, nous utiliserons le terme générique d'étudiant. Nous préciserons toujours s'il s'agit de la France (lycée) ou du Brésil (université).

composés de :

- un objectif (but) ou plus ;
- des règles d'action (prendre le contrôle et des informations) ;
- des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) ;
- et des possibilités d'inférence.

Nous faisons l'hypothèse que ces éléments nous permettrons de caractériser les différentes actions organisationnelles qui guident les étudiants dans les situations des activités proposées. Nous nous intéressons en particulier aux « erreurs », difficultés rencontrées et connaissances mobilisées par les étudiants tout au long du processus de résolution.

Notre problématique est d'enquêter (et de comparer) sur les chemins parcourus par les étudiants dans la construction de la notion de limite au Brésil et en France. Nous organisons notre travail de la façon suivante :

- Caractériser certains concepts de base du champ conceptuel des activités d'introduction du concept de limite.
- Identifier les invariants opératoires mobilisés par les élèves pour résoudre les activités, mais aussi pour justifier leurs choix.
- Caractériser les *schèmes* de raisonnement des étudiants.
- Identifier quels sont les concepts utilisés dans ces schèmes.

Notre étude et nos analyses de documents officiels, de manuels, de recherches didactiques sur le concept de limite nous ont permis d'identifier des activités pertinentes pour notre étude, et ce dans une perspective de comparaison France-Brésil.

Au Brésil, nous avons élaboré et appliqué un questionnaire dans une classe du cours de mathématiques de l'UFMS. Notre objectif était de présenter la recherche, ainsi que d'identifier certaines connaissances antérieures des étudiants. Nous souhaitons également vérifier qui serait intéressé à participer à notre étude. Ensuite, nous avons élaboré et expérimenté trois ensembles d'activités, où les situations suivantes ont été étudiées : nous prenons les valeurs proches d'un point, du domaine de définition de la fonction, pour vérifier ce qui se passe avec les valeurs prises par la fonction ; étude de la limite finie d'une fonction en un point, étude de limites à l'infinie (en $+ \infty$ ou $- \infty$) et de limites infinies en un point (approche par « définition intuitive[3] »). Après ces deux ensembles d'activités, nous avons réalisé un entretien en binôme avec les étudiants volontaires, puis avons mis en œuvre la troisième activité ; nous avons ensuite conduit un entretien individuel. À la fin, cinq mois plus tard, nous avons réalisé une dernière interview individuelle.

En France, nous avons suivi une enseignante en cours de Terminale dans l'introduction du concept de limite. Pour cela, nous avons élaboré une grille d'analyse pour identifier les différents moments de travail de cette enseignante. Notre grille d'analyse a été construite sur la base des questions suivantes :

- Quel(s) concept(s) est (sont) rappelé(s) pour l'introduction du concept de limite ? Quels autres concepts et quelles représentations (géométrique, algébrique, graphique, fonctionnelle), définitions, propriétés sont rappelées et introduites ? Quels types de problèmes sont utilisés ? Quels concepts connexes (nombres réels, autres concepts imbriqués du champ conceptuel) sont mobilisés ? Et comment sont-ils représentés et évoqués ?
- Quelles sont les caractéristiques de l'activité d'introduction ?
- Quelles institutionnalisations sont mises en œuvre ? Présentent-t-elles une définition intuitive, formelle, ou des propriétés ?

[3] Nous utilisons ici l'expression de « définition intuitive » dans le sens mobilisé dans un livre très utilisé au Brésil (Guidorizzi, 2001) qui développe une approche conceptuelle qui valorise la présentation des définitions et des démonstrations, ainsi que des représentations géométriques. Nous allons formaliser ces aspect sur les «définitions intuitives » et « formelles » dans notre travail au niveau théorique.

- Quels réinvestissements sont prévus ?
- Comment les concepts sont-ils réinvestis ?

Après l'analyse de la grille de ce cours de l'enseignante sur l'introduction du concept de limite, nous avons préparé un questionnaire similaire à celui que nous avons utilisé au Brésil pour retenir certains étudiants et aussi aider à l'élaboration des questions pour des entretiens. Nous faisons actuellement les retranscriptions des dernières interviews. Dans la Figure 1, nous présentons un résumé de nos choix méthodologiques pour une comparaison Brésil/France.

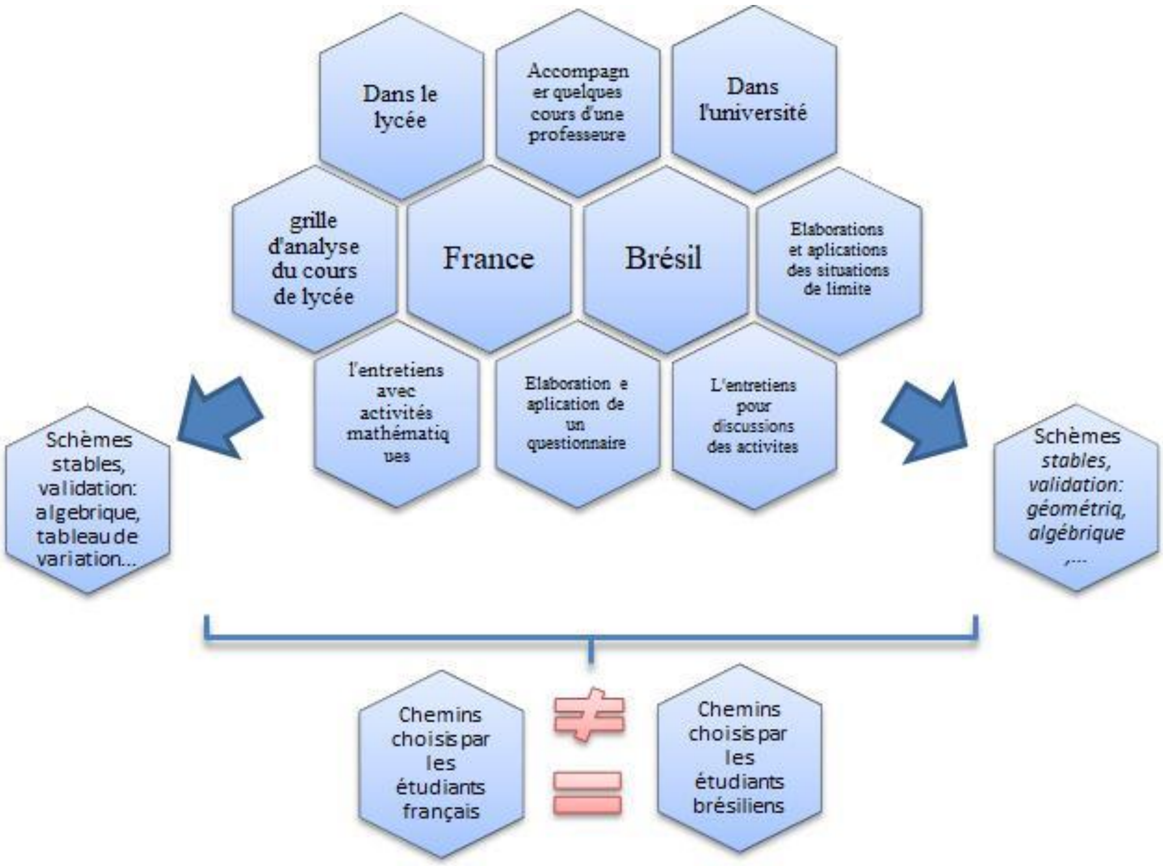


Figure 1 : Choix méthodologiques.

III. LES PREMIERS RESULTATS ET PERSPECTIVES

L'étude de comment les schèmes sont construits ou reconstruits par les étudiants nous a fait réfléchir sur un autre aspect de notre travail lié à la notion de limite et l'étude d'un autre point s'est révélée nécessaire. Nous savons qu'il existe un certain nombre de définitions possibles, certaines plus formelles que d'autres, avec des représentations variées. Ces définitions sont construites en lien étroit avec les expériences de l'étudiant, dans un processus dynamique. Un étudiant peut avoir une définition de limite bien mémorisé, mais sans aucun schème efficace pour traiter des activités liées à cette définition. Toutefois, il peut mobiliser un processus stable pour faire face à plusieurs situations impliquant des limites. Nous souhaitons interroger ici la proximité de ces schèmes avec la notion de limite proposée par (et dans) l'enseignement. En effet, nous nous référons à Vergnaud (1990) et à l'évolution des schèmes au fil des situations. Ce questionnement fait écho aux outils théoriques proposés par Tall et Vinner (1981). Ils soutiennent que beaucoup de concepts que nous utilisons tous les jours ne sont pas formellement définis et sont utilisés au travers de leur reconnaissance d'expériences passées.

Nous pouvons faire un parallèle avec Vergnaud (1990) et dire que dans des situations reconnues comme similaires à des situations précédemment vécues, l'étudiant mobilise des schèmes ayant fonctionnés précédemment. À ce stade de la recherche, nous souhaitons intégrer dans nos analyses la distinction proposée par Tall et Vinner (1981) en utilisant les termes *concept image* et *concept définition* afin de faire progresser nos outils d'analyse et de comparaison. Il s'agit là des *concepts images* et *concepts definitions* du concept de limite mais aussi de ceux des autres concepts en jeu dans les situations étudiées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá : Grupo Editorial Iberoamérica. 97-140.

CORNU, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de doctorat, Grenoble.

CURY, H. N. & CASSOL, M. (2004). Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. *Atas Cientifica*, Canoas, 6, 27-36.

GUIDORIZZI, H. L. (2001). *Um Curso de Cálculo*: volume 1. Editora LTC, Rio de Janeiro, 5ª edição.

SANTOS, M. B. S. (2013). *Um Olhar para o Conceito de Limite: Constituição, Apresentação e Percepção de Professores e Alunos sobre o seu ensino e Aprendizado*. Thèse de doctorat en Enseignement des Mathématiques, PUC, São Paulo, Brésil.

TALL, D. & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 3(12), 151-169.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10 (2-3)*, 133-170.