

Pré-Actes du séminaire de didactique des mathématiques (version provisoire - prépublication)

23-24 mars 2018

Édités par

Julia Pilet & Céline Vendeira

PRESENTATION

Le séminaire de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration d'une communauté de chercheur-e-s.

Sous réserve de l'accord des intervenant-e-s, les présentations sont filmées et diffusées en ligne. Le travail de capture, de montage et d'hébergement des vidéos est assuré habituellement par l'IREM de Paris.

Au fur et à mesure de la finalisation des textes, ceux-ci sont mis à disposition sur le site de l'ARDM. Ils sont ensuite regroupés en un volume. Actuellement, seuls les textes du premier et second séminaire de 2018 sont mis en ligne (février et mars).

Depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de poster durant les sessions du séminaire. Ces présentations affichées donnent lieu à des textes courts que vous retrouverez également dans ce volume de pré-actes.

En attendant la parution des textes du séminaire de novembre 2018, nous vous souhaitons une bonne lecture.

SOMMAIRE

Séminaire des 23 et 24 mars 2018

Travaux en cours4
Gilles Aldon Diffusion des mathématiques, l'exemple de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique
<u>Travaux en cours</u> 16
Alix Boissière et Nicolas Pelay L'Atelier des potions : un jeu didactique & ludique.
<u>Travaux en cours</u>
Virginie Deloustal-Jorrand et Simon Modeste Les Situations de Recherche par Maths à Modeler : articuler recherche, formation et diffusion.
<u>Travaux en cours</u>
Cécile Allard Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives de fin d'école primaire: le cas de l'enseignement des fractions.
<u>Présentation de thèse</u> 38
Audrey Daina
Usage des ressources dans les pratiques ordinaires: tensions entre la préparation d'une séquence et sa réalisation dans la classe de mathématiques.
Ouverture sur 61
Flora Schwartz et Jérôme Prado
La dyscalculie développementale: bases cérébrales et cognitives.
Travaux en cours
Thierry Dias Difficultés d'apprentissage en mathématiques: un regard didactique.
Travaux en cours
Laurie Bergeron et Gustavo Barallobres Discours noosphériens dans le champ de l'adaptation scolaire au Québec : certains exemples dans l'enseignement des mathématiques
Session de posters
Nathalie Brasset Conception d'un dispositif pour étudier les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH <u>Session de posters</u>
Ratha Loeng Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge

DIFFUSION DES MATHEMATIQUES, L'EXEMPLE DE LA MAISON DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Gilles **ALDON**IFÉ-ENS de Lyon
Laboratoire S2HEP
gilles.aldon@ens-lyon.fr

Résumé

« Ils jouent mais quel jeu jouent-ils ? » questionnait Eric Sanchez pour présenter les jeux épistémiques numériques dans l'enseignement. On peut étendre la question en s'intéressant au lieu et au contexte de ces jeux et plus largement aux actions de diffusion (ou de vulgarisation) des mathématique : dans un cadre scolaire, extra-scolaire ? Quels liens peut-on faire de l'un à l'autre ? Les cadres théoriques permettant de décrire et d'analyser l'enseignement et l'apprentissage sont-ils encore pertinents pour la diffusion des mathématiques ? La volonté de modifier le système de connaissances des personnes tendraient à laisser penser que la diffusion des mathématiques n'échapperait pas aux cadres de la didactique des mathématiques. Mais entre l'école et un lieu de diffusion, l'institution change et les rapports aux savoirs sont profondément modifiés. Ma contribution à ce séminaire pose ces questions et essaie d'y apporter quelques réponses à partir de mon expérience à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique.

Mots clés

Vulgarisation, diffusion, théorie anthropologique du didactique, théorie des situations didactiques, jeux

I. Introduction

Depuis sa création en 2012, la Maison des Mathématiques et de l'Informatique (MMI¹) accueille des classes de différents niveaux pour des ateliers, propose des animations grand public autour d'expositions mathématiques, offre un « cours pour les parents » en mathématiques, des conférences grand public, des séminaires pour les étudiants,... Je participe depuis le début à ces actions et je suis donc un diffuseur de la culture mathématique et informatique bien que mes recherches en didactique des mathématiques ne portent pas sur ces aspects. Le texte qui suit est donc une réflexion d'un praticien réflexif sur son activité de diffusion plus que d'un chercheur voulant étudier la diffusion des mathématiques.

Je m'interroge tout de même sur les cadres théoriques qui permettent d'analyser le travail que je fais en privilégiant les cadres de la didactique des mathématiques et en me posant la question de savoir si ces cadres, construits dans une perspective d'enseignement et

¹ http://mmi-lyon.fr/

d'apprentissage, peuvent encore s'appliquer dans les actions de diffusion. Je m'appuie sur ma pratique effective pour exemplifier mon propos et j'essaie de conclure sur une perspective de didactisation des actions de diffusion.

II. UNE APPROCHE DES NOTIONS DE VULGARISATION ET DE DIFFUSION

En termes de vocabulaire, on trouve de façon quasi-synonyme les termes de diffusion ou de vulgarisation (*popularization* en anglais). Il est toujours intéressant de s'intéresser au vocabulaire utilisé même si les dictionnaires donnent des définitions qui se renvoient l'une à l'autre comme en témoigne le Tlfi:

« Diffusion : Action de propager une idée, des connaissances, des techniques ».

« Vulgarisation : Fait de diffuser dans le grand public des connaissances, des idées, des produits ».

Le terme de «vulgarisation» garde cependant une connotation négative. Le vulgus, le « commun des hommes » que Cicéron méprisait : « non est concilium in vulgo » (la foule n'a pas de réflexion) fait son pendant du verbe vulgo « répandre dans le public ». De cette racine naît aussi bien le terme vulgaire, « Qui est identique, semblable aux autres individus, aux autres objets de son espèce » que le terme vulgarisation; mais est-ce seulement l'origine lexicale qui donne à ce terme cette connotation? Il est aussi intéressant de regarder brièvement l'histoire de la vulgarisation qui remonte aux « cabinets de curiosité » qui apparaissent à la Renaissance, dans un moment ou le livre devient un media universel de transmission de l'information. Les connaissances scientifiques diffusent dans un monde où la science commence à apparaître comme une possibilité de comprendre le monde. Les premiers musées scientifiques comme l'Ashmolean Museum d'Oxford voient le jour montrant au public des spécimens zoologiques ou géologiques. Les magazines généralistes commencent à publier des articles de « vulgarisation scientifique » en utilisant notamment les langues vernaculaires plutôt que le latin réservé aux textes scientifiques. Le XVIIIème siècle voit l'apparition d'une vulgarisation souvent en direction des femmes privées par ailleurs d'une éducation scolaire, ou des enfants en parallèle d'une éducation plus tournée vers les lettres et les études religieuses (Fontenelle, 1686, De Lalande, 1786-1817). Le goût pour les sciences ne fait que croître au XIXème siècle avec une amplification du phénomène de vulgarisation à travers l'apparition de nombreux jardin des plantes, d'articles scientifiques qui envahissent les pages des journaux, des écrits de science-fiction qui font apparaître la science comme la réponse à toutes les questions. Même si cette réponse est encore inaccessible mais sera sûrement rapidement présente : « Tout ce qui est impossible reste à accomplir » disait Jules Verne en alliant l'action à la réflexion scientifique. Ainsi la vulgarisation scientifique naît et se nourrit des progrès des sciences et apparaît comme une volonté de diffuser des concepts ou des représentations créés par les scientifiques.

Quels sont alors les effets et les conséquences pour la diffusion des idées scientifiques. Les modèles classiques de la vulgarisation (Maldinier, 1973) proposent une distinction entre un modèle à deux personnages et un modèle à trois personnages. Dans le modèle à deux personnages, le scientifique s'adresse directement au public alors que le modèle à trois personnages introduit un intermédiaire, un passeur (diffuseur, journaliste, professeur, passeur ?) qui fait le lien et traduit le discours scientifique pour le public visé. On ne peut évidemment

pas s'empêcher de voir ici un phénomène de transposition didactique dans une institution particulière dont l'objectif est de transmettre des savoirs...

Ces modèles de vulgarisation à deux ou trois personnages sont encore bouleversés aujourd'hui du fait de l'apparition des blogs scientifiques ou autres chaînes de diffusion de vidéos, ce qui pose de façon cruciale la légitimité du troisième personnage. Ces considérations nous amènent à nous poser les questions d'une définition plus précise de la vulgarisation en essayant de circonscrire les questions du public cible, mais aussi de la fonction assumée de la vulgarisation. Est-ce une fonction d'information? Il s'agirait alors de donner des éléments de compréhension de faits et de découvertes scientifiques ; le troisième homme, ou le scientifique lui-même, serait alors le « traducteur » d'une langue que le grand public ne pourrait pas comprendre, ce qui laisse sous-entendre que le langage scientifique n'est présent que pour cacher au plus grand nombre la signification de ce qu'il porte. Ou bien est-ce une fonction d'éducation ? C'est à dire, s'agit-il de donner à un public déterminé un savoir utilisable dans une institution donnée et transposable dans d'autres circonstances. L'ambiguïté du message de la vulgarisation peut se retrouver dans une confusion entre les fonctions qui lui sont assignées. Dans la chaîne scientifique-passeur-public, les deux charnières scientifique-passeur et passeur-public sont sujettes à des incompréhensions que la transposition didactique peut aider à modéliser : le travail qui d'un objet de savoir en fait un objet de vulgarisation s'apparente naturellement à la transposition didactique. Mais le savoirenseigné de la transposition didactique vit dans le système didactique et dans une institution spécifique, l'école, avec ses contraintes et les attentes sociales qui lui sont attachées. Alors que la fonction de la vulgarisation n'est pas clairement évoquée ni nommée. Considérer les fonctions de la vulgarisation amène à des questionnements déjà largement travaillés sur les effets des actions de vulgarisation tant en utilisant des medias (journaux, vidéos, documentaires,...) que dans des « institutions » de vulgarisation dont la MMI fait partie ; l'effet vitrine (Roqueplo, 1973) met en évidence la contradiction apparente de la vulgarisation. Malgré une volonté de rapprocher la science du public elle crée une séparation artificielle et la rend encore plus inaccessible; ce qui est donné à voir, la vitrine, n'est qu'une façon de mettre en valeur un aspect, la plupart du temps attirant, d'un phénomène scientifique mais insuffisant pour reconstituer les concepts sous-jacents. Ainsi, la vulgarisation scientifique, loin de partager des savoirs, rend la science encore plus lointaine puisque ce qui en est montré n'est qu'un aspect faussé du discours scientifique ; la science est ainsi décrite par Roqueplo (Ibid.) comme appartenant au pouvoir et la vulgarisation comme un moyen d'asservissement dont le peuple (le vulgus) ne pourrait sortir que par le combat, c'est à dire par l'accession à la connaissance réelle et non pas celle dénaturée, voire caricaturée dans la vulgarisation; le rôle, la fonction de la vulgarisation ne serait qu'une façon de cacher la réalité scientifique pour maintenir le peuple hors de la connaissance réelle; dans ces conditions la vulgarisation ne peut qu'au plus susciter des envies de connaître, des vocations, avec le danger sous-jacent que l'accès à la connaissance préalablement masqué par la vulgarisation n'apparaisse comme beaucoup moins excitant et accessible que la jolie image proposée dans la vitrine. Peut-on alors diffuser, vulgariser des connaissances sans mettre en garde de la réelle exigence scientifique nécessaire pour comprendre les phénomènes étudiés ?

De la même façon, l'effet de la « *culture en simili* » (Maldinier, 1973) correspond aux utilisations de la vulgarisation dans un cadre sociétal ; sa fonction est ainsi de construire dans un certain groupe social une culture commune ou un verni de culture commune suffisant pour se reconnaître comme faisant partie de ce groupe social. La vulgarisation scientifique est alors considérée comme une marque de reconnaissance d'appartenance à ce groupe social et pas une diffusion des connaissances scientifiques à des fins de compréhension et d'utilisation. Maldinier (Ibid.) a étudié le lectorat de certaines revues de diffusion scientifique et a dégagé

cet aspect de reconnaissance mutuelle à travers la vulgarisation proposée, la « *culture en simili* ». Il est là aussi certainement important dans le cadre d'une institution de diffusion de penser à la fonction de cette diffusion pour ne pas tomber dans cet effet repéré et étudié de la vulgarisation.

Enfin, lorsque la diffusion concerne un public en âge scolaire, il y a une concurrence de fait qui apparaît entre l'école et les lieux de diffusion avec l'idée que l'école ne peut pas proposer une vision créatrice de la science du fait des barrières imposées par l'institution elle-même. L'école ne traiterait que de techniques ennuyeuses :

Cantonnée souvent à la maîtrise de techniques de manipulations d'expressions écrites, la mathématique enseignée est pauvre d'un point de vue esthétique, sensoriel, dynamique et créatif, donnant une fausse image du travail du mathématicien. (Mercat, 2015, p. 935)

La diffusion dans un cadre extérieur à l'école, au contraire, permettrait de casser les barrières et de laisser libre cours à la créativité. Cependant, le débat entre les propositions de l'école et la vulgarisation porte sur un aspect global de l'enseignement dans une organisation didactique donnée :

La TAD situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Or ce parti pris épistémologique conduit qui s'y assujettit à traverser en tous sens – ou même à ignorer – nombre de frontières institutionnelles à l'intérieur desquelles il est pourtant d'usage de se tenir, parce que, ordinairement, on respecte le découpage du monde social que les institutions établies, et la culture courante qui en diffuse les messages à satiété, nous présentent comme allant de soi, quasi naturel, et en fin de compte obligé. (Chevallard, 1998, p. 91)

La vulgarisation apparaît alors comme une rustine sur un problème qui relève du domaine scientifique :

Je range les gens de métier parmi les gueux; et j'imagine alors des puissants qui leur veulent du bien. Rien de mal à cela a priori : ainsi font les dames patronnesses à l'endroit de leurs pauvres. Si cette dernière comparaison heurte, parlons de bienfaiteurs ou, avec les anciens Grecs, d'évergètes. (Chevallard, 2010, p. 8)

Ce sont là de vraies questions qui interrogent à la fois la diffusion et le cadre scolaire habituel et qui renvoient aux relations qui peuvent exister entre les actions de vulgarisation et l'enseignement scolaire. Des questions qui sont bien sûr cruciales dans le cas de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique tout comme elles le sont pour l'avenir de l'enseignement des mathématiques à l'école. Ce qui nous paraît intéressant plutôt que d'opposer diffusion et apprentissage est de comprendre et de construire les relations possibles entre les actions de diffusion et les apprentissages scolaires. Nous pouvons ainsi nous inspirer des réussites de la vulgarisation mathématique; Math.en.jean², par exemple, permet à des élèves de construire de belles mathématiques et se donne comme objectif de développer « des actions de jumelage entre un mathématicien et des établissements scolaires, afin de mettre les jeunes en situation de recherche, permettre aux élèves comme à leurs parents de se faire une autre image des mathématiques que celle d'une discipline scolaire sélective ou de champ scientifique strict et achevé ». Mais ces actions restent volontairement en marge de l'école : ce sont des élèves volontaires qui travaillent avec leur professeur en relation avec un chercheur en dehors des horaires de mathématiques de la classe. La diffusion se dégage ainsi de la dévolution du problème, puisque seuls les élèves qui veulent s'emparer du problème participent à l'action. La diffusion, pour tous les élèves, en revanche ne peut se dispenser de penser la dévolution du problème et la dévolution du savoir qui pourra être institutionnalisé :

_

² https://www.mathenjeans.fr/

La dévolution de la situation a-didactique est peut-être observée indépendamment de la dévolution de l'objet d'enseignement [...]. Ni le maître, ni l'élève ne peuvent identifier ce qui est enseigné, ce qui est à connaître ou à savoir. (Brousseau, 1986, p. 304)

Nous pouvons montrer d'autres réalisations qui tendent, dans le cadre de l'école, de proposer des expériences impliquant tous les élèves dans le temps habituel de la classe (Aldon & Garreau, 2017). Ce sont vraiment les questions de la diffusion des mathématiques pour tous et de ses rapports à l'école qui sont posées. La distinction « vulgarisation-diffusion » relève sans doute des fonctions qui sont données aux actions proposées et on peut penser que la diffusion essaye de minimiser les effets constatés de la vulgarisation et en particulier les effets vitrines et « culture en simili »; en contrepartie, les phénomènes de dévolution, de contrat didactique inhérents à des situations d'apprentissage doivent être pris en compte dans cette construction subtile d'une diffusion-apprentissage. Pour un public en âge scolaire, la collaboration entre l'école et les lieux de diffusion devient cruciale, les seconds pouvant permettre une approche novatrice mais rigoureuse de concepts scientifiques facilitant la dévolution des savoirs, la première permettant cette nécessaire institutionnalisation donnant aux connaissances rencontrées un statut local de savoir, suffisant pour être mobilisable pour apprendre. Les questions de l'utilisabilité des cadres théoriques de la didactique des mathématiques pour analyser les actions de vulgarisation-diffusion des mathématiques apparaissent fructueuses et les réflexions précédentes montrent l'importance d'un regard anthropologique permettant, entre autres, de mettre en évidence les phénomènes de transposition didactique.

Un autre aspect très important dans les phénomènes de diffusion et d'enseignement est la place du jeu dans le processus même d'apprentissage. Si l'on souhaite rester dans une perspective cognitive, les définitions des jeux épistémiques (Loup & al., 2015, Schaffer & al., 2009) mettent en avant les connaissances comme moteur fondamental du jeu qui se joue ainsi dans un domaine spécifique sous-jacent. Les caractéristiques des jeux épistémiques sont listées par plusieurs auteurs comme proposant une résolution de problèmes non-déterministes, au sens où la solution n'est pas déterminée à l'avance, ou plusieurs solutions différentes peuvent être apportées, concernent la résolution de problèmes complexes, s'appuient la plupart du temps sur des activités pluridisciplinaires dans un contexte réaliste et mettant en jeu des connaissances repérées. (Sanchez & al., 2012, Salmani Nodoushan, 2009, Schaffer & al., 2009). Le jeu est omniprésent dans les actions de diffusion, et c'est même ce que les enseignants viennent principalement chercher à la MMI. Je ne rentre pas dans la délicate question de la définition de ce qu'est un jeu et je laisse aux spécialistes la responsabilité des définitions (Pelay, 2011; Essonier, 2018; Sanchez & al. 2012), mais j'insiste plus sur la distinction importante à faire entre le jeu-game et le jeu-play pour le relier au concept didactique de milieu. Le jeu-game dont on peut faire le parallèle avec le milieu matériel d'une situation de référence dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986). Et le jeu-play l'acte de jouer peut être mis en parallèle avec les situations d'actions et de formulation d'une situation didactique, et les allers retours entre les situations de référence et d'apprentissage de la structuration des milieux (Margolinas, 2004).

Mais en faisant le parallèle avec les situations didactiques se posent la question fondamentale de l'institutionnalisation. En particulier, dans quelle institution se passe cette institutionnalisation? Dans quelle institution le savoir est-il partagé? Je pense qu'ici, il y a un point important de distinction entre la vulgarisation et l'enseignement.

Pour illustrer ces propos je voudrais m'attacher rapidement à trois exemples différents d'actions de vulgarisation dans leurs rapports avec l'enseignement et l'apprentissage.

Tout d'abord et parce que c'est d'actualité (Aldon, 2018), je voudrais parler du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon (RMAL), puis plus spécifiquement des ateliers pour

les scolaires de la MMI et faire un petit détour par les « cours de maths pour les parents » ou les mathématiques de l'école racontées aux parents.

III. TROIS EXEMPLES DE VULGARISATION ET LEURS RAPPORTS A L'ENSEIGNEMENT

1. Le rallye mathématique de l'Académie de Lyon

Le rallye mathématique de l'Académie de Lyon³ est né en 2006 d'une initiative conjointe de l'IREM de Lyon, de l'APMEP et du rectorat de l'Académie de Lyon. Il est destiné aux élèves des classes de troisième, seconde, CAP et deux premières années de bac pro 3 ans des établissements publics et privés sous contrat des trois départements de l'Académie de Lyon (Ain, Loire et Rhône).

Le Rallye comporte plusieurs phases :

- les épreuves écrites du Rallye sous forme d'un travail collectif de résolution de problèmes dans chaque classe inscrite ; l'illustration d'un des exercices peut être le support du concours d'affiches pour choisir l'affiche du Rallye de l'année suivante ;
- en mai ou juin, la finale pour les 12 classes lauréates des épreuves écrites, sous forme d'un parcours mathématique sur le campus de la Doua à Villeurbanne. Les classes participent ensuite à une conférence sur un thème mathématique. La journée se termine par une remise de prix, chaque élève recevant une petite récompense offerte par l'un de nos partenaires ou achetée par l'association;
- entre avril et juin, une vingtaine de classes, autres que les classes finalistes, sont également récompensées pour leurs bons résultats aux épreuves écrites ou à la recherche du problème ouvert. Elles gagnent la découverte d'un site scientifique ou technologique de la Région ou bien une remise de prix organisée dans leur établissement avec l'intervention d'un chercheur sur un thème mathématique, ou encore une petite récompense individuelle.⁴

Est-ce une action d'enseignement ou une action de diffusion ? Mille classes ont été inscrites cette année (2018) dans l'Académie soit environ 30 000 élèves qui ont participé à l'épreuve « écrite » puisque la classe entière est concernée et tous les élèves participent à l'épreuve. Cette première épreuve se passe dans le cadre de l'école, presque dans le cadre du cours de mathématiques puisque généralement une partie de la journée est banalisée pour chaque classe dans l'établissement pour permettre aux deux heures d'épreuve de prendre place. Le contrat didactique spécifique peut s'intégrer au contrat de la classe et d'une certaine manière le modifie en mettant un accent particulier sur l'utilisation des connaissances comme le montre très bien le travail qui a été réalisé par Guillaume et Delphine Thérez (Thérez & Thérez, 2018). On est ici dans une forme de diffusion complètement intégrée à l'enseignement où le succès atteste la volonté des enseignants de mathématiques d'intégrer le jeu, la réflexion et l'enseignement en faisant, d'une certaine manière sortir les maths de la salle de classe tout en restant dans l'institution spécifique de la classe. Mais cette séance peut également rester une parenthèse ludique dans le cadre d'une activité culturelle. C'est bien de la responsabilité des enseignants d'en faire au niveau de la classe une proposition didactique

-

³ http://rallye-math.univ-lyon1.fr/

⁴ http://rallye-math.univ-lyon1.fr/spip.php?article37

mettant le problème au cœur de l'enseignement des mathématiques. Le problème est alors vu comme une investigation prenant une place centrale de l'enseignement des maths comme le fait remarquer Gardes (2018) :

Le point de vue épistémologique sur l'activité mathématique qui sous-tend un enseignement et un apprentissage par la résolution de problèmes est celui de la place centrale des problèmes dans l'activité mathématique. (p. 79)

Dans ce cas, l'institution cible est bien l'école et la référence montrée ici au programme de mathématiques est significative :

La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. (BO 5 25 août 2005)

Ce premier exemple montre bien la délicate frontière existant entre la vulgarisation, présente dans le rallye mathématique de l'Académie de Lyon à travers la diffusion de connaissances mathématiques sous forme ludique, et l'enseignement des mathématiques dans les classes, présent dans l'utilisation du cadre même du rallye pour modifier un contrat didactique à l'intérieur des classes. C'est aussi un bel exemple de la complémentarité de la diffusion et de l'enseignement pour un bénéfice d'apprentissage des mathématiques. Les concepts de la didactique des mathématiques, en particulier, de la Théorie des Situations Didactiques, sont ici pertinents pour analyser les apports du rallye pour les apprentissages des élèves et l'utilisation. L'exploitation dans la classe du cadre particulier du Rallye est un exemple de la modification du contrat didactique puisque le savoir est dévolu à travers une situation de jeu puis institutionnalisé dans le cadre de la classe. Le rallye propose dans la construction des situations didactique un milieu particulier facilitant la dévolution tout au long de l'utilisation des épreuves dans les phases de mise en train, d'entraînement, de « concours » et d'exploitation, et en ce sens modifie dans la classe le contrat didactique habituel. Cette analyse didactique de l'utilisation dans la classe des épreuves du rallye permet de mieux comprendre les enjeux de la diffusion des mathématiques dans une action de type « rallye ». Il ne s'agit pas de proposer une parenthèse ludique dans un cours ennuyeux mais bien de modifier profondément l'approche des mathématiques en proposant des exemples didactisés de situations d'apprentissage.

2. Les ateliers de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique (MMI)

Le deuxième exemple de diffusion des mathématiques est représenté par les ateliers proposés pour les scolaires dans le cadre de la MMI. En 2018, le taux d'occupation de la MMI pour les activités pour les scolaires a été proche de 80 %. A partir du catalogue de la MMI, les enseignants nous contactent pour organiser une demi-journée ou une journée d'atelier pour leurs classes autour d'un thème : calculer et jouer avec la pascaline, la cryptographie, l'informatique débranchée, calculer c'est gagné, ludothèque, la malle à jeux...⁵

Ici les questions de l'institutionnalisation sont évidemment cruciales et participent de l'impact de ces ateliers sur la diffusion des mathématiques : les élèves viennent ponctuellement et participent à des activités mettant en jeu des connaissances mathématiques qui ne pourront être institutionnalisées que dans le cadre de la classe. C'est ainsi, là encore, à la charge de l'enseignant, s'il le veut, d'exploiter dans la classe ce qui a été fait dans l'atelier. Cependant, les ateliers pour les scolaires peuvent avoir un double objectif. D'une part proposer aux élèves une approche différente de concepts mathématiques abordables et d'autre part montrer aux enseignants les possibilités d'apprentissage offertes par une approche différente de concepts présents dans les programmes. L'exemple des animations autour de la pascaline est

⁵ http://mmi-lyon.fr/clic-activites-scolaires-2017-2018/

significatif de cette volonté de diffusion à la fois au niveau d'une transmission des connaissances pour les élèves qui participent à l'action mais aussi d'une diffusion d'une certaine vision de l'enseignement et de l'apprentissage en direction des enseignants qui accompagnent les classes. La pascaline est une machine à calculer construite sur l'idée de la Pascaline de Blaise Pascal (Fig. 1). Il s'agit d'un ensemble de roues dentées permettant d'afficher des nombres d'au plus trois chiffres, et de mettre en œuvre des algorithmes permettant d'additionner ou de soustraire des nombres mais aussi de proposer des jeux avec les nombres tirant profit de l'artefact lui-même (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015). L'objectif de l'usage de la pascaline est l'enseignement de la numération décimale de position et les opérations d'addition et de soustraction. Les principes didactiques sous-jacents sont mis en acte appuyés par les réflexions théoriques (Soury-Lavergne, 2017). Les séquences et situations proposées utilisent des pascalines et des logiciels dans lesquels apparaît une version informatisée de la pascaline, appelée e-pascaline.

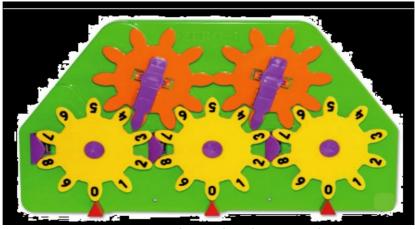


Figure 1: La pascaline et les cliquets violet.

L'atelier joue de cette façon un double jeu : d'enseignement et d'apprentissage et de formation. Il y a donc un double effet d'institutionnalisation, en direction de l'institution classe et en direction de l'institution éducation. En ce qui concerne la classe, les situations proposées ont été conçues pour que le milieu proposé aux enfants leur permette de construire l'écriture décimale de position des nombres en jouant sur la complémentarité de la manipulation de l'objet tangible (la pascaline physique) et de l'objet numérique (la epascaline), en relation avec la construction abstraite de l'écriture du nombre. L'exemple du jeu « nombre de clics » est significatif de cette complémentarité : il s'agit d'afficher sur la pascaline un nombre donné en un minimum de clics, c'est à dire d'actions sur l'une ou l'autre des roues de la pascaline qui se traduisent par un son du fait des cliquets permettant une rotation discrète des roues (Fig. 1). Ce qui, informatiquement, se traduit par des clics de la souris sur la e-pascaline. Afficher le nombre 12 conduit à au moins deux stratégies : l'énumération de 12 sur la roue des unités ou de décomposition du nombre en une dizaine (un clic sur la roue des dizaines) et deux unités (2 clics sur la roue des unités). Pour un nombre comme 18, par exemple, la stratégie gagnante provient cette fois d'une décomposition soustractive du nombre : 18 = 20 - 2. Mais avant d'arriver à la justification par le calcul de l'écriture, les stratégies sur la pascaline peuvent être d'afficher 8 sur la roue des unités en tournant la roue dans le sens trigonométrique puis de tourner la roue des dizaines de 2 clics dans le sens négatif. Mais la suite d'opérations sous-jacente à cette manipulation est : 0 - 2 = 998 puisque la pascaline tangible affiche les nombres de $\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$. Puis 998 + 20 = 18. La epascaline en revanche travaille dans l'intervalle de nombres entiers [0; 999] et ne permet donc pas de soustraire un nombre à 0. La vérification sur la e-pascaline de cette stratégie s'avère impossible et incite à repenser le défi en terme de calcul. Le dialogue ci-dessous provient de la recherche d'un groupe de deux CE1(A et B) sur le minimum de clics pour atteindre 99 après qu'ils aient trouvé 99 en 24 clics (résultat dont on peut supposer qu'il provient de quelques mauvaises manipulations), en 18 clics (9 dizaines et 9 unités), en 4 clics (100-10-1+10):

- (A affiche 100 sur la e-pascaline)
- B : Là, là c'est bon (il utilise la pascaline tangible et pointe du doigt vers l'ordinateur). J'ai trouvé l'astuce. Là ici ! (il pointe du doigt la flèche de sens direct de la roue des unités)
- (A clique)
- B : ouiiiiiiii!
- (A demande confirmation à l'ordinateur qui affiche le smiley)
- A : Yes! (en frappant des mains) (Fig.2)

Ce qu'il reste à institutionnaliser, c'est la découverte de « l'astuce » et le lien avec l'opération réalisée : 99 = 100 - 1.



Fig. 2:99 en deux clics

En ce qui concerne les enseignants eux-mêmes, la conduite de l'atelier, la mise en évidence des apports didactiques spécifiques des artefacts tangibles ou numériques, et les rétroactions des élèves sur les situations proposées nous permettent une institutionnalisation des principes didactiques qui ont présidé à l'élaboration de l'atelier.

Dans le même ordre d'idée, les ateliers construits sur l'idée d'informatique sans ordinateur proposent cette double institutionnalisation : en direction des élève dans une diffusion de connaissances informatiques et en direction des professeurs pour diffuser ces connaissances d'algorithmique (Bell & al., 1998).

3. Cours pour les parents

Un autre exemple de diffusion est l'initiative portée par la MMI d'un cours à destination des parents d'élèves : tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les mathématiques et leur enseignement ! Du point de vue de la diffusion il y a là encore un double objectif : décrypter le contrat de l'école pour des parents pas toujours au fait des attendus de l'école et puis permettre un regard critique sur les mathématiques enseignées et apprises. D'un point de vue pratique, il s'agit de séances de deux heures par semaine pendant lesquelles les parents d'élèves peuvent poser des questions essentiellement issues de difficultés ressenties par leurs enfants et pour lesquelles ils n'ont pas de réponse, ou pas de réponse adaptée, c'est à dire cohérente avec les attendus de l'école à un instant précis. L'exemple de la proportionnalité et des méthodes de résolution de problèmes de ce type est tout à fait significatif de cette transposition didactique. Les techniques sont différentes en regard de types de tâches identiques et le propos du cours est de proposer des technologies et une approche de la théorie

permettant de faire le lien entre les techniques différentes. Dans ce cas l'école est en toile de fond mais l'institution visée est d'une autre nature. Cette expérience de « cours pour les parents » est menée avec la participation d'étudiants de l'ENS de Lyon qui ont suivi un cours de master de « diffusion des mathématiques » que j'ai donné. Pour les parents, il s'agit vraiment de se décomplexer vis-à-vis des mathématiques et des mathématiques enseignées et de comprendre à la fois le contrat de l'école et les connaissances fondamentales proposées par l'école dans chacun des cycles. Comment aider ses propres enfants lorsque les méthodes apprises ne correspondent plus à l'enseignement actuel ou que les connaissances sont (semblent) différentes de celles acquises quelques années en arrière ? La réponse proposée consiste davantage à mettre en évidence les connaissances fondamentales que les élèves doivent acquérir en fin de cycle de façon à donner aux parents d'élèves un recul suffisant sur les savoirs enseignés pour pouvoir modifier leur rapport aux mathématiques elles-mêmes. D'un point de vue didactique, les questions des parents amènent nécessairement à se plonger dans la transposition didactique et l'analyse praxéologique des concepts mathématiques en jeu de façon à rendre opérationnelles les savoirs abordés. Il ne s'agit pas de présenter des concepts superficiellement mais bien de rentrer dans la construction des connaissances de façon à armer les parents d'élèves pour qu'ils puissent répondre aux questions posées par leurs enfants. Ce cours apparaît ainsi comme un lieu de diffusion de la culture mathématique dont les objectifs dépassent la seule information pour proposer un véritable apprentissage des mathématiques de l'école appuyé sur une présentation et une justification des techniques apprises ou que les enfants proposent à leurs parents tout en gardant l'objectif de proposer une vision sereine et pacifiée des mathématiques...

Dans ces trois exemples, la relation entre la diffusion et l'apprentissage est clairement mis en évidence et montre la nécessaire réflexion autour de la diffusion pour faire en sorte que les effets repérés de la vulgarisation ne soit pas un obstacle aux objectifs annoncés de la vulgarisation.

IV. CONCLUSION

Les exemples développés montrent qu'à l'évidence les cadres de la didactique des mathématiques sont utilisables pour comprendre les enjeux de la diffusion des mathématiques. Sont-ils suffisants? Comme dans toute analyse de phénomènes complexes des sciences humaines, un unique regard ne peut embrasser toute la complexité et les approches multiples, sociologiques, anthropologiques, didactiques seraient bien entendu nécessaires pour mieux comprendre les questions que pose la transmission d'une culture à travers les actions de vulgarisation des sciences. Les critiques adressées à la vulgarisation scientifique issues de la sociologie ou des sciences du langage convergent pour mettre en évidence les effets de la vulgarisation en contradiction avec les intentions affichées. Le travail engagé à la MMI montre que cette adéquation entre les intentions et les effets pourraient être largement réduits en proposant des situations construites sur des analyses a priori utilisant les outils de la didactique des mathématiques ou de l'informatique. Les concepts fondamentaux de la Théorie des Situations Didactiques tout comme ceux de la Théorie Anthropologique du Didactique permettent de réfléchir ces actions de diffusion en se prévenant des effets repérés de la vulgarisation. Nous avons pointé dans les exemples développés la nécessité d'une dévolution de la situation au public visé lorsque la fonction de la vulgarisation tend à diffuser largement une culture scientifique authentique. L'étude praxéologique des types de tâches

proposées dans les actions de vulgarisation peut là aussi modifier l'approche et la compréhension des concepts en jeu et éviter de montrer une belle construction inatteignable puisque tronquée. La question de l'institutionnalisation est une question cruciale pour les actions de diffusion pour que l'effet vitrine ne soit pas un obstacle aux objectifs annoncés ou qu'elles ne restent pas une « culture en simili ». Mais, et les exemples développés le montrent, les outils de la didactique permettent d'analyser les propositions de vulgarisation lorsque la fonction qu'on lui donne se construit sur une volonté de transmission de connaissances et non pas seulement sur l'admiration d'une vitrine, une autre forme de « visite des œuvres », rapport mondain à une culture qui évite la rencontre avec la motivation de l'œuvre.

Par ailleurs et dans une perspective d'intégration dans l'école des bonnes idées de la vulgarisation, les objectifs de la diffusion se doivent de favoriser les passerelles entre l'école et ses objectifs d'apprentissage et les lieux institutionnels de la diffusion plutôt que de les opposer. La double institutionnalisation en direction des enfants mais aussi des enseignants est ainsi une piste de travail pour diffuser à la fois les méthodes et les analyses issues de la didactique des mathématiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALDON, G. (dir.). (2018). Le rallye mathématique dans la classe: un jeu très sérieux. Canopé-IREM de Lyon. ALDON, G. & GARREAU, O. (2017). Un dispositif de recherche de problèmes de mathématiques au cycle 3,
- Repères IREM, 108, 26-40.

 BELL, T. C., WITTEN, I. H. & FELLOWS, M. (1998). Computer Science Unplugged: Off-line activities and games for all ages. Computer Science Unplugged.
- BROUSSEAU, G. (1986). Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.
- CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Actes de cette université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, 91-120.
- http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf
- CHEVALLARD, Y. (2010). L'échec splendide des IUFM et l'interminable passion du pédant. Quel avenir pour le métier de professeur? Actes de Regards des didactiques des disciplines sur les pratiques et la formation des enseignants,
- http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Colloque Gridife 20-22 octobre 2010 Conference YC.pdf, consulté le 12 janvier 2019
- DE LALANDE, J. (1786-1817). Astronomie des dames (4eme édition). Ménard et Desenne fils, Paris.
- FONTENELLE, B. (1686-1724). Entretiens sur la pluralité des mondes. Chez Michel Brunet, grand'Salle du Palais, au Mercure Galant.
- ESSONIER, N. (2018). Étude du développement d'une communauté d'intérêt autour de la conception et de l'expérimentation de ressources numériques en mathématiques, Thèse de l'Université Lyon 1.
- GARDES, M.-L. (2018). Démarches d'investigation et recherche de problèmes. In G. Aldon (dir.). Le rallye mathématique dans la classe : un jeu très sérieux (pp. 73-96). Canopé-IREM de Lyon,
- LOUP, G., GEORGE, S. & SERNA, A. (2015). Fondements et caractérisation des jeux épistémiques numériques pervasifs. Actes des 7eme conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain, 41-52, http://eiah2015.uiz.ac.ma consulté le 15 décembre 2018.
- MALDINIER, P. (1973). Les revues de vulgarisation, contribution à une sociologie des cultures moyennes. Ronéo, CSE, Paris, 168.
- MARGOLÍNAS, C. (2004). Les bifurcations didactiques: Un phénomène révélé par l'analyse de la structuration du milieu. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Clermont-Ferrand.
- MERCAT, C. (2015). La diffusion : un lieu pour une mathématique plus humaine ? Actes de EMF 2015, p. 934-943.
- PELAY, N. (2011). Jeu et apprentissages mathématiques : Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique. Thèse de doctorat, Université de Lyon I, Lyon. https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/
 ROQUEPLO, P. (1973). Partage du savoir et vulgarisation scientifique. *Economie et Humanités*, 212, 40-49.
- SANCHEZ, E., JOUNEAU-SION, C., DELORME, L., YOUNG, S., LISON, C. & KRAMAR, N (2012). Fostering Epistemic Interactions with a Digital Game A Case Study about Sustainable Development for Secondary Education. International Symposium Science & Technology Education for Development, Citizenship and Social
- SHAFFER, D.W., HATFIELD, D., SVAROVSKY, G.N., NASH, P., NULTY, A., BAGLEY, E., FRANK, K., RUPP, A.A. & MISLEVY, R. (2009). Epistemic Network Analysis: A Prototype for 21st-Century Assessment of Learning. *Int. J. Learn. Media.* 1, 33–53.

- SOURY-LAVERGNE, S. (2017). Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques, Doctoral dissertation, Ecole Normale Supérieure de Lyon-ENS LYON; Institut Français de l'Education.

 SOURY-LAVERGNE, S. & MASCHIETTO, M. (2015). Number system and computation with a duo of artefacts: The
- pascaline and the e-pascaline. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotna (Eds.), *Proceedings of ICMI Study 23:*Primary Mathematics Study on Whole Numbers (pp. 371–378). Macau, China.

 THÉREZ, D. & THÉREZ, G. (2018). Le rallye dans l'enseignement des maths, In G. Aldon, G. (dir.), Le rallye mathématique dans la classe: un jeu très sérieux (pp. 115-146). Canopé-IREM de Lyon.

L'ATELIER DES POTIONS : UN JEU DIDACTIQUE & LUDIQUE

Alix **BOISSIÈRE**

Plaisir Maths, Université de Montpellier alix.boissiere@plaisir-maths.fr

Nicolas PELAY

Plaisir Maths, Université de Montpellier nicolas.pelay@plaisir-maths.fr

Résumé

L'Atelier des potions est un jeu didactique et ludique conçu pour l'enseignement et l'apprentissage des fractions en cycle 3 dans et hors la classe. Il est élaboré de façon collaborative au sein de Plaisir Maths avec des enseignants et des chercheurs, en appui sur la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et les travaux sur la dialectique jeu/apprentissage de Pelay (2011). Dans cet exposé, nous présenterons la méthode de conception de l'idée initiale jusqu'à la construction du prototype actuel expérimenté dans les classes. Nous montrerons aussi comment ce jeu, à travers sa diffusion dans les classes et au sein de la MMI, est aussi un outil de sensibilisation et de formation à la didactique pour les enseignants, permettant la diffusion d'une didactique appliquée pour les enseignants.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOISSIERE, A., PELAY, N. & ROUGETET, L. (2017). De la théorie des jeux a l'élaboration d'actions d'enseignement et de vulgarisation : le cas de jeux de type NIM, *Petit X, 104*, 49-71.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques, Grenoble, La Pensée sauvage.

Pelay, N. (2011). Jeu et apprentissages didactiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université de Lyon.

LES SITUATIONS DE RECHERCHE PAR MATHS A MODELER ARTICULER RECHERCHE, FORMATION ET DIFFUSION

Virginie **DELOUSTAL-JORRAND**

Laboratoire S2HEP EA 4148 Université de Lyon, Université Claude Bernard virginie.deloustal-jorrand@univ-lyon1.fr

Simon MODESTE

Laboratoire IMAG Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France simon.modeste@umontpellier.fr

Résumé

Cet article cherche à montrer comment l'équipe Maths à Modeler articule recherche, formation et diffusion en s'appuyant sur la conception et la mise en œuvre de Situations Recherche pour la Classe (SiRC). L'objectif des SiRC est de travailler la démarche mathématique, les critères de définitions d'une SiRC sont redonnés et illustrés sur un exemple. Quelques recherches liées aux SiRC sont décrites ainsi que les missions de l'équipe Math à Modeler.

Mots clés

Situation Recherche. Démarche mathématique. Argument. Preuve. Mathématiques discrètes. Chasse à la bête.

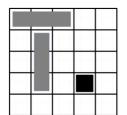
L'équipe Maths à Modeler regroupe des chercheurs en mathématiques discrètes et en didactique des mathématiques. À partir de problèmes issus de la recherche en mathématiques actuelle, elle développe des situations de recherche pour la classe (SiRC ou Situation Recherche dans la suite). La mise en œuvre de ces Situations Recherche amène les élèves à se placer en position de « chercheurs » : dans la lignée du problème ouvert (Arsac & Mante, 2007) et des situations didactiques, ils n'ont pas d'outils directement disponibles et doivent s'en créer pour résoudre le problème. Ainsi, ces situations permettent de travailler la « démarche mathématique » (définition, modélisation, contre-exemples, preuve, condition nécessaire ou suffisante, argumentation, débat...). Du fait qu'elles sont issues de la recherche en mathématiques discrètes et se situent hors des mathématiques traditionnellement enseignées, nos situations sont assez riches et consistantes pour être utilisées du cycle 3 à l'université ainsi qu'en formation des professeurs ou encore dans des situations de diffusion de la sciences (Maison des Maths et de l'Informatique, Fête de la science...). Notre texte s'attache donc, à partir d'une de ces situations Recherche, à montrer l'articulation entre recherche, formation et diffusion. Dans une première partie, nous présentons la Situation Recherche « La chasse à la bête ». À partir de cet exemple, nous décrivons, dans la deuxième partie, quelques caractéristiques d'une SiRC. La troisième partie montre comment les recherches se développent autour de ces situations. Enfin, dans la dernière partie, nous présentons l'équipe Maths à Modeler et ses missions.

I. UNE SITUATION RECHERCHE: LA CHASSE A LA BETE

Dans cette partie, nous souhaitons faire comprendre au lecteur ce que nous entendons par Situation Recherche. Pour cela, nous présentons l'une de nos situations, « La chasse à la bête », et quelques pistes de résolution en les illustrant par des travaux d'élèves de troisième (14-15 ans) du lycée Antoine de Saint-Exupéry (Santiago, Chili). Certains de ces élèves sont de langue maternelle espagnole. Les illustrations sont tirées des cahiers d'élèves (notes de recherche et préparation d'un séminaire inter-classes) remplis lors d'une expérimentation réalisée en 2014.

1. Présentation de la chasse à la bête

Voici la situation telle que nous la présentons en général :



« Ceci est mon jardin : il est représenté par un carré de 5 cases sur 5 cases. Malheureusement, dans mon jardin, il y a des bêtes représentées par les rectangles gris de 3 cases. Ces bêtes peuvent se poser horizontalement ou verticalement, comme ci-contre, mais jamais en diagonale. Elles ne se chevauchent jamais et recouvrent chacune trois cases.

Pour les empêcher de venir, je pose des pièges, représentés par un carré noir. Les bêtes ne peuvent pas se poser sur ces pièges. Comme ces pièges

coûtent très cher, je veux en mettre le moins possible. Combien dois-je mettre au minimum de pièges pour empêcher les bêtes de venir dans mon jardin ? »

2. Résultats pour des bêtes en triminos droits

Rapidement, des essais permettent de trouver des premières solutions qui conviennent, c'està-dire pour lesquelles aucune bête ne peut rentrer dans mon jardin. Ci-dessous (figure 1) une solution à 9 pièges et deux solutions à 8 pièges.

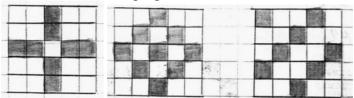
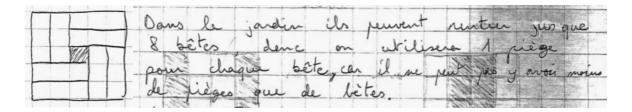


Figure 1 : Des solutions à 8 et 9 pièges.

Après plusieurs essais infructueux pour trouver une meilleure solution, la conjecture est que la solution à 8 pièges est la solution minimale. Pour le prouver, il faut changer de point de vue et s'intéresser au nombre maximal de bêtes pouvant entrer simultanément dans le jardin. La figure 2 ci-dessous montre qu'il peut y avoir 8 bêtes en même temps dans le jardin. Or, un piège ne peut pas piéger deux bêtes à la fois, il faut donc au moins un piège par bête, c'est-à-dire qu'il faut au moins 8 pièges.



« Dans le jardin, ils peuvent rentrer jusque 8 bêtes, donc on utilisera 1 piège pour chaque bête, car il ne peut pas y avoir moins de pièges que de bêtes. »

Figure 2 : Argument pour nombre minimum de pièges.

Comme on ne peut pas utiliser moins de 8 pièges et qu'on a trouvé une solution à 8 pièges, le problème est résolu. Le schéma de la figure 3 ci-dessous rend compte de ce résultat. En effet, la condition suffisante y est représentée par la solution à huit pièges en croix (carrés noirs) et l'expression qui lui est liée « $n \le 8$ » tandis que la condition nécessaire y est représentée par les huit bêtes (torsades) et l'expression qui lui est liée « $n \ge 8$ ». La conclusion est n=8.

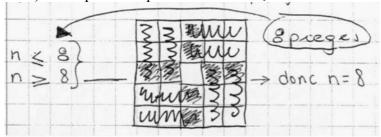


Figure 3 : Schéma représentant les pièges et les bêtes.

3. Résultats pour des bêtes dominos ou triminos coudés

Cette situation de départ peut facilement déboucher sur des prolongements qui sont souvent proposés aux élèves à la suite. Par exemple, les bêtes peuvent changer de forme.

Des bêtes en dominos

Le même problème est posé aux élèves mais les bêtes ont des enfants qui sont maintenant représentés par des dominos (deux cases).

Le type de raisonnement mis en œuvre est le même. On trouve une solution à 12 pièges et on montre ensuite qu'on ne peut pas diminuer ce nombre car il peut y avoir 12 bêtes en même temps dans le jardin (cf. figure 4).

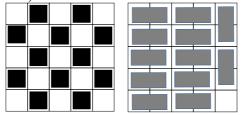
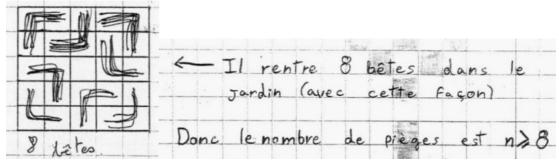


Figure 4 : Solution à 12 pièges et 12 bêtes dans le jardin.

Des bêtes en triminos coudés

Les bêtes ont encore changé de forme, elles sont maintenant représentées par des triminos coudés (3 cases carrées positionnées en L).

Les élèves essaient alors de mettre en œuvre le même type de raisonnement et commencent en général par s'intéresser au nombre de bêtes pouvant être placées en même temps dans le jardin (figure 5).



« Il rentre 8 bêtes dans le jardin (avec cette façon) Donc le nombre de pièges est n≥8 »

Figure 5 : Argument pour le nombre minimal de pièges.

Reste alors à trouver une solution à 8 pièges pour résoudre le problème. Malheureusement, les élèves n'arrivent pas à faire mieux qu'une solution à 10 pièges (figure 6).

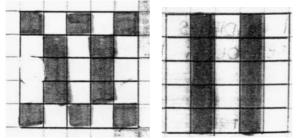
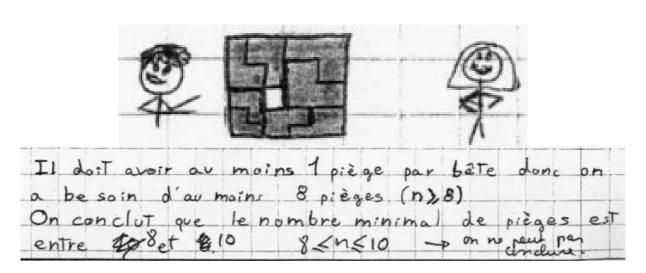


Figure 6 : Solutions à 12 pièges et à 10 pièges.

Cette solution à 10 pièges nous amène à dire que $n \le 10$ (où n est le nombre de piège minimal nécessaire). On conclut donc que $8 \le n \le 10$, comme le résume le raisonnement ci-dessous.



Maintenant on veut savoir quelle est le nombre maximal de bêtes. Après quelques essais, on a trouvé que le nombre maximal de bêtes est 8.



« On a trouvé une solution à 10 pièges. Vous pouvez voir qu'il ne rentrent pas de bêtes. Cela veut dire que... Comme on a trouvé une solution avec 10 pièges, alors le nombres de piège est inférieur ou égal à 10. ($n \le 10$).

Maintenant on veut savoir quel est le nombre maximal de bêtes. Après quelques essais, on a trouvé que le nombre maximal de bêtes est 8.

Il doit avoir au moins 1 piège par bête donc on a besoin d'au moins 8 pièges ($n \ge 8$). On conclut que le nombre minimal de pièges est entre 8 et 10 $8 \le n \le 10$ \longrightarrow On ne peut pas conclure »

Figure 7 : Argument pour encadrer le nombre minimal de pièges.

Pour déterminer le nombre minimal de pièges nécessaires, il faut donc trouver un autre type de raisonnement. Comme souvent en mathématiques, on va s'intéresser à de plus petits cas, c'est-à-dire, ici, à des plus petits jardins. Par exemple, il est facile de voir que dans un jardin de côté 2, un piège ne suffit pas à empêcher les bêtes de venir et qu'il est nécessaire d'en placer au moins deux.

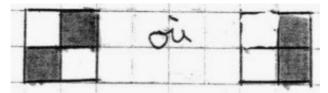


Figure 8 : Il faut au moins 2 pièges dans un jardin de côté 2.

De la même façon, il est nécessaire de placer au moins 3 pièges dans un jardin de côté 3.

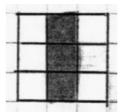
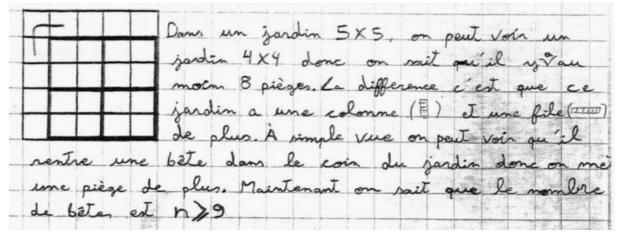


Figure 9 : Il faut au moins 3 pièges dans un jardin de côté 3.

Il s'agit alors de découper notre jardin initial en zones plus petites, comme le montre le raisonnement ci-dessous.



« Dans un jardin 5x5, on peut voir un jardin 4x4 donc on sait qu'il y a au moins 8 pièges. La différence c'est que ce jardin a une colonne et une file de plus. À simple vue, on peut voir qu'il rentre une bête dans le coin du jardin donc on met une piège de plus. Maintenant on sait que le nombre de bêtes est $n \ge 9$ »

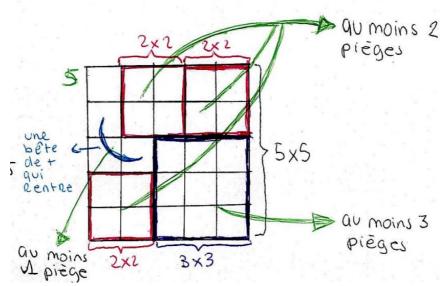


Figure 10 : Il faut au plus 9 pièges dans un jardin de côté 9.

Dans ce découpage, il faut donc au moins 2 pièges pour chaque zone carrée de côté 2, donc au moins 8 pièges mais il faut encore rajouter un piège car on voit qu'une bête pourrait rentrer dans le coin. On a donc réduit l'intervalle et maintenant on sait que 8 pièges ne peuvent pas suffire, reste donc à trancher entre n=9 ou n=10. Pour cela, on va reprendre le même type de raisonnement en découpant les zones plus finement. Ci-dessous un découpage, accompagné d'un raisonnement proposé par des élèves (figure 10).

Figure 11 : Un découpage pour le jardin 5x5.

Le jardin 5x5 est ici découpé en une zone 3x3, pour laquelle il faut au moins 3 pièges et 3 zones 2x2, pour chacune desquelles il faut au moins 2 pièges. Cela donne un total d'au moins 9 pièges pour ces zones-là. Cependant, on remarque qu'on pourrait alors encore placer une bête à l'extérieur de ces zones. Il faut donc un piège de plus pour empêcher cette bête de venir. Il faudra donc en tout au moins 10 pièges. Comme on avait trouvé une solution à 10 pièges (cf. figure 6), on conclut que n=10 est la solution.

4. Quelques idées de prolongements

On peut continuer cette situation en élargissant le champ des questions. On peut, par exemple, se poser la question du nombre minimal de pièges lorsque les jardins carrés sont plus grands. Voici ci-dessous le témoignage d'une recherche en ce sens, où les élèves cherchent à déterminer le nombre de pièges dans des configurations similaires à celles identifiées pour le cas du carré de côté 5.

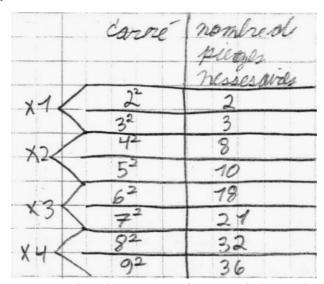


Figure 12 : Nombre de pièges en fonction de l'aire du jardin.

On peut aussi prolonger la situation en imaginant de nouvelles formes de bêtes ou bien différentes espèces de bêtes qui viennent en même temps dans le jardin.

3

公田

Figure 13 : Différentes espèces de bêtes se partagent le jardin.

On peut encore imaginer que la forme du jardin varie, sur la base d'un ensemble de cases carrées accolées par une arête.

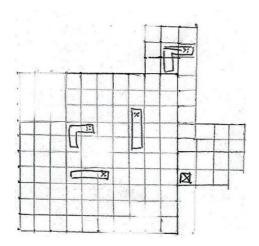


Figure 14: La forme du jardin peut varier.

Ces différents prolongements peuvent être proposés par l'enseignant ou bien être laissés au choix des élèves. Les groupes ne sont pas tous obligés de s'engager sur le même questionnement.

II. PREMIERES CARACTERISTIQUES D'UNE SITUATION RECHERCHE

C'est en nous appuyant sur la situation détaillée dans la section précédente, que nous allons maintenant décrire quelques caractéristiques d'une Situation Recherche.

1. Caractéristiques de la situation mathématique

Objets mathématiques faciles d'accès - Domaine facilement compréhensible

Les situations que nous proposons ne sont pas formalisées en termes mathématiques. Les jeunes élèves n'y reconnaissent d'ailleurs pas, la plupart du temps, un problème mathématique.

Dans « La chasse à la bête », l'habillage de la situation sous forme de jardin et de bêtes permet aux élèves de rentrer facilement dans le problème : la question est facilement compréhensible.

De plus, dans la résolution de ces situations, il n'y a pas (ou il y a peu) d'utilisation de propriétés ou formules du cours, il y a peu de prérequis nécessaires. D'une part, cela participe au fait que les élèves s'engagent facilement dans la résolution. Dans « La chasse à la bête », les élèves peuvent commencer par tester avec des pavages. D'autre part, cela permet aussi qu'il puisse y avoir un travail sur la preuve et le raisonnement qui ne soit pas perturbé par l'utilisation de propriétés mal maîtrisées.

Situations issues de la recherche actuelle en mathématiques discrètes

Les situations proposées par Maths à Modeler sont issues de la recherche actuelle en mathématiques discrètes. La plupart des situations font référence à un problème général ouvert pour la communauté mathématique, c'est-à-dire non encore résolu par elle. Il en résulte, entre autres, qu'il n'existe pas (ou du moins pas encore) de « fin », il n'y a que des

résultats partiels qui renvoient à d'autres questions. Dans la situation précédente, le problème particulier du jardin peut se prolonger par d'autres problèmes d'optimum où l'on peut faire varier la forme du jardin ou des bêtes. Cela permet, par exemple, aux élèves d'explorer de nouvelles pistes qu'ils choisissent, se rapprochant en quelque sorte du travail du chercheur devant qui s'ouvrent de nombreuses questions. Cela permet d'autre part, au professeur, de différencier la situation suivant l'avancement des groupes, ce qui facilite la gestion du travail de groupe.

Enjeu de découverte et enjeu de vérité

Dans de nombreux exercices du secondaire qui commencent par « démontrez que... », il n'y a aucun enjeu de découverte ni aucun enjeu de vérité. En effet, l'élève sait ce qu'il doit trouver et, puisqu'il doit le démontrer, il sait aussi que c'est vrai. Pour mener sa démonstration, il part des hypothèses et sait qu'il doit utiliser les théorèmes du cours. Dans ces Situations Recherche, comme dans le *problème ouvert* (Arsac & Mante, 2007), l'enjeu de découverte est réel, l'élève ne sait pas *a priori* ce qu'il va trouver. De plus, la question de départ amène souvent l'élève à s'en poser d'autres qui sont de réelles questions pour lui. Il doit donc faire des essais pour pouvoir proposer des conjectures et s'attacher à la recherche d'éventuels contre-exemples.

Distinction de la condition nécessaire et de la condition suffisante

Dans cette situation « La chasse à la bête », comme dans d'autres, la preuve de la condition nécessaire (nombre nécessaire de pièges) n'est pas de même nature que la preuve de la condition suffisante (nombre suffisant de piège). Cela permet de travailler le fait que la validité d'une implication ne dit rien sur la validité de sa réciproque.

2. Caractéristiques de la mise en œuvre des SiRC

Travailler la démarche mathématique

À travers ces Situations Recherche, l'équipe Maths à Modeler cherche à permettre l'apprentissage de la démarche mathématique. En effet, pour pouvoir résoudre la tâche, les élèves sont amenés à faire des essais (Figure 15), à les organiser et les trier, à formuler des conjectures, à produire des contre-exemples, à modéliser la situation, à réduire la situation à des sous-cas. L'entrée dans la preuve passe par l'argumentation pour défendre ses conjectures. Ces « savoirs transversaux », au centre de l'activité mathématique, prennent ici tout leur sens dans la recherche d'une réponse à un questionnement. Ce n'est pas la réponse au problème qui est mise en avant par le professeur mais la recherche de moyens pour aller vers cette réponse, l'organisation de cette recherche et la justification des moyens utilisés.

Figure 15 : Nombreux essais organisés sur le cahier.

Dimension ludique

En plus d'une formulation concrète du problème, nous présentons nos situations à l'aide de matériel (souvent en bois). Par exemple, dans le cas de « La chasse à la bête », nous apportons des plateaux carrés de côté 5 cases (jardins) sur lesquels on pose des carrés noirs représentant les pièges et des pièces en bois représentant les bêtes. Cela permet aux élèves de mieux se représenter la situation mais surtout d'entrer facilement dans la résolution puisqu'ils sont d'abord attirés par la manipulation du matériel. De plus, les nombreux essais sont facilités par le matériel.

Même si le matériel doit être enlevé au bout d'un certain temps afin que les élèves se détachent du cas particulier pour modéliser et prouver dans un cas plus général (Godot, 2006), il n'en reste pas moins que ce matériel est un atout pour leur entrée dans la recherche. Très souvent, comme le montre la Figure 16 ci-dessous, les élèves utilisent d'eux-mêmes conjointement le matériel et leur cahier : sur ce dernier, ils peuvent garder une trace des essais qu'ils ont effectués sur le premier.



Figure 16 : Utilisation conjointe du matériel et du cahier.

Organisation de la mise en œuvre dans la classe

La mise en œuvre en classe de ces SiRC reprend certaines caractéristiques de celle des problèmes ouverts au sens didactique défini par l'IREM¹ de Lyon (Arsac & Mante, 2007). Les élèves mènent leur recherche par groupes de trois ou quatre. Le professeur ne doit en aucun cas les guider. Régulièrement, des bilans provisoires sont faits pour que les groupes puissent présenter l'avancée de leurs recherches. Lors de ces bilans, le professeur ne prend pas position sur la validité des résultats proposés mais il garantit la possibilité d'un débat mathématique. Dans le cas rare où tous les élèves sont d'accord sur une même proposition erronée, le professeur peut leur poser une question ou leur proposer un exemple qui pourrait les amener à rectifier leur avis d'eux-mêmes.

Lorsque cela est possible, la séquence est organisée de façon à ce que les élèves puissent présenter leur travail à d'autres élèves ou à des parents lors de la dernière séance. Pour préparer ces restitutions, ils doivent décider de ce qu'ils veulent montrer, se répartir le travail et fabriquer des affiches ou d'autres supports visuels.

3. Quelques effets dans les classes

Voici quelques effets de la mise en place des Situation Recherche dans les classes, illustrés par quelques témoignages d'élèves de CM2 (11 ans) qui ont passé cinq séances sur une Situation Recherche et qui l'ont présentée à une autre classe.

-

¹ Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Une autre façon de faire des mathématiques

Beaucoup d'élèves et même d'adultes apparentent les mathématiques à la mise en œuvre d'algorithmes de calcul ou de raisonnements pour lesquels il faut utiliser la « bonne » formule pour arriver au « bon résultat ». Au contraire, ces Situations Recherche nécessitent peu de prérequis et offrent un enjeu de découverte qui laisse une place à l'erreur, au tâtonnement et à la recherche d'exemples et de contre-exemples. Les mathématiques deviennent alors des outils pour essayer de répondre à des problèmes. En ce sens, beaucoup d'élèves et de professeurs ont le sentiment qu'ils font « d'autres mathématiques ».

Stéphanie :

On a appris à faire des maths autrement!

Hugo:

Des fois les maths c'est bof, bof... et là j'ai vraiment adoré parce que ça nous permettait de voir les maths d'une autre manière que leçon/exercice/leçon//exercice.

Clément:

Mais quand on dit « mathématiques », on pense au calcul et aux multiplications et aux divisions... mais c'est pas que ça les mathématiques! Y'a la logique dedans, c'est...chercher, y'a plusieurs étapes pour...

Flora:

Quand on se trompe, c'est pas grave, on a le droit, on peut recommencer...

Avoir une posture réflexive sur sa recherche

Lorsqu'ils doivent présenter les résultats de leur recherche à des personnes (élèves, parents) qui n'ont pas cherché à résoudre le problème, les élèves doivent revisiter leur propre recherche. Ils doivent décider ensemble de ce qu'ils souhaitent (et doivent) donner à voir ou non. Souvent, les élèves ont d'abord envie de ne montrer que le résultat final mais les discussions les amènent à prendre conscience qu'il est important aussi de montrer leur recherche : les pistes qu'ils ont ébauchées, les contre-exemples qui les ont obligés à les abandonner, les conjectures qu'ils ont émises, les différentes stratégies qui leur ont permis d'avancer... Le statut de chaque phrase énoncée doit être clair pour ceux qui n'ont pas cherché, il faut donc bien les différencier les unes des autres. Au moment de préparer le support visuel, des choix sont encore à effectuer : choix d'exemples par manque de place mais aussi choix de la modélisation de la situation la plus compréhensible et encore choix de l'ordre de présentation.

Eloane:

[Quand on présente], il faut être précis, il faut être concentré, il faut réfléchir.

Amina :

Il fallait savoir comment s'organiser, fallait aussi savoir placer les choses du bon ordre.

De nouvelles connaissances

Bien que ce ne soit pas l'objectif premier des SiRC, il arrive aussi qu'en cherchant, les élèves se construisent des outils mathématiques qui deviendront ensuite des savoirs enseignés. Par exemple, des élèves de CM2 ont découvert que, dans leur situation, pour trouver un résultat en fonction d'un nombre donné, il fallait toujours utiliser la même formule en changeant simplement le nombre qui varie. Ils ont commencé à rédiger leur affiche en écrivant leur

formule avec un espace de trois petits points pour placer le nombre choisi. Nous leur avons alors proposé de remplacer les petits points par la lettre N qui représenterait ainsi le nombre choisi. La situation a donc permis, à certains élèves d'avoir un premier aperçu de l'entrée dans l'algèbre sans que cela n'ait été voulu a priori.

Juliette :

Moi, y'a des choses que je trouve intéressantes, comme, par exemple, on a utilisé la lettre N pour calculer et moi je savais pas du tout qu'on pouvait utiliser la lettre N pour calculer.

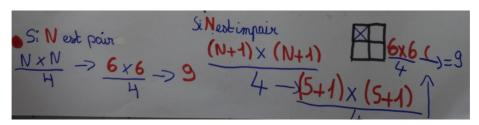


Figure 17: Utilisation de la lettre N en CM2.

Une autre place pour les élèves en difficulté

Lorsque nous mettons en place ces situations, nous voyons régulièrement des élèves, dont les professeurs nous disent qu'ils sont en difficulté, prendre goût à la recherche et produire des raisonnements qui étonnent leurs camarades et leurs professeurs. Nous faisons l'hypothèse que le fait qu'il n'y ait pas beaucoup de recours aux propriétés du cours et le fait que le matériel permette de faire des essais donnent une nouvelle place aux élèves en difficulté.

Comme ces situations ne sont en général pas reconnues tout de suite comme relevant des mathématiques, les élèves en difficultés n'ont pas cette réaction de peur et de rejet qui se manifeste souvent. Ils peuvent ici entrer dans la tâche sans avoir l'impression de « se mettre en danger ».

Marine:

D'habitude, je suis pas trop forte en maths mais là j'y arrive bien parce que... ben, c'est bien, on a bien rigolé! Et puis, j'ai présenté ça à mes parents! Mais ils ont rien compris...

Dans cette deuxième partie, nous avons voulu, à partir de la situation de « La chasse à la bête », présenter quelques caractéristiques des Situations Recherche.

III. DEUX CHAMPS DE RECHERCHE: DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES ET MATHEMATIQUES DISCRETES

Dans cette troisième partie, nous montrons comment différents types de recherche se développent autour des SiRC. Certaines recherches permettent la conception des SiRC, d'autres analysent leur potentiel pour le travail de classe ou les situations de médiation. Ces recherches mobilisent des chercheurs de différentes communautés.

1. Interactions entre mathématiques discrètes et didactique des mathématiques

Les développements des SiRC s'est fait à l'interface entre deux domaines de recherche : les mathématiques discrètes et la didactique des mathématiques. Les mathématiques discrètes apportent un champ de problèmes dont certaines caractéristiques sont spécifiques. En plus d'apporter des problèmes qui sont des « candidats potentiels » à des situations d'apprentissage, la collaboration avec les mathématiques discrètes contribue à la réflexion épistémologique sur la nature de l'activité de recherche mathématique et la spécificité du discret (et des objets et raisonnements en jeu). La didactique des mathématiques apporte, elle, un questionnement sur les potentiels de ces problèmes et des outils pour penser leurs usages dans la classe (et en situation de médiation). Ce travail a permis d'explorer des problèmes ouverts ou actuels pour la recherche en mathématiques discrètes, étudiés dans l'interaction entre mathématiciens et didacticiens, pour concevoir de nouvelles Situations Recherche. On peut reconnaître dans ce travail une intention de transposer l'activité du chercheur vers la classe avec une certaine « fidélité ».

Nous donnons ici une liste non-exhaustive de situations développées pour la classe et la médiation, associées aux branches de la recherche en mathématiques discrètes desquelles elles sont issues :

- La chasse à la bête Optimisation dans les graphes,
- Pavages par des dominos Couplages parfaits,
- Chemins, cycles et arbres dans la grille (chemins et cycles hamiltoniens dans les graphes, sous-arbres couvrants),
- La roue aux couleurs (combinatoire des permutations),
- Chercher la frontière (algorithmique et optimisation),
- Jeu du chocolat (théorie des jeux, jeux combinatoires),
- Les reines / les caisses de dynamite (généralisation du problème des huit reines, problèmes d'optimisation sur les sous-ensembles de sommets dans un graphe).

La collaboration a aussi débouché sur des caractérisations des Situations Recherche pour la classe et sur différents travaux de recherche spécifiques en didactique des mathématiques. Nous revenons ici sur les caractéristiques identifiées et les travaux didactiques qui se sont développés.

2. Des Situations Recherche pour la classe étudiées pour elles-mêmes

Les Situations Recherche pour la classe ont pour objectif principal de permettre aux élèves d'avoir une activité relativement proche de celle du chercheur. C'est pourquoi, elles ont été étudiées principalement pour ce potentiel de développement de connaissances et savoir-faire relatifs à la démarche de recherche mathématique elle-même.

Revenons à l'exemple de « La chasse à la bête ». Parmi les activités et connaissances mises en jeu on peut identifier, entre autres :

- travail d'un problème d'optimisation (identification de solutions recevables, solution non améliorable, solution meilleure que toute autre),
- interprétation en termes de condition nécessaire/ condition suffisante (il faut/il suffit),
- les conditions nécessaires et suffisantes se prouvent d'une manière très différente,
- entrée dans l'activité de recherche mathématiques (conjectures, exemples et contreexemples, cas particuliers/généralisation, construction d'outils ou de théories ad-hoc, argumenter, prouver...).

Ces Situations Recherche ne visent pas nécessairement des savoirs notionnels spécifiques. Il pourrait y en avoir, liés au discret, mais ils ne constituent pas l'enjeu de la situation. Elles

visent des savoirs dits parfois « transversaux », liés à la logique, au raisonnement, aux heuristiques de résolution de problèmes, à la démarche de recherche. La solution du problème (« 8 pièges sont nécessaires et suffisants dans le cas de bêtes 1x3 et d'un jardin 5x5 ») n'est pas l'objectif de la situation, c'est la recherche elle-même, et ce sont des éléments liés à cette recherche qui seront institutionnalisés.

Le choix du champ des mathématiques discrètes permet, en tout cas dans les situations développées, de constituer un milieu de recherche abordable dans lequel peu de concepts « complexes » seront mis en jeu. Par contre, la complexité de la situation se situe du côté de la richesse des raisonnements, des stratégies de résolution et des preuves qu'elle permet d'aborder. Cette idée repose sur l'hypothèse suivante, sous-jacente à de nombreux travaux sur les Situations Recherche : il est plus facile de travailler le raisonnement lorsque les objets en jeu ne sont pas complexes. Les notions mathématiques en jeu ne doivent donc pas faire obstacle au développement de l'activité de recherche et les mathématiques discrètes peuvent offrir des objets pertinents pour cela. Godot résume bien cette idée : « Même s'il n'est pas familier, le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème est d'un accès facile afin que l'on puisse facilement « prendre possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution. » (Godot, 2006, p. 34)

Grenier et Payan (1998, 2003) ont proposé une caractérisation de ces situations selon cinq critères :

- (a) Le problème abordé doit être proche de la recherche actuelle.
- (b) La question initiale doit être facile d'accès et ne doit pas être formalisée en termes mathématiques pour faciliter l'entrée dans le problème.
- (c) Des stratégies d'approche simples doivent exister pour permettre d'entrer dans une démarche de recherche.
- (d) De nombreuses stratégies de recherche peuvent être mises en place, les méthodes de résolutions ne sont pas désignées.
- (e) Une question résolue peut amener à se poser d'autres questions : il n'y a que des critères de fin locaux.

Le critère (a) témoigne de la proximité des situations à la recherche en mathématiques. Cette proximité est rendue possible par les spécificités des mathématiques mises en jeu : les objets mis en jeu sont très simples et accessibles aux élèves, alors que les questions mathématiques (ou leur généralisation) peuvent se révéler extrêmement complexes. Ce critère est souvent affaibli sous la forme suivante : le problème abordé doit être suffisamment éloigné des mathématiques rencontrées par les élèves pour les placer hors des techniques et méthodes dont ils disposent usuellement.

Les critères (b) et (c) ainsi que la citation de Godot concernent la dévolution possible du problème aux élèves afin qu'ils entrent dans une démarche de résolution.

Le critère (d) concerne la possibilité du développement de stratégies de recherches diverses, plus ou moins fructueuses, mais qui contribuent à une proximité avec le travail du chercheur face à un problème nouveau, ainsi qu'à un potentiel pour une confrontation riche des stratégies lors de phases de mise en commun et discussion des résultats entre pairs.

Il peut sembler paradoxal de se placer dans un cadre nouveau, voire inconnu pour les élèves, tout en revendiquant que les objets doivent avoir une certaine familiarité permettant une dévolution et une focalisation sur les raisonnements et les propriétés. C'est justement un équilibre entre ces deux conditions que doit respecter la situation : des objets suffisamment proches pour permettre l'appropriation de la question et la construction d'un certain milieu expérimental, mais, assez rapidement, des questions qui résistent et nécessitent un travail de recherche pour l'élève.

Le critère (e), enfin, est caractéristique de la volonté de transposer certains aspects de l'activité du chercheur : la résolution ne se termine jamais (en théorie) puisque chaque

solution peut donner lieu à de nouvelles questions. C'est ainsi que la résolution du premier cas de « La chasse à la bête » donne lieu à de nouveaux problèmes, en modifiant les valeurs des variables (forme des bêtes) ou en généralisant (taille quelconque du jardin). L'appropriation par l'élève du «geste» de se poser de nouvelles questions face à un problème résolu, tout comme celui de « resserrer » le problème dans le cas d'un problème trop général pour être résolu directement, peut devenir un enjeu d'apprentissage (heuristique).

Sur ce point, le travail de Godot (2005), apporte des éléments d'éclairage, avec la notion de variable de recherche. Lors d'une SiRC une forte responsabilité est déléguée à l'élève. En effet, à partir de la situation initiale, il a le choix de ses questions et donne la direction qu'il souhaite à ses recherches. Certaines variables de la situation (didactiques ou non) sont laissées à la disposition de l'élève pour organiser son travail de recherche. Il peut alors y avoir une rupture vis-à-vis du contrat didactique usuel de la classe.

Les variables de recherche sont des variables de tâches inhérentes à la situation recherche, elles définissent les différents sous-problèmes qui lui sont rattachés et impliquent des tâches différentes (Godot, 2005 p.133.)

On voit apparaître ici plus nettement cette intention de transposition de l'activité du chercheur, par l'autonomie laissée à l'élève dans l'abord du problème, de ses sous-problèmes, de ses variantes...

3. Des situations pour étudier la spécificité des mathématiques discrètes

Les Situations Recherche ont aussi permis le développement de recherches sur les spécificités des mathématiques mises en jeu.

Certains travaux se sont intéressés à la situation spécifique des mathématiques discrètes dans les curriculums. Ils montrent la potentialité qu'il pourrait y avoir à y introduire des contenus de mathématiques discrètes (Cartier, 2008, par exemple pour la théorie des graphes), en regardant ce qui existe et est possible dans certaines niches où elles existent. On peut cependant se demander si l'absence de ces mathématiques des curriculums n'est pas l'un des facteurs qui contribue à la possibilité de faire vivre des Situations Recherche en appui sur ces mathématiques « accessibles mais inconnues » comme nous l'avons noté précédemment.

Ouvrier-Buffet (2009, 2014) et Grenier (2009, par exemple), se sont intéressées à la spécificité des raisonnements en mathématiques discrètes. Cette question soulève aussi celle de la transférabilité de ces raisonnements à d'autres champs des mathématiques (énumération de tous les cas dans le fini par exemple, raisonnement d'optimisation spécifique au problème...) mais aussi les potentialités pour comprendre la spécificité et l'intérêt de certains résultats classiques du cours de mathématiques qui deviennent faux (ou plus faibles) dans les cas discrets. D'autres travaux (Grenier, 2012, par exemple) soulignent aussi la pertinence d'étudier certains raisonnement dans des situations discrètes bien choisies qui permettent de mieux saisir la portée de ces raisonnements, notamment la récurrence qui peut être travaillée dans un cadre plus riche que celui de la preuve de formules algébriques.

Enfin, notons que la spécificité des objets discrets proposés permettent souvent de développer des théories ad-hoc. Ces micro-théories, construites spécifiquement pour la résolution du problème, permettent de mieux comprendre certains concepts mathématiques, comme par exemple, comprendre ce qu'est la définition en mathématiques et quel est son statut dans le travail de recherche et de preuve.

4. Les Situations Recherche en classe comme support de recherche

Certains travaux de recherche se sont appuyés sur les situations de recherche pour la classe pour développer des recherches sur d'autres questions. Nous prendrons pour exemple le travail de thèse de Giroud (2011) qui s'est intéressé à la démarche expérimentale en mathématiques. Nous prendrons pour exemple un concept développé dans sa thèse et proposé pour la recherche en didactique des mathématiques : la notion de *concept-problème*. En appui sur la notion de concept dans les travaux de Vergnaud (1990), Giroud propose la définition suivante :

- « Nous considérons que le concept-problème sur un problème P est composée des éléments suivants :
- l'ensemble des problèmes P qui donnent du sens à P, nous parlerons d'espace problème ;
- l'ensemble des invariants opératoires qui correspondent aux connaissances sur lesquelles repose l'action du sujet en situation de résolution d'un élément de P;
- l'ensemble des représentations R que l'on peut associer aux éléments de **P**. » Cette notion lui permet de décrire le concept-problème relatif à des problèmes donnés. Ainsi, pour « La chasse à la bête », cela donne la synthèse suivante :

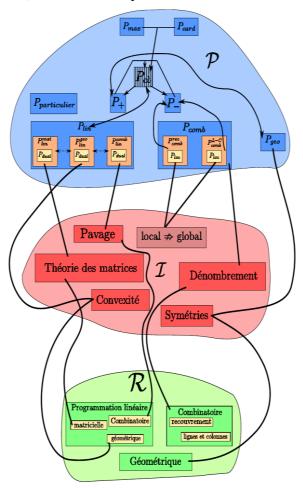


Figure 18 : Concept-problème de « La chasse à la bête », d'après Giroud (2011).

À l'issue de ce travail, Giroud identifie deux intérêts du concept-problème à des fins didactiques :

• Le concept-problème est une aide à l'analyse a priori d'une situation, il permet de faire des hypothèses sur certains obstacles, difficultés ou représentations manquantes.

L'établissement de la conception d'un élève (à l'aide d'une expérimentation) et de sa confrontation au concept-problème permet alors de vérifier ces hypothèses.

• Le concept-problème est une aide aux choix des variables de recherche.

5. Ancrages didactiques

Les travaux de recherche sur les Situations Recherches et le développement collaboratif de ces situations s'ancrent principalement dans deux cadres théoriques (déjà mentionnées dans les paragraphes précédents): la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) qui apporte un cadre pour penser la mise en œuvre des situations et leur analyse, et la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990).

Ces théories sont partagées plus ou moins implicitement avec les chercheurs en mathématiques impliqués dans le développement des situations. En particulier, les outils de la Théorie des Situations Didactiques, tels que les variables didactiques et l'analyse a priori, permettent de penser l'organisation des situations développées collaborativement avec les mathématiciens. Un certain modèle épistémologique de l'activité mathématique agit aussi comme une référence partagée entre mathématiciens et didacticiens et sert de cadre à la construction des situations et à la recherche.

IV. MATHS A MODELER

Pour terminer, nous présentons la structuration de l'équipe Maths à Modeler et ses missions. Nous souhaitons montrer comment la collaboration entre didacticiens et mathématiciens, notamment, vit et comment elle permet d'articuler recherche, formation et médiation.

1. Une équipe

L'équipe Maths à Modeler n'est pas une équipe de recherche au sens où on l'entend habituellement puisque les différents membres n'appartiennent pas tous au même laboratoire de recherche. Il faut prendre le mot « équipe » dans le sens d'un groupe de personnes qui travaillent ensemble sur un même projet « Maths à Modeler ». Initié à Grenoble en 2000, le réseau Maths à Modeler se répartit depuis sur le territoire français et hors du territoire. Voici une carte recensant quelques lieux et quelques membres.

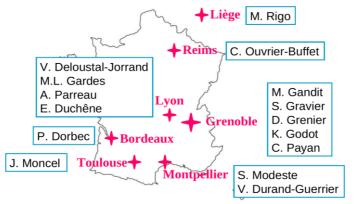


Figure 19 : Quelques membres du réseau Maths à Modeler et leur localisation².

-

² Pour une liste détaillée : http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr

On retrouve divers profils dans les membres de l'équipe : des chercheurs en didactique des mathématiques et en mathématiques discrètes (parfois dans des équipes d'informatique) principalement, mais aussi des chercheurs en sciences de l'éducation, en psychologie et en sciences de l'information et de la communication. En plus des chercheurs, l'équipe comprend des enseignants, formateurs et médiateurs scientifiques.

Les interactions entre ces différents profils se font à différents niveaux :

- Conception des situations
- Analyse des situations
- Expérimentations des situations
- Étude des pratiques des chercheurs en mathématiques

Des rencontres annuelles, « Les Journées Maths à Modeler », permettent à tous les acteurs d'échanger autour d'exposés et d'ateliers. Des problèmes mathématiques qui pourraient donner lieu à de nouvelles Situations Recherche y sont présentés, discutés, analysés. Des retours d'expériences, en appui sur les pratiques de terrain de chacun, y sont rapportés. C'est le lieu d'échanges et d'interactions privilégié entre les membres qui ne travaillent pas ensemble au quotidien.

2. Des missions

L'équipe Maths à Modeler a pour principal objectif de faire partager à un large public une certaine vision des mathématiques : celle où elles sont des outils qui permettent de répondre à des problèmes que l'on se pose. C'est ce projet qui va être à l'origine des différentes missions que se donne l'équipe.

Ce projet peut, bien sûr, se décliner dans les classes où, grâce aux SiRC, les élèves rencontrent des « mathématiques différentes » de celles qui sont enseignées au quotidien et entrent dans la démarche et la preuve mathématique.

Cette intervention directe dans les classes se fait à différents niveaux : cycle 3 à l'école primaire, collège, lycée ou même université. Cette participation peut se faire sous diverses formes, une seule séance de deux heures ou une séquence de plusieurs séances, et dans différents contextes : Maths en Jeans³, semaine des maths, et autres interventions de chercheurs dans les classes, Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon⁴, UE transversales à l'université, etc.

Ce projet amène aussi l'équipe à intervenir dans la formation des professeurs : en formation initiale (masters Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation (MEEF) premier et second degré), en formation continue, dans des séminaires IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et en participant à des groupes IREM, en formation des doctorants, dans des colloques tels que journées APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), colloques Copirelem (Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire) et Corfem (COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré). Là encore, les interventions sont de natures diverses : cours dans des unités d'enseignement de didactique, en séminaire recherche, encadrement de mémoires, groupes projets, stages de formation continue, par le biais d'ateliers ou conférences dans des colloques, etc.

D'autre part, le projet ayant une large visée, l'équipe souhaite aussi toucher le grand public auquel, grâce aux SiRC, elle montre un aspect du métier de chercheur en mathématiques. Elle intervient donc dans des situations de diffusion de la science dans différents lieux et évènements : Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon, La Grange des

_

³ https://www.mathenjeans.fr/

⁴ http://mmi-lyon.fr/

maths⁵, Fête de la science, Semaine des maths, Nuit des chercheurs, Festival Remueméninges⁶, Salon Culture et Jeux Mathématiques⁷, etc. De plus, certaines de ses Situations Recherche sont reproduites dans des institutions de diffusion des sciences au grand public (Palais de la découverte⁸ par exemple).

Enfin, pour faire connaître ce projet, l'équipe diffuse les résultats de la recherche par des publications (recherche et ressources) mais aussi en participant à des colloques (recherche, formation, grand public) ou encore par l'encadrement de mémoires de master et thèses.

V. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons souhaité présenter le projet Maths à Modeler et comment il articule recherche, formation et diffusion. Il est porté par une équipe qui s'agrandit et se développe en France et à l'étranger. La motivation du projet peut être résumée par l'envie de proposer à un large public des Situations Recherche qui lui permettent de « chercher comme un chercheur ». Cela permet, d'une part, de travailler la démarche mathématique mais aussi, d'autre part, de faire connaître le métier de chercheur en mathématiques ou encore de donner une autre vision des mathématiques que celle véhiculée classiquement par l'école.

Dans la première partie, nous avons présenté la Situation Recherche « La chasse à la bête » et montré comment des élèves de collège pouvaient s'en emparer pour entrer dans la démarche mathématique : faire des essais, des conjectures, chercher des contre-exemples, réduire le problème, argumenter et prouver.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes appuyés sur cet exemple pour montrer les spécificités des Situations Recherche et l'intérêt qu'elles pouvaient avoir pour l'enseignement des mathématiques. Les élèves rencontrent des mathématiques « différentes » de celles habituellement enseignées, qui sont présentées de manière ludique facilitant ainsi la dévolution de la situation. Les preuves y prennent une place importante l'enjeu de découverte étant réel, et le travail sur le raisonnement est facilité par les objets mathématiques « faciles d'accès ».

La troisième partie a montré comment deux champs de recherche, celui des mathématiques discrètes et celui de la didactique des mathématiques, pouvaient se compléter dans ce projet. De plus, ce dernier donne lieu à des recherches de différentes natures. En effet, les recherches permettent de concevoir des Situations Recherche qui elles-mêmes, en retour, ouvrent de nouvelles questions de recherche en didactique des mathématiques. Ces nouvelles recherches sont liées à la spécificité des mathématiques discrètes par exemple ou aboutissent à la construction de nouveaux outils didactiques tels que le « concept-problème ».

Enfin, dans la dernière partie, nous présentons rapidement la constitution de l'équipe et les missions qu'elle se donne dans le cadre du projet Maths à Modeler : des missions de formation, de diffusion et de recherche. Toutes ces missions s'articulent autour des Situations Recherche et se nourrissent les unes les autres. La recherche permet de développer la formation et la diffusion qui, de manière réciproque, apportent de nouvelles questions de recherche.

_

⁵ https://www.la-grange-des-maths.fr/

⁶ http://remuemeningesisere.free.fr/

⁷ https://www.cijm.org/salon

⁸ www.palais-decouverte.fr/

Parmi ces nouvelles questions, certaines nous donnent des perspectives de recherche. En voici certaines : Quelles spécificités des mathématiques discrètes pour les SiRC ? Quelle formation des enseignants? Et en particulier, comment faire pour qu'ils s'approprient nos SiRC et les mettent en œuvre dans leurs classes? Quelles possibilités d'interaction avec d'autres recherches, en particulier en didactique? Quels apprentissages ont lieu dans les situations de diffusion ou vulgarisation?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Arsac, G. & Mante, M. (2007). Les pratiques du problème ouvert. SCÉRÉN-CRDP de l'Académie de Lyon. Brousseau, G. (1998). Théorie des Situations Didactiques. La Pensée Sauvage.
- Cartier, L. (2008). Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation. Université Joseph Fourier, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/
- Giroud, N. (2011). Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe. Université Joseph Fourrier Grenoble. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00649159
- Godot, K. (2005). Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs. Université Joseph Fourier. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00102171
- Godot, K. (2006). La roue aux couleurs: une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. Grand N, 78, 31-53.
- Grenier, D. (2009). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 161-178. Grenier, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit X*, 88, 27-47.
- Grenier, D. & Payan, C. (1998). Spécificité de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. Recherches en didactique des mathématiques, 18(2), 59-100.
- Grenier, D. & Payan, C. (2003). Situations de recherche en classe, essai de caractérisation et proposition de modélisation. Cahiers Du Séminaire National de Recherche En Didactique Des Mathématiques.
- Ouvrier-Buffet, C. (2009). Mathématiques Discrètes: un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, 31-45.
- Ouvrier-Buffet, C. (2014). Discrete mathematics teaching and learning. Encyclopedia of Mathematics Education,
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches En Didactique Des Mathématiques, *10*(2.3), 133–170.

ETUDE DU PROCESSUS D'INSTITUTIONNALISATION DANS LES PRATIQUES EFFECTIVES DE FIN D'ÉCOLE PRIMAIRE : LE CAS DE L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS.

Cécile **ALLARD** (LDAR, UPEC, UCP, UA, UR, P7) <u>cecile.allard@u-pec.fr</u>

Résumé

Au terme d'une première séance sur la découverte des fractions à partir de bandes de papier à plier, une enseignante demande aux élèves ce qu'ils ont appris. Ces derniers répondent qu'ils ont appris à plier des bandes pour fabriquer d'autres bandes plus petites. Ce n'était pas la réponse attendue! D'autres précisent que deux moitiés reforment la bande entière. Cette réponse parait plus exploitable par l'enseignante. Dépasser le « faire » pour les élèves n'est pas aisé. Conduire et construire des séances qui amènent les élèves à donner du sens aux manipulations, à s'extraire « du concret » et du contexte pour conceptualiser des nouveaux nombres requiert de l'enseignant de mobiliser des connaissances didactiques et mathématiques pour choisir les itinéraires cognitifs (Robert et Rogalski, 2002) et exposer des connaissances en s'appuyant sur le travail des élèves.

Dans nos travaux de recherche (Allard, 2015), nous avons suivi les parcours de quatre enseignants se destinant à être maitre formateur. Notre recherche vise ainsi à caractériser le processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives de professeurs expérimentés. En particulier nous avons pu suivre une enseignante dès ses moments de préparation jusqu'en classe. Nous montrerons à partir de nos données en quoi l'exercice d'une bonne vigilance didactique (Charles-Pézard, 2010) est primordial pour assurer l'existence d'un processus d'institutionnalisation abouti. Enfin, l'étude des systèmes de contraintes et d'injonctions paradoxales provenant notamment de l'institution positionnera le déficit éventuel d'institutionnalisation comme un problème de la profession

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALLARD, C. (2015). Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école : le cas de l'enseignement des fractions, thèse de doctorat, Paris 7.

CHARLES-PEZARD, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique, *Recherches en didactiques des mathématiques*, 30(2),197-261.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies*, 2(4), 502-528.

USAGE DES RESSOURCES DANS LES PRATIQUES ORDINAIRES TENSIONS ENTRE LA PREPARATION D'UNE SEQUENCE ET SA REALISATION DANS LA CLASSE DE MATHEMATIQUES

Audrey **DAINA**Université de Genève et HEP Vaud
audrey.daina@hepl.ch

Résumé

Dans le cadre de notre thèse, nous avons étudié l'usage des ressources pour l'enseignement des mathématiques dans le contexte suisse romand, où les enseignants du primaire disposent de moyens d'enseignement officiels communs et unifiés. Nos analyses des pratiques ordinaires de cinq enseignants genevois s'appuient sur le cadre de la double approche ergonomique et didactique (Robert et Rogalski 2002) et le modèle de la structuration du milieu (Margolinas 2002). Elles ont permis de mettre en évidence une grande variabilité dans les pratiques observées, ce qui nous a conduit à distinguer trois types de profil afin de caractériser l'usage fait de ces ressources (Daina, 2013). Dans le cadre de cette contribution, nous nous intéresserons plus particulièrement aux tensions qui peuvent être identifiées, d'une part, entre le discours de l'enseignant et l'usage de la ressource dans sa pratique effective et, d'autre part, entre le choix de tâches et le projet d'enseignement.

Mots clés

Analyse de pratiques enseignantes ; moyens d'enseignement ; préparation des leçons ; diversité d'approches théoriques

Introduction

Notre recherche de doctorat (Daina 2013) s'inscrit dans le courant de recherches en didactique des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des pratiques enseignantes ordinaires dans une approche compréhensive. Plus particulièrement, nous avions pour objectif de décrire le travail de préparation des leçons en lien avec l'usage des ressources dans le contexte particulier suisse romand. La réalité des pratiques ordinaires étant complexe, nous avons dès le début de notre questionnement abordé la problématique en convoquant différents cadres théoriques (TSD, Double approche, TAD). Dans cette contribution, nous présentons de manière générale le parcours de la thèse dans la première partie, en expliquant comment nos questions de recherches se sont élaborées et en illustrant de quelques exemples notre méthodologie. Dans la deuxième partie, nous développons plus particulièrement la question des tensions qui peuvent exister entre la préparation d'une séquence et sa réalisation en classe, ceci en nous référant au contexte global dans lequel prend place l'enseignement ainsi qu'aux éléments plus particuliers qui concernent chaque enseignant.

I. UNE THESE SUR L'USAGE DES RESSOURCES DANS LES PRATIQUES ORDINAIRES

1. Problématique et dispositif de recherche

A Genève comme dans tous les cantons suisses romands, les enseignants disposent, pour les mathématiques, de moyens d'enseignement officiels communs et unifiés. Pour tous les degrés de la scolarité obligatoire, ces Moyens d'Enseignement Romands pour les Mathématiques (MERM) sont réalisés sous mandat de la Conférence Inter-cantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), l'instance de coordination régionale réunissant les conseillers et conseillères d'Etat en charge de l'éducation dans les différents cantons l. Les MERM sont donc approuvés conjointement par tous les cantons romands en vue d'une introduction généralisée. Ils sont rédigés par différents groupes d'auteurs selon les degrés, majoritairement des enseignants expérimentés qui sont accompagnés de conseillers didactiques. Nous avons décrit le processus de rédaction de cette ressource, en comparaison notamment avec le système français, ce qui permet de mieux comprendre le contexte sociohistorique qui donne sens à la ressource et à l'usage qui peut en être fait (Arditi & Daina 2012; Daina & Dorier 2015). Nous en reprenons les éléments principaux dans le prochain chapitre du texte qui aborde la question des contraintes et des conditions qui influencent l'activité de l'enseignant.

Concernant les degrés 6 à 8 de l'enseignement primaire (élèves de 9 à 12 ans), l'édition des MERM actuellement utilisée dans les classes date des années 1990-2000², elle suit d'ailleurs l'ancienne numérotation des degrés (modifié en 2009 avec l'entrée en vigueur du concordat HARMOS) ce qui implique que le moyen d'enseignement intitulé 4ème primaire (4P) est utilisé pour le degré de la 6ème primaire actuel, le 5P pour le degré 7 et le 6P pour le degré 8. Par souci de clarté, nous avons choisi pour rédiger cette contribution de garder la numérotation utilisée dans les ressources MERM, qui était d'ailleurs celle en vigueur en 2008 lors de nos observations : 4P (CM1) – 5P (CM2) – 6P (6e).

Cette version des MERM véhicule des conceptions de l'enseignement/apprentissage clairement orientées selon une approche socio-constructiviste. Constitués majoritairement de «situations-problèmes» directement adressées à l'élève, ces moyens d'enseignement sont organisés sous la forme d'un «recueil d'activités³». Les situations proposées sont classées par thématiques, mais sont indépendantes les unes des autres et ne suivent aucune hiérarchie ou classement selon des niveaux de difficulté. Le choix des activités, ainsi que leur organisation dans une progression, sont à la charge de l'enseignant qui doit faire un travail de préparation important. Pourtant, ceci n'est que très peu mis en avant dans les prescriptions officielles et reste même souvent peu problématisé dans les MERM qui sont très peu prescriptifs et donnent peu d'information sur les possibilités d'organisation des situations proposées.

¹ La suisse compte 26 cantons, dont 7 suisses romands. Ils sont souverains en matière d'éducation et disposent de leur propre système scolaire.

² L'ensemble de ces moyens d'enseignement sont actuellement en train d'être réécrits et seront progressivement distribués dans les classes dans les quatre prochaines années.

³ Nous utilisons le terme « activité », (que nous écrirons toujours en italique pour le distinguer de l'usage dans le cadre de la double approche, voir cadre théorique), comme un terme générique pour indiquer de manière générale à la fois ce que d'aucuns appellent des exercices, des situations-problèmes, des activités de recherche, etc. En effet, c'est le terme utilisé dans les MER et dans plusieurs manuels.

Il nous parait donc essentiel d'étudier les pratiques ordinaires concernant le travail de préparation en lien avec cette ressource particulière de manière à rendre visible une part essentielle du travail de l'enseignant. Dans ce but, nous avons observé cinq enseignants genevois à l'occasion de la séquence d'enseignement sur le thème de la notion d'aire : un en 4P (9-10 ans), un en 5P (10-11 ans) et trois en 6P (11-12 ans). Nous avons filmé le déroulement de la séquence en classe (entre 4 et 12 séances selon les classes) et avons réalisé plusieurs entretiens avant et après la séquence.

Notre étude s'est ensuite organisée en deux parties : nous avons d'abord dégagé et analysé les contraintes et conditions de l'enseignement de la notion d'aire dans le contexte genevois puis nous avons analysé les pratiques des cinq enseignants. Nous reprenons ces deux aspects dans la suite du texte avant de développer plus particulièrement la question des tensions entre préparation et réalisation d'une séquence.

2. Une question préalable à l'étude des pratiques

Un premier objectif de notre recherche est de caractériser le contexte dans lequel se trouvent les enseignants genevois lorsqu'ils préparent leurs cours à propos de la notion d'aire. A l'instar de Coulange (2012), nous partons de l'hypothèse qu'il existe « des contraintes et des conditions, extérieures au travail du professeur avec les élèves au sein de la classe, qui influencent et conditionnent son activité » (p. 31). Pour analyser ces contraintes et conditions nous nous référons au cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD). L'étude du contexte institutionnel, des ressources et des caractéristiques inhérentes au savoir en jeu sont menées en amont de l'analyse des pratiques enseignantes.

En nous référant au cadre de la TAD, nous sommes amenés à considérer l'enseignant comme un *individu* qui occupe une *position* dans une *institution*.

En venant occuper ces positions, les individus deviennent les sujets des institutions – sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 82)

Selon cette première entrée dans le questionnement, nous considérons donc « l'enseignement primaire des mathématiques à Genève » comme une institution que nous allons étudier de manière à mettre en évidence dans quelle mesure et de quelle manière elle détermine et contraint les pratiques enseignantes.

De plus, modéliser l'enseignant comme un sujet d'une institution amène à introduire le concept de *rapport institutionnel au savoir*.

Etant donné un objet (par exemple un objet de savoir) et une institution, la notion de rapport renvoie aux pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet en question, soit donc à «ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ». Connaître un objet c'est avoir à faire avec – et souvent avoir affaire à - cet objet. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 83)

Ceci nous conduit à étudier le processus de *transposition didactique* (Chevallard 1991) et à introduire la notion *d'organisation praxéologique* (Bosch & Chevallard, 1999) pour modéliser les pratiques liées aux savoirs (dans notre cas les pratiques liées à la comparaison et la mesure d'aires). Afin de mettre en place notre dispositif de recherche, nous nous sommes inspirée de différentes recherches qui questionnent les pratiques enseignantes en lien avec les institutions, notamment Coulange (2000, 2001) et Ravel (2007).

L'objet de savoir qui est en jeu dans les séances que nous avons observées dans le cadre de notre recherche devient donc un élément central de la problématique. Afin d'identifier les contraintes en jeu, nous nous inspirons du travail de Coulange (2000). Nous cherchons à définir les *contraintes externes génériques* (liées aux dispositifs didactiques généraux) et *les*

contraintes spécifiques (liées aux aspects épistémologiques de l'objet de savoir mathématique à enseigner) en étudiant les documents prescriptifs officiels, les plans d'études et les différentes ressources mises à disposition par l'institution, de manière à mettre en évidence les choix mathématiques et didactiques qui sont privilégiés et tendent à influencer les pratiques enseignantes.

Ceci nous conduit à formuler une première question de recherche : Quelles sont les contraintes externes génériques que nous pouvons mettre en évidence dans l'analyse du contexte institutionnel ? Quelles sont les contraintes spécifiques relatives à l'enseignement de la notion d'aire ?

Concernant la première question, nous avons décrit le processus particulier qui sous-tend la création et l'usage des moyens d'enseignement dans le contexte suisse romand (Arditi & Daina 2012 ; Daina & Dorier 2015). Après avoir recensé et étudié l'ensemble des ressources disponibles dans le contexte genevois ainsi que les textes institutionnels qui en sont à l'origine ou les accompagnent, nous avons pu mettre en évidence que les MERM se veulent porteurs d'innovation et ont, entre autres, comme objectif de contribuer à une harmonisation de l'enseignement des mathématiques dans les classes suisses romandes. Parallèlement, ils sont le fruit d'un travail de collaboration qui doit être approuvé par diverses instances cantonales et inter-cantonales, qui interviennent sur le fond et la forme. Ces moyens ne peuvent donc être trop prescriptifs et nécessitent une ouverture afin, par exemple, d'être compatibles avec différents plans d'études. Nous avons montré que les tensions entre volonté d'harmonisation et respect de l'autonomie et des différences de chaque canton contraignent, d'une part, les auteurs de la ressource et ont pour conséquence, d'autre part, le développement de multiples « ressources secondaires » spécifiques à chaque canton. Les enseignants se retrouvent donc au moment de définir les objectifs et planifier leur enseignement des mathématiques face à divers documents, de statuts et de provenances différentes. Nous avons par exemple pu mettre en évidence une difficulté à mettre en évidence une « ligne directrice claire » en termes de choix de transpositions de la notion d'aire dans les différents documents disponibles.

D'un point de vue méthodologique, nous avons construit une *typologie de tâches* qui nous permet d'analyser le contenu proposé dans les ressources et de définir les *contraintes spécifiques* liées à l'enseignement de la notion d'aire. Ceci a impliqué une étude de la notion d'aire d'un point de vue mathématique et didactique et a conduit à réaliser un exemple d'organisation mathématique relative à la notion d'aire, qui sert ensuite de référence pour analyser *la transposition didactique* de la notion d'aire dans les MERM (Daina 2013).

Au terme d'un travail d'analyse à la fois déductif, se basant sur les plans d'études, et inductif, à partir des *activités*, voici les sept types de tâches que nous avons identifiés dans notre analyse:

- T1 Comparer des aires ou des périmètres
- T2 Mesurer une grandeur à partir d'une unité
- T3 Appliquer une formule d'aire à une forme géométrique donnée
- T4 Trouver des polygones de périmètre et/ou d'aire donnés
- T5 Optimiser le partage d'une surface en des surfaces d'aire et/ou de formes données
- T6 Construire un Tangram sous contrainte
- T7 Conversion d'unité de mesure d'aire.

Ceci nous a permis d'analyser les *activités* des MERM que nous avons catégorisées selon le type de tâche auquel elle se rapporte. Nous avons ensuite identifié pour chaque tâche des variables didactiques, signe de la particularité de la tâche au sein du type, et les techniques, hiérarchisées selon les variables identifiées (voir Daina 2012 pour un exemple de l'analyse détaillée *d'une activité*).

Cette analyse nous permet donc de catégoriser chaque *activité* et de mettre en évidence les éléments qui seront intéressants à prendre en compte dans l'analyse de l'organisation des

tâches en scénario et des déroulements en classe, dont nous ne reprenons dans la suite que les éléments principaux concernant la question de la transposition dans les ressources 4P, 5P et 6P.

Une analyse mathématique et didactique de la notion d'aire (Daina 2013) nous a permis de mettre en évidence que, bien que l'usage en mathématiques soit d'identifier aires et mesures grâce au choix d'une unité, les recherches en didactique ont montré qu'un travail sur les grandeurs indépendamment des nombres est essentiel afin de construire du sens autour du concept d'aire et de sa mesure. C'est un choix didactique qui marque une certaine distance par rapport aux pratiques mathématiques au niveau du savoir savant. Il est alors intéressant de mettre en évidence, dans l'étude de la transposition des savoirs mathématiques et didactiques relatifs à la notion d'aire dans les ressources en Suisse romande, quels choix sont valorisés.

Notre analyse des MERM montre qu'en 4P le mesurage n'intervient que comme une technique secondaire dans la plupart des tâches proposées. En effet, les *activités* impliquent principalement des tâches de type T1, comparaison d'aires, et notre analyse des variables didactiques met en évidence que, dans la majorité des *activités*, les techniques de comparaison par inclusion et superposition (éventuellement après découpage et recollement) et de comparaison par pavage sont les premières visées. C'est en 5P puis en 6P qu'intervient le passage progressif de procédures de comparaison et de mesurage par pavage à des procédures de calcul faisant intervenir l'aire en tant que grandeur bidimensionnelle (type de tâches T1 et T2 puis T3). On retrouve donc ici un potentiel d'organisation mathématique qui permet théoriquement de construire du sens autour du concept de grandeur. Cependant, même si les commentaires du livre du maître donnent brièvement quelques informations sur les enjeux de l'enseignement de la notion d'aire, il reste difficile pour l'enseignant de prendre conscience de ce potentiel et faire les bons choix d'activités.

Le concept *d'organisation mathématique* nous permet donc de décrire, par l'analyse des ressources, la réalité mathématique qui peut potentiellement se construire dans une classe. Précisions que dans notre travail nous n'étudions que les organisations mathématiques et donc un aspect restreint de ce niveau de modélisation. En effet, la TAD utilise aussi la notion d'organisation didactique, mais nous avons privilégié d'autres cadres théoriques pour décrire « la manière dont » l'organisation mathématique est proposée en classe.

3. Etudes des pratiques, deux entrées théoriques

L'objectif de notre recherche était de décrire de quelle manière les enseignants préparent leurs cours et utilisent les ressources en tentant d'expliciter leurs choix et de montrer une cohérence dans leur projet. Au regard de la complexité de cette activité qui, d'une part, prend place à la fois dans la classe et en dehors de la classe, d'autre part, dépend comme nous venons de le voir de contraintes et de conditions internes et externes, deux ressources théoriques nous ont permis de mettre en place notre cadre théorique et notre méthodologie d'analyse des pratiques: le cadre de la double approche de Robert et Rogalski (2002) et les travaux de Margolinas (2002) sur la structuration du milieu. Ces deux courants de recherche en didactique des mathématiques proposent en effet d'étudier les pratiques enseignantes en mettant en rapport le travail de préparation et la réalisation effective de l'enseignement dans la classe (voire l'apprentissage des élèves). L'enseignant est alors considéré comme un élément agissant sous l'influence de contraintes, qui se font écho hors et dans la classe.

Nous allons tout d'abord présenter brièvement le cadre théorique de la double approche ainsi que la méthodologie d'analyse qui découle de cette approche théorique. En guise d'illustration, nous reprendrons quelques résultats généraux qui ont déjà été plus largement présentés (Daina 2012 et 2013 ; Daina & Dorier 2015). Nous présenterons dans la deuxième partie le cadre de la structuration du milieu qui nous permettra de développer plus

particulièrement la question des tensions entre la préparation d'une séquence et sa réalisation dans la classe.

Double approche

Le cadre de la double approche s'inscrit dans le contexte global de la Théorie de l'Activité (Robert, 2015). Dans cette théorie, « l'activité est co-déterminée par le sujet et une situation dans laquelle il est engagé qui est composée d'une tâche et d'un contexte » (Roditi, 2010 p.203). La figure ci-dessous, adaptée à partir des travaux de Roditi (2010), permet de se représenter l'activité de préparation des cours.

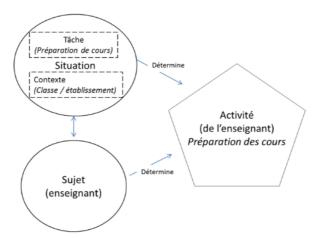


Figure 1 : L'activité de préparation des cours co-déterminée par le sujet et la situation.

Cette approche théorique associe donc le point de vue de la didactique des mathématiques d'une part, et de l'ergonomie cognitive d'autre part.

Afin de décrire les pratiques, nous considérons plusieurs niveaux :

Des analyses locales, à partir des déroulements en classe, sont nécessaires pour comprendre les activités potentielles des élèves et détecter des activités de l'enseignant ou de l'enseignante, mais ce sont des analyses plus globales qui permettent de compléter ces informations en reconstituant les fils conducteurs des choix et des décisions, instantanés ou préparés, c'est-à-dire les invariants ou les déterminants. (Robert & Rogalski, 2002, p. 508)

Robert et Rogalski décrivent ainsi cinq composantes, qui sont prises en compte à différents niveaux de l'analyse des pratiques individuelles.

Deux premières composantes, cognitive et médiative, « sont relatives à ce que l'enseignant provoque effectivement comme activités des élèves, essentiellement en classe » (Robert, 2015).

- La composante cognitive concerne les choix de l'enseignant en matière de contenu : organisation des tâches, de leurs quantités, de leurs ordres, etc. Cette composante résulte de l'étude du projet préalable de l'enseignant (scénario).
- La composante médiative concerne les choix correspondants au déroulement en classe, relatifs au mode d'interaction entre l'enseignant et ses élèves : type d'intervention pour accompagner le travail de l'élève (prévue ou improvisée), modification des tâches, formes de travail imposées par l'enseignant.

La combinaison de ces deux composantes permet de reconstituer « la fréquentation des mathématiques qui est installée, ce qui est valorisé par les scénarios et leur accompagnement et ce qui pourrait manquer » (Robert & Rogalski, 2002, p. 514). Les composantes inférées à

partir d'une ou de plusieurs séances de classe sont ensuite recomposées pour dégager des logiques d'action.

Précisons que les pratiques ne se réduisent pas à la somme des composantes, mais identifier certains effets des contraintes correspondant à chacune des composantes permet de reconstituer la cohérence des pratiques des enseignants, c'est-à-dire d'y retrouver des *logiques d'action* (conscientes ou non) qui semblent guider les décisions de l'enseignant (Chesnais, 2009, p. 21).

Cette analyse donne donc une description des activités de l'enseignant. Il reste à interpréter et dégager les déterminants de ces pratiques.

Dans cet objectif, trois autres composantes permettent de décrire le travail de l'enseignant selon différentes dimensions et « donnent accès à la manière dont l'enseignant intègre les déterminants liés à son environnement professionnel, à son histoire, à ses propres représentations. » (Robert, 2015)

- La composante personnelle concerne les propres représentations du professeur en tant qu'individu particulier.
- La composante institutionnelle concerne ce que les pratiques doivent aux programmes, ressources (manuels), horaires, exigences de l'administration. Ces contraintes peuvent s'avérer contradictoires avec ce qu'aurait eu envie de faire l'enseignant.
- La composante sociale concerne ce que les pratiques doivent à la dimension sociale du métier d'enseignant : son inscription dans un établissement particulier, milieu social des élèves, collaborations entre collègues.

Reprenant la méthodologie de Chesnais (2009) nous étudions ces trois composantes à partir des entretiens, de l'étude du contexte institutionnel, du contexte de l'établissement, de documents externes à la classe. Elles sont également inférées à partir des analyses des séquences observées en classe.

Deux questions de recherche guident alors nos analyses : Quelles fréquentations des mathématiques sont valorisées, selon les scénarios et leurs déroulements locaux, par les différents enseignants ? Quelles hypothèses peut-on formuler concernant les composantes qui déterminent les pratiques des enseignants de notre étude ?

Deux études de cas afin d'illustrer nos analyses des pratiques dans le cadre de la double approche

Nous ne reprenons pas ici en détail la méthodologie de traitement des données, de création des synopsis et du codage des enregistrements vidéo qui est à la base de nos analyses (voir Daina & Dorier, 2015; Daina, 2013), afin de nous centrer sur quelques résultats déterminants par rapport à la problématique des tensions entre préparation d'une séquence et sa réalisation dans la classe de mathématique, ceci pour deux des cinq enseignants que nous avons observés. Précisons de manière générale que les analyses comprennent une analyse globale du projet d'enseignement qui a pour objectif de caractériser la composante cognitive. Le scénario est ainsi reconstitué a posteriori, à partir des vidéos du déroulement en classe de la séquence selon la méthodologie de Roditi (2005). Une fois le scénario reconstitué, il est décrit sous forme d'organisation praxéologique mathématique grâce aux analyses des tâches proposées dans la séquence et à la caractérisation selon le type de tâche. Une deuxième étape de la méthodologie concerne l'analyse locale du déroulement d'une séance, l'objectif étant de caractériser la composante médiative en analysant la succession des phases (consigne, réalisation, mise en commun, etc.), les types d'interactions que l'on peut observer pendant ces phases, l'organisation sociale ainsi définie. Cette analyse détaillée du déroulement d'une séance permet également de mettre en évidence des événements particuliers (emblématiques des pratiques de l'enseignant). L'ensemble de ces observations plus locales sont ensuite mises

en regard et éventuellement pondérées avec ce qui s'observe au niveau de la séquence dans sa globalité grâce aux codages des vidéos dans leur ensemble.

Présentation du contexte et des profils des deux enseignantes :

Mathilde et Sophie travaillent dans la même école et l'année de notre observation elles enseignent respectivement dans une classe de 6P et de 5/6P (double degré). Depuis le début de l'année, elles collaborent pour élaborer une planification pour les 6P, dans différentes disciplines (mathématiques, allemand, français, etc.). Sophie prévoit ensuite seule le programme pour les 5P. Elles ont toutes deux obtenu une licence en sciences de l'éducation mention enseignement à l'université de Genève, respectivement en 2002 et 2004. Mathilde enseigne en 6P depuis trois ans. Sophie a principalement enseigné en 5P, c'est la première fois qu'elle a des 6P. Nous avons assisté au rendez-vous durant lequel elles ont planifié, avec une troisième collègue (non observée) la séquence concernant le thème 9 : Aires et volumes. L'enregistrement audio de cette rencontre ainsi que les entretiens pré et post réalisés avec les enseignantes nous permettent de caractériser leur profil.

Lors de cette rencontre les enseignantes se basent sur les MERM et une liste d'activités réalisées par Mathilde l'année d'avant, afin de décider du choix d'activités qu'elles vont proposer aux élèves dans les deux classes en parallèle. Nous avons pu mettre en évidence que le temps joue comme une contrainte forte dans l'organisation de la séquence (Daina, 2013).

L'analyse des échanges entre les enseignantes, lors de cette rencontre, montre qu'elles parlent peu des objectifs d'enseignement qui semblent implicitement connus et partagés. Notons que les enseignantes n'entrent pas non plus dans une analyse très approfondie des *activités*. Les propos utilisés pour qualifier les différentes *activités* restent très superficiels : « celle-ci elle est sympa », « elle est bien, car elle permet de travailler sur tous les polygones » ou « celle-ci est plus compliquée, elle demande un long temps de recherche ». Les raisons plus profondes qui justifient le choix de telle ou telle *activité* par rapport à la construction de la séquence restent implicites. A ce sujet, Mathilde précise lors de l'entretien que ses collègues lui font « confiance », la liste d'*activités* a déjà été proposée les deux années précédentes, et est initialement le fruit d'une ancienne collaboration.

Notons que ni Mathilde, ni Sophie ne gardent de trace écrite de ce travail de préparation, si ce n'est la liste des *activités* proposées et certains éléments de correction qu'elles notent directement au fil des exercices dans leur exemplaire personnel du livre de l'élève. On retrouve chez Sophie le même mode de fonctionnement que chez Mathilde concernant la préparation de l'enseignement, d'abord établir une liste d'*activités* puis préparer plus spécifiquement chaque séance. Sophie parle également de « confiance » ce qui montre l'importance de la collaboration et la place qu'elle tient dans la préparation, en comblant ce qui est ressenti comme un « manque » des MERM.

Cependant, l'étude des propos de Sophie lors du dernier entretien nous permet de mettre en évidence que les objectifs des deux enseignantes sont en fait très différents. Pour Sophie les procédures numériques et notamment l'introduction des techniques de calcul d'aires pour les triangles, les parallélogrammes et les losanges représentent un enjeu important de la séquence, bien que ce ne soit pas au programme de 6P. Il lui paraît important d'avancer le programme de l'année suivante, ce qu'elle juge comme un avantage pour les élèves. De son côté, Mathilde elle, considère que l'objectif principal concerne la compréhension de la notion d'aire et les formules de calcul pour le carré et les rectangles. Elle se base sur cet objectif minimal, car elle sait que dans les épreuves cantonales, épreuve de référence que passent tous les élèves de 6P genevois, il n'y a jamais eu d'exercice qui demande plus au niveau de la notion d'aire.

Il y a donc, d'une part, une distance entre les objectifs que se fixent Sophie et Mathilde. D'autre part, ces objectifs restant totalement implicites dans le travail de collaboration, ils ne sont pas partagés par les deux enseignantes. L'analyse des scénarios et de leur déroulement va permettre de voir de quelle manière vont évoluer les projets d'enseignement des deux enseignantes qui partent pourtant d'une même liste d'activités.

Analyse globale des projets d'enseignement

Matilde et Sophie ont toutes deux consacré 5 séances au thème 9 pour des durées totales quasi identiques de respectivement 6h30 et 6h15. Les schémas ci-dessous permettent d'avoir une vision globale des scénarios de Mathilde et de Sophie avec le détail des références des tâches (L8 se réfère à l'exercice 8 du livre de l'élève, F11 à l'exercice 11 du fichier de l'élève, etc. Tpara est ce que nous avons appelé « une tâche parallèle » et Tprol « une tâche de prolongement », toutes deux sont improvisées par l'enseignante lors du déroulement.)

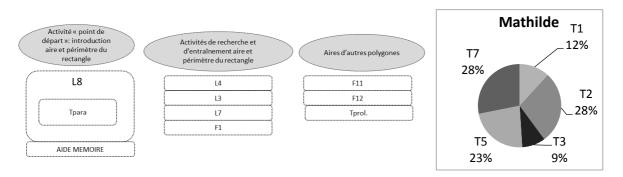


Figure 2 : Structure globale du scénario de **Mathilde** et répartition selon les types de tâches⁴.

L'analyse a priori du scénario de Mathilde nous a permis de mettre en évidence une structure en trois parties : une séance introductive, trois séances consacrées à l'aire du carré et du rectangle et une séance d'introduction à l'aire d'autres polygones. L'étude en termes de type de tâches nous permet de mettre en évidence une cohérence et une adéquation avec ce que proposent les MERM, même si nous notons un surinvestissement du type de tâches T2 qui s'explique par la contrainte de temps qui pousse l'enseignante à aller « à l'essentiel ». Nos observations du déroulement global du scénario montrent de longues phases durant lesquelles le même type de tâche est proposé et une évolution dans les techniques de résolution (Daina, 2013).

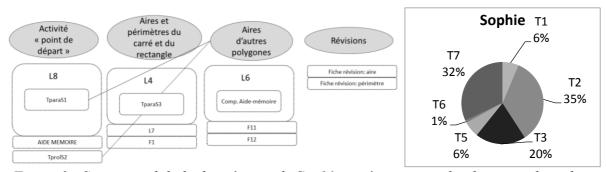


Figure 3 : Structure globale du scénario de **Sophie** et répartition selon les types de tâches.

L'analyse a priori du scénario de Sophie nous a permis de mettre en évidence une structure en quatre parties : une *activité* d'introduction, une série d'*activités* sur l'aire et le périmètre de

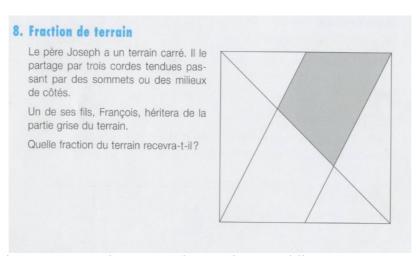
_

⁴ Pour la répartition des types de tâches, le calcul des pourcentages correspond au temps passé sur un type de tâche par rapport à la durée complète de la séquence (moments de transitions « non mathématiques » non compris). Il tient compte du fait que certaines activités des MERM proposent des sous-tâches et relèvent donc de deux types de tâches (pour plus de détails voir Daina (2013, p.157-158)).

carré et du rectangle, une série d'énoncés d'introduction à la mesure d'aires d'autres polygones réguliers et une séance de révision. La structure du scénario met en évidence que les *activités* des MERM sont souvent mêlées à des tâches parallèles ce qui induit un scénario plutôt éclaté. Nous détaillons par exemple dans la suite que la première tâche parallèle est en fait en lien avec la deuxième partie du scénario sur l'aire d'autres polygones. L'étude en termes de type de tâches montre que Sophie axe principalement son projet autour de trois types de tâches (T2, T7 et T3) qui sont directement destinées à entraîner des techniques numériques (mesurage, application de formules pour les calculs d'aires, changement d'unité). Bien que Sophie et Mathilde partent du même projet commun, nous voyons bien comment ont évolué les deux scénarios. Alors que le départ est presque identique, l'écart se creuse au fil des séances. Il est pourtant intéressant de noter que dans les entretiens, Mathilde et Sophie ne semblent pas conscientes de ces différences et continueront sans doute à préparer une liste d'*activité* en commun l'année suivante.

Analyse du déroulement d'une séance dans les deux classes

Nous allons à présent nous intéresser au déroulement de la première séance dans les deux classes. Durant cette séance la tâche *Fraction de terrain* (voir ci-dessous) a été proposée dans les deux classes, comme prévu dans le projet que les enseignantes ont élaboré ensemble. Nous avons choisi quelques résultats significatifs afin de montrer que des tensions se font sentir dès l'introduction du thème et qu'il devient problématique pour Sophie de proposer une tâche qui ne porte pas les objectifs personnels qu'elle vise.



La procédure visée pour résoudre cette tâche consiste à établir un rapport entre les aires de la surface grisée et de la surface totale. L'équivalence des aires est au cœur de ce problème, mais les connaissances à mettre en jeu ne sont donc pas indiquées explicitement dans l'énoncé. Le tableau ci-dessous synthétise la succession des phases durant la réalisation de l'*activité* dans les deux classes

Sophie		Mathilde	
Phases	Durée en minutes	Phases	Durée en minutes
Consigne	7	Consigne	3
Réalisation individuelle	6	Réalisation individuelle	10
Mise en commun	3	Mise en commun	7
Réalisation individuelle	3	Tâche parallèle (aide mémoire)	19
Mise en commun	8	Réalisation individuelle / correction	39
Tâche parallèle (interruption)	5		
Mise en commun (reprise)	8		
Aide-mémoire	4		
Tâches de prolongement	8		

Nous voyons très clairement ici que, bien que le même énoncé ait été proposé aux élèves, sa gestion en classe est totalement différente entre les deux enseignantes, ce qui fait que l'activité des élèves n'est par conséquent pas du même type dans les deux classes.

Dans la classe de Mathilde le nombre de phases est limité. La consigne est très courte. Lors de la mise en commun, les interactions témoignent d'une discussion entre l'enseignante et les élèves, voire entre les élèves seuls qui ont une participation active dans l'avancée de la discussion. Mathilde gère ensuite au niveau individuel l'avancée du projet global à partir de ses interactions avec chaque élève (Daina, 2013). En effet, il est important pour elle de laisser les élèves travailler de manière autonome, de les laisser « se débrouiller ». La mise en commun est un moment de discussion entre elle et ses élèves, les solutions sont partagées, mais elle ne fait aucune validation à ce moment-là. La correction de l'activité est gérée de manière individuelle et Mathilde se donne alors la possibilité de voir le travail de chaque élève.

Dans la première séance de Sophie nous observons d'abord un temps de consigne plus long, qui entre en écho avec le souci exprimé par Sophie lors des entretiens de s'assurer que les élèves comprennent bien la consigne, et ne soient pas « bloqués » sans savoir « quoi faire ».

Il apparaît ensuite que les moments de mise en commun et de réalisation individuelle s'enchaînent très rapidement. Ceci est emblématique du mode de fonctionnement de Sophie qui a tendance à guider la réalisation de la tâche. En effet, elle insiste dans les entretiens sur l'importance « d'avancer ensemble ». Aussi, contrairement à ce que nous avons pu observer dans la classe de Mathilde pour la séance 1, ici l'avancée du projet est gérée en collectif. Sophie contrôle globalement le travail des élèves en faisant régulièrement des mises en commun durant lesquelles ils se mettent d'accord sur une stratégie de résolution qui va devenir commune : la décomposition-recomposition de la surface grisée.

Cependant, du fait de ce guidage de l'activité des élèves, la tâche est également déviée sur des tâches annexes proposées par Sophie. Ainsi elle oriente l'activité des élèves de manière à introduire des connaissances liées aux applications de formules pour calculer l'aire de parallélogrammes, triangles et losanges qui sont des objectifs centraux de son projet global. L'exemple ci-dessous permet d'illustrer l'introduction d'une tâche de prolongement qui montre bien de quelle manière le projet plus personnel de Sophie entre en tension par rapport au déroulement de la tâche principale qui ne sert alors plus que de support matériel pour introduire d'autres connaissances dans un enseignement frontal au tableau.

Dans la continuation de la mise en commun, l'enseignante reprend un schéma réalisé au tableau afin d'illustrer la stratégie de découpage/recollement et propose la consigne cidessous :

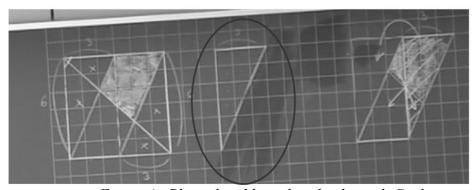


Figure 4 : Photo du tableau dans la classe de Sophie.

S1-ca-Tprol-Consigne: calculer l'aire du triangle rectangle (reprise schéma *activité* **précédente)** Ens: je vais vous effacer un petit bout /[...]mon triangle ici / qui me donne l'aire de ce triangle ? / heu là vous savez parce qu'on l'a calculée avant ... on a dit que un triangle vaut quoi ? .../ 9 cm² / vous savez

que c'est neuf parce qu'on l'a vu /, mais je fais comment / je ne sais pas que ça vaut neuf / je vais même carrément vous changer / on va dire qu'il n'y a pas le trois / comment est-ce que je fais / pour faire l'aire de ce triangle ... je suis un peu embêtée .../ Karen?

La tâche est réalisée en commun, toute la classe participe.

Les élèves de Sophie n'auront passé que peu de temps sur la tâche *Fraction de terrain*, car la tâche de prolongement intervient à la $27^{\text{ème}}$ minute de la première séance. Nous voyons bien ici que Sophie propose une tâche complémentaire, dans le prolongement du travail fait sur la première *activité*, de manière à aller « plus loin » par rapport aux objectifs prévus dans les moyens officiels et aborder le calcul de l'aire d'un triangle. Cette tâche est problématique, car les élèves connaissent déjà la valeur, qu'ils n'ont pas « calculée avant», comme le stipule Sophie, mais qu'ils ont obtenue grâce à un travail de déduction, de découpage/recollement des différentes surfaces du dessin. Elle va donc changer une donnée du problème. Sophie fait ici preuve d'improvisation, mais les choix qu'elle est amenée à faire sont fortement liés à sa conception du thème et à la manière dont elle a préparé son cours.

Ce mode de gestion a comme conséquence une perte du sens du problème original qui ne devient qu'un prétexte à l'introduction de mini tâches qui visent à introduire des techniques. Ceci pose également des problèmes au niveau de la construction d'un milieu qui puisse devenir significatif pour l'élève.

Les analyses des codages par rapport à l'intégralité de la séquence, les itinéraires cognitifs mis en évidence, l'analyse de la succession des phases, de l'organisation sociale permettent de confirmer les différences entre Mathilde et Sophie et nous observons une grande variabilité dans les pratiques de ces deux enseignantes, ce qui a pour première conséquence que l'*activité* des élèves n'est pas du tout la même dans la classe de Sophie que dans celle de Mathilde, bien que les mêmes *activités* soient proposées lors des deux premières séances. Ce qui questionne le plus reste que ces différences ne semblent pas être la conséquence de choix conscients des enseignantes, qui, malgré leurs différents modes de fonctionnement, trouvent un intérêt à préparer ensemble les séquences. Les entretiens semblent même montrer qu'elles pensent partager les mêmes objectifs, avec un effet fort du contexte institutionnel qui laisse penser que l'usage de la ressource garantit une harmonisation.

Pourtant, aux vues des résultats de nos analyses, des questions nous paraissent importantes : Pourquoi ces deux enseignantes trouvent un intérêt à collaborer ? Comment interpréter ces doubles niveaux de discours ?

II. TENSIONS ENTRE PREPARATION ET REALISATION EN CLASSE

Afin de répondre à ces questions, nous allons à présent nous intéresser à un autre pan de nos analyses qui se réfère au cadre de la structuration du milieu. En modélisant l'activité de l'enseignant en différents niveaux, cette approche nous donne un outil supplémentaire pour comprendre les interactions en jeu dans la préparation et la réalisation en classe d'activités dans le contexte genevois.

1. Structuration du milieu

Nous nous référons ici au modèle de la structuration du milieu élaboré par Margolinas sur la base des travaux de Brousseau (1988, 1996). Dans ce cadre, l'activité du professeur est donc

modélisée grâce aux outils de la théorie des situations. La structuration du milieu permet de modéliser l'activité du professeur en interaction avec un milieu décomposé en plusieurs niveaux, résumés dans le tableau qui suit.

Milieu	Elève	Professeur	Situation
M+3 :M-Construction		P+3 : P-Noosphérien	S+3 : Situation
			Noosphérienne
M+2 : M-Projet		P+2 : P-Constructeur	S+2 : Situation de
			construction
M+1 : M-Didactique	E+1 : E-Réflexif	P+1 : P-Projeteur	S+1 : Situation de projet
M0 : M-Apprentissage	E0 : Elève	P0 : P-Professeur	S0 : Situation didactique
M-1 : M-Référence	E-1 : E-	P-1 : P-Observateur	S-1 : Situation
	Apprenant		d'apprentissage
M-2 : M-Objectif	E-2 : E-Agissant		S-2 : Situation de
			référence
M-3 : M-Matériel	E-3 : E-Objectif		S-3 : Situation objective

Margolinas (2002) précise que les milieux supérieurs et inférieurs ne sont pas de même nature

Les connaissances de l'enseignant évoluent, d'une part, en interaction avec le milieu didactique inférieur (niveau 0). Celui-ci comprend des éléments, comme par exemple la réaction des élèves, qui vont l'obliger à s'adapter, et donc dans une certaine mesure, faire évoluer ses connaissances. On dira alors que ce milieu est de nature *antagoniste*⁵ (Margolinas 2002).

Pour ce qui concerne l'interaction entre le professeur et les milieux supérieurs (au niveau +1, +2 et +3), la question est plus complexe. L'hypothèse de Margolinas (2002) consiste à considérer, de manière générale, que le milieu supérieur d'une situation est « le plus souvent » un milieu *allié*, car il ne comprend pas d'autres acteurs que le professeur. En effet, si on considère les situations +1, +2 et +3, le professeur y dispose d'une grande liberté et même s'il est contraint par les programmes, il peut « éviter les confrontations », ce qui le rapproche d'un rapport fictif avec un milieu *allié*. Cependant, Margolinas précise que dans le cas d'un projet en collaboration avec d'autres collègues ou d'un changement de programme la nature du milieu peut changer et jouer le rôle d'un milieu *antagoniste*.

Finalement, il est important de préciser que ce modèle n'est pas temporel, mais structurel. En effet, le tableau présenté ne rend pas compte de la complexité temporelle de l'activité du professeur.

D'un point de vue méthodologique le modèle de la structuration du milieu nous a permis de décrire le filtre au travers duquel l'enseignant est susceptible de prendre des décisions lors des moments de préparation, aussi bien que dans la classe, grâce à une analyse descendante du point de vue du professeur:

Dans cette analyse on va tout d'abord considérer la façon dont le professeur est inséré dans son « milieu professionnel » au sens social du terme et quelles sont les valeurs qu'il privilégie dans celles qui sont caractéristiques de cette profession, à une époque donnée, dans un lieu donné. Quand on va examiner la façon dont il construit un thème mathématique, par exemple quand il choisit les documents sur lesquels il va s'appuyer, son interaction avec le milieu noosphérien conduit à considérer que certaines constructions sont plus légitimes [...] Le projet de leçon qu'il va construire est lui aussi conditionné par les choix opérés au niveau de la construction du thème [...] (Margolinas, 2005, p. 8)

Ce cadre théorique va donc nous permettre de mettre en évidence les phénomènes liés aux prises de décisions de l'enseignant dans l'action (Comiti, Grenier & Margolinas, 1995) et

⁵ « On dira qu'un milieu est de nature antagoniste, s'il est susceptible de produire des rétroactions sur les connaissances du sujet. On dira qu'un milieu est de nature alliée s'il ne permet que l'action du sujet, mais n'est pas susceptible de produire des rétroactions. » (Margolinas 2002, p.148)

ainsi de questionner le lien entre le travail de préparation des cours et les interactions en classe.

2. Le milieu du professeur

Dans l'objectif de décrire plus précisément les éléments qui composent le filtre au travers duquel l'enseignant prend ces décisions, nous avons été amenés dans le cours de nos analyses à approfondir et étendre notre modélisation du concept de milieu du professeur en le considérant selon les composantes que Perrin-Glorian (1999) a distingué afin de caractériser le milieu de l'élève : milieu matériel, milieu social et milieu cognitif. Nous faisons cette analogie avec toutes les précautions liées au fait que le professeur ne se trouve pas dans une situation didactique, contrairement à l'élève.

Milieu matériel

Le milieu de l'élève contient d'abord des objets matériels (milieu matériel) qui jouent comme des *contraintes objectives*. Le milieu matériel contient des connaissances qui sont fournies avec le texte du problème. Cette partie est en principe la même pour tous les élèves.

Dans le cadre de notre travail, ceci nous conduit à émettre l'hypothèse suivante :

Etant donné que dans le contexte suisse romand, les attentes institutionnelles concernant l'enseignement des mathématiques sont véhiculées, en partie, par le biais des moyens MERM, qui sont distribués à tous les enseignants, cette ressource devient un élément déterminant du milieu, car elle permet de diffuser des connaissances nécessaires à la mise en place d'un projet d'enseignement conforme aux attentes institutionnelles.

Les MERM et les plans d'études constituent donc le milieu matériel, car ce sont des éléments communs à tous les enseignants qui jouent comme une contrainte objective. D'autres objets matériels peuvent ensuite s'ajouter selon les cas, cependant ces objets n'ont pas la même valeur, car ils ne sont pas prescrits par l'institution.

Milieu social

Le milieu peut contenir une composante sociale (milieu social), lorsque d'autres acteurs sont impliqués dans l'interaction. Dans le cas de l'élève, cette composante joue un rôle dans le cas d'une situation de formulation ou de validation.

Dans le cas de l'enseignant, le milieu social joue un rôle lorsque l'enseignant se trouve dans une situation de réalisation en classe de son projet (il interagit avec les élèves). Cette composante peut également jouer comme une composante essentielle du milieu lorsque plusieurs enseignants collaborent dans la préparation d'une séquence.

Milieu cognitif

Le milieu de l'élève est constitué de connaissances (milieu cognitif). Le milieu cognitif concerne les connaissances auxquelles le sujet a besoin de faire appel de lui-même. Dans le milieu cognitif, Perrin-Glorian distingue *le milieu potentiel* du *milieu activé (ou effectif)*.

Le milieu potentiel renvoie au milieu de la théorie anthropologique : c'est l'ensemble des objets pour lesquels le rapport personnel est stable et conforme au rapport institutionnel, lui-même stable. En fait, pour certains élèves ainsi que dans le cas où on met dans le milieu un artefact porteur de savoirs, le milieu potentiel peut déborder le milieu institutionnel.

Le milieu activé renvoie à la théorie des situations : c'est une partie de l'intersection MPS entre le milieu de la situation et le milieu potentiel (milieu potentiel relatif à la situation), la partie qui apporte effectivement des rétroactions aux actions de l'élève [...].

Dès l'analyse a priori, on peut prévoir que certaines connaissances supposées dans le milieu institutionnel ne seront pas disponibles pour tous les élèves et distinguer des situations différentes selon les groupes d'élèves, ce qui supposera des apprentissages différents. (Perrin-Glorian 1999, p 295)

Nous allons reprendre cette distinction pour caractériser le milieu avec lequel interagit l'enseignant lors des moments de préparation en tenant compte du fait que l'enseignant ne se trouve pas dans une situation didactique.

Comme nous l'avons mis en évidence dans notre analyse du contexte genevois, les MERM donnent à l'enseignant une grande responsabilité dans le choix et l'organisation des *activités* qu'il va proposer aux élèves. Lorsque l'enseignant se trouve dans la situation de devoir concevoir une séquence d'enseignement avec cette ressource, il doit donc faire appel (de luimême) à des connaissances mathématiques, didactiques, pédagogiques, etc. C'est ce que nous mettons en correspondance avec un milieu cognitif.

Afin que l'enseignant puisse remplir cette mission, l'institution et les concepteurs des ressources fournissent à l'enseignant plusieurs outils par le biais du milieu matériel (plans d'études, méthodologies, livres du maître). L'enseignant est supposé construire, à partir de ces textes, des connaissances qui lui permettront de se conformer aux attentes institutionnelles. L'ensemble des connaissances que contiennent ces textes constitue le *milieu institutionnel*. Le *milieu potentiel*, renvoie à la situation d'un enseignant générique qui aurait un rapport personnel stable et conforme au rapport institutionnel.

Se pose alors la question de l'idonéité du rapport personnel des enseignants à ces objets institutionnels, de la même manière qu'elle se pose pour l'élève.

Si le rapport personnel de certains élèves n'est pas idoine au rapport institutionnel, [certains] objets de savoirs placés dans le milieu de la situation adidactique risquent de ne pas pouvoir apporter les rétroactions attendues aux actions des élèves. (Ibid., p. 294)

Le rapport personnel des enseignants à un objet se construit sur la base des formations (initiales et continues), des expériences antérieures de situation d'enseignement, des collaborations, des lectures, des caractéristiques personnelles, etc. C'est ce que nous nommons le milieu de la situation pour un professeur particulier (P(x)) qui renvoie donc au rapport personnel qu'un enseignant P a construit par rapport à un objet d'étude x dans diverses situations qui lui sont propres. Le milieu activé renvoie à l'intersection MPS entre le milieu active de la active active

Ceci nous conduit à formuler une seconde hypothèse :

Si les situations qu'a vécues un enseignant ne lui ont pas permis de construire un rapport personnel idoine au rapport institutionnel, il se peut alors que l'usage qu'il fera des MERM ne soit pas conforme aux attentes des concepteurs et plus largement aux attentes institutionnelles.

Les MERM sont par exemple fortement orientées du côté d'une approche socioconstructiviste de l'enseignement/apprentissage, ce qui peut ne pas correspondre aux conceptions de l'enseignant.

Cette idée peut être schématisée comme suit :

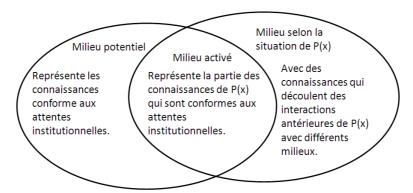


Figure 5 : Milieu potentiel, milieu activé, milieu selon la situation de P(x).

Lorsque l'enseignant réfléchit de manière générale à son enseignement (niveau +3), conçoit les grandes lignes de l'enseignement d'un thème particulier (niveau +2), détermine le scénario d'une leçon (niveau +1) ou gère la réalisation du scénario en classe (niveau 0), il le fait en interaction avec le *milieu de la situation* qui lui est propre, dont le *milieu activé* représente la partie qui concerne des objets pour lesquels le rapport personnel de l'enseignant est conforme et stable avec le rapport institutionnel.

Lorsque l'on fait une analyse descendante du point de vue de l'enseignant, il est donc possible de déterminer *a priori* si le milieu avec lequel un enseignant particulier interagit est favorable ou non à la construction d'une séquence en adéquation avec ce qui est attendu par les concepteurs des ressources MERM, ou plus généralement les attentes institutionnelles. A partir de ce schéma, plusieurs cas de figures peuvent être imaginés :

• Si le milieu potentiel est inclus dans le milieu de la situation de P(x), l'enseignant utilise les ressources en adéquation avec les attentes des concepteurs. Le milieu activé et le milieu potentiel se confondent.



Figure 6 : Adéquation.

• Si le *milieu potentiel* est partiellement inclus dans le *milieu de la situation* de P(x), cela veut dire que le rapport personnel de l'enseignant aux objets introduits par les MERM est partiellement conforme. Il y a donc dans ce cas dans le milieu avec lequel interagit l'enseignant, une tension entre le *milieu potentiel* et le *milieu activé*, car seule une partie des éléments du *milieu potentiel* sont pris en considération ce qui peut être source d'inadéquation ou de non-conformité aux attentes institutionnelles, ceci dans différentes mesures :

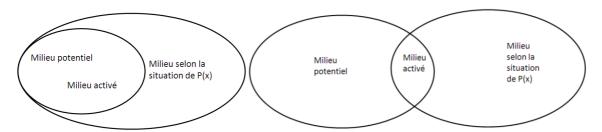


Figure 7 : Différents degrés de conformité par rapport aux MERM.

La question de recherche qui va nous intéresser à présent afin de mieux comprendre la problématique des tensions entre préparation et réalisation en classe concerne la cohérence du projet de l'enseignant et l'adéquation de ses choix par rapport aux particularités des ressources. D'une part, la question de la cohérence s'observe dans l'analyse des interactions entre les différents niveaux sur-didactiques : Quelles sont les conceptions de l'enseignement (+3) ? Comment sont interprétés les plans d'étude (+2) ? Comment le scénario des différentes leçons est-il déterminé (+1) ? D'autre part, ceci questionne l'adéquation entre les conceptions de l'enseignant et les conceptions véhiculées par la ressource aux différents niveaux du modèle (liens entre le milieu potentiel, le milieu activé et le milieu de la situation de P(x)).

Nous synthétisons ces idées dans la question suivante : Quelle cohérence observe-t-on dans l'analyse descendante du niveau idéologique au niveau didactique ? Comment caractériser le milieu de la situation propre avec lequel interagit l'enseignant ?

Très concrètement, cette approche nous a permis de proposer une méthodologie d'étude a priori du point de vue du professeur qui se base sur les principes de l'analyse descendante et qui permet de mettre en évidence un réseau de contraintes qui pèse sur les choix de l'enseignant.

Dans cet objectif, nous mettons en regard dans notre analyse le *milieu potentiel* (qui renvoie à la situation d'un enseignant générique qui aurait un rapport personnel stable et conforme au rapport institutionnel), le *milieu de la situation de* P(x) (qui renvoie au rapport personnel qu'un enseignant a construit par rapport à un objet d'étude dans diverses situations qui lui sont propres) et le *milieu activé* (qui renvoie à l'intersection MPS entre le milieu de la situation de P(x) (S), et le milieu potentiel (P)).

Notre analyse du contexte genevois et son système de ressources ainsi que notre étude de la transposition didactique de la notion d'aire dans les ressources nous permet de caractériser les attentes institutionnelles, et plus précisément le milieu institutionnel. Ceci nous permet donc de caractériser le milieu potentiel, qui est relatif à la situation « préparer un cours sur la notion d'aire en 6P à Genève » dans laquelle se trouvent les enseignantes. Le tableau ci-dessous permet de présenter de manière synthétique les éléments que l'on relève pour chaque degré dans le *milieu institutionnel*.

Niveau +3	Conception sur l'enseignement apprentissage : orientation socio-constructiviste			
	Rôle de l'enseignant: choisir des situations-problèmes qui vont permettre à l'élève			
	d'apprendre, gérer la dévolution, les phases de verbalisation et de validation.			
Niveau +2	<u>MERM</u>			
	- Construction du concept d'aire de rectangle.			
	- Approche des procédures de détermination de l'aire d'un parallélogramme, d'un losange et d'un triangle, en ramenant ces figures par découpages/recollement à un rectangle.			
	Epreuves cantonales			
	Compétences numérique, mesure des aires des carrés et des rectangles.			
Niveau +1	<u>Choix d'activités</u>			
	Potentiel > consolidation des apprentissages, situations-problèmes, mesure d'aire de			

polygones autres que le carré et le rectangle. (cohérent avec niveau +2) plan du thème→ 1^{er} niveau d'organisation des *activités*)

Afin de caractériser le *milieu de la situation de* P(x), nous nous basons sur les comptes rendus des entretiens et nos observations en classe qui permettent dans certains cas d'interpréter ce qui est dit lors des entretiens.

En décrivant le milieu avec lequel interagit l'enseignant en termes de *milieu potentiel*, *milieu activé* et *milieu de la situation de* P(x), nous visons à mettre à jour les tensions liées à une inadéquation entre le rapport personnel de l'enseignant aux objets mathématiques et didactiques relatifs à l'enseignement de la notion d'aire et le rapport institutionnel, que nous analysons à partir des ressources. La présentation de l'analyse pour les deux enseignantes va nous permettre d'illustrer ceci.

3. Analyse a priori du point de vue du professeur pour Mathilde

L'analyse a priori du point de vue de Mathilde est vraiment très intéressante, car elle permet de mettre en évidence la dynamique de construction du projet dont l'évolution devient explicite grâce à la collaboration et les interactions qu'elle implique, ce qui permet une cohérence dans *l'analyse descendante* du point de vue du professeur dont nous reprenons le détail par niveau.

<u>Au niveau +3</u>, l'analyse des entretiens montre que Mathilde se réfère directement aux MERM, qu'elle considère comme la ressource principale, à laquelle elle adhère dans une certaine mesure. En effet, elle souligne l'importance de laisser les élèves se confronter seuls aux problèmes qui sont proposés, ce qui correspond tout à fait à la philosophie. Néanmoins, il apparaît également que Mathilde se trouve dans un rapport critique par rapport à cette ressource. Ainsi elle se positionne explicitement contre certaines *activités* dont elle dit qu'elles lui « correspondent » moins. De même, elle prend une certaine distance par rapport à l'approche constructiviste, en précisant qu'elle préfère parfois introduire les éléments théoriques en amont de manière à pouvoir les réinvestir ensuite dans les problèmes.

Dans le cas de Mathilde, une collaboration avec un collègue (Pierre) les années précédentes, semble très importante dans la construction de son rapport personnel à la ressource MERM. En effet, celui-ci semble jouer le rôle de « pont » entre les valeurs de Mathilde et les valeurs des ressources, en rendant explicites certains éléments qui sous-tendent les MERM, ce qui permet ensuite à Mathilde de se positionner en connaissance de cause. Ceci permet la constitution du *milieu activé* avec lequel interagit Mathilde. Notre étude montre bien que Mathilde profite de la collaboration pour s'outiller dans l'usage de la ressource, ce qui garantit une certaine cohérence dans son utilisation (Daina, 2013).

Concernant le niveau +2, nous trouvons peu d'éléments dans le discours de Mathilde qui fassent référence à ce niveau de construction du thème d'étude, ce qui montre que ce niveau est sous-représenté. Le niveau de construction est déterminé par le bas, c'est-à-dire par le choix d'une série d'*activités*. Cependant, aucun indice ne nous permet de mettre en évidence un décalage entre le niveau de construction que sous-tendent les MERM et les prévisions de Mathilde concernant la suite des séances. De plus, la liste d'*activités* a été mise en place et organisée chronologiquement dans une dynamique de collaboration qui prend une importance à tous les niveaux (+3; +2; +1) ce qui assure une certaine cohérence, même si celle-ci reste implicite.

L'analyse du scénario en lien avec les entretiens a permis de mettre en évidence que les épreuves cantonales jouent également un rôle déterminant à ce niveau. En effet, face à la contrainte du temps, Mathilde va construire le thème autour d'un objectif minimum, l'aire du carré et du rectangle, et laisser de côté tout le deuxième pan du projet qui concerne la mesure de l'aire des autres polygones réguliers.

Si le niveau de construction (+2) se décide en collaboration, les décisions qui sont prises au <u>niveau projet (+1)</u> sont beaucoup plus personnelles et découlent (du moins dans la plupart des cas) d'une analyse plus approfondie des *activités*.

Dans le cas de Mathilde, il est particulièrement intéressant de noter que la collaboration est également importante à ce niveau et que les expériences au niveau 0 dans les classes de ses collègues viennent rétroagir sur son propre niveau de projet de manière significative (Daina, 2013). Le schéma ci-dessous permet d'illustrer ce qui vient d'être présenté.

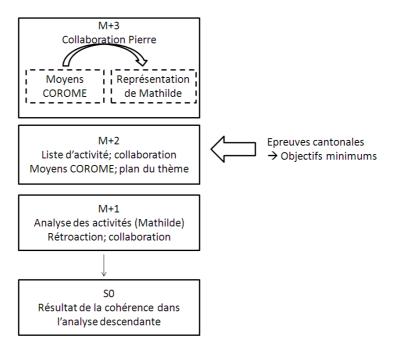


Figure 8 : Analyse a priori du point de vue du professeur pour Mathilde.

Nous retrouvons dans les propos de Mathilde un déséquilibre dans les niveaux de l'activité du professeur. Celle-ci fait en effet peu référence à son projet global lors des entretiens (niveau +2 sous-représenté) et se réfère surtout à la liste d'*activités* qu'elle va proposer (niveau +1). De ce fait, il est difficile de savoir si cette enseignante a un contrôle épistémologique de la construction du thème. Cependant, le travail de collaboration avec son collègue Pierre semble compenser ce déséquilibre, car il apparaît par ailleurs que son projet global d'enseignement de la notion d'aire est cohérent. Nous allons pourtant voir dans la suite que cette sous-représentation du niveau +2 va poser problème dans la collaboration avec Sophie. Nous allons en effet à présent nous intéresser à l'analyse a priori du point de vue du professeur pour Sophie.

4. Analyse *a priori* du point de vue du professeur pour Sophie

<u>Au niveau +3</u> nous relevons des tensions entre deux référents : les conceptions de Mathilde sur l'enseignement (qui sont à l'origine de la liste qui organise les *activités*) et les conceptions de Sophie sur l'enseignement. Nous découvrons donc ici une tension entre le *milieu potentiel* et le *milieu de la situation* de Sophie, qui sont quasi disjoints. En effet, Sophie témoigne à plusieurs reprises dans les entretiens de conceptions à propos de l'enseignement qui marquent une certaine distance par rapport aux conceptions véhiculées dans la ressource MERM. De même, ses représentations sur l'enseignement de la notion d'aire qui accordent une place centrale aux formules de calcul, montrent que son *rapport personnel* à cet objet de savoir n'est pas conforme au *rapport institutionnel*. Pourtant, dans son travail de collaboration ses

conceptions ne sont pas remises en question ce qui a pour effet la création d'un milieu activé fictif.

Dans le cas de Sophie, le *milieu potentiel* du niveau +3, joue un rôle important certes, mais de manière indirecte, car c'est parce que Sophie collabore avec ses collègues et notamment avec Mathilde, que la ressource MERM influence la suite du projet. Dans les faits, Sophie ne fait que peu référence, lors des entretiens, aux conceptions pédagogiques et didactiques présentées dans les MERM. Elle semble donc prendre une certaine distance par rapport à cette ressource. Cependant, rien n'est explicité et nous retrouvons de manière constante deux « niveaux de discours », qui sont nécessaires, dans une certaine mesure, à la collaboration, mais problématiques au niveau de la cohérence du projet.

<u>Au niveau +2</u>, nous pouvons observer une évolution dans la construction du thème entre le début et la fin de nos observations. Dans un premier temps, Sophie délègue la construction du thème dans le travail de collaboration. Il est intéressant de voir dans l'entretien qu'elle précise elle-même « qu'elle fait confiance à ses collègues », ce qui montre bien qu'elle a conscience de l'importance de la collaboration dans cette étape.

Cependant, comme nous l'avons mis en évidence, cette collaboration ne lui permet pas d'entrer dans un véritable travail de fond qui permettrait une explicitation des choix de contenu ou d'organisation de ses contenus. La collaboration se limite en effet au choix des *activités* et à leur organisation chronologique (le niveau de construction du thème est déterminé par le bas) laissant beaucoup d'implicites, que Sophie ne va que partiellement assumer par la suite. Il ne s'agit donc pas du même type de collaboration que celle dont témoigne Mathilde avec son collègue Pierre. Le travail de collaboration va donc permettre de créer, également à ce niveau, un *milieu activé fictif*, avec lequel va interagir Sophie. Elle planifie avec ses collègues une liste d'*activités* selon des objectifs supposés communs. Cependant, ce milieu entre en tension avec ses propres conceptions. Or nous avons pu relever que le projet de Sophie va évoluer au fur et à mesure que les séances se succèdent en classe, dans le sens de ses propres conceptions (Daina 2013).

<u>Au Niveau +1</u>, nous retrouvons donc deux projets qui cohabitent. Durant les deux premières séances, Sophie va suivre le projet mis en place avec ses collègues. Elle va ensuite largement redéfinir les objectifs des *activités* et de fait modifier le projet.

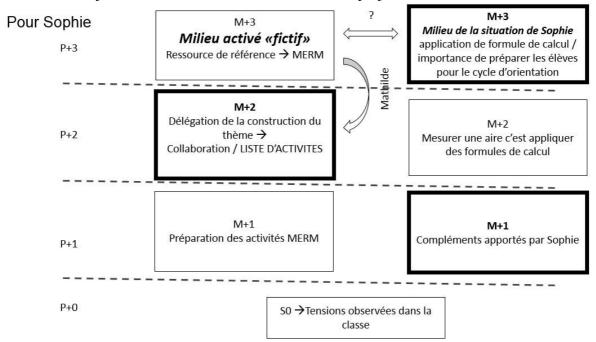


Figure 9 : Analyse a priori du point de vue du professeur pour Sophie.

L'analyse a priori du point de vue du professeur révèle, dans le cas de Sophie, une incohérence dans la descente du niveau idéologique vers la situation didactique. Comme nous l'avons mis en évidence, Mathilde explicite peu les raisons des choix qui ont été faits au niveau des *activités* et de leur organisation (niveau +2 sous représenté), ceci ne permet donc pas à Sophie d'avoir un contrôle épistémologique sur le scénario constitué. Dans cette situation, elle interagit donc avec un *milieu activé fictif*. Elle se conforme à la suite d'*activités* proposées par Mathilde, mais son projet personnel ne poursuit pas les objectifs portés par ses *activités*. De fait, comme nous l'avons mis en évidence, au fil des séances le projet va s'éloigner du projet initial. Ainsi les scénarios proposés dans les deux classes de Sophie et de Mathilde sont très différents comme l'ont montré nos analyses.

Cette incohérence se retrouve d'abord au niveau du projet global. L'analyse de l'itinéraire cognitif met, en effet, en évidence que les trois premières séances introduisent différents types de tâches et techniques de manière déconnectée. Les tensions s'observent ensuite au niveau du déroulement des séances. Comme nous l'avons montré, Sophie fait cohabiter deux projets dans la classe, en parallèle à la tâche principale, elle propose des tâches annexes qui visent des objectifs importants selon son propre projet qui ne sont pas en lien avec les *activités* des MERM choisies dans le travail de collaboration. L'avancée du projet est gérée en commun avec les élèves et nécessite des négociations afin que les élèves adhèrent au projet. Comme nous avons pu le voir, d'énormes tensions s'observent alors durant cette séance et nous avons pu montrer que ce qui pourrait être trop rapidement interprété comme uniquement dû à une pratique inadéquate de la part de Sophie est en fait la conséquence de choix qui prennent sens dans un contexte particulier, une situation très complexe dans laquelle il semble inévitable de parfois laisser exister « un milieu activé fictif », afin de pouvoir faire classe en respectant « en apparence » les attentes institutionnelles.

CONCLUSION

Les résultats de notre étude de cas permettent de décrire finement les origines des tensions qui peuvent s'observer entre la préparation et la réalisation en classe d'une séquence. Les cas de Sophie et Mathilde présentés ici montrent en effet comment, même avec une même ressource et une part de travail de préparation commune, deux enseignantes peuvent en arriver à mettre en scène des activités identiques de manières très différentes, ce qui va générer un travail très différent des élèves. Ce qui nous questionne plus particulièrement est le fait que cette variabilité dans les pratiques reste non explicitée voir niée au point que les enseignantes ne semblent pas conscientes de ces différences. Ceci a pour conséquence l'existence de double niveau de discours, de contradictions, de tensions que notre étude permet de mieux comprendre. En effet, modéliser ce processus grâce à la structuration du milieu et en posant la question en termes de cohérence ou non de l'analyse descendante nous permet de tenir compte à la fois des aspects de contexte et de la situation personnelle de chaque enseignant. Si les MERM tiennent un rôle central dans le milieu avec lequel interagit chaque enseignant, que ce soit comme ressource ou comme contrainte, leur effet sur les pratiques enseignantes est complexe. Les résultats de nos analyses semblent en effet mettre en évidence une certaine distance entre ce qui est préconisé par les concepteurs des ressources, ce que les enseignants en retiennent, ce qu'ils disent à différents moments de leur activité (double niveau de discours) et finalement ce qui s'observe dans le déroulement local en classe des séquences d'enseignement. Ces observations questionnent premièrement le statut des MERM, qui sont présentés comme porteurs de « l'innovation » et de « l'harmonisation des pratiques ». Il parait évident, en considérant nos résultats, qu'une cohérence interne et individuelle, que nous avons pu mettre en évidence grâce à *l'analyse descendante* du niveau idéologique (+3) au niveau de la situation didactique (0), semble être une condition essentielle à la possibilité de construire un projet d'enseignement cohérent. Selon nous, la question n'est donc pas de se demander si la ressource pourrait influencer les pratiques, mais plutôt de se demander de quelle manière celle-ci peut participer au développement d'une cohérence individuelle. Ceci pose d'une part la question de la formation initiale et continue et d'autre part, la question de la forme que peut prendre la ressource pour aider au développement de cette cohérence individuelle.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIOUES

ARDITI, S. & DAINA, A. (2012). Manuels scolaires et pratiques des enseignants en France et en Suisse romande. *Actes du XXXIXème colloque COPIRELEM,* Quimper, 20 – 22 juin 2012.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Recherches en didactique des mathématiques. 19(1), 77-123.

BROUSSEAU, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. Recherches en didactique des mathématiques, 9 (3), 309-336.

BROUSSEAU, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In R. Noirfalise & M-J Perrin-Glorian (Ed.), *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp.3-46). IREM de Clermont-Ferrand

CHESNAIS, A. (2009). L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7).

CHEVALLARD, Y. (1991). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensée Sauvage.

COMITI C., GRENIER D. & MARGOLINAS C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In G. Arsac (Eds) *Différents Types de savoirs et leurs articulations* (pp. 91-127). Grenoble : La Pensée Sauvage.

COULANGE, L. (2000). Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

COULANGE, L. (2001). Enseigner les systèmes d'équations en Troisième. Une étude économique et écologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(3), 305-354.

COULANGE, L. (2012). L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves. Note de synthèse en vue de HDR.

DAINA, A. (2012). L'utilisation par les enseignants des ressources en mathématiques : analyse comparative des scenarios de cinq enseignants à Genève. In J-L Dorier et S. Coutat (Ed.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21ème siècle. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone*, http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

DAINA A. (2013). Utilisation des ressources : de la préparation d'une séquence à sa réalisation en classe de mathématiques. Cinq études de cas sur la notion d'aire dans l'enseignement primaire genevois. Thèse, FAPSE, Université de Genève.

DAINA, A. & DORIER J.-L. (2015). Une recherche sur l'utilisation des ressources dans le contexte de l'enseignement primaire genevois. *Actes du XXXXIIème colloque COPIRELEM*. Besançon. 17-19 juin 2015.

DAINA, A. (2017). From textbook to classroom: a research on teachers'use of pedagogical resources in the context of primary school in the French speaking part of Switzerland. *Actes du Congrès CERME10, Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Dublin

MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. In J-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Ed.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (pp. 141-157)*. Grenoble : La Pensée Sauvage

MARGOLINAS, C. (2005). La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In E. Simmt et B. Davis (Ed.). *Proceeding of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematic Study Group / Groupe canadien d'études en didactique des mathématiques* (pp.3-21).

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(3), 279-321.

RAVEL, L. (2003). Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2 (4), 505-528.

ROBERT, A. & VANDEBROUCK, F. (2003). Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(3), 389-424.

ROBERT, A (2015). Une analyse qualitative du travail des enseignants de mathématiques du second degré en classe et pour la classe : éléments méthodologiques. In Y. Lenoir, & R. Esquivel (Ed.). *Procédures méthodologiques en acte dans l'analyse des pratiques d'enseignement : approches internationales* (T.2, pp.373-400). Longueuil : Groupéditions Éditeurs.

RODITI, E. (2005). Les pratiques enseignantes en mathématiques, entre contraintes et liberté pédagogique. Paris: L'Harmattan.

RODITI, E. (2008). Des pratiques enseignantes à la fois contraintes personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vandebrouck . La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants (pp. 73-95). Toulouse : Octares Editions.

RODITI, E. (2010). Le développement des pratiques enseignantes en mathématiques d'un professeur d'école : une étude sur dix années d'exercice. In M. Abboud-Blanchard et A. Flückiger. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (PP.201-229). Paris : Université de Paris 7.

LA DYSCALCULIE DÉVELOPPEMENTALE : BASES CÉRÉBRALES ET COGNITIVES

Flora **SCHWARTZ**

Department of Psychiatry and Behavioral Sciences, Stanford University, USA

Email: florasch@stanford.edu

Jérôme **PRADO**

Institut des Sciences Cognitives Marc Jeannerod, UMR 5304, Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) & Université de Lyon, France

Email: jprado@isc.cnrs.fr

Résumé

L'hétérogénéité du niveau en mathématiques des élèves peut être attribuée à de multiples facteurs socio-économiques, affectifs et motivationnels. Pourtant, il est estimé que de 3% à 7% des enfants et adolescents sont confrontés à des difficultés importantes en mathématiques malgré un environnement familial et scolaire tout à fait adapté. Ces enfants sont susceptibles d'être atteints de dyscalculie, un trouble de l'apprentissage neuro-développemental se caractérisant par des difficultés importantes en mathématiques qui ne sont pas dues à un retard intellectuel ou à un déficit sensoriel. Si les causes de ce trouble sont encore méconnues, cela est en partie dû au profil hétérogène des enfants dyscalculiques, qui ne présentent ni les mêmes difficultés en mathématiques, ni les mêmes atteintes cognitives. Afin d'identifier au mieux les individus à risque et de proposer une prise en charge précoce et adaptée, les études en sciences cognitives et neurosciences se sont multipliées depuis plusieurs années. Dans cette revue, nous décrivons les déficits en mathématiques les plus fréquemment observés chez les enfants dyscalculiques et passons en revue quelques-unes des théories principales expliquant la dyscalculie.

Mots clés : dyscalculie, psychologie cognitive, neurosciences cognitives

La dyscalculie fait partie des troubles des apprentissages scolaires. Elle est définie par un retard sévère d'acquisition des mathématiques, qui n'est lié ni à un retard intellectuel, ni à un retard scolaire général, ni à un autre trouble neurologique ou psychiatrique (Kaufmann & al., 2013; von Aster & Shalev, 2007). Peu connue du grand public, la dyscalculie est souvent présentée comme le pendant de la dyslexie (ou trouble de l'acquisition de la lecture) pour les mathématiques. D'ailleurs, les questions théoriques qui se posent sur la définition de la dyslexie se posent également sur la dyscalculie. Ces questions renvoient à la spécificité des difficultés, à leur sévérité, aux éventuelles comorbidités et aux critères de diagnostic à utiliser. Dans une première partie, nous tentons d'abord de préciser ce qu'est la dyscalculie en présentant les principaux critères de diagnostic et leur variabilité. Nous décrivons ensuite les difficultés en mathématiques rencontrées par les dyscalculiques, puis les déficits cognitifs associés à ce trouble de l'apprentissage. Dans une seconde partie, nous discutons de quelques-unes des principales théories cherchant à expliquer les causes de la dyscalculie.

I. QU'EST-CE QUE LA DYSCALCULIE ?

1. Prévalence, critères de diagnostic et comorbidités

La prévalence de la dyscalculie serait comprise entre 3 et 7%, avec un taux variant de 1 à 10% selon les études démographiques (Devine et al., 2013). Cette variabilité est due à la divergence des critères utilisés pour caractériser un individu comme « dyscalculique ».

Un premier critère essentiel pour identifier la dyscalculie est bien entendu la sévérité des difficultés en mathématiques. Pourtant, il n'existe pas de consensus quant au seuil statistique à appliquer, ni quant à la nature des troubles à observer. Par exemple, les études démographiques considèrent comme seuil pathologique un score en mathématiques qui peut aller du 3ème (Desoete & al., 2004) au 15ème centile (Barbaresi & al., 2005; Dirks & al., 2008). Certaines études estiment que la dyscalculie se caractérise par un retard en mathématiques d'au moins 2 ans rapport aux enfants de même niveau scolaire (Gross-Tsur et al., 1996). Par ailleurs, les troubles ne doivent pas être transitoires mais doivent au contraire persister dans le temps (Mazzocco & Myers, 2003) voire se maintenir après une remédiation (Desoete & al., 2004). Aussi, la nature des tests à effectuer pose question. Faut-il utiliser des tests scolaires, impliquant plusieurs compétences? Faut-il privilégier des tests de compétences numériques élémentaires (Kaufmann & al., 2013)? En tout cas, le choix des tests de mathématiques influence l'identification des dyscalculiques puisque différentes compétences seront mesurées. L'influence du test utilisé pour le diagnostic dépend en plus du stade développemental (Mazzocco & Myers, 2003). Les différences individuelles sont susceptibles de s'effacer lorsque le test choisi cible des capacités mathématiques précoces, qui auront été acquises par les dyscalculiques. Pour finir, une anxiété aux mathématiques chez certains individus (Ashcraft & Kirk, 2001) risque de dégrader leur performance dans une situation de test, alors que leurs capacités à manipuler les nombres seraient tout à fait dans la norme.

Deuxièmement, puisque la dyscalculie n'est pas sensée venir d'un retard mental, les capacités intellectuelles devraient être prises en compte dans la définition de ce trouble. Notamment, le Quotient Intellectuel (QI) devrait être dans la norme. Il a même été suggéré qu'un écart conséquent entre le QI et le score standardisé en mathématiques constituerait un des critères de diagnostic. Certaines études épidémiologiques qui ont ainsi pris en compte cet écart entre les compétences en mathématiques et le QI global (Barbaresi & al., 2005) ou le QI non-verbal (Lewis et al., 1994) reportent une prévalence de 1,3 à 10%. Cependant, l'importance de cet écart entre QI et niveau en mathématiques a été remise en cause (Mazzocco & Myers, 2003) puisqu'il ne permettrait pas d'identifier de façon plus fiable les individus dyscalculiques. Certains enfants ne présentant pas d'écart entre QI et score en mathématiques sont susceptibles de présenter des troubles en mathématiques aussi pénalisants que les enfants montrant un écart entre QI et score en mathématiques. Ainsi, il serait bénéfique d'utiliser des mesures complémentaires pour détecter la dyscalculie (Mazzocco & Räsänen, 2013).

Une mesure supplémentaire s'avère être le niveau en lecture, qui est souvent testé dans les études de prévalence. Toutefois, les capacités de lecture sont fortement corrélées au niveau en mathématiques (Bull & Scerif, 2001; Devine & al., 2013). D'ailleurs, une proportion importante de dyscalculiques présenterait un retard en lecture (Lewis & al., 1994; Ostad, 1998). Plus précisément, environ la moitié des dyscalculiques présenterait également une

dyslexie (Lewis & al., 1994; Ostad, 1998). Un autre trouble fréquemment associé à la dyscalculie est le trouble du déficit de l'attention avec hyperactivité (TDAH), qui pourrait toucher jusqu'à 25% des dyscalculiques (Gross-Tsur & al., 1996). La présence de ces comorbidités représente un enjeu supplémentaire pour le diagnostic de la dyscalculie. En effet, ces comorbidités peuvent rendre la dyscalculie plus difficile à détecter (von Aster & Shalev, 2007). Au contraire, les comorbidités peuvent avoir un effet additif sur les difficultés en mathématiques. Il a été montré que les enfants présentant à la fois une dyscalculie et une dyslexie réussissaient moins bien certaines tâches mathématiques que les « dyscalculiques purs » (von Aster & Shalev, 2007).

Enfin, on peut se demander si les différences culturelles (notamment linguistiques) et le sexe des individus ont un impact sur la prévalence. Cependant, cela ne semble pas être le cas. En effet, plusieurs études ont montré que la dyscalculie toucherait les garçons autant que les filles (Devine & al., 2013; Gross-Tsur & al., 1996; Koumoula & al., 2004). Aussi, une prévalence comparable d'environ 5% a été reportée à travers différents pays avec différentes langues, d'Israël (Gross-Tsur & al., 1996) aux Etats-Unis (Mazzocco & Myers, 2003), en passant par la Grèce (Koumoula & al., 2004), les Pays-Bas (Dirks & al., 2008) et la Belgique (Desoete & al., 2004).

Une meilleure caractérisation de la dyscalculie nécessiterait donc de tester plusieurs compétences mathématiques et leur évolution dans le temps, d'écarter l'anxiété en mathématiques comme principale source de difficulté, de vérifier la présence de comorbidité et d'évaluer les capacités cognitives générales.

2. Les difficultés en mathématiques dans la dyscalculie

Les mathématiques font appel à un large ensemble de compétences, dont certaines sont plus importantes que d'autres à un âge donné. La connaissance du nombre comporte ellemême plusieurs concepts à acquérir, notamment la cardinalité et l'ordinalité, ainsi que plusieurs notations à maîtriser, des entiers naturels aux nombres décimaux et fractions. Apprendre la correspondance entre une quantité numérique, un chiffre arabe et un motnombre est déjà un premier défi. Maîtriser l'arithmétique et les notions de base de géométrie sont d'autres défis de l'école primaire. Extraire les informations numériques pertinentes d'un énoncé est une compétence supplémentaire à développer. Toutes ces compétences peuvent être atteintes chez les dyscalculiques. Nous présentons ici les difficultés en mathématiques les plus fréquemment observées chez les dyscalculiques, en gardant à l'esprit que la définition de la dyscalculie varie en fonction des études expérimentales et que les dyscalculiques peuvent également présenter des déficits cognitifs plus généraux (par exemple en mémoire de travail). Nous commençons par les déficits observés lors d'activités numériques non-symboliques, avant d'évoquer les difficultés à maîtriser le comptage et les différentes notations numériques, puis les retards d'acquisition de l'arithmétique.

Représentation non-symbolique des nombres

Les activités numériques non symboliques renvoient à l'estimation et à la manipulation de nombres présentés sous forme de nuages de points ou de collections d'objets, voire de séquence de sons. Une tâche très fréquemment utilisée par les psychologues et neuroscientifiques consiste à comparer deux quantités numériques présentées simultanément ou successivement, ou à estimer la quantité numérique présentée. Les très petits nombres (de 1 à 4) sont généralement étudiés séparément des plus grands nombres puisque leur traitement serait qualitativement différent (Feigenson & al., 2004). En effet, l'être humain aurait une représentation exacte des nombres inférieurs à 4 (le comptage ne serait pas nécessaire). A

l'inverse, la représentation des quantités supérieures à 4 est considérée approximative (Feigenson & al., 2004).

D'une part, la représentation approximative des quantités numériques a été largement étudiée chez les dyscalculiques, notamment par des tâches de comparaison. La difficulté de ce type de tâches (illustré par la Figure 1) dépend à la fois de la distance entre les deux quantités et de leur taille. En effet, plus les quantités sont « proches », plus la comparaison est difficile. Par exemple, il est plus difficile de comparer 24 à 28 points que de comparer 24 à 48 points. Mais il est également plus difficile de comparer deux quantités de grande taille que de petite taille. Ainsi, il est plus difficile de comparer 44 à 48 points que 24 à 28 points (même si la distance entre les deux quantités est égale). Ces effets de « distance » et de « taille » peuvent être calculés pour le temps de réponse et le taux de réponses correctes de chaque participant. Il est également possible de combiner ces effets. En effet, plus les deux quantités à comparer augmentent, plus la différence entre ces deux quantités doit augmenter pour qu'elles puissent être distinguées. L'écart minimal nécessaire à la comparaison de deux quantités est variable d'un individu à l'autre et se nomme « l'acuité numérique ». L'acuité numérique obéit à la loi de Weber (van Oeffelen & Vos, 1982), qui postule que la différence de sensibilité sensorielle entre deux stimuli de même type dépend de leur rapport, plus que de leur valeur absolue (Fechner, 1966). L'acuité numérique s'exprime sous forme de fraction ou de nombre décimal (la fraction de weber) obtenue en divisant la différence entre les 2 nombres comparés par le plus petit nombre. Plus l'acuité numérique est élevée, plus l'individu est capable de discriminer des rapports proches de 1. Un déficit de représentation des quantités nonsymboliques dans la dyscalculie est suggéré par plusieurs études, mais n'a pas toujours été répliqué. Ainsi, quelques études ont montré que les dyscalculiques auraient une acuité numérique plus faible que les enfants neurotypiques (Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011; Piazza & al., 2010). Les dyscalculiques auraient également un effet de distance plus marqué que les neurotypiques (Mejias & al., 2012; Mussolin, Mejias & Noël, 2010; Price & al., 2007) : la différence de performance entre les comparaisons faciles et difficiles serait plus conséquente. En effet, ils auraient besoin de plus de temps pour les comparaisons difficiles que les neurotypiques. Deux autres études reportent aussi un temps de réponse moyen plus long chez les dyscalculiques (Kucian & al., 2011; Landerl, 2013). En revanche, d'autres travaux n'ont pas trouvé de différences entre tout-venants et dyscalculiques au niveau de la représentation des quantités non-symboliques (De Smedt & Gilmore, 2011; Landerl & Kölle, 2009; Rousselle & Noël, 2007)

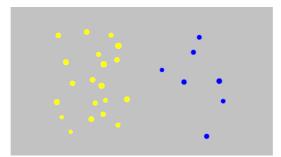


Figure 1 : Tâche typique de comparaison non-symbolique. Le participant doit juger s'il y a plus de points jaunes ou de points bleus.

D'autre part, la reconnaissance exacte des quantités de 1 à 4, appelée « subitizing », a aussi été documentée chez les dyscalculiques. Cette capacité très précoce serait affectée chez les dyscalculiques, qui seraient plus lents à distinguer les petits nombres (Landerl, 2013; Schleifer & Landerl, 2011) et montreraient même un effet de distance (Ashkenazi & al., 2013; Landerl, 2013). Par exemple, reconnaître la quantité 4 serait plus long que reconnaître la

quantité 2. A l'inverse, une telle différence est réduite voire inexistante chez les enfants contrôles, qui distinguent aussi rapidement 2 que 4. La latence observée chez les dyscalculiques par rapport aux individus de même âge pourrait venir d'une exploration visuelle moins efficace, comme suggéré par Ashkenazi et al. (2013) et par une étude de cas en eye-tracking (Moeller & al., 2009). Cependant une autre étude récente n'a pas montré de difficulté de subitizing chez les dyscalculiques (Szucs & al., 2013).

En somme, la représentation des quantités non-symboliques semble être une des difficultés associée à la dyscalculie. Ce déficit est toutefois plus controversé que la représentation des quantités symboliques et pourrait dépendre de l'âge des enfants testés (Noël & Rousselle, 2011).

Représentation symbolique des nombres

La maîtrise des mathématiques passe par l'association d'une quantité numérique donnée à un symbole (mot-nombre ou chiffre arabe). Il faut aussi comprendre la correspondance entre différents formats de notation. Le passage d'un format à un autre, ou transcodage, est essentiel à la compréhension du système numérique (Seron & Fayol, 1994). Le système numérique indo-arabe que nous utilisons fonctionne avec un système positionnel en « base 10 »: 10 unités forment une dizaine, 10 dizaines forment une centaine, etc. En d'autres termes, il faut 10 éléments d'un niveau hiérarchique pour passer au niveau hiérarchique suivant. Les différents niveaux hiérarchiques sont notés dans un ordre précis : par exemple, pour « 267 », les unités sont notées à droite du nombre et les centaines à gauches. Ces structures enchâssées rappellent que les mathématiques comportent une dimension syntaxique qui nécessite un apprentissage rigoureux. Les dyscalculiques montreraient un retard dans la maîtrise de cette syntaxe numérique. Ils auraient plus de difficulté à nommer un chiffre arabe présenté (Landerl & al., 2004), ou à écrire un chiffre dicté (Figure 2), ainsi qu'à manipuler des nombres à plusieurs chiffres (Andersson, 2010). A un niveau scolaire plus avancé, les dyscalculiques auraient plus de difficulté à lire un nombre décimal et à identifier un nombre rationnel (Mazzocco & Devlin, 2008). Ce retard d'acquisition du système numérique est en lien avec leurs difficultés à comprendre le système positionnel (Andersson, 2010).

Verbally given number by experimenter	Written number by child	
503	5003	
169	40 169	
4658	40006058	
756	7056	

Figure 2 : Exemple d'erreurs commises par un enfant dyscalculique lors d'une dictée de nombres. Le système positionnel n'est que partiellement acquis. (Reproduit à partir de Kucian & von Aster, 2015).

Une maîtrise moins efficace du code associé à chaque quantité numérique devrait (sans surprise) entraîner des difficultés à comparer des nombres présentés sous un format donné. La méthode utilisée pour évaluer cette compétence est la même que celle employée pour les comparaisons non-symboliques. La plupart des études ont montré que la comparaison

de nombres sous forme symbolique était plus lente chez les dyscalculiques, aussi bien pour les nombres à un chiffre (De Smedt & Gilmore, 2011; Iuculano & al., 2008; Landerl & al., 2009, 2004; Landerl & Kölle, 2009; Rousselle & Noël, 2007) que pour les nombres à plusieurs chiffres (Landerl & al., 2009; Landerl & Kölle, 2009). L'effet de distance serait également plus marqué chez les enfants dyscalculiques (Ashkenazi, Rubinsten & Henik, 2009; Mussolin, Mejias & Noël, 2010).

Contrairement aux enfants tout-venant, les symboles numériques ne semblent pas non plus évoquer d'intuitions spatiales spécifiques chez les enfants dyscalculiques. En effet, les recherches en psychologie cognitive montrent que les nombres sont généralement associés à un côté ou un autre de l'espace mental selon leur valeur, aussi bien chez l'adulte (Dehaene, Bossini & Giraux, 1993) que chez l'enfant (Berch & al., 1999; Yang & al., 2014). Cette relation est connue sous le nom d'effet « SNARC » (Spatial-Numerical Association of Response Code). Elle est initialement basée sur une différence de temps de réaction lorsque les participants jugent la parité d'un nombre. Plus précisément, le temps de réponse des participants pour les petits nombres est dans l'ensemble plus rapide avec la main gauche qu'avec la main droite. A l'inverse, le temps de réponse pour les grands nombres est dans l'ensemble plus rapide avec la main droite qu'avec la main gauche. Il existe un autre marqueur de ce lien nombres-espace chez l'enfant. Au cours du développement, les enfants apprennent normalement à représenter les nombres sur un espace mental, appelé ligne numérique mentale (Dehaene, 1997). Ceci est généralement testé en demandant à l'enfant de placer un nombre sur une ligne dont les extrémités gauche et droite sont notées respectivement 0 et 100. Au début de l'apprentissage des mathématiques, une partie disproportionnée de la ligne serait occupée par les petits nombres, tandis que les grands nombres seraient compressés à l'extrémité droite de la ligne. Cette représentation s'affine progressivement en fin d'école maternelle et début d'école primaire de sorte que la distance numérique devient proportionnelle à la distance spatiale entre les symboles de la ligne numérique mentale. Le degré de linéarisation de la ligne numérique mentale serait un prédicteur essentiel de l'apprentissage des mathématiques en début d'école primaire (Booth & Siegler, 2006; Gunderson & al., 2012). Ces associations des symboles numériques avec l'espace seraient notamment atteintes chez les dyscalculiques. En premier lieu, les enfants dyscalculiques ne présenteraient pas d'effet SNARC (Bachot et al., 2005). Ensuite, les dyscalculiques présenteraient une ligne numérique mentale immature (Geary & al., 2007; Geary & al., 2008).

La manipulation des symboles numériques est donc limitée chez les dyscalculiques, qu'il s'agisse de l'association entre nombres et espace ou du passage d'un format numérique à un autre. Ces différentes anomalies de représentation des nombres se répercutent sur l'apprentissage de l'arithmétique et des notions mathématiques plus complexes.

Apprentissage des faits et procédures arithmétiques

L'apprentissage de l'arithmétique est un des piliers de l'école primaire et mobilise de nombreuses compétences. Une maîtrise solide de l'arithmétique requiert non seulement une exécution sans faille des procédures de calcul, mais aussi une mémorisation de certains faits, de bonnes connaissances conceptuelles et des capacités de résolution de problème (Dowker, 2005). Différentes études ont montré les limites des dyscalculiques dans un ou plusieurs de ces aspects de l'arithmétique. Pour résoudre une opération arithmétique simple comme « 4 + 3 », un large panel de stratégies peut être utilisé (Baroody & Ginsburg, 1986). Il est généralement admis qu'au début de l'apprentissage de l'arithmétique, les enfants ont recours au comptage. Une première stratégie observée à l'école maternelle, le « comptage du tout » consiste à dénombrer les deux opérandes 4 et 3 séparément. Chaque opérande peut être

matérialisé par une collection d'objets ou par ses doigts. Ainsi, l'enfant va réciter la séquence numérique en partant de 1 jusqu'à atteindre le cardinal du premier opérande, puis répéter cela pour le second opérande. Pour finir, l'enfant va dénombrer l'ensemble formé par les deux opérandes. Des stratégies de plus en plus efficaces vont rapidement se développer après 5 ans (Carpenter & Moser, 1984; Groen & Parkman, 1972). Par exemple, l'enfant ne comptera qu'à partir du premier terme, jusqu'au résultat. Puis l'enfant choisira de compter à partir du plus grand terme, ce qui lui fera gagner du temps. Enfin, le comptage sur les doigts s'efface progressivement (Carpenter & Moser, 1984) tandis que le recours à la décomposition va également être observé en milieu de primaire (Russell & Ginsburg, 1984). Par exemple, pour calculer «6 + 7 » alors qu'il connait le résultat de «6 + 6 », l'enfant va transformer l'opération en « 6 + 6 + 1 ». Ce raccourci permet d'ajouter simplement une unité à un résultat déjà mémorisé. Les stratégies plus rapides vont remplacer progressivement les stratégies élémentaires. Le calcul va donc s'automatiser avec la pratique chez la majorité des élèves d'école primaire. La stratégie considérée comme la plus optimale consiste à récupérer en mémoire le résultat d'opérations (Ashcraft & Fierman, 1982). Ainsi, il est généralement admis que vers l'âge de 10 ans, les enfants récupèrent en mémoire le résultat des opérations simples. Les faits arithmétiques mémorisés formeraient un réseau, dont les éléments seraient plus ou moins fortement associés selon leur proximité sémantique (Ashcraft, 1992).

En revanche, les enfants dyscalculiques continueront souvent à avoir recours à des stratégies immatures pour résoudre les opérations simples. Par exemple, ils continueront à compter sur leurs doigts plus longtemps que leurs pairs (Geary & al., 2000). La stratégie consistant à dénombrer l'ensemble des opérandes est également davantage utilisée (Geary, 2011), alors que la décomposition est moins souvent utilisée (Hanich & al., 2001).

Dans l'ensemble, ces différences de stratégies de résolution chez les dyscalculiques sont associées à des temps de réponse plus longs et/ou à des erreurs plus nombreuses lors de l'exécution des procédures de calcul (Andersson, 2010; Geary, Brown & Samaranayake, 1991; Jordan, Hanich & Kaplan, 2003), y compris lorsque les opérations arithmétiques sont présentées sous forme d'énoncé (Jordan & al., 2003; Jordan & Montani, 1997; Ostad, 1998). L'exécution imprécise des procédures est à mettre en lien avec une connaissance conceptuelle plus faible. En particulier, les dyscalculiques ont une moins bonne maîtrise des principes arithmétiques tels que la commutativité et l'inversion (Andersson, 2010; Jordan et al., 2003). La commutativité désigne le fait que la position des opérandes n'a pas d'influence sur le résultat de l'addition ou de la multiplication (par exemple, «8 + 7 = 7 + 8»). L'inversion renvoie à la relation complémentaire entre les opérations, notamment entre l'addition et la soustraction (par exemple, si «7 + 3 = 10» alors «10 - 3 = 7»). Une compréhension limitée de ces principes arithmétiques peut expliquer un manque d'automatisation des procédures.

Lorsque la stratégie la plus automatisée, à savoir la récupération en mémoire, est utilisée, elle s'avère moins efficace chez les dyscalculiques (Barrouillet, Fayol & Lathulière, 1997; Geary, Hamson & Hoard, 2000; Geary, Brown & Samaranayake, 1991; Russell & Ginsburg, 1984). En particulier, le réseau de faits arithmétiques serait plus sensible aux interférences (Barrouillet & al., 1997). Ceci est suggéré par l'analyse des erreurs commises par exemple lors de la resolution de multiplications (qui reposent généralement sur un apprentissage par cœur) ou d'additions. Les réponses incorrectes proviennent souvent de la table de l'un des opérandes. Par exemple, lors de la résolution de « 8 x 7 », une erreur fréquente est de répondre « 48 », un produit de la table de 8. De même, lors de la résolution de « 3 + 4 », le produit de « 3 x 4 » serait parfois récupéré. Les dyscalculiques seraient plus sujets à ces intrusions lors de la résolution de multiplications (Barrouillet & al., 1997) et d'additions (Geary & al., 2000).

Enfin, si les dyscalculiques montrent des performances nettement inférieures pour les opérations simples, c'est sans surprise également le cas pour les opérations complexes (Andersson, 2010; Jordan & al., 2003; Russell & Ginsburg, 1984) sur des nombres à plusieurs chiffres ou sur des nombres décimaux. Les erreurs sont susceptibles de venir d'une mauvaise compréhension du système positionnel, entraînant une erreur de placement des nombres lors d'un calcul posé. La **Figure 3** illustre la résolution par un enfant dyscalculique de 11 ans (testé au laboratoire) d'une addition de 3 termes, dont deux nombres décimaux ((2,50 + 3,25 + 5 = ?)). Ce participant commet l'erreur de placer le dernier terme entier dans une colonne correspondant aux décimales. Son erreur de positionnement le conduit à conclure que (2,50 + 3,25 + 5 = 5,80).

$$+3,25$$
 $+2,50$
 $+5$
 $-5,80$

Figure 3 : Exemple de calcul posé par un enfant dyscalculique de 11 ans.

Nous venons de résumer un ensemble de difficultés procédurales, factuelles et conceptuelles rencontrées par les enfants dyscalculiques en mathématiques. Plusieurs études suggèrent un défaut de traitement des quantités non-symboliques (Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011; Piazza & al., 2010), alors que d'autres soulignent davantage le déficit de représentation des quantités symboliques (Rousselle & Noël, 2007). La nature des difficultés en mathématiques et le degré d'atteinte d'une compétence peut donc varier d'un individu à l'autre.

II. LES CAUSES HYPOTHÉTIQUES DE LA DYSCALCULIE

A l'heure actuelle, plusieurs théories proposent d'expliquer les causes de la dyscalculie en combinant des données comportementales et de neuro-imagerie. Nous commençons par présenter une théorie très populaire selon laquelle la dyscalculie serait due à une atteinte spécifique du sens du nombre (Piazza & al., 2010; Wilson & Dehaene, 2007; Butterworth, 2005), puis nous verrons que la dyscalculie pourrait aussi venir d'une incapacité à associer une grandeur numérique à un symbole (Noël & Rousselle 2011). Ces deux hypothèses impliquent que la dyscalculie serait liée à un déficit primaire et spécifique. Nous présentons ensuite quelques théories qui soutiennent que les difficultés mathématiques des dyscalculiques sont causées par des atteintes cognitives plus générales. Celles-ci incluent des troubles visuo-spatiaux (Rourke, 1993; Szucs & al., 2013) ainsi qu'un déficit de ressources attentionnelles et de mémoire de travail (Ashkenazi & Henik 2010; De Visscher & Noël 2013).

3. Un déficit spécifique

Un déficit du sens du nombre

Peut-être l'une des hypothèses parmi les plus populaires postule que la dyscalculie serait liée à une anomalie cérébrale affectant spécifiquement le traitement des quantités

numériques non-symboliques. Plus précisément, un dysfonctionnement d'une région cérébrale appelée sillon intra-pariétal (IPS) qui entraînerait des difficultés à reconnaître les quantités numériques non-symboliques, ce qui empêcherait l'acquisition des mathématiques symboliques (Butterworth, 2005; Piazza & al., 2010; Wilson & Dehaene, 2007). Cette hypothèse découle des théories dites du « sens du nombre » (Stanislas Dehaene, 1997; Feigenson & al., 2004) postulant que la représentation des quantités numériques serait une capacité innée, ou en tout cas extrêmement précoce sur le plan du développement. Il est important de noter que les théories diffèrent quant à la définition de « sens du nombre ». Pour certaines, ce « sens du nombre » fait référence à la capacité à traiter et comparer des quantités numériques non-symboliques approximatives (Feigenson & al., 2004). D'autres auteurs définissent le « sens du nombre » comme la capacité à représenter la quantité exacte dans un ensemble (Butterworth, 2005). D'autres encore font la distinction entre les petites quantités exactes et les quantités approximatives (Feigenson & al., 2004) qui seraient traitées selon deux processus distincts, respectivement le subitizing et le système numérique approximatif. Dans tous les cas, ces théories reposent sur l'idée que la faculté à reconnaître les quantités numériques serait très ancienne au niveau de l'évolution. Cette capacité serait partagée par de nombreuses espèces animales, dont les primates non-humains (Brannon & Terrace, 2000), les oiseaux (Brannon et al., 2001), jusqu'aux invertébrés comme les poissons (Agrillo & al., 2009) et les abeilles (Gross et al., 2009). Chez l'homme, les mécanismes de traitement numérique semblent présents dès la naissance (Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009). Les bébés seraient capables de subitizing (Wynn, 1992), et pourraient également détecter une différence entre des quantités numériques approximatives (Izard & al., 2009; Xu & Spelke, 2000) et effectuer des opérations approximatives (McCrink & Wynn, 2004). Ces observations comportementales suggèrent que les substrats cérébraux du sens du nombre ont été conservés au cours de l'évolution (Stanislas Dehaene, 1997). En effet, l'implication de l'IPS dans le traitement des nombres a été montrée chez le singe (Nieder & Miller, 2004). Des enregistrements électrophysiologiques ont révélé que des neurones de l'IPS répondent préférentiellement à une quantité numérique donnée. Plus la quantité présentée s'éloigne de la quantité préférée, moins le neurone décharge (Nieder & Miller, 2004). La représentation des quantités numériques viendrait de l'intégration des signaux émis par les différentes populations de neurones sensibles aux différentes quantités numériques. Plus des quantités numériques à comparer seraient éloignées, plus les populations de neurones répondant à chaque quantité seraient distinctes (Dehaene & Changeux, 1993), ce qui faciliterait la comparaison. Chez l'homme, l'IPS répond de la même manière aux différences de quantités numériques (Piazza & al., 2004). La réponse de l'IPS aux quantités numériques s'observe aussi bien dans des conditions passives (Cantlon & al., 2006; Piazza & al., 2004) qu'actives (Dehaene & al., 1999), quel que soit le format des nombres (Pinel et al., 2001) et quelle que soit la modalité de présentation (Eger & al., 2003). De plus, les structures cérébrales impliquées dans le sens du nombre chez l'adulte sont les mêmes chez l'enfant de 4 ans (Cantlon & al., 2006) et chez le bébé de 3 mois (Izard & al., 2008).

Même si les théories du « sens du nombre » postulent que les mécanismes de traitement des quantités numériques sont présents dès la naissance, ces théories ne voient pas ce « sens du nombre » comme une capacité figée. Ainsi, l'acuité numérique (la capacité à différencier des quantités numériques) s'affinerait rapidement au cours des premières années (Halberda & Feigenson, 2008). Alors que le nouveau-né serait sensible à une différence de quantités de 1:3 (Izard & al., 2009), le bébé de 6 mois serait sensible à une différence de 1:2 et le bébé de 9 mois détecterait une différence de 2:3 (Lipton and Spelke, 2003). L'acuité numérique continuerait à progresser au début de l'enfance pour atteindre 3:4 à 3 ans et 5:6 à 5-6 ans (Halberda & Feigenson, 2008). Chez l'adulte, l'acuité numérique serait d'environ 7:8 en moyenne (Barth, Kanwisher & Spelke, 2003) mais pourrait varier de 5:6 à 9:10 selon les

individus (Pica, 2004). Les différences inter-individuelles d'acuité numérique chez l'adulte se retrouvent par ailleurs dès le plus jeune âge et seraient relativement stables au cours du développement. Il a par exemple été observé que les bébés disposant d'une moins bonne acuité numérique à 6 mois étaient ceux qui montraient la moins bonne acuité numérique à 9 mois. De telles différences d'acuité numérique pourraient en partie être innées, et dans le même temps liées à un rythme de développement différent (Piazza & al., 2010). Dans tous les cas, les théories du « sens du nombre » soutiennent que la précision avec laquelle les quantités numériques sont représentées chez le jeune enfant serait essentielle à l'acquisition des symboles numériques (Butterworth, 2005; Libertus, Feigenson & Halberda, 2011; Piazza & al., 2010). L'acuité numérique serait effectivement un prédicteur de la réussite en mathématiques à différents stades ontogéniques. Par exemple, la capacité à discriminer des quantités approximatives à 4 ans est corrélée au niveau en mathématiques à 6 ans. Aussi, l'acuité numérique à 14 ans est corrélée à la réussite arithmétique des mêmes individus à 8 ans (Halberda & al., 2008). Cette corrélation positive entre précision du sens du nombre et niveau en mathématiques se maintient même chez l'adulte (Lourenco & al., 2012). A l'extrémité du continuum, plusieurs travaux présentés au chapitre précédent ont montré un déficit d'acuité numérique ou plus globalement un déficit du sens du nombre chez les dyscalculiques (Landerl & al., 2009; Mussolin, Mejias & Noël, 2010; Piazza & al., 2010). Par exemple, Piazza et collègues (2010) ont montré que des enfants dyscalculiques de 10 ans présentaient l'acuité numérique attendue à 5 ans. Il a donc été suggéré que c'est un dysfonctionnement du sens du nombre qui retarderait l'association entre un symbole et sa grandeur numérique chez les dyscalculiques et compliquerait l'acquisition des mathématiques symboliques.

Quelques études de neuro-imagerie ont examiné l'intégrité des substrats cérébraux du « sens du nombre » chez les dyscalculiques. Premièrement, l'IPS présente des atteintes structurales chez ces individus (Rotzer & al., 2008). Au niveau fonctionnel, l'IPS est moins sensible aux variations de quantités numériques chez les dyscalculiques (Mussolin, Mejias & Noël, 2010; Price & al., 2007) et son activité est réduite lors du calcul approximatif (Kucian & al., 2006). Ces quelques études soutiennent l'hypothèse d'une atteinte cérébrale affectant le traitement des quantités numériques dans la dyscalculie.

Les théories du déficit du « sens du nombre » ont donc été appuyées par des données empiriques variées. Cependant, le déficit de représentation des quantités numériques chez les dyscalculiques n'a pas toujours été mis en évidence dans le cas de quantités non-symboliques et s'avère au contraire plus robuste dans le cas de quantités symboliques (De Smedt & al., 2013). Une cause de la dyscalculie pourrait alors être un déficit de représentation des quantités numériques à partir des symboles. L'hypothèse a été nommée « access-deficit » ou « déficit d'accès aux quantités numériques » (Rousselle & Noël, 2007).

Un déficit d'accès aux quantités numériques à partir des symboles

Si la précision du système numérique approximatif est un prédicteur de la réussite en mathématiques au cours de la scolarité, les compétences symboliques compteraient davantage (Holloway & Ansari, 2009; Lyons & al., 2014). Une des principales caractéristiques de la dyscalculie est la difficulté à manipuler les symboles numériques, par exemple lors de simples comparaisons ou lors de l'exécution d'un calcul (Geary, Brown & Samaranayake, 1991). D'ailleurs, plusieurs études comportementales ont souligné des difficultés à comparer des nombres sous forme symbolique chez les dyscalculiques en l'absence de déficit de comparaison de nombres sous forme non-symbolique (De Smedt & Gilmore, 2011; Iuculano & al., 2008; Landerl & Kölle, 2009; Rousselle & Noël, 2007). Plus précisément, les difficultés symboliques seraient observées plus tôt que les difficultés à manipuler les quantités

numériques approximatives, qui n'émergeraient que vers 9-10 ans (De Smedt & al., 2013). Pour certains chercheurs, cette dissociation suggère que la dyscalculie serait due à un déficit d'accès aux quantités numériques associées aux symboles (Noël & Rousselle, 2011; Rousselle & Noël, 2007). Pour mieux comprendre cette hypothèse, il faut tout d'abord préciser que la représentation exacte des quantités numériques serait construite, contrairement à la représentation approximative. La signification des premiers adjectifs cardinaux s'acquiert progressivement et successivement (Carey, 2004). Par exemple, l'enfant doit d'abord comprendre que le mot « deux » de la comptine orale correspond uniquement à la cardinalité 2, pour ensuite maîtriser le concept « trois » et comprendre que le mot « trois » renvoie à une unité de plus que le mot « deux ». A un moment du développement, l'enfant réalise qu'il faut ajouter une unité à une cardinalité connue pour atteindre le mot suivant de la comptine numérique (Carey, 2004). La confrontation aux adjectifs cardinaux et symboles numériques permettrait donc l'acquisition d'une représentation exacte des nombres. Les grandeurs numériques sont même automatiquement associées à leur symbole chez les enfants contrôles à l'école primaire (Rubinsten & al., 2002). Or, cette association ne serait pas automatisée chez les dyscalculiques. Quelques travaux ont en effet montré que les adultes dyscalculiques n'accédaient pas automatiquement à la représentation non-symbolique à partir des chiffres arabes. Les participants de ces études devaient réaliser une tâche de Stroop numérique consistant à comparer des chiffres arabes. Le chiffre ayant la plus grande valeur était affiché soit en caractère plus petit que le chiffre ayant la plus petite valeur (5 7), soit en caractère plus grand (5 7). Les participants devaient juger soit la taille physique soit la valeur numérique. En d'autres termes, la quantité numérique interagissait avec un aspect perceptif (facilitation ou interférence). Au contraire des participants contrôles, les adultes dyscalculiques ne montraient pas d'effet d'interférence avec la grandeur numérique lors de la comparaison de taille physique. Ainsi, la présentation d'un chiffre de plus petite valeur en caractère plus grand n'augmentait pas le temps de réaction comme chez les participants contrôles (Ashkenazi, Rubinsten & Henik, 2009; Rubinsten & Henik, 2005). Cela indique au contraire des participants contrôles, les dyscalculiques n'accèdent pas automatiquement à la représentation numérique dans cette tâche. Ce résultat suggère un déficit de traitement automatique des symboles numériques et appuie l'hypothèse d'un déficit d'accès aux grandeurs numériques. Des données de neuro-imagerie récentes rejoignent en partie cette théorie en laissant penser que la dyscalculie serait un « syndrome de déconnexion » (Jolles & al., 2016). Les auteurs ont en effet montré une atteinte de la connectivité fonctionnelle entre l'IPS et de nombreuses autres régions cérébrales chez les enfants dyscalculiques, suggérant que le traitement des quantités non-symboliques serait mal synchronisé avec les autres processus (notamment linguistiques) impliqués dans l'arithmétique (Jolles & al., 2016). Ces résultats sont notamment en accord avec le modèle du triple-code selon lequel, chez l'adulte, la représentation analogique des quantités numériques (e.g., ∴) serait connectée à une représentation verbale (e.g., « trois ») et à une représentation visuelle (e.g., « 3 »). Une communication anormale entre ces codes pourrait donc engendrer des difficultés dans le traitement des nombres.

Nous venons d'expliquer que la représentation exacte des nombres serait atteinte chez les dyscalculiques. Cependant, qu'est-ce qui explique le déficit du système numérique approximatif qui émerge vers l'âge de 9-10 ans (De Smedt & al., 2013)? La représentation exacte du nombre, acquise par la confrontation aux symboles, améliorerait le système numérique approximatif (Noël & Rousselle, 2011). Cette proposition est appuyée par des données empiriques indiquant que l'apprentissage des mathématiques formelles améliore l'acuité numérique (Piazza & al., 2013). Chez les indiens Mundurucu d'Amazonie, dont le langage ne comporte pas d'adjectifs cardinaux après 5, une partie de la population suit un enseignement primaire en portugais. Les enfants scolarisés sont alors confrontés aux adjectifs

cardinaux portugais et à la correspondance entre un mot, un symbole et un nombre entier. Les enfants scolarisés présentent un système numérique approximatif plus développé que les enfants non-scolarisés, un avantage qui ne semble pas dû à des différences sociales ou cognitives (Piazza & al., 2013). Ainsi, après un développement « programmé » dans les premières années de vie, un environnement culturel riche en symboles numériques permettrait la construction d'une représentation exacte du nombre, ce qui favoriserait l'amélioration du système numérique approximatif (Piazza & al., 2013). A l'inverse, un déficit de traitement symbolique rendrait plus difficile la construction d'une représentation exacte des quantités numériques. Ainsi, la théorie du déficit d'accès permet d'expliquer les différences apparaissant au cours du développement entre dyscalculiques et neurotypiques en ce qui concerne la représentation des quantités non symboliques. Le déficit du « sens du nombre » émergerait progressivement suite à l'affinement du système numérique approximatif par la manipulation des symboles numériques. Ce processus se déroulerait chez les enfants neurotypiques, mais pas chez les dyscalculiques. Cette idée expliquerait pourquoi le déficit de « sens du nombre » ne serait pas observable chez les enfants dyscalculiques avant 9 ans (Noël & Rousselle, 2011). Nous voyons donc que la théorie du déficit d'accès aux quantités numériques à partir des symboles n'est pas totalement incompatible avec les théories du « sens du nombre ». Mais il existe des différences essentielles, en particulier en ce qui concerne la direction du lien entre la représentation exacte et approximatives des nombres.

4. Une dyscalculie secondaire à des déficits généraux

Si la dyscalculie se définit surtout par des difficultés à manipuler les nombres, une grande partie des dyscalculiques présente également des déficits cognitifs plus généraux (Kucian & von Aster, 2015; Rubinsten & Henik, 2009). Les difficultés en mathématiques pourraient donc également être attribuables à ces déficits. En particulier, l'une des premières hypothèses avancées pour expliquer la dyscalculie est la présence de troubles visuo-spatiaux (Rourke, 1993).

Les troubles visuo-spatiaux

Dans une série d'études neuropsychologiques, Rourke (1993) a comparé les capacités cognitives de différents groupes d'enfants présentant des déficits en arithmétique en l'absence de retard intellectuel global. L'auteur a dans l'ensemble caractérisé deux groupes d'enfants. Dans un premier groupe, les enfants présentaient un retard en lecture et en arithmétique, le retard en lecture étant plus marqué que le retard en arithmétique. Les enfants de ce groupe avaient un QI verbal inférieur au QI visuo-spatial. De plus, leurs compétences phonologiques étaient inférieures à celles correspondant à leur âge. Au contraire, leurs capacités visuospatiales étaient dans la norme. Les enfants du second groupe, en revanche, ne présentaient pas de difficulté de lecture mais leur retard en arithmétique était extrêmement important. Ces enfants montraient un QI verbal normal et un QI visuo-spatial inférieur à la norme. Leurs capacités phonologiques étaient épargnées, mais leurs capacités visuo-spatiales (motrices et perceptives) étaient très atteintes. L'auteur a détaillé les atteintes cognitives chez ce groupe d'enfants : problèmes de coordination motrice, d'orientation droite-gauche, dysgraphie, incapacité à bénéficier d'un feed-back, plus faible perception tactile, représentation des doigts moins développée (agnosie digitale). Ce tableau très similaire au syndrome de Gertsman développemental (Benson & Geschwind, 1970) fait penser à une atteinte de l'hémisphère droit observé en neuropsychologie chez l'adulte. Ce tableau clinique est désigné sous le terme de «dysfonction non-verbale », aussi synonyme de « dyspraxie visuo-spatiale ».

La catégorisation des dyscalculiques en fonction de leur profil cognitif établie par Rourke (1993) se retrouve dans une méta-analyse récente (Szucs, 2016). L'auteur propose de distinguer d'une part les enfants dyscalculiques avec de faibles capacités de mémoire de travail verbale et un retard en lecture, et d'autre part les dyscalculiques avec de faibles capacités de mémoire de travail visuo-spatiale sans retard en lecture (Szucs, 2016). Alors que le premier profil pourrait être qualifié de comorbidité dyslexie-dyscalculie (avec des difficultés en mathématiques secondaires à la dyslexie), le deuxième profil correspond aux symptômes principaux de la dysfonction non-verbale ou dyspraxie visuo-spatiale. Ces conclusions suggèrent également que les difficultés à manipuler les symboles numériques peuvent venir d'une représentation plus fragile de la ligne numérique mentale en mémoire de travail visuo-spatiale, plutôt que de difficultés d'accès au cardinal correspondant (von Aster & Shaley, 2007). En effet, les capacités visuo-spatiales sont liées à la linéarisation de la ligne numérique mentale (Gunderson & al., 2012). Un déplacement efficace le long de la ligne numérique mentale facilite la réalisation de tâches numériques (Fias & van Dijck, 2016). A l'inverse, les individus avec des capacités visuo-spatiales atteintes, comme les patients avec hémi-négligence gauche, montrent un déficit de représentation de la ligne numérique mentale (Zorzi & al., 2002). De la même manière, une anomalie du lien nombres-espace chez les dyscalculiques (Ashkenazi & Henik, 2010; Bachot & al., 2005) pourrait venir de difficultés à se représenter la ligne numérique qui correspond aux nombres à manipuler (Fias & van Dijck, 2016).

Ainsi, ceci soulève l'hypothèse que les difficultés des dyscalculiques ne seraient pas dues à une atteinte d'une capacité isolée comme le « sens du nombre » ou l'accès au sens du nombre, mais plutôt à des déficits cognitifs généraux, notamment en mémoire de travail visuo-spatiale (Rourke 1993; Szucs & al. 2013).

Une hypersensibilité à l'interférence

Dans le cadre des déficits généraux d'attention et de mémoire de travail associés à la dyscalculie, une hypothèse récente offre une explication aux déficits en arithmétique fréquemment rencontrés par les dyscalculiques (Geary, 2004). Les difficultés à maîtriser l'arithmétique élémentaire pourraient venir d'une hypersensibilité à l'interférence (De Visscher & al. 2015; De Visscher & Noël 2014, 2013). Pour mieux comprendre ce dysfonctionnement potentiel de la mémoire de travail et des ressources attentionnelles chez les dyscalculiques, revenons sur les mécanismes de résolution des problèmes arithmétiques.

Les faits arithmétiques seraient stockés en mémoire à long terme, formant un réseau de faits arithmétiques constitué progressivement lors de l'apprentissage du calcul (Campbell, 1995). L'association d'un problème arithmétique et de son résultat serait encodée et ajoutée à ce réseau. Avec la pratique, l'association problème-résultat se renforcerait (Siegler, 1996). La trace mnésique des faits arithmétiques appris se consoliderait. En conséquence, la confrontation à un problème entraînerait la récupération du résultat, qui serait activé temporairement en mémoire de travail (Campbell, 1995). Cependant, la présentation d'un problème activerait non seulement le résultat, mais aussi les faits fortement associés au résultat, c'est-à-dire, sémantiquement proches (Campbell & Timm, 2000). Par exemple, la présentation du problème « 6 x 3 » pourrait activer le résultat « 18 », mais également les réponses non pertinentes « 9 » (confusion avec « 6 + 3 ») ou « 12 » (confusion avec 6 x 2). Ces faits non pertinents, qui peuvent venir de la même table que l'un des opérandes, ou être obtenus en changeant l'opérateur, entreraient en compétition avec le résultat. Plus la similarité entre le résultat et les « compétiteurs » est élevée, plus l'interférence en mémoire de travail est importante (Jonides & Nee, 2006). Un niveau d'interférence important entraînerait donc la formation d'un réseau très fragile en mémoire à long terme (Campbell, 1995). L'inhibition proactive, ou la capacité à résister à l'interférence en mémoire de travail, est donc susceptible d'expliquer des différences de performance en arithmétique (Barrouillet & Lépine, 2005; De Visscher & Noël, 2014). Les individus capables de résister à l'interférence sont en effet en mesure d'encoder un nombre plus important d'associations (Barrouillet & Lépine, 2005). Ces individus s'avèrent également plus performants pour récupérer la solution d'un problème arithmétique (Barrouillet & Lépine, 2005). A l'inverse, les individus avec des déficits sévères en arithmétique élémentaire sont plus affectés par le niveau d'interférence lors de la production ou de la vérification d'un résultat (Barrouillet & al., 1997). Il a également été reporté que ces individus étaient davantage sensibles aux informations non pertinentes dans une tâche de mémoire de travail (Passolunghi & Siegel, 2004). Cette sensibilité accrue à l'interférence pourrait contribuer aux déficits arithmétiques d'une partie des dyscalculiques (De Visscher & al. 2015; De Visscher & Noël 2014, 2013).

Une première étude de cas a mis en évidence des difficultés d'inhibition proactive chez une patiente dyscalculique dont les capacités intellectuelles, phonologiques et visuospatiales étaient intactes (De Visscher & Noël, 2013). Ses compétences mathématiques se caractérisaient par des difficultés très marquées en arithmétique, notamment en résolution d'additions et de multiplications simples. En revanche, ses capacités à manipuler les quantités non-symboliques étaient préservées. Ses capacités à résister à l'interférence ont été testées notamment par des tâches d'apprentissage associatif nécessitant de mémoriser des paires d'éléments. Lorsque les éléments d'une paire présentent peu de ressemblance (tels qu'un nom d'objet associé à un nom d'animal), l'interférence est faible. A l'inverse, lorsque les éléments d'une même paire sont similaires (par exemple, un prénom associé à un nom de famille), l'interférence est élevée. La performance de la patiente était similaire à celles d'individus neurotypiques dans la condition de faible interférence. Au contraire, lorsque l'interférence était élevée, la performance de la patiente était très dégradée, aussi bien en rappel immédiat qu'en rappel après délai. Ces résultats indiquent une sensibilité élevée à l'interférence à l'encodage ou à la récupération. En somme, l'ensemble des résultats de cette patiente dyscalculique révèlent un défaut de traitement des informations en mémoire dans un contexte de forte interférence. Bien que les difficultés mentionnées par cette personne soient limitées à l'arithmétique, son déficit ne s'avère pas spécifique au traitement des symboles arithmétiques (De Visscher & Noël, 2013).

L'hypothèse de l'hypersensibilité à l'interférence comme cause des déficits arithmétiques a été confirmée par deux études successives utilisant des paradigmes d'apprentissage associatifs avec différents niveaux d'interférence. Premièrement, les enfants avec déficits en arithmétique élémentaire étaient moins efficaces que leurs pairs pour mémoriser des associations de stimuli visuels familiers dans des conditions de forte interférence entre ces stimuli (De Visscher & Noël, 2014). Les auteurs ont conclu que la sensibilité à l'interférence en mémoire de travail empêcherait les enfants dyscalculiques de se constituer un réseau de faits arithmétiques solide. Cette hypersensibilité à l'interférence pourrait toutefois ne concerner qu'un sous-type de dyscalculiques. Ceci est suggéré par De Visscher et collègues (2015), qui ont testé la résistance à l'interférence chez des adultes dyscalculiques dont les déficits mathématiques étaient soit limités à l'arithmétique, soit généraux. Tandis que les participants avec déficits généraux étaient dans l'ensemble moins performants dans l'apprentissage d'une séquence de syllabes, la mémorisation des participants avec déficits spécifiques en arithmétique dépendait du niveau d'interférence. L'apprentissage s'avérait moins efficace que chez les individus contrôles en cas de forte interférence (De Visscher & al., 2015).

Dans tous les cas, l'hypothèse d'un défaut d'inhibition proactive dans la dyscalculie permet d'expliquer les déficits limités à l'arithmétique, mais ne propose pas d'expliquer

l'ensemble des difficultés rencontrées par les dyscalculiques. L'hypothèse de l'hypersensibilité à l'interférence s'appliquerait donc à un sous-type de dyscalculie mais n'exclut pas que d'autres déficits généraux puissent entraîner une dyscalculie (De Visscher & Noël, 2013).

III. CONCLUSION

En conclusion, les théories cognitives cherchant à expliquer la dyscalculie se divisent en deux camps. Pour certaines, la dyscalculie aurait une origine relativement spécifique, liée à un trouble du sens du nombre (Piazza & al., 2010; Wilson & Dehaene, 2007) ou à un déficit d'accès à ce sens du nombre à partir des symboles numériques (Rousselle & Noël, 2007). Pour d'autres, la dyscalculie aurait une origine plus générale, liée par exemple à des troubles visuo-spatiaux (Rourke, 1993; Szucs & al., 2013) ou à des problèmes de mobilisation des ressources attentionnelles (Ashkenazi & Henik, 2010; De Visscher & Noël, 2013). Cette diversité de positions peut d'une certaine façon s'expliquer par l'étendu et la variété des capacités cognitives requises par les activités mathématiques. Ceci se reflète dans l'hétérogénéité des atteintes observées chez les enfants dyscalculiques. C'est pour cette raison que de plus en plus de chercheurs appellent à considérer cette hétérogénéité comme l'une des caractéristiques de la dyscalculie. L'une des hypothèses serait par exemple de considérer qu'il existe des dyscalculies primaires (qui résulteraient de troubles fondamentaux des compétences numériques) et des dyscalculies secondaires (pour lesquelles les difficultés en mathématiques seraient intégralement dues à des troubles non-numériques) (Kaufmann & al., 2013). Dans tous les cas, et même si la recherche a encore beaucoup à faire dans ce domaine, il est clair que le diagnostic et la remédiation de la dyscalculie passe par une individualisation de la prise en charge afin de caractériser au mieux les troubles spécifiques et les comorbidités de chaque enfant.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AGRILLO, C., DADDA, M., SERENA, G. & BISAZZA, A. (2009). Use of number by fish. PLoS ONE, 4(3),
- e4786. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0004786 ANDERSSON, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. Journal of Educational Psychology, 102(1), 115-134. https://doi.org/10.1037/a0016838
- ASHCRAFT, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. Numerical Cognition, 44(1), 75-106. https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90051-I
- ASHCRAFT, M. H. & FIERMAN, B. A. (1982). Mental addition in third, fourth, and sixth graders. Journal of
- Experimental Child Psychology, 33(2), 216-234. https://doi.org/10.1016/0022-0965(82)90017-0
 ASHCRAFT, M. H. & KIRK, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. Journal of Experimental Psychology: General, 130(2), 224-237. https://doi.org/10.1037//0096-3445.130.2.224
- ASHKENAZI, S. & Henik, A. (2010). A disassociation between physical and mental number bisection in developmental dyscalculia. *Neuropsychologia*, 48(10), 2861-2868.
- https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2010.05.028
 ASHKENAZI, S., MARK-ZIGDON, N. & HENIK, A. (2013). Do subitizing deficits in developmental dyscalculia involve pattern recognition weakness? *Developmental Science*, 16(1), https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2012.01190.x
- ASHKENAZI, S., RUBINSTEN, O. & HENIK, A. (2009). Attention, automaticity, and developmental dyscalculia. *Neuropsychology*, 23(4), 535-540. https://doi.org/10.1037/a0015347
 BACHOT, J., GEVERS, W., FIAS, W. & ROEYERS, H. (2005). Number sense in children with visuospatial
- disabilities: Orientation of the mental number line. *Psychology Science*, 47(1), 172-183. BARBARESI, W. J. KATUSIC, S. K., COLLIGAN, R. C., WEAVER, A. L., & JACOBSEN, S. J. (2005). Math learning disorder: Incidence in a population-based birth cohort, 1976-82, Rochester, Minn. Ambulatory Pediatrics, 5(5), 281-289. https://doi.org/10.1367/A04-209R.1

- BAROODY, A. J. & GINSBURG, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics., 75-112.
- BARROUILLET, P., FAYOL, M. & LATHULIÈRE, E. (1997). Selecting between competitors in multiplication tasks: An explanation of the errors produced by adolescents with learning difficulties. International Journal of Behavioral Development, 21(2), 253-275. https://doi.org/10.1080/016502597384857
- BARROUILLET, P. & LEPINE, R. (2005). Working memory and children's use of retrieval to solve addition Experimental problems. Journal Child Psychology, 91(3), https://doi.org/10.1016/j.jecp.2005.03.002
- BARTH, H., KANWISHER, N. & SPELKE, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition*, 86(3), 201-221. https://doi.org/10.1016/S0010-0277(02)00178-6
- BERCH, D. B., FOLEY, E. J., HILL, R. J. & RYAN, P. M. (1999). Extracting parity and magnitude from arabic numerals: developmental changes in number processing and mental representation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(4), 286-308. https://doi.org/10.1006/jecp.1999.2518

 BOOTH, J. L. & SIEGLER, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical
- estimation. Developmental Psychology, 42(1), 189-201. https://doi.org/10.1037/0012-1649.41.6.189
- BRANNON, E. M. & TERRACE, H. S. (2000). Representation of the numerosities 1-9 by rhesus macaques (Macaca mulatta). *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 26(1), 31-49. https://doi.org/10.1037/0097-7403.26.1.31
- BRANNON, E. M., WUSTHOFF, C. J., GALLISTEL, C. R. & GIBBON, J. (2001). Numerical subtraction in the pigeon: Evidence for a linear subjective number scale. Psychological Science, 12(3), 238-243. https://doi.org/10.1111/1467-9280.00342
- BULL, R. & SCERIF, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: Inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology*, 19(3), 273-293. https://doi.org/10.1207/S15326942DN1903_3
- BUTTERWORTH, B. (2005). Developmental dyscalculia. In Handbook of Mathematical Cognition (Psychology Press, p. 455-467). Hove, UK: J. I. D. Campbell. CAMPBELL, J. I. D. (1995). Mechanisms of simple addition and multiplication: A modified network-
- interference theory and simulation. Mathematical Cognition, 1, 121-164.
- CAMPBELL, J. I. D. & TIMM, J. C. (2000). Adults' strategy choices for simple addition: Effects of retrieval
- interference. *Psychonomic Bulletin & Review*, 7(4), 692-699. https://doi.org/10.3758/BF03213008 CANTLON, J. F., BRANNON, E. M., CARTER, E. J. & PELPHREY, K. A. (2006). Functional imaging of 4-y-old PLoSnumerical processing in adults and children. Biology. 4(5),https://doi.org/10.1371/journal.pbio.0040125
- Bootstrapping & the (2004).origin of concepts. Daedalus, 133(1), 59-68. https://doi.org/10.1162/001152604772746701
- CARPENTER, T. P. & MOSER, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. Journal for Research in Mathematics Education, 15(3), 179-202. https://doi.org/10.2307/748348
- DE SMEDT, B. & GILMORE, C. K. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. Journal of Experimental Child Psychology, 108(2), 278-292. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.09.003
- DE SMEDT, B., NOEL, M.-P., GILMORE, C. & ANSARI, D. (2013). How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education*, 2(2), 48-55. https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.06.001
- VIŜSCHER, A. & NOËL, M.-P. (2013). A case study of arithmetic facts dyscalculia caused by a hypersensitivity-to-interference in memory. Cortex, 49(1), 50-70. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2012.01.003
- DE VISSCHER, A. & NOËL, M.-P. (2014). Arithmetic facts storage deficit: the hypersensitivity-to-interference in memory hypothesis. *Developmental Science*, 17(3), 434-442. https://doi.org/10.1111/desc.12135
- DE VISSCHER, A., SZMALEC, A., VAN DER LINDEN, L. & NOEL, M.-P. (2015). Serial-order learning and hypersensitivity-to-interference in dyscalculia. Cognition, 144, https://doi.org/10.1016/j.cognition.2015.07.007
 DEHAENE, S., SPELKE, E., PINEL, P., STANESCU, R. & TSIVKIN, S. (1999). Sources of mathematical
- thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. Science, 284(5416), 970. https://doi.org/10.1126/science.284.5416.970
- DEHAENE, S. (1997). The number sense: how the mind creates mathematics. New York: Oxford University
- DEHAENE, S., BOSSINI, S. & GIRAUX, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. Journal of Experimental Psychology: General, 122(3), 371-396.
- DEHAENE, S. & CHANGEUX, J.-P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neuronal
- model. Journal of Cognitive Neuroscience, 5(4), 390-407. https://doi.org/10.1162/jocn.1993.5.4.390
 DESOETE, A., ROEYERS, H. & DE CLERCQ, A. (2004). Children with mathematics learning disabilities in Belgium. Journal of Learning Disabilities, 37(1), 50-61. https://doi.org/10.1177/00222194040370010601
- DEVINE, A., SOLTÉSZ, F., NOBES, A., GOSWAMI, U. & SZUCS, D. (2013). Gender differences in developmental dyscalculia depend on diagnostic criteria. Learning and Instruction, 27, 31-39. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.02.004
- DIRKS, E., SPYER, G., VAN LIESHOUT, E. C. D. M. & DE SONNEVILLE, L. (2008). Prevalence of combined reading and arithmetic disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 41(5), 460-473. https://doi.org/10.1177/0022219408321128

- DOWKER, A. (2005). Early identification and intervention for students with mathematics difficulties. Journal of Learning Disabilities, 38(4), 324-332. https://doi.org/10.1177/00222194050380040801
- EGER, E., STERZER, P., RUSS, M. O., GIRAUD, A.-L. & KLEINSCHMIDT, A. (2003). A Supramodal Intraparietal 719-726. Representation in Human Cortex. Neuron, 37(4)https://doi.org/10.1016/S0896-6273(03)00036-9
- FECHNER, G. (1966). Elements of Psychophysics. New York, NY: Holt.
- FEIGENSON, L., DEHAENE, S. & SPELKE, E. (2004). Core systems of number. Trends in Cognitive Sciences, 8(7), 307-314. https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002
- FIAS, W. & VAN DIJCK, J.-P. (2016). The temporary nature of number—space interactions. Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue Canadienne de Psychologie Expérimentale, 70(1), 33-40. https://doi.org/10.1037/cep0000071
- GEARY, D. C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. Journal of Learning Disabilities, 37(1), 4-15. https://doi.org/10.1177/00222194040370010201
- GEARY, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. Developmental Psychology, 47(6), 1539-1552. https://doi.org/10.1037/a0025510
 GEARY, D. C., BROWN, S. C. & SAMARANAYAKE, V. A. (1991). Cognitive addition: A short longitudinal
- study of strategy choice and speed-of-processing differences in normal and mathematically disabled children. *Developmental Psychology*, 27(5), 787-797. https://doi.org/10.1037/0012-1649.27.5.787
- GEARY, D. C., HAMSON, C. O. & HOARD, M. K. (2000). Numerical and arithmetical Cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. Journal of Experimental Child Psychology, 77(3), 236-263. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2561 GROEN, G. J. & PARKMAN, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*,
- 79(4), 329-343. https://doi.org/10.1037/h0032950
- GROSS, H. J., PAHL, M., SI, A., ZHU, H., TAUTZ, J. & ZHANG, S. (2009). Number-based visual generalisation in the honeybee. *PLoS ONE*, 4(1), e4263. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0004263 GROSS-TSUR, V., MANOR, O. & SHALEV, R. S. (1996). Developmental dyscalculia: Prevalence and
- demographic features. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 38(1), 25-33.
 GUNDERSON, E. A., RAMIREZ, G., BEILOCK, S. L. & LEVINE, S. C. (2012). The relation between spatial
- skill and early number knowledge: The role of the linear number line. Developmental Psychology, 48(5), 1229-1241. https://doi.org/10.1037/a0027433
- HALBERDA, J. & FEIGENSON, L. (2008). Developmental change in the acuity of the « number sense »: The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. Developmental Psychology, 44(5), 1457-1465. https://doi.org/10.1037/a0012682
- HALBERDA, J., MÁZZOCCO, M. M. & FEIGENSON, L. (2008). Individual differences in non-verbal number
- acuity correlate with maths achievement. *Nature*, 455(7213), 665-668. https://doi.org/10.1038/nature07246 HANICH, L. B., JORDAN, N. C., KAPLAN, D. & DICK, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 615-626. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.3.615
- HOLLOWAY, I. D. & ANSARI, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. Journal of Experimental Child Psychology, 103(1), 17-29. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.04.001
- IUCULANO, T., TANG, J., HALL, C. W. B. & BUTTERWORTH, B. (2008). Core information processing deficits in developmental dyscalculia and low numeracy. Developmental Science, 11(5), 669-680. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00716.x
- IZARD, V., SANN, C., SPELKE, E. S. & STRERI, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(25), 10382-10385. Proceedings of10382-10385. https://doi.org/10.1073/pnas.0812142106
- IZARD, V., DEHAENE-LAMBERTZ, G. & DEHAENE, S. (2008). Distinct cerebral pathways for object identity and number in human infants. PLoS Biology, 6(2), e11. https://doi.org/10.1371/journal.pbio.0060011
- JOLLES, D., ASHKENAZI, S., KOCHALKA, J., EVANS, T., RICHARDSON, J., ROSENBERG-LEE, M. & MENON, V. (2016). Parietal hyper-connectivity, aberrant brain organization, and circuit-based biomarkers children with mathematical disabilities. Developmental Science, 19(4), https://doi.org/10.1111/desc.12399
- JONIDÉS, J. & NEE, D. E. (2006). Brain mechanisms of proactive interference in working memory. Neuroscience, 139(1), 181-193. https://doi.org/10.1016/j.neuroscience.2005.06.042
- JORDAN, N. C., HANICH, L. B. & KAPLAN, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 74(3), 834-850. https://doi.org/10.1111/1467-8624.00571

 JORDAN, N. C. & MONTANI, T. O. (1997). Cognitive arithmetic and problem polving: A comparison of
- children with specific and general mathematics difficulties. Journal of Learning Disabilities, 30(6), 624-634. https://doi.org/10.1177/002221949703000606
- KAUFMANN, L., MAZZOCCO, M. M., DOWKER, A., VON ASTER, M., GÖBEL, S. M., GRABNER, R. H., HENIK, A., JORDAN, N. C., KARMILOFF-SMITH, A.D., KUCIAN, K., RUBINSTEN, O., SZUCS, D., SHALEV, R. & NUERK, H.-C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. Frontiers in Psychology, 4. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516
- KOUMOULA, A., TSIRONI, V., STAMOULI, V., BARDANI, I., SIAPATI, S., GRAHAM, A. & VON ASTER, M. (2004). An epidemiological study of number processing and mental calculation in Greek schoolchildren. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(5), 377-388. https://doi.org/10.1177/00222194040370050201

- KUCIAN, K., LOENNEKER, T., DIETRICH, T., DOSCH, M. & MARTIN, E. (2006). Impaired neural networks for approximate calculation in dyscalculic children: a functional MRI study. Behavioral and Brain Functions, 17.
 KUCIAN, K., LOENNEKER, T., MARTIN, E. & VON ASTER, M. (2011). Non-symbolic numerical distance
- effect in children with and without developmental dyscalculia: A parametric fMRI study. Developmental Neuropsychology, 36(6), 741-762. https://doi.org/10.1080/87565641.2010.549867
- LANDERL, K. (2013). Development of numerical processing in children with typical and dyscalculic arithmetic skills—a longitudinal study. *Frontiers in Psychology*, 4. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00459 LANDERL, K., BEVAN, A. & BUTTERWORTH, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical
- study 8–9-year-old students. Cognition, capacities: of 93(2), https://doi.org/10.1016/j.cognition.2003.11.004
- LANDERL, K., FÜSSENEĞGER, B., MOLL, K. & WILLBURGER, E. (2009). Dyslexia and dyscalculia: Two learning disorders with different cognitive profiles. Journal of Experimental Child Psychology, 103(3), 309 324. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.03.006
- LANDERL, K. & KÖLLE, C. (2009). Typical and atypical development of basic numerical skills in elementary Journal Experimental 546-565. school. Child Psychology, 103(4), of https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.12.006
- LEWIS, C., HITCH, G. J. & WALKER, P. (1994). The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9- to 10-year-old boys and girls. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 35(2), 283-292. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1994.tb01162.x
- LIBERTUS, M. E., FEIGENSON, L. & HALBERDA, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability: Approximate number system and math abilities. *Developmental Science*, *14*(6), 1292-1300. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2011.01080.x
- LIPTON, J. S. & SPELKE, E. S. (2003). Origins of number sense: Large-number discrimination in human
- infants. *Psychological Science*, *14*(5), 396-401. https://doi.org/10.1111/1467-9280.01453 LOURENCO, S. F., BONNY, J. W., FERNANDEZ, E. P. & RAO, S. (2012). Nonsymbolic number and cumulative area representations contribute shared and unique variance to symbolic math competence. Proceedings of the National Academy of Sciences, 109(46), 18737-18742. https://doi.org/10.1073/pnas.1207212109
- LYONS, I. M., PRICE, G. R., VAESSEN, A., BLOMERT, L. & ANSARI, D. (2014). Numerical predictors of https://doi.org/10.1111/desc.12152 1-6. Developmental Science, 17(5),
- MAZZÓCCO, M. M. M. & DEVLIN, K. T. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. Developmental Science, 11(5), 681-691. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x MAZZOCCO, M. M. M., FEIGENSON, L. & HALBERDA, J. (2011). Impaired acuity of the approximate
- number system underlies mathematical learning disability (Dyscalculia): Impaired numerical acuity contributes MLD. Child Development, 82(4), 1224-1237. https://doi.org/10.1111/j.1467to 8624.2011.01608.x
- MAZZOCCO, M. M. M. & MYERS, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, 53(1), 218-253. https://doi.org/10.1007/s11881-003-0011-7
- MAZZOCCO, M. M. M. & RÄSÄNEN, P. (2013). Contributions of longitudinal studies to evolving definitions and knowledge of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2(2), 65-73. https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.05.001
- MCCRINK, K. & WYNN, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-Month-old infants. Psychological Science, 15(11), 776-781. https://doi.org/10.1111/j.0956-7976.2004.00755.x

 MEJIAS, S., MUSSOLIN, C., ROUSSELLE, L., GREGOIRE, J. & NOËL, M.-P. (2012). Numerical and nonnumerical estimation in children with and without mathematical learning disabilities. Child Neuropsychology, 18(6), 550-575. https://doi.org/10.1080/09297049.2011.625355
- MOELLER, K., NEŬBURGER, S., KAUFMANN, L., LANDERL, K. & NUERK, H.-C. (2009). Basic number processing deficits in developmental dyscalculia: Evidence from eye tracking. Cognitive Development, 24(4), 371-386. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.09.007
- MUSSOLÍN, C., MEJIAS, S. & NOËL, M.-P. (2010). Symbolic and nonsymbolic number comparison in children with and without dyscalculia. Cognition, *115*(1), 10-25. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2009.10.006
- NIEDEŘ, A. & MILLER, E. K. (2004). A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey. *Proceedings of the M* https://doi.org/10.1073/pnas.0402239101 National Academy of Sciences, 101(19),
- NOËL, M.-P. & ROUSSELLE, L. (2011). Developmental changes in the profiles of dyscalculia: An explanation based on a double exact-and-approximate number representation model. Frontiers in Human Neuroscience, 5. https://doi.org/10.3389/fnhum.2011.00165
- OSTAD, S. A. (1998). Comorbidity between mathematics and spelling difficulties, 23, 145-154.
- OSTAD, S. A. (1998). Developmental differences in solving simple arithmetic word problems and simple number-fact problems: A comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. Mathematical Cognition, 4(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/135467998387389
- PASSOLUNGHI, M. C. & SIEGEL, L. S. (2004). Working memory and access to numerical information in children with disability in mathematics. Journal of Experimental Child Psychology, 88(4), 348-367. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2004.04.002

- PIAZZA, M., FACOETTI, A., TRUSSARDI, A. N., BERTELETTI, I., CONTE, S., LUCANGELI, D. & ZORZI, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116(1), 33-41. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.03.012 PIAZZA, M., IZARD, V., PINEL, P., LE BIHAN, D. & DEHAENE, S. (2004). Tuning curves for approximate
- numerosity the human intraparietal sulcus. Neuron. https://doi.org/10.1016/j.neuron.2004.10.014
- PIAZZA, M., PICA, P., IZARD, V., SPELKE, E. S. & DEHAENE, S. (2013). Education enhances the acuity of the nonverbal approximate number https://doi.org/10.1177/0956797612464057 number system. Psychological Science,
- PICA, P., LEMER, C., IZARD, V. & DEHAENE, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, 306(5695), 499-503. https://doi.org/10.1126/science.1102085 PINEL, P., DEHAENE, S., RIVIÈRE, D. & LEBIHAN, D. (2001). Modulation of parietal activation by
- 1013-1026. distance in a number comparison task. NeuroImage, 14(5),https://doi.org/10.1006/nimg.2001.0913
- PRICE, G. R., HOLLOWAY, I., RÄSÄNEN, P., VESTERINEN, M. & ANSARI, D. (2007). Impaired parietal magnitude processing in developmental dyscalculia. *Current Biology*, 17(24), R1042-R1043. https://doi.org/10.1016/j.cub.2007.10.013

 ROTZER, S., KUCIAN, K., MARTIN, E., VON ASTER, M., KLAVER, P. & LOENNEKER, T. (2008).
- Optimized voxel-based morphometry in children with developmental dyscalculia. NeuroImage, 39(1), 417-422. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2007.08.045
- ROURKE, B. P. (1993). Arithmetic disabilities, specific and otherwise: A neuropsychological perspective. *Journal of Learning Disabilities*, 26(4), 214-226. https://doi.org/10.1177/002221949302600402

 ROUSSELLE, L. & NOËL, M.-P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning
- disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. Cognition, 102(3), 361-395. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.01.005
- RUBINSTEN, O. & HENIK, A. (2005). Automatic activation of internal magnitudes: A study of developmental dyscalculia. *Neuropsychology*, 19(5), 641-648. https://doi.org/10.1037/0894-4105.19.5.641
- RUBINSTEN, O., HENIK, A., BERGER, A. & SHAHAR-SHALEV, S. (2002). The development of internal representations of magnitude and their association with arabic numerals. Journal of Experimental Child Psychology, 81(1), 74-92. https://doi.org/10.1006/jecp.2001.2645
- RUSSELL, R. L. & GINSBURG, H. P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematics difficulties. Cognition and Instruction, 1(2), 217-244. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0102_3
- SCHLEÏFER, P. & LANDERL, K. (2011). Subitizing and counting in typical and atypical development: Subitizing and counting. Developmental Science, 14(2), 280-291. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2010.00976.x
- SERON, X., & FAYOL, M. (1994). Number transcoding in children: A functional analysis. British Journal of Developmental Psychology, 12(3), 281-300. https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1994.tb00635.x
- SIEGLER, R. S. (1996). Emerging minds: The process of change in children's thinking. New York: Oxford University Press.
- SZUCS, D., DEVINE, A., SOLTESZ, F., NOBES, A. & GABRIEL, F. (2013). Developmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory and inhibition impairment. *Cortex*, 49(10), 2674-2688. related to visuo-spatial memory and https://doi.org/10.1016/j.cortex.2013.06.007
- VAN OEFFELEN, M. P. & VOS, P. G. (1982). A probabilistic model for the discrimination of visual number.
- Perception & Psychophysics, 32(2), 163-170. https://doi.org/10.3758/BF03204275

 VON ASTER, M. G. & SHALEV, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia.

 Developmental Medicine & Child Neurology, 49(11), 868-873. https://doi.org/10.1111/j.1469-
- WILSON, A. J. & DEHAENE, S. (2007). Number sense and developmental dyscalculia. In Coch D., Dawson G., Fischer K. W. (Eds.) (pp. 212-238). Human behavior, learning, and the developing brain: Atypical development. New York, NY: Guilford Press.
- WYNN, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. Nature, 358(6389), 749-750. https://doi.org/10.1038/358749a0
- XU, F. & SPELKE, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74(1), B1-B11. https://doi.org/10.1016/S0010-0277(99)00066-9
- YANG, T., CHEN, C., ZHOU, X., XU, J., DONG, Q. & CHEN, C. (2014). Development of spatial representation of numbers: A study of the SNARC effect in Chinese children. *Journal of Experimental*
- Child Psychology, 117, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.08.011
 ZORZI, M., PRIFTIS, K. & UMILTA, C. (2002). Brain damage: Neglect disrupts the mental number line. Nature, 417(6885), 138-139. https://doi.org/10.1038/417138a

DIFFICULTÉS D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES : UN REGARD DIDACTIQUE

Thierry **DIAS**

Haute École Pédagogique du canton de Vaud

thierry.dias@hepl.ch

Résumé

Depuis plusieurs années, nous cherchons à analyser et comprendre les liens qui existent entre les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (Dias & Deruaz, 2012) en choisissant un ancrage didactique qui nous paraît essentiel dans une telle problématique. Nos travaux ont d'abord investigué la dimension expérimentale des mathématiques (Dias, 2008) avant de se centrer davantage sur la question épistémologique de ses objets et de la spécificité des environnements didactiques (Dias, 2015). Au cours de ces différentes études, nous avons progressivement rejoint le consensus international sur les difficultés récurrentes qui existent dans la définition de ces troubles d'apprentissage (Lewis & Fisher, 2016) notamment du fait de l'absence de critères objectifs dans leur repérage. Afin de renforcer la dimension didactique dans l'étude des *mathematical learning disabilities* (MLD), nous avons récemment opté pour la création d'une équipe internationale de recherche (RITEAM¹) dont les objectifs seront de bâtir des outils de repérage des élèves MLD ainsi que des protocoles d'intervention et d'aide à destination de tous les enseignants.

Mots clés

Difficultés d'apprentissage, troubles d'apprentissage, MLD, mathématiques

L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques entretiennent des relations complexes qui ne peuvent se définir comme simplement causales (tout enseignement implique des apprentissages) mais plutôt corrélationnelles surtout lorsque l'on évoque leurs dysfonctionnements (il existe des difficultés d'enseignement et des difficultés d'apprentissages que l'on peut mettre en liens). L'étude de ces relations est une interrogation lancinante qui nourrit nos travaux de recherche et de formation en didactique des mathématiques depuis de nombreuses années. Nous considérons en effet que l'ancrage didactique est pour le moins légitime dans une telle perspective de compréhension d'un phénomène éducatif de première importance notamment en France. Dans l'article qui suit nous interrogerons successivement les notions de conceptualisation, d'interaction et d'environnement puis de repérage des troubles avant de présenter trois axes de recherche faisant partie d'une problématique inhérente à la création d'une équipe internationale de recherche.

-

¹ http://www.riteam.ch

I. DIFFICULTES D'ENSEIGNEMENT OU D'APPRENTISSAGE?

Lorsque l'on parle de difficultés scolaires on ajoute régulièrement le terme d'élève en formant ainsi un syntagme insécable : 'les élèves en difficulté'. Pourtant, force est de constater qu'il n'y a pas d'élève sans institution scolaire. En conséquence, toute étude dans ce domaine nous conduit à considérer au moins deux autres axes de recherche ne portant pas sur l'élève : celui du savoir et celui de l'enseignement. Ceci nous fournit deux bonnes raisons d'adopter des points de vue différents sur ce qui fait résistance au projet d'apprentissage d'un sujet élève. Depuis plusieurs années, une interrogation lancinante nous anime : quels sont les liens qui existent entre difficultés d'enseignement et d'apprentissage. Ceci nous conduit à postuler sur la légitimité d'un triple ancrage théorique pour mener des études. Ces trois références ouvrent des espaces d'analyses différents sur les raisons des difficultés constatées dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

Nous commencerons par celui de la dimension épistémologique qui nous permettra de mettre en évidence que la diversité empirique des objets de savoir proposée dans les situations d'apprentissage heurte parfois la conception axiomatique des théories référentes. Dans un deuxième temps, nous convoquerons la dimension didactique pour étudier le rôle de l'environnement² des situations d'apprentissage : dans quelles conditions est-il à même de révéler les potentiels des élèves malgré les contraintes qu'il impose ? Enfin, comme il n'est évidemment pas question d'abandonner toute interrogation portant sur les difficultés intrinsèques aux élèves, nous présenterons une réflexion portant sur des travaux récents en cognition mathématique concernant les différences entre la notion de trouble et celle de difficulté.

1. Objets sensibles et objets théoriques : comprendre les obstacles à la conceptualisation

La première source de difficulté d'enseignement et d'apprentissage que nous avons étudiée est celle qui est en rapport directe avec la dimension épistémologique de ses objets. Nous avons ainsi mis en évidence que le mode d'existence des objets mathématiques dans le contexte scolaire n'était possible que dans une dialectique autour de deux pôles : la diversité empirique et l'axiomatique théorique (Dias, 2014). Selon nous (Dias, 2008), c'est le recours à une dimension expérimentale qui permet de nombreux allers et retours entre des objets sensibles (plus ou moins familiers) et des objets théoriques (plus ou moins formalisés) par des confrontations (adéquates ou non), des vérifications, des argumentations (prouver, convaincre). Les va-et-vient se font entre les faits objectifs et les savoirs conceptuels par divers processus tels que l'interprétation et la modélisation. Cette dialectique est source de nombreuses difficultés dans les projets d'enseignement et apprentissages, notamment en raison de phénomènes didactiques très implicites. Les élèves interagissent parfois avec des choses (matériel tangible par exemple) que leurs enseignants perçoivent comme des notions ou des concepts sans rendre explicite ce changement de statut. Mais si les billes du boulier restent des perles colorées, elles ne prendront pas la valeur d'une grandeur numérique sur laquelle on peut opérer.

_

² Nous utilisons la terminologie d'environnement didactique et non pas celui de situation didactique dans la perspective de mieux prendre en compte l'ensemble des éléments constitutifs du processus enseignement apprentissage, y compris dans sa dimension institutionnelle.

Objets sensibles	Objets théoriques
Monde sensible : diversité empirique	Théorie : système organisé de savoirs
ce que les sens peuvent percevoir	ce que la cognition peut concevoir
Objets matériels du monde ordinaire : « choses » Objets de la nature, objets fabriqués ou générés par l'homme Dessins sur feuille de papier ou écran d'ordinateur: Ecritures, figures, courbes, graphiques	S'insèrent dans une théorie, une axiomatique et font l'objet d'une définition mathématique. Sont caractérisés par des propriétés et des relations mathématiques. Leur existence revêt un caractère de nécessité qui est assurée par la non contradiction.

Tableau 1 : Typologie dichotomique des objets mathématiques.

Nous nous accordons à dire que l'existence des objets mathématiques relève pour partie des interprétations que les sujets en font : les élèvent agissent sur des signes, sur du matériel et éventuellement en parlent. Le professeur qui sait des choses sur ces actes ou ces mots décide (ou non) de qualifier de mathématique ces actes et ces mots, et ainsi participe au processus d'exhibition des savoirs.

Chaque fait ou phénomène empirique doit faire l'objet d'une variété d'expériences (des situations de référence), d'interactions et d'échanges au cours desquelles les signes (signifiants) permettant de dénoter les objets (signifiés) participeront progressivement à la conceptualisation. La création des situations susceptibles de mettre en œuvre un tel processus de conceptualisation (Vergnaud, 2011) est un projet didactique qui comporte son lot de difficultés pour l'enseignant comme pour les élèves. Pour assurer le passage des « choses » (objets sensibles) du divers empirique à la conceptualisation des objets théoriques, ce sont des allers et retours organisés (par des connaissances didactiques) qui sont nécessaires. Nous rejoignons ainsi Berthelot et Salin (1992) dans leur analyse de l'enseignement de la géométrie en tant que discipline scolaire :

« La question de l'initiation des élèves à la géométrie se trouve ainsi transformée : ce n'est plus seulement un saut direct de la problématique pratique à la problématique géométrique qui peut être envisagé ; on peut aussi concevoir d'aménager l'entrée dans la problématique de modélisation, puis des aller-retours entre cette problématique, où les concepts de la géométrie ont un statut d'outil et commencent à figurer dans des raisonnements, et la problématique de la géométrie, où ils sont considérés comme des objets. » (p. 362)

Une part importante des dysfonctionnements dans le processus d'enseignement et apprentissage peut donc être attribuée à cette dimension épistémologique. Il est en effet très ambitieux de garantir à la fois une robustesse des situations de référence et une utilisation rigoureuse des signes en tant que signifiants explicites des objets théoriques qu'ils représentent.

2. Environnement didactique : localiser les dysfonctionnements

Contraintes et potentiels

Depuis plusieurs années, nous explorons également la mise en œuvre d'environnements didactiques propices aux expériences des sujets, en pariant sur leur rencontre possible avec la diversité des phénomènes empiriques puis sur leur capacité à comprendre notamment par le biais de la stabilisation des invariants dans les actes, les signes et les objets rencontrés. La

mise en œuvre de ce type de situations ancrées sur l'action des sujets et leurs interactions intersubjectives est également source d'interrogation puisqu'elles engendrent un certain nombre de difficultés. Par exemple, chaque environnement matériel choisi se veut porteur d'un certain potentiel significatif des objets théoriques qu'il représente, il est donc construit sur l'idée de son adaptation à différents niveaux de connaissances. Ce postulat de ressources différenciées intègre l'acceptation de processus d'apprentissages « à plusieurs vitesses » qui se heurte cependant à une dimension institutionnelle tendant à repérer au plus tôt les difficultés des élèves. Comment peut-on à la fois respecter des rythmes d'apprentissages différents laissant une place suffisante aux erreurs, aux doutes et aux essais, et assurer un repérage précoce des comportements « dys »? Cette pression institutionnelle engendrée par la volonté du diagnostic de « dyscalculie » est elle-même renforcée par les contraintes liées à la dimension sélective des mathématiques dans les curricula scolaires. L'échec en mathématiques n'est en effet peu ou pas toléré et ce dès les premières années du cursus scolaire.

L'incompatibilité entre la recherche des environnements les plus propices à des rythmes d'apprentissage respectueux du temps nécessaire à chaque sujet et les contraintes d'un système scolaire privilégiant la réussite précoce en mathématique est un dilemme mettant en grande difficulté les enseignants et bien entendu leurs élèves.

Une problématique environnementale

En matière de dysfonctionnement du processus enseigner-apprendre, la problématique de l'environnement didactique nous semble particulièrement propice à l'étude des effets réciproques des difficultés d'apprentissage des élèves et d'enseignement des enseignants en mathématiques. Cet environnement consiste schématiquement en une mise à disposition par l'enseignant d'un milieu d'apprentissage destiné aux interactions avec les élèves. Les savoirs mathématiques de référence sont des enjeux de la résolution des problèmes rencontrées dans les tâches proposées. En référence à une théorie de l'apprentissage par adaptation, les élèves doivent mobiliser leurs ressources cognitives qui doivent s'avérer provisoirement insuffisantes pour dénouer immédiatement les énigmes rencontrées. Ce processus peut être observé de la même manière concernant les apprentissages au métier d'enseignant. Il est en effet lui aussi soumis à la rencontre d'une certain nombre de situations professionnelles qui, malgré une préparation adaptée, peuvent le laisser provisoirement dans des positions relativement inconfortables. Dans un article sur cette problématique (Dias et Deruaz, 2012) nous avions montré en quoi la rencontre des difficultés d'enseignement et d'apprentissages, lorsqu'elles sont simultanées, pouvaient conduire à des impasses parfois douloureuses. Des déstabilisations sont en effet possibles dans les deux camps : des élèves en difficulté d'apprentissage peuvent conduire à des déstabilisations des démarches d'enseignement, et des enseignants en difficulté peuvent également, par la non maîtrise de certaines connaissances didactiques engendrer des erreurs chez leurs élèves en étant alors dans l'incapacité d'y remédier.

La finalité de ce type d'étude consiste à repérer (pour mieux les éviter) les potentiels de rencontre entre deux pôles dys : dyscalculie et dysmathématie (Dias et Deruaz, 2012). In fine, il semble que les dysfonctionnements relatifs à l'inefficacité du processus d'enseignement / apprentissage semblent en partie neutralisables par l'action sur certains éléments constitutifs des environnements didactiques :

- les registres de représentations des objets de savoirs (milieu matériel et symbolique),
- le type de contrat didactique lié notamment aux types de tâches et de problèmes, aux dispositifs sociaux utilisés et aux démarches d'enseignement (constructiviste, explicite par exemples).

La localisation des causes d'un dysfonctionnement dans le processus enseigner-apprendre est un problème complexe. Nous souhaitons à ce jour surtout outiller les enseignants pour qu'ils adoptent des changements de points de vue sur la question : les trois pôles du triangle didactique peuvent servir de point d'ancrage et de compréhension.

3. Difficulté ou trouble d'apprentissage : dimension cognitive

Évoquer plus spécifiquement les difficultés d'apprentissage en mathématiques des élèves conduit de manière assez légitime sur le terrain cognitif en raison d'une recherche de la dimension intrinsèque de leurs causes. Dans ce champ scientifique de référence, les débats vont bon train sur l'origine de ces dysfonctionnements qui sont alors souvent catégorisés comme des troubles, une terminologie bien différente de celle de difficulté comme nous allons l'explorer un peu plus loin. Nous verrons également que les sujets d'exploration sont nombreux en sciences cognitives lorsqu'il s'agit de caractériser ces troubles : définition, classification et modèles explicatifs. Les outils de la didactique sont une fois encore nécessaires pour comprendre et pour étayer ces problématiques, ce sera l'objet de nos futurs travaux comme nous le développerons dans la dernière partie de cet article.

Une terminologie diversifiée et indéfinie

Même si le terme *dyscalculie* semble parfois s'imposer dans certaines communautés éducatives françaises lorsque l'on évoque les troubles des apprentissages mathématiques, il est primordial pour tout professionnel de savoir que cette terminologie est loin de faire consensus sur le plan scientifique. De nombreuses tentatives de dénotation ont eu lieu ces dernières années en passant par un très large spectre : dyscalculie, difficulté, dysfonctionnement cognitif, innumérisme (Vannetzel, 2012), troubles sévères ou spécifiques par exemples. A l'heure actuelle, c'est plutôt la notion de handicap d'apprentissage qui semble vouloir s'imposer selon la terminologie anglosaxone *mathematical learning disabilities*. Deux référentiels reconnus dans le champ des troubles de la cognition confirment cette errance langagière.

La Classification Internationale des Maladies (CIM version 11) emploie la terminologie de difficulté :

Developmental learning disorder with impairment in mathematics is characterized by significant and persistent difficulties in learning academic skills related to mathematics or arithmetic, such as number sense, memorization of number facts, accurate calculation, fluent calculation, and accurate mathematic reasoning.

Le manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux (DSM version 5) classe quant à lui l'ensemble des dysfonctionnements relatifs aux apprentissages dans la catégorie des troubles en leur associant des critères de sévérité (léger, modéré ou sévère). Notons quand même que dans la liste des critères de diagnostic, c'est bien la notion de difficulté qui est alors utilisée :

Difficulties mastering number sense, number facts, or calculation (e.g., has poor understanding of numbers, their magnitude, and relationships; counts on fingers to add single-digit numbers instead of recalling the math fact as peers do; gets lost in the midst of arithmetic computation and may switch procedures).

Difficulties with mathematical reasoning (e.g., has severe difficulty applying mathematical concepts, facts, or procedures to solve quantitative problems).

Cette diversité terminologique pose bien entendu des questions qui dépasse la sémantique, raison pour laquelle il nous semble important d'essayer de clarifier ces définitions en prenant pour base de réflexion la dialectique nécessaire entre difficulté et trouble.

Troubles et difficultés

Pour distinguer ces deux termes, nous proposons d'utiliser une référence liée à la durée de leurs manifestations. La difficulté (parfois désignée avec le synonyme de *low achievement* dans la littérature anglo-saxonne) est provisoire et contextuelle. Elle peut être découverte lors de certains apprentissages, mais doit faire l'objet de plusieurs vérifications du fait de son caractère contextuel. Elle relève donc d'un processus d'adaptation ou de re-médiation locale, limité dans le temps. Le trouble est quant à lui à la fois durable et avéré. Il doit être diagnostiqué selon un processus spécifique à la pathologie de référence si tant est qu'on puisse la définir avec un protocole stabilisé ce qui n'est pas vraiment le cas à l'heure actuelle (Peteers, 2017). Il relève de processus d'adaptations et de compensations scolaires importants, réguliers et surtout spécifiques. L'objectif d'une telle classification est essentiellement de définir des rôles différenciés des acteurs quant à la prise en charge des élèves.

Des sujets d'exploration et de recherche multiples

Pour clore cette première partie, nous présentons une brève revue de littérature anglo-saxonne qui nous permet d'étayer ici l'état des questions scientifiques concernant les troubles d'apprentissage en mathématiques dans le champ de la cognition. Cette recension provient d'une recherche utilisant l'expression MLD dans les articles scientifiques des revues du champ « mathematic education » en utilisant un filtre sur les 15 dernières années. Nous relatons seulement trois de ces problématiques ici, sachant que d'autres travaux permettront à moyen terme d'en exposer davantage (voir plus loin dans la présentation de l'équipe Riteam).

- Une grande hétérogénéité dans les processus de définition des MLD (Lewis & Fisher, 2016) :
 - « The field's understanding of MLD is predicated on researchers' ability to accurately identify students with an MLD. Currently there is no accepted consensus definition of MLD. » (Lewis& Fischer, 2016, p.339)
- De nombreuses interrogations sur les critères de classification des MLD notamment en raison de leur manque de définition (Mazzocco & Myers, 2003) :
 - « In view of the lack of consensus in defining and measuring MD, the present report is not based on an a priori definition of MD; instead the focus of the report is to assess the outcome of using different criteria to define or classify MD. » (Mazzocco & Mayers, 2003, p.224)
- Des modèles explicatifs des MLD diversifiés (Karagiannakis, Baccaglini-Frank, & Roussos, 2016):
 - « The lack of consensus to identify the central characteristics of an MLD as well as the comorbidity and het- erogeneity that characterize the MLD students (Bartelet, Ansari, Vaessen, & Blomert, 2014; Szűcs & Goswami, 2013; Watson & Gable, 2013) have also led researchers to propose various models in order to explain different MLD subtypes. » (Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Petros Roussos, 2016, p.116)

Comme on vient de le voir dans un premier temps, les études actuelles sur les difficultés ou les troubles des apprentissages en mathématiques montrent que de nombreuses problématiques sont encore à investiguer : définition et classification, recherche de leurs causes, outils de repérages, modèles explicatifs, prises en charges adaptées, etc. Les outils de la didactique et de l'épistémologie semblent encore peu mobilisés même si la question de la spécificité de leurs objets et des environnements d'apprentissage ont fait l'objet de travaux montrant d'ores et déjà leur intérêt.

II. NOUVELLES PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Dans une publication récente (Dias & Ouvrier-Buffet, 2018) nous avons présenté les objectifs de la constitution de notre équipe de recherche internationale sur les troubles d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (RITEAM). Nous souhaitons ici revenir sur les problématiques de recherche ainsi que sur leurs perspectives à moyen terme. Trois axes structurent nos travaux notamment en fonction des questions repérées dans la revue de littérature. Ils seront accompagnés pour chacun d'eux d'une première liste de questions de recherche corrélées à ces problématiques.

1. Dispositifs et outils de repérage des MLD

Le repérage des MLD fait l'objet d'une pluralité de paradigmes selon les domaines scientifiques de référence et leurs cadres de référence théorique. Les outils et les dispositifs de repérage sont pour le moins très divers (Peteers, 2017) et doivent désormais faire l'objet selon nous d'études comportant un regard didactique davantage centré sur le couple savoir/connaissance en mathématique.

Questions de recherche associées

- Quels sont les outils utilisés pour diagnostiquer les MLD et de quelles disciplines scientifiques sont-ils issus ? Quels sont leurs fondements théoriques, à quelles définitions des MLD correspondent-ils ? Qu'évaluent-ils et quelle est leur portée ?
- Quelles sont les connaissances, les représentations et les conceptions des enseignants sur les MLD ? Quels sont leurs modes d'action (signalement et action) ?
- Quels pays sont investis plus précisément dans ces processus de repérage ? Existe-t-il des spécificités culturelles, langagières ?

2. Étude des spécificités de l'activité mathématique des élèves MLD dans des situations d'apprentissage

L'activité mathématique est entendue ici comme la résultante d'un processus cognitif combinant raisonnement et processus visuo-praxiques qui doit être étudié dans sa spécificité en regard des objets de la discipline des mathématiques. Il nous semble en effet primordial d'explorer les processus spécifiques de l'activité cognitive des élèves lorsqu'ils font et qu'ils apprennent des mathématiques afin de distinguer par exemple ce qui relève des erreurs nécessaires dans un apprentissage par adaptation et des erreurs ou échecs signes de dysfonctionnements plus sévères. Le domaine de l'analyse du raisonnement mathématique paraît être par exemple une clef de compréhension dans cet axe de recherche.

Ouestions de recherche associées

- Comment définir les composantes des raisonnements mathématiques nécessaires à un élève, à un étudiant, et au futur citoyen ?
- Comment caractériser les types de problèmes mathématiques permettant de mobiliser ces composantes ?
- Quelles sont les spécificités des environnements d'apprentissage susceptibles de mieux s'appuyer sur les potentiels d'apprentissage et de raisonnement des élèves ?

• Quelles sont les indices permettant de distinguer les erreurs constitutives d'un apprentissage de celles qui révèlent des difficultés? Une typologie est-elle envisageable?

3. Processus et dispositifs de soutien et d'étayage auprès des élèves MLD

Les dispositifs et les outils d'étayage (Dias, Sermier-Dessemontet & Dénervaud, 2016) nécessaires à un apprentissage par adaptation doivent faire l'objet de propositions didactiques spécifiques dans le cas des élèves MLD. Les politiques éducatives d'inclusion scolaire nécessitent actuellement le développement de processus d'adaptation, de compensation et de remédiations innovants pour répondre aux demandes légitimes de tous les enseignants. L'amélioration des dispositifs de repérage peuvent en effet conduire à augmenter le nombre d'élèves signalés scolairement comme ayant des besoins spécifiques et exercer une pression grandissante sur les enseignants (Deruaz & Dias, 2016).

Questions de recherche

- Quelles formations professionnelles, quelles pratiques enseignantes, quels gestes professionnels sont-ils liés à ces dispositifs ? Peut-on en faire une typologie ?
- Quelles nouvelles propositions concrètes de processus de re-médiation, de dispositifs et d'outils de soutien sont concevables et applicables (notamment dans le cadre de la formation des enseignants) ?
- Quelles collaborations entre les différentes catégories d'acteurs éducatifs sont nécessaires lors des prises en charge des élèves en difficultés ?

Conclusion

Les liens entre les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques doivent faire l'objet d'un regard didactique toujours plus précis dans le contexte international des politiques éducatives privilégiant la notion d'inclusion scolaire. Les élèves ayant des besoins spécifiques rencontrent de plus en plus souvent des enseignants non spécialistes ni du repérage ni de la prise en charge de leurs difficultés, voire parfois de leurs troubles. Afin d'être à même de proposer des dispositifs et des outils améliorant les conditions de travail des professeurs lorsqu'ils enseignent des mathématiques, la collaboration entre les différents acteurs du système éducatif doit s'appuyer sur des études scientifiques. Notre équipe de recherche RITEAM s'emploiera donc à fédérer ce type de collaboration en poursuivant un triple objectif : améliorer la construction d'outils de repérage des difficultés et des troubles d'apprentissage, comprendre la spécificité cognitive de l'activité mathématique d'un sujet apprenant les mathématiques, et construire des outils d'aide à la prise en charge des élèves ayant besoin d'une scolarité spécifique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHELOT, R. & SALIN, M.-H. (1992). L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, Bordeaux, France. Repéré à https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065/document

DERUAZ, M. & DIAS, T. (2016). Elèves en difficultés ? Dyscalculiques ? Petit x, 101, 7-35.

DIAS, T. & OUVRIER-BUFFET, C. (2018). Perspectives de recherches sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'école*, 229, 47-53.

DIAS, T. (2015). Des mathématiques expérimentales pour révéler le potentiel de tous les élèves. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 65, 151–161. Retrieved from http://www.cairn.info/resume.php?ID ARTICLE=NRAS 065 0151

- DIAS, T. (2014). La diversité empirique pour faire exister les objets mathématiques. In *Mathematics and reality* (Vol. 24/1). Lyon: Aldon, G., Di Paola, B., Fazio, C. Consulté à l'adresse http://math.unipa.it/~grim/quaderno24_suppl_1.htm
- DIAS, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. Thèse de doctorat. Claude Bernard Lyon 1, Lyon. Consulté à l'adresse http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00635724/
- DIAS, T., SERMIER DESSEMONTET, R. & DENERVAUD, S. (2016). Etayer les élèves à besoins particuliers dans la résolution de problèmes : un modèle d'analyse. *Math-Ecole*, 225, 4-9.
- DIAS, T. & DERUAZ, M. (2012). Dyscalculie: et si les enseignants reprenaient la main? ANAE. Approche Neuropsychologique Des Apprentissages Chez L'enfant, 120–21, 529–534.
- KARAGIANNAKIS, G. N., BACCAGLINI-FRANK, A. E. & ROUSSOS, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141. https://doi.org/10.1080/19404158.2017.1289963
- LEWIS, K. E. & FISHER, M. B. (2016). Taking Stock of 40 Years of Research on Mathematical Learning Disability: Methodological Issues and Future Directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(4), 338–371. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.4.0338
- MAZZOCCO, M. M. M. & MYERS, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, 53(1), 218–253. https://doi.org/10.1007/s11881-003-0011-7
- PETEERS, F. (sous presse). Un trouble à l'interface entre différents champs disciplinaires (didactique des mathématiques, psychologie et sciences cognitives) : la dyscalculie. In S. Coppé & E. Roditi (Eds), *Actes de la XIXè école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- VANNETZEL, L. (2012). Dyscalculiques ou laissés pour compte ? *ANAE. Approche Neuropsychologique Des Apprentissages Chez L'enfant*, 120–121, 497–502.
- VERGNAUD, G. (2011). Savoirs théoriques et savoirs d'action. In J. Barbier (dir), Au fond de l'action, la conceptualisation (pp. 275-292). Paris: Presses Universitaires de France.

DISCOURS NOOSPHERIEN DANS LE CHAMP DE L'ADAPTATION SCOLAIRE AU QUEBEC : CERTAINS EXEMPLES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Gustavo BARALLOBRES

bergeron.laurie.2@uqam.ca

GEMAS, Université de Québec à Montréal et Laboratoire CeDS

(Cultures et Diffusion des Savoirs, EA-7440), Bordeaux

<u>barallobres.gustavo@uqam.ca</u>

Laurie **Bergeron**Université de Québec à Montréal, GEMAS

Résumé

Un mode de régulation du système éducatif au Québec centré sur l'évaluation et la performance affecte particulièrement le champ de l'adaptation scolaire. Nous analyserons l'évolution de certains des modèles dominants dans ce champ (psycho-médical, neuro-éducatif) et les difficultés des modèles didactiques à évoluer à l'intérieur de ce contexte institutionnel. L'analyse des documents officiels et des ouvrages pédagogiques concernant la question des difficultés d'abstraction en mathématiques permettra d'illustrer la manière dont les différents discours institutionnels influencent les pratiques d'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire.

Mots clés: difficultés d'apprentissage, pratiques efficaces, inhibition, didactique des mathématiques.

I. INTRODUCTION

Depuis la parution de la politique de l'adaptation scolaire (MELS, 1999), le ministère de l'Éducation du Québec propose que la réussite des élèves en difficulté d'apprentissage soit envisagée différemment selon leurs capacités. Dès lors, celle-ci est définie de façon plus large : « la réussite c'est l'obtention de résultats observables, mesurables et reconnus qui rendent compte de l'évolution de l'élève, des progrès continus enregistrés » (MELS, 1999, p. 17). Malgré tout, la réussite se concrétise et se mesure finalement par l'obtention du diplôme d'études

89

Barallobres & Bergeron - Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM - 2018

secondaires (DES) ou de formation professionnelle (MELS, 2006a). Dans sa lutte contre le décrochage, le ministère de l'Éducation a instauré des voies d'action visant un taux de diplomation de 90 % dès 2030 (MEES, 2017) : interventions et accompagnement des élèves en difficultés pour les mener à l'obtention d'un diplôme ou d'une qualification ; efforts « sincères » (MELS, 1999, p.18) que doivent fournir les différents acteurs pour favoriser cette augmentation, etc. Nos analyses des différentes politiques et programmes ministériels (MELS, 1999 ; MELS, 2006b ; MEES, 2017, dans Bergeron, 2017) montrent que les actions proposées centrées sur la performance du système éducatif ne font aucunement référence à la « nature » des apprentissages envisagés: il s'agit plutôt de réussite à différents types d'examens puisque ce sont les bulletins ainsi que les résultats aux épreuves standardisées les indicateurs de performance des écoles (Cowley, 2014 ; MEES, 2016).

Malgré la mise en place depuis bientôt 30 ans de programmes et de mesures pour assurer l'accès à la classe ordinaire, la prévention des difficultés et le succès pour tous, il semblerait que les élèves identifiés « en difficulté » cheminant en classe spéciale soient moins nombreux à obtenir un diplôme que leurs pairs intégrés en classe ordinaire et que le taux d'intégration de ces élèves n'augmente pas (MELS, 2006a). À ce sujet, une analyse des cheminements d'élèves en difficulté montre que les élèves débutant leur secondaire en classe ordinaire sont plus nombreux à obtenir un diplôme que ceux qui le débutent dans une classe de cheminement particulier (MELS, 2006a) : un élève en difficulté d'apprentissage qui débute sa scolarité au secondaire en classe ordinaire à 12 ans aurait 5 fois plus de chance d'obtenir un diplôme qu'un élève de même profile qui le débute en classe de cheminement particulier. La classe de cheminement particulier a pour objectif d'aider les élèves ayant des difficultés à rattraper leur retard et vise à réintégrer les élèves au secteur régulier; cependant, seulement la moitié des élèves commençant leur secondaire dans ce type de classe accède à la classe ordinaire et 68 % des élèves de 12 ans qui débutent leur secondaire en classe ordinaire arrivent à s'y maintenir.

Les injonctions ministérielles demandent aux enseignants de favoriser la réussite de tous et d'adapter leur enseignement en fonction des besoins et des capacités de chaque élève. Les politiques concernant l'adaptation scolaire au Québec (MELS, 1999) reposent sur une approche individualisée visant l'identification et la catégorisation des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation et d'apprentissage (EHDAA), grandement inspirée du modèle biomédical, faisant en sorte que l'on identifie chez ceux-ci un problème et ses manifestations, tout en tentant d'en expliquer les origines possiblement biologiques pour finalement prescrire un « traitement » pour les « guérir ». Pour chaque trouble et handicap est attribué un code de difficulté qui définit les conditions pour le diagnostic ainsi que les limitations et manifestations sur le plan scolaire qui y sont liées (MELS, 2007). Outre les différents troubles et handicaps définis, une autre catégorie d'élève est incluse chez les EHDAA: il s'agit des élèves en difficulté d'apprentissage. À l'inverse des troubles et des handicaps, la définition des élèves en difficulté d'apprentissage ne s'appuie pas sur des modèles médicaux. L'élève en difficultés d'apprentissage est défini comme (MELS, 2007, p.24):

Celui dont l'analyse de sa situation démontre que les mesures de remédiation mises en place, par l'enseignante ou l'enseignant ou par les autres intervenantes ou intervenants durant une période significative, n'ont pas permis à l'élève de progresser suffisamment dans ses apprentissages pour lui permettre d'atteindre les exigences minimales de réussite du cycle en langue d'enseignement et en mathématique conformément au Programme de formation de l'école québécoise.

Il faut remarquer qu'aucune précision n'est donnée sur la période de temps minimale pour attester qu'un élève est en difficulté d'apprentissage.

Bien que la définition d'élève en difficulté ne s'inscrit pas dans un modèle médical, le traitement des difficultés et l'enseignement proposé s'inspirent fortement de ces modèles. En conséquence, la formation initiale et continue des intervenants de ce domaine (enseignants et orthopédagogues) repose en sa majorité sur une approche psychologique au sein duquel les difficultés sont généralement interprétées comme étant associées à des dysfonctionnements cognitifs des élèves et les pratiques d'enseignement sont conçues comme des processus génériques non déterminés par la spécificité des savoirs à transmettre (Bergeron, 2017). Bien que les contenus varient d'une université à l'autre, Martinez (1999) soulevait qu'une grande partie de la formation des maîtres en enseignement en adaptation scolaire portait sur des contenus provenant de la psychologie cognitive. Il n'est alors pas étonnant que les tâches et préoccupations des enseignants en activité se situent plus sur le plan des difficultés des élèves que sur celui des contenus à enseigner (Giroux, 1999). D'ailleurs, l'apport de la didactique dans le cursus en enseignement en adaptation scolaire et sociale est souvent remis en question (Giroux, 1999).

De par son approche systémique, la didactique des mathématiques propose une analyse des problèmes concernant les élèves en difficulté qui tient compte des éléments tels que des phénomènes spécifiques d'enseignement/apprentissages ainsi que des conditions didactiques et non didactiques inhérentes aux situations d'enseignement (Roiné, 2005, 2009 ; Sarrazy et Roiné, 2006; Giroux, 2013; Perrin-Glorian, 1993; Salin, 2007; Bloch et Salin, 2004). Les travaux dans l'espace francophone ont montré que les élèves de l'adaptation scolaire ne vivent pas le même historique scolaire que ceux des classes ordinaires (Barallobres, 2017; Bloch et Salin, 2004; Conne, 2003; Conne, Favre et Giroux, 2006; Favre, 1997; Giroux, 2013; Toullec-Théry, 2006; Roiné, 2009, 2010). Ils ont constaté, entre autres, qu'il y a une prévalence de la règle au détriment de la compréhension, ce qui conduit à une pré-algorithmisation des savoirs en jeu (Bloch et Salin, 2004 ; Giroux, René de Cotret, 2001) et un surinvestissement de certains savoirs identifiés comme emblématiques (les algorithmes de calcul) au profit d'autres savoirs (la géométrie, par exemple) (Conne, 2003; Conne, Favre et Giroux, 2006). Enfin, pour rendre accessibles les savoirs aux élèves et surmonter les difficultés et en tenant compte des stratégies promues récemment mentionnées, les enseignants vont bien souvent morceler les tâches et en choisir certaines qui sont axées sur des contenus en lien avec la vie quotidienne, visant ainsi la concrétisation des savoirs (Barallobres, 2009; Giroux, 2013; Roiné, 2010). Plusieurs de ces phénomènes didactiques découlent de l'échec potentiel anticipé par les enseignants (Favre, 2003) et du système qui les amène à modifier leurs pratiques (Roiné, 2014). Une logique d'adaptation (Giroux, 2013) semble s'installer dans ces classes, conséquence, entre autres, d'injonctions largement promues qui visent la réponse aux besoins de chaque élève et qui finalement,

contribuent à un amoindrissement des savoirs. Ces phénomènes font en sorte que les élèves en difficulté d'apprentissage vivent un parcours différencié, appauvri et inégalitaire de par les propositions didactiques et les interactions stigmatisantes qui font partie de leur cheminement au sein de l'institution scolaire (Roiné, 2009, 2010, 2015).

La centration sur les caractéristiques des élèves, l'illusion de transparence des savoirs sous laquelle la psychologie cognitive construit ses propos, ainsi que la centration sur la réussite scolaire comme indicatif du progrès et des apprentissages amènent à un inversement épistémologique (Bardini, 2003) ou historique (Chevallard, 2009) faisant en sorte que l'enseignement des mathématiques auprès des élèves « en difficulté » se réduit à la présentation des règles avant la présentation de problèmes. Cette inversion pourrait être interprétée comme une résultante de l'influence des modèles pédagogiques adaptés favorisant un enseignement explicite des « concepts » (Bergeron, 2017). En voulant agir sur les processus cognitifs des élèves, la situation didactique par laquelle l'élève interagit avec le milieu dans le but d'acquérir un savoir spécifique est négligée (Giroux, 2014; Sarrazy, 2002; Roiné, 2009). Les enseignants deviennent ainsi « aveugles aux conditions didactiques nécessaires pour permettre aux élèves la compréhension de l'usage des savoirs mathématiques enseignés » (Roiné, 2009, p.255).

Notre analyse porte sur l'évolution de certains modèles dominants dans le champ de l'adaptation scolaire (psycho-médical, neuro-éducatif) et les difficultés pour l'approche didactique à évoluer à l'intérieur d'un contexte institutionnel où un cadre mentaliste prévaut. L'analyse des documents officiels et des ouvrages pédagogiques concernant la question des difficultés d'abstraction permettra d'illustrer la manière dont les différents discours institutionnels et pédagogiques influencent et pénètrent les pratiques d'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire.

II. ÉVOLUTION HISTORIQUE DU CHAMP DE L'ADAPTATION SCOLAIRE AU QUEBEC

Par l'entremise d'une analyse sociohistorique, Gonçalves et Lessard (2013) identifient deux caractéristiques essentielles dans l'évolution du champ de l'adaptation scolaire au Québec :

- Premièrement, un changement dans le mode de régulation du système éducatif attribuant une part importante du pouvoir à des acteurs externes (évaluations et comparaisons nationales et internationales des systèmes éducatifs en contexte maintenant concurrentiel) et visant le rehaussement de la performance des institutions scolaires, ce qui renouvelle une tension propre au champ de l'adaptation scolaire entre équité et inclusion;

- Deuxièmement, la persistance tout au long de la structuration du champ des médecins, psychologues et psychiatres, légitimée par la promotion, explicite ou implicite, des approches psycho-médicales dans le traitement des difficultés d'apprentissage.

Ils soulignent trois périodes importantes : 1963-1977, 1978-1994 et 1995-2010. La première période réfère à la démocratisation de l'éducation ainsi qu'à la mise en place du champ de l'adaptation scolaire, la deuxième correspond à la normalisation du système en réponse au courant de l'inclusion scolaire et finalement, la dernière (et encore actuelle) est caractérisée par la différenciation pédagogique et donc, une dénormalisation du champ de l'adaptation scolaire.

La démocratisation de l'éducation mise en place au cours des années soixante fait en sorte qu'un nombre important d'élèves en difficulté est pris en charge par le système scolaire par le biais de la création de classes spéciales, de la formation des professionnels dédiés à cette population et de la mise en place de dispositifs d'identification fondés sur des savoirs issus de la psychologie et la médecine. Les élèves handicapés et en difficulté d'apprentissage sont identifiés à partir de diagnostics d'orientation clinique et l'organisation des dispositifs de remédiation se réalise en général en dehors de la classe ordinaire. Dès lors, la formation des nouveaux professionnels à l'université est inspirée par la psychologie et appuyée sur une approche psychomédicale et clinique, ce qui implique une moindre place aux savoirs disciplinaires et didactiques dans la formation desdits professionnels.

À partir de 1978, le modèle psychomédical est fortement critiqué pour sa tendance à marginaliser les élèves identifiés en difficultés (Gonçalves et Lessard, 2013). Dès lors, est mise en place, une approche systémique inspirée de la pédagogie différenciée centrée sur les besoins spécifiques des élèves où on vise l'intégration. Des dispositifs mixtes sont donc mis en place (à l'intérieur et à l'extérieur de la classe) visant le retour des élèves en difficulté aux classes ordinaires. Dès lors, le rôle des professionnels de l'adaptation scolaire est davantage centré sur le soutien des enseignants du système régulier. Ce changement est accompagné d'un mouvement international qui fait la promotion des politiques éducatives d'intégration qui rapidement demande une intégration pleine en classe ordinaire afin d'assurer un parcours scolaire le plus normal possible. Au Québec, cet idéal d'intégration est mis en difficulté par l'émergence de deux tensions : d'une part, le droit de scolarisation des élèves en difficulté semble menacer celui des autres élèves (le manque de services appropriés surcharge les enseignants) et, d'autre part, la multiplication de professionnels de l'adaptation scolaire à l'intérieur de la classe est vue comme une menace par les enseignants. Sans compter que même au sein de ce paradigme d'intégration, les syndicats réclament des diagnostics de meilleure qualité nécessaires au suivi de l'élève et à la détermination des ressources appropriées pour orienter les interventions.

Un contexte international promouvant la production de « résultats mesurables » dans le but de distinguer « ce qui marche » et « ce qui ne marche pas » marque le passage à l'étape actuelle, en renouvelant une tension propre au champ de l'adaptation scolaire entre inclusion, équité et performance du système éducatif. Cette période est fortement inspirée des méthodes de la médecine pour organiser les dispositifs d'intervention auprès des élèves HDAA. En effet, l'intervention comprend le dépistage précoce des difficultés via l'évaluation diagnostique et

l'élaboration d'un plan d'intervention (caractérisé par l'action à court terme, facilitant ainsi l'évaluation de l'efficacité de l'intervention). L'évaluation de la réussite éducative et de la qualité des services, en vue de reddition de comptes (ibid, 2013), devient la norme dans les modes de régulation du système éducatif où l'approche client est désormais prégnante. Dans ce contexte, les paramètres fondamentaux du système de financement de l'aide scolaire reposent sur les diagnostics basés sur des savoirs psycho-médicaux. Si bien les programmes universitaires incorporent des contenus didactiques dans la formation des intervenants en adaptation scolaire, les contenus psychologiques occupent une place bien plus importante.

Dans cette période, la légitimité des politiques éducatives est fondée sur une conception de la science caractérisée par la production de savoirs validés empiriquement de manière « objective », où la méthode des essais contrôlés randomisés constitue l'étalon or permettant d'instituer un discours de vérité. Le champ de l'adaptation scolaire plaide pour un système éducatif fondé sur des données probantes qui permettraient de montrer « scientifiquement » l'efficacité des interventions ainsi que sur une formation des enseignants basée sur la recherche. Dans la recherche d'efficacité et de gestion prévisionnelle de risques, la médecine et la psychologie bénéficient d'une légitimation sociale, d'où leur rôle référentiel (Gonçalves et Lessard, 2013).

III. LES PRATIQUES EFFICACES INSPIREES DE L'APPROCHE PSYCHO-MEDICALE ET LES DONNEES PROBANTES

Fonder les politiques éducatives en adaptation scolaire sur des savoirs validés empiriquement de manière « objective » semble être aujourd'hui une norme incontestable : qui pourrait s'opposer au fait qu'un volume important de données expérimentales supposément solides permette d'attribuer un statut particulier aux résultats des recherches et favoriser donc la prise impartiale de décisions, par la distinction entre ce qui « marche » et ce qui « ne marche pas »? La question du pluralisme interprétatif n'est qu'une affaire de nostalgiques : la vraie science n'avance que dans une seule direction (rappelons qu'Habermas avait nommé cela « la prétention positiviste à l'universalité », consistant à définir un modèle unitaire de scientificité universel, celui de la Science). Ainsi, la production de savoirs en éducation est fortement contrainte par des questions méthodologiques : c'est la méthode qui détermine ce qui est susceptible d'être un objet de recherche scientifique et non les questions et les problèmes qui émergent du champ spécifique. La fiabilité de l'outil (l'arsenal) méthodologique établit une hiérarchie entre les différents types de recherches, au-delà de la nature spécifique des objets caractéristiques de l'éducation.

Dans une analyse historique sur le développement des politiques de la preuve dans le domaine de l'éducation, Normand (2015) montre que leur émergence est associée à l'activisme de la droite américaine promouvant la sortie d'un modèle éducatif inspiré d'une politique de solidarité collective par le remplacement à paradigme à caractère économique (imputabilité des secteurs publics) basé sur l'optimisation de ressources et sur l'efficacité dans le traitement de problèmes

éducatifs. Normand (2006) qualifie cette démarche comme une entreprise réduction de complexité du système scolaire afin de la rendre gérable comme appui aux décisions politiques et orientés par la recherche de réponses à court terme (guidés par l'urgence décisionnelle imposée par les courts mandats). Dès lors, toute question de valeur éducative est évacuée, car elle est difficilement objectivable et mesurable.

Sur la base de certaines études mettant en rapport les retards scolaires et le décrochage au secondaire, Bissonette, Richard, Gauthier et Bouchard (2010) soutiennent la nécessité de privilégier des interventions précoces dans la scolarité des élèves via l'identification des pratiques pédagogiques les plus susceptibles d'améliorer la performance scolaire de ceux dont les probabilités de décrocher sont élevées (pratiques efficaces basées sur des données probantes). Ces idéologues des « pratiques efficaces » -dispositifs issus de la recherche de « haute qualité » permettant d'améliorer les résultats scolaires des élèves dans un contexte d'enseignement - ne définissent toutefois pas la notion de «pratique. Ce qui se dégage de leurs écrits réfère à l'application d'un ensemble de règles, de techniques et des prescriptions permettant d'effectuer une activité; une formation adéquate des enseignants basée sur des recherches de « haute qualité » (donnée évidemment par les éminents chercheurs œuvrant dans le domaine des pratiques efficaces, pour éviter des distorsions) garantirait alors l'efficacité de leurs actions. Il existerait donc des pratiques connues des chercheurs en éducation représentants de la Science à mobiliser dans toutes les classes, pour tous les élèves, quel que soit l'ordre d'enseignement, la discipline enseignée, le savoir concerné, le contexte organisationnel, culturel, social et économique local et global. L'enseignant n'aurait ainsi qu'à puiser dans ce réservoir de bonnes pratiques, à les adapter quelque peu à la situation pour enfin constater une amélioration de la performance des élèves aux examens ministériels ou aux tests internationaux. Ces résultats correspondent à ce que les sciences de la gestion qualifient d'outputs (en gestion, les outputs sont des résultats à court terme, tangibles, permettant de mesurer l'état du système) (MEES, 2017).

Cette conception de pratique d'enseignement évacue toute dimension culturelle et sociale recouvrant les intentions, les représentations, les idéologies et présuppose que l'apprentissage est le produit prévisible d'un enseignement basé sur des gestes identifiables et explicitables et que les actions effectives des acteurs engagés dans la relation éducative (en particulier, celles des élèves) et les arrière-plans culturels et sociaux ne jouent qu'un rôle secondaire.

Sous cette hypothèse, l'agir de l'élève n'aurait pas d'impact sur l'action de l'enseignant et sur les apprentissages obtenus, ce qui va à l'encontre de plusieurs recherches sur l'analyse des pratiques d'enseignement des mathématiques (Mercier, 1985; Brousseau, 1990). Jean Brun (2008) montre bien que les élèves ne sont pas seulement soumis à des contrôles externes venus des interventions organisées à dessein pour provoquer des apprentissages, mais qu'ils exercent des contrôles internes par l'intermédiaire des schèmes. Cette notion de pratique présume aussi que l'accumulation de ces micro-résultats serait garante d'un apprentissage à haute valeur ajoutée, que d'autres actions de l'enseignant que celles prévues par les dispositifs d'enseignement étudiés n'influencent pas les apprentissages des élèves -ce qui s'oppose à des résultats de recherches concernant l'obsolescence des situations didactiques- et que la reproduction d'une pratique d'enseignement n'a pas d'effets sur les résultats obtenus et sur les significations des objets de

savoirs élaborés -ce qui va à l'encontre aussi des résultats obtenus en didactique des mathématiques (Arsac et Mante,1988; Artigue, 1989; Brousseau, 1990; Mercier, 1985). Il est important de remarquer que ces présupposés non explicités, guidant les observations réalisées et les données recueillies, ne sont pas validés empiriquement. La prétendue « objectivité » des résultats de recherche est teintée, dès le début, par des supposés épistémologiques qui sont le produit d'accords intersubjectifs ne pouvant être validés empiriquement.

C'est la prétention d'indépendance d'une subjectivité trop humaine qui rendrait les pratiques efficaces transférables et reproductibles. Pourtant, une dissociation explicite de la pratique enseignante et du sujet praticien (sujet épistémique, rationnel, mais également sujet désirant) relève d'une entreprise de rationalisation et de technicisation de l'enseignement qui, au terme de cette logique, pourrait même proposer de décharger les humains de tâche même d'enseigner d'instruire, de former et d'éduquer- (Grossmann, 2009). Il convient de signaler que cette conception de pratique ne fait pas l'unanimité dans le domaine de l'éducation; Beillerot (2003), par exemple, considère que si bien la pratique inclut l'idée de l'application, elle dépasse le niveau du « faire » et des gestes des acteurs impliqués :

La pratique est tout à la fois la règle d'action (technique, morale, religieuse) et son exercice ou sa mise en œuvre. C'est la double dimension de la notion de pratique qui la rend précieuse : d'un côté, les gestes, les conduites, les langages ; de l'autre, à travers les règles, ce sont les objectifs, les stratégies, les idéologies qui sont invoqués. Les pratiques ont donc pour nous une réalité sociale, elles transforment la matière ou agissent sur des êtres humains, elles renvoient au travail au sens large. (p.23)

D'ailleurs, Hammersley (2002) montre bien que les pratiques d'enseignement sont soumises à une diversité de jugements en situation, en conséquence, non réductibles strictement à l'application de règles prédéfinie tout comme d'autres travaux sur l'obsolescence des situations didactiques (Brousseau, 1989), sur les phénomènes de variabilité didactique (Masselot et Robert, 2007), de mémoire didactique (Brousseau et Centeno, 1991) et sur la reproductibilité de situations didactiques (Artigue, 1989, Arsac et Mante, 1988) en rendent compte. Les jugements des praticiens s'inscrivent dans des contraintes de nature diverse ainsi que dans des temporalités multiples, et ils se situent à la base des ajustements permanents des actions, par le biais des interprétations in situ, dans l'urgence de la pratique (Bourdieu, 1980). Presque tous les auteurs mentionnés s'accordent sur le fait que les « savoir-faire » du praticien s'élaborent dans l'action.

1. Mais, qu'est-ce que la recherche de « haute qualité » fondant les pratiques efficaces ?

En se basant sur une classification proposée par Ellis et Fouts (1993), Bisonnette et al. (2010) distinguent trois types de recherches. Celles de niveau 1, de types descriptif (qualitatif, quantitatif ou corrélationnel) ayant par but de décrire un phénomène ou d'observer une corrélation possible entre deux variables. Ces recherches ne permettent en aucun cas d'établir des liens de cause effet ou de vérifier des hypothèses. Dans les recherches de niveau 2, un modèle, théorie ou hypothèse, élaborés à partir des recherches du type 1, font l'objet d'une mise à l'épreuve en salle de classe à l'aide de groupes expérimentaux et témoins (contrôles). Il s'agit de

mesurer statistiquement les effets sur la performance scolaire des élèves des stratégies pédagogiques élaborées dans le contexte d'un cadre théorique explicite ou implicite. Selon les auteurs, ces recherches permettraient d'établir une relation de cause à effet entre deux ou plusieurs variables. Enfin, les recherches de niveau 3 visent à évaluer les effets des interventions pédagogiques recommandées à partir des résultats obtenus par des études de niveau 2, à large échelle dans des contextes de plus grande envergure. Le degré de validité interne est moins élevé que celles de niveau 2 en raison des difficultés inhérentes au contrôle des variables. Cependant, le degré de validité externe serait supérieur, compte tenu de la taille de l'échantillon et des contextes à l'intérieur desquels de telles études sont réalisées. Selon Gauthier (2006), pour répondre aux questions concernant l'efficacité d'une intervention, les études de niveaux 2 et 3 seraient les plus appropriées. Pour Bissonnette et ses collègues (2010), il en va même d'un impératif éthique et moral quant au choix des pratiques d'enseignement afin d'éviter de gaspiller de larges sommes d'argent (et non de causer préjudice à des élèves).

La méthode privilégiée dans les recherches de niveau 2 met l'accent sur une forme d'objectivité et de neutralité procédurale et repose sur un modèle de rationalité instrumentale au sein duquel la neutralité, la transparence et l'objectivité des décisions sont garanties par un usage systématique de règles de procédure et des méthodes rigoureuses (Saussez et Lessard, 2009). La notion de « donnée probante » apparaît comme une figure fondamentale dans la caractérisation de cette méthode. En ce qui concerne particulièrement l'objectivité, les «données objectives» sont définies comme étant celles que tout évaluateur identifierait et interprèterait de façon similaire » (traduction libre de l'International Reading Association, p. 18). On voit bien que si «tout» évaluateur identifie et interprète les données de façon similaire, soit les données « parlent » d'elles-mêmes et imposent aux chercheurs la lecture à réaliser (ce qui nous plonge avec violence dans un empirisme naïf que peu de chercheurs seraient disposés à soutenir), soit il existe un consensus autour des critères d'interprétation (un paradigme dominant, un seul cadre interprétatif) permettant, par exemple, de définir ce que serait un « lecteur compétent » ou ce que signifierait « connaître les fractions », ce qui est loin d'être le cas en éducation. En l'absence d'un tel accord interne, les indicateurs en question sont définis en fonction des références externes (tests standardisés, tests internationaux). La question n'est que déplacée : dans la quête obsessionnelle et illusoire d'impartialité, les tests sont modelés et produits à l'image de l'objectivité que l'on cherche à établir. L'objectivité défendue par le paradigme des données probantes n'est pas indépendante des présupposés épistémologiques que nous avons déjà mentionnés; d'autres présupposés ne sont pas questionnés et sont même cachés derrière la méthodologie adoptée. Par exemple, la discussion autour de la question « qu'est-ce que savoir lire? » est complètement évacuée et elle est remplacée par la formulation d'items mesurables ou par l'adoption en vrac des évaluations ministérielles ou internationales laissant ainsi entrevoir cette question comme étant réglée et faisant consensus.

On pourrait répliquer nos arguments en affirmant que les données probantes sont celles que tout évaluateur partageant les mêmes théories identifierait et interprèterait de façon similaire. Cependant, comment vérifie-t-on le partage d'une théorie? De plus, le fait d'appartenir à un même paradigme ne garantit pas une «interprétation similaire», puisqu'évidemment l'interprétation de chaque chercheur ne découle pas « mécaniquement » de l'usage de la théorie.

Notre analyse n'implique aucunement un glissement vers un relativisme qui nierait toute question de validité; il s'agit principalement d'attirer l'attention sur le fait que l'objectivité n'est qu'une forme d'intersubjectivité interne propre à des modes de production de connaissances d'une communauté de chercheurs partageant un certain cadre théorique :

On ne saurait « dé-subjectiviser » la connaissance humaine qu'en présupposant une connaissanceétalon comme le Savoir absolu. Il y a dans le scientisme positiviste comme l'assurance d'un pathos de vérité scientifique qui prend parfois des accents théologiques — comme si Dieu n'avait pu mourir que pour céder sa place à une hypostase de « la Science » [...] Le statut ambigu des énoncés de base témoigne des difficultés de cette notion d'objectivité. Les protocoles d'expérience font seulement l'objet d'un consensus intersubjectif, révocable à tout moment, entre les scientifiques (Popper). L'objectivité de l'expérience se révèle donc être de l'ordre de l'intersubjectivité : intersubjectivité empirique du constant de l'observation et intersubjectivité transcendantale ou logique-linguistique de sa formulation (tout énoncé comporte des expressions générales qui restent nécessairement hypothétiques, car elles dépassent « toute expérience possible. » (Habermas, 1979, p 5)

2. Quelles sont les caractéristiques des pratiques efficaces promues par l'approche psycho-médicale ?

En général, les pratiques proposées ne sont pas spécifiques aux savoirs à enseigner, puisqu'elles adoptent une hypothèse cognitiviste postulant l'universalité des opérations de la pensée, l'existence de mécanismes de production de connaissances transférables d'un domaine de savoir à un autre, présupposant ainsi que les processus cognitifs permettant la manipulation de représentations mentales sont des conditions préalables au développement de la connaissance (Bronckart, 2007). Dans ce contexte, l'intervention doit être dirigée vers ces processus cognitifs et les difficultés d'apprentissage sont interprétées comme une défaillance desdits processus. Une analyse de divers documents concernant les interventions nous a permis de repérer certaines propositions récurrentes (Bergeron, 2017) : réduire une tâche complexe à des tâches simples (sous l'hypothèse que l'accès à une tâche complexe se fait par le moyen de l'accumulation des tâches intermédiaires) ; favoriser la manipulation d'objets concrets (sous l'hypothèse que l'accès aux processus d'abstraction se fait par l'intermédiaire de la manipulation d'objets physiques, sans précisions sur la nature de ladite manipulation) ; utiliser des dessins, des analogies ; etc.

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, sur les onze méta-analyses analysées par Bissonnette et al. (2010), seulement trois concernent les stratégies d'enseignement dans ce domaine; toutes en viennent sensiblement aux mêmes résultats : promouvoir l'enseignement directif/explicite des règles et des concepts mathématiques qui semble être la meilleure modalité d'enseignement à adopter avec des élèves en difficulté (Bergeron, 2017). Il s'agit d'un enseignement structuré et dirigé par l'enseignant qui procède du simple vers le complexe et se déroule habituellement en trois étapes : le modelage, la pratique dirigée et la pratique autonome (Rosenshine et Stevens, 1986). Dans ce contexte, l'apprentissage se traduit par la possibilité de réutilisation des savoirs appris dans de nouvelles situations ; la notion de « transfert » y joue un rôle central. Selon Côté et ses collègues (2013), la définition de transfert la plus utilisée en psychologie cognitive est la suivante : « capacité qu'a un apprenant de résoudre de nouvelles

situations en mobilisant les connaissances apprises antérieurement dans des situations différentes (Frenay, 1994, p.73) » (p.75). Ces auteurs signalent aussi :

[...] le concept de "similarité" demeure un élément central dans la majorité des théories traditionnelles pourtant sur le transfert, c'est-à-dire que des éléments de la situation à résoudre doivent être mis en correspondance avec des éléments emmagasinés en mémoire, lors d'une situation précédente afin que le transfert puisse être réalisé. (ibid, p.75)

Toujours selon ces auteurs, l'automatisation de certaines procédures diminuerait la charge cognitive, libèrerait la mémoire de travail et par conséquent permettrait aux sujets de consacrer des ressources cognitives au transfert. Cependant, aucune explication n'est fournie concernant la manière dont le travail répétitif fait à partir du modelage permet ensuite d'aborder des situations nouvelles : celui-ci ne serait destiné qu'à libérer la mémoire de travail ; les liens entre les situations anciennes et les situations nouvelles resteraient à charge de l'élève lui-même et ni la spécificité des savoirs ni l'organisation didactique de l'ensemble de situations ne sont mentionnés en tant qu'éléments intervenants dans l'établissement desdits liens. Comment définir la « similarité » de deux situations mathématiques ? Quels paramètres sont-ils utilisés ? Comment l'élève reconnait-il cette similarité ?... Aucune réponse n'est donnée à ce type de questions.

Il est fondamental de remarquer que les études sur les pratiques efficaces en mathématiques ne portent que sur des objets de savoir particuliers (en général un algorithme de calcul) et sont ensuite généralisées sans justification à l'ensemble des mathématiques. Par ailleurs, les auteurs ne mentionnent point les caractéristiques des instruments utilisés pour mesurer l'effet de l'intervention. Ce qui semble importer pour qualifier une modalité d'enseignement comme étant efficace est le fait que les élèves aient réussi la tâche sans questionner la nature des apprentissages effectifs.

3. L'APPROCHE NEURO-ÉDUCATIVE

Une nouvelle discipline, la « neuro-éducation », dit se situer à la rencontre de la psychologie, des neurosciences, des sciences cognitives et des sciences de l'éducation et se propose de mieux structurer les environnements d'apprentissage à partir des résultats obtenus sur le cerveau et de mieux adapter les méthodes pédagogiques en fonction de l'activité naturelle de nos fonctions cérébrales (Gaussel et Reverdy, 2013). Selon Masson (2014), l'architecture cérébrale impose des contraintes à la façon dont certains apprentissages scolaires peuvent prendre place : par exemple, une hypothèse suggère que l'architecture cérébrale initiale de l'apprenant limiterait l'évolution des conceptions non scientifiques sur plusieurs phénomènes naturels. L'imagerie cérébrale permettrait de montrer que les conceptions non scientifiques des élèves ne disparaissent peut-être jamais de leur cerveau, parce qu'elles découleraient d'intuitions fondamentales inscrites sous la forme de réseaux de neurones solidement établis, et que les étudiants avancés auraient recours à un contrôle cognitif et comportemental permettant aux sujets de résister aux automatismes, aux

tentations ou aux interférences, l'inhibition (Houdé, 2000). Les tenants de cette approche affirment aussi que les façons d'enseigner peuvent avoir un effet sur la plasticité, le recyclage neuronal, la capacité d'inhibition des élèves et sur leur fonctionnement cérébral (par exemple, le fait de prévenir les apprenants de l'existence de pièges et de leur apprendre à identifier les réponses tentantes, mais incorrectes a un impact sur le fonctionnement cérébral et sur la capacité à recourir à l'inhibition pour corriger des erreurs fréquentes).

L'idée du conditionnement de la production de savoirs par des contraintes imposées par la structure cérébrale avait été déjà avancée par Dehaene (2010) pour qui les problématiques qui ont conduit l'humanité à produire ces savoirs semblent être négligeables :

Les outils mathématiques que sont les nombres ont évolué à la fois par le cerveau et pour le cerveau. Par le cerveau, parce qu'il est clair que l'histoire des nombres a été limitée par la capacité du cerveau humain à inventer des principes nouveaux de numération. Pour le cerveau, parce que seules ont été transmises aux générations suivantes les inventions qui s'adaptaient étroitement aux capacités perceptives et mnésiques humaines et qui, de ce fait, accroissaient les capacités de calcul de l'humanité. (p.129)

Étrangement, les savoirs mémorisés et transmis par l'humanité (bien que conditionnés par la biologie) ne seraient pas sélectionnés selon leur utilité sociale ou leur efficacité dans la résolution de problèmes, mais plutôt strictement en fonction de leur adéquation aux capacités de l'espèce, au « cerveau » à lui seul, comme en témoigne le titre du paragraphe précédent: « Le cerveau, moteur de l'évolution culturelle ».

Il est important de souligner que cette hypothèse concernant les contraintes imposées par l'architecture cérébrale conduit à des affirmations difficilement tenables d'un point de vue théorique. En effet, les concepts évoqués par les différents auteurs mentionnés sont imprécis : aucune définition d'« intuition » n'est fournie et aucune distinction n'est faite entre les intuitions concernant des domaines différents. D'ailleurs, aucune observation, même par imagerie cérébrale, ne peut valider l'affirmation selon laquelle l'architecture des intuitions fondamentales serait inscrite dans le cerveau. Finalement, à partir de cas particuliers relatifs à des savoirs spécifiques (des aspects très ponctuels concernant la lecture ou des savoirs arithmétiques très précis), la neuro-éducation produit des généralisations abusives en introduisant, par exemple, la notion d'inhibition pour l'apprentissage de n'importe quel objet de savoir (et pour la résolution de toutes sortes de problèmes) (Barallobres, 2018).

La mise à l'écart de la nature des savoirs à apprendre, parmi la multitude d'autres aspects ignorés caractérisant la relation didactique et la relation éducative, se manifeste dans les conclusions proposées par Masson (2015): la fonction de l'enseignant n'est plus celle d'aider les élèves à participer à une pratique socialement partagée, mais de les aider à développer des connexions neuronales pour apprendre n'importe quel concept. La structuration des environnements d'apprentissage (objectif déclaré de la neuro-éducation) n'a pas comme finalité de préserver la signification des pratiques scientifiques dans le contexte scolaire, mais celle d'améliorer le fonctionnement du cerveau (le recyclage de neurones, par exemple).

Malgré le fait de postuler l'interdisciplinarité et d'attribuer une place spécifique aux sciences de l'éducation, la prédominance du point de vue neuroscientifique est évidente. En effet, la définition même d'apprentissage qui a été proposée ne fait intervenir que des modifications structurelles au sens des réseaux cérébraux (Dehaene, 2011): l'indicateur de l'existence d'apprentissage est le recyclage des neurones. Toute discussion concernant ce que signifierait, par exemple, « savoir compter » est réduite à l'activation ou pas d'une aire cérébrale. Autrement dit, la nature de ce qui est appris ne compte pas dans la définition donnée. Bien que les recherches en neurosciences cognitives concernant les mathématiques portent sur des questions très spécifiques, à savoir les origines biologiques et non l'enseignement ni l'apprentissage, Dehaene et d'autres auteurs (e.g. Masson, 2014; Houdé, 2011) s'aventurent sur le terrain de l'enseignement:

Nous ne pouvons guère espérer améliorer l'architecture de notre cerveau. Mais nous pouvons modifier nos méthodes d'enseignement et même nos pratiques mathématiques, afin de mieux les adapter aux contraintes de notre biologie. (Dehaene, p.150., 1997; 2010)

3. Quelles sont les caractéristiques des pratiques d'intervention pour les élèves en difficulté promues par l'approche neuro-éducative ?

En faisant appel à des études neuro-scientifiques, Houdé (2015) propose des modèles pour l'éducation et les apprentissages scolaires :

L'éducation, les apprentissages scolaires, entre autres la lecture, reposeraient ainsi en grande partie sur le développement et le renforcement d'une fonction essentielle de notre cerveau : la capacité à résister aux automatismes de pensée, comme la généralisation en miroir, quand le recours au raisonnement logique devient nécessaire. (Houdé, 2015, p. 47)

L'équipe d'Houdé propose une démarche pédagogique d'apprentissage à l'inhibition (approche métacognitive) centrée sur le contrôle cognitif et la détection de conflit et destinée à bloquer temporairement des stratégies sur-apprises ou automatisée qui deviennent efficaces en certaines situations (Lubin, et al., 2012). Le contrôle par l'inhibition est qualifié par Houdé (2011) comme l'intelligence « fluide » du cerveau qui, au contraire de l'automatisation par la pratique, permet de changer la stratégie de raisonnement par l'inhibition des automatismes. Dans cette « forme d'apprentissage », il s'agit d'exercer l'élève à activer la stratégie pertinente (appelé algorithme), mais surtout à inhiber celle qui ne l'est pas (appelé heuristique) pour résoudre un problème afin de corriger ses erreurs, à l'aide d'alertes exécutives verbales (par exemple, « Attention, dans ce type de tâche, il y a un piège ») et un dispositif didactique permettant la manipulation (sous l'hypothèse que l'action et la manipulation sont importantes dans les processus pédagogiques) (Lubin, et al., 2012).

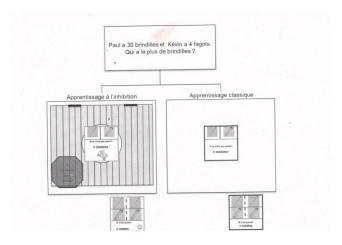
Un des exemples donnés par les auteurs concerne ce qu'ils appellent « l'apprentissage de la dizaine chez des élèves de 6-7 ans ». Ils affirment qu'« acquérir une compréhension de la base 10 des nombres est nécessaire pour pouvoir réaliser des calculs sur des nombres supérieurs à dix » (p. 64) et qu'une des erreurs fréquentes qui entreraient en compétition « une heuristique » et « un algorithme » consiste à comparer deux collections présentées dans des unités différentes (18

unités par rapport à 2 dizaines : en comparant les nombres, les élèves affirment que 18 est plus grand que 2). Les auteurs identifient comme stratégie adéquate (algorithme) : « je transforme si nécessaire dans la même unité avant de comparer » et comme stratégie erronée : « je compare directement les nombres sans vérifier qu'ils sont dans la même unité » et considèrent que l'erreur pourrait ne pas être associée à un défaut de compréhension de la notion, mais à un défaut d'inhibition d'une connaissance antérieure. La stratégie pédagogique est la suivante :

1. L'enseignant présente une situation problème, les élèves sont invités à répondre par écrit et à illustrer comment ils ont procédé sur une feuille. Une mise en commun permet d'identifier les stratégies adéquates et l'enseignant met ensuite en évidence le piège dans cette situation :

Attention, dans ce type d'exercice, il y a un piège! Le piège c'est de comparer seulement les nombres, sans avoir vérifié avant que l'on parle bien de la même chose! (p. 66).

2. Lors de la seconde séance, l'enseignant rappelle la situation problème, la stratégie correcte et le piège à éviter. Il s'agit maintenant d'utiliser un dispositif didactique composé d'une carte rouge en forme d'arrêt symbolisant l'heuristique/piège, une carte verte symbolisant l'algorithme/réponse adéquate et l'attrape-piège (voir figure ci-dessous, Lubin, et al., 2012, p 68).



L'enseignant donne une carte-réponse verte à deux faces qui correspond à ce qu'il faut faire : sur une face est indiqué « si c'est pareil, je compare » et sur l'autre face, « si ce n'est pas pareil, je transforme » et pour ne pas tomber dans le piège, on met la carte rouge « je compare sans vérifier » sous les rayures, c'est l'attrape-piège. Pour chaque situation présentée lors de la première séance, on placera la carte verte au milieu de l'attrape-piège, en montrant la face qui correspond à la stratégie adéquate.

3. Lors de la troisième séance, un travail individuel est proposé avec d'autres situations et les élèves sont incités à utiliser la carte piège, la carte stratégie et l'attrape-piège s'ils le souhaitent. Une correction collective s'ensuit en explicitant l'unité dans laquelle on compare et en utilisant le matériel didactique.

Ce dispositif didactique expérimental, «original et novateur » selon les auteurs, serait bénéfique pour tous les domaines d'apprentissage, est réutilisé dans une recherche plus récente (Roell, et al, 2017) concernant la comparaison des nombres décimaux : il s'agit d'inhiber la stratégie heuristique «un plus grand nombre de chiffres implique un nombre plus grand » (par exemple, les élèves affirment que 1,45 est plus grand que 1,5). Malgré le fait que les auteurs parlent de l'importance de la «compréhension » et de la «conceptualisation » des nombres naturels et des nombres décimaux pour la poursuite académique des élèves, le travail effectué se réduit à la répétition de la «bonne stratégie » et au rejet de la mauvaise stratégie par le moyen des indices didactiques présents dans le matériel construit et par l'intervention directe de l'enseignant. Mentionnons également que cette stratégie d'enseignement est qualifiée d'efficace et de novatrice en comparaison avec des méthodes comme la répétition de la tâche et à une explication « cognitive et logique » du problème à résoudre par l'enseignant (Houdé, 2011). Aucune question n'est posée concernant la nature de la compréhension et de la conceptualisation que ce type de stratégies favoriserait. Ces auteurs ignorent les travaux développés depuis plus de 50 ans en didactique des mathématiques et, évidemment, semblent ne jamais avoir entendu le mot « contrat didactique ». Ce qui importe c'est l'injection de la « bonne stratégie » dans la tête des élèves à la manière d'un médicament, sans conflit et sans douleur. L'évaluation de cette stratégie d'enseignement est d'ailleurs toujours effectuée à court terme, par une méthodologie prétest/post-test à laquelle bien des didacticiens ont renoncé, car «1'on ne sait tester que les apprentissages que l'on anticipe, parce que l'on ne sait pas tester la vie des savoirs appris, ni dans le temps ni dans les situations où ils sont utilisables » (Mercier et Buty, 2004, p.1).

IV. L'APPROCHE DIDACTIQUE

Depuis les premiers travaux du courant français en didactique des mathématiques, les chercheurs font la distinction entre connaissances et savoirs (en tant que mémoire collective et collectivement constituée) et mettent en évidence que ce ne sont pas les savoirs l'objet de la transmission (enseignement), mais surtout la re-production de l'expérience permettant de désigner le savoir. Comme Sarrazy (2015) le remarque, «il ne s'agit pas de refaire encore (sur le modèle de l'enseignant), mais bien de faire de nouveau » (p. 6). Cette distinction entre connaissances et savoirs faite par la théorie de situations didactiques (Brousseau, 1990) permet de préciser la notion de «compréhension» d'un savoir spécifique par le biais des usages des connaissances associées et de leurs fonctions. Dans les modèles récemment présentés, les enseignants se substituent à leurs élèves pour les faire apprendre : de manière directe, dans l'enseignement explicite ou par les moyens des dispositifs didactiques qui anticipent l'enjeu didactique, dans l'apprentissage par inhibition. Le concept de contrat didactique ainsi que les paradoxes du contrat (Brousseau, 1990; Sarrazy, 1995) rendent compte des difficultés que cette substitution pose à la nature des apprentissages obtenus : « plus le maitre cherche à enseigner l'usage d'une règle, plus il réduit la possibilité de son usage » (Sarrazy, 1996, p.570). L'apprentissage se manifeste dans l'usage des connaissances dans de nouvelles situations et par

l'entremise de conduites nouvelles s'accordant aux contraintes des situations et aux savoirs enseignés (ce qui est loin d'être la copie de ce que l'enseignant a montré). Cependant, aucune des propositions d'enseignement récemment analysées ne fournissent des explications concernant la manière dont de ce qui a été appris par répétition peut être réutilisé dans des situations nouvelles. Au contraire, les différentes théories didactiques prévoient, dans les dispositifs d'enseignement, une organisation du milieu permettant des moments de travail autonome et élaborent des concepts (adidacticité, dévolution, institutionnalisation, phases de réinvestissement) et des explications théoriques justifiant la possibilité d'utilisation de ce qui a été appris dans des situations nouvelles.

La question de la nature des apprentissages obtenus (les significations) a été toujours une préoccupation centrale de la didactique des mathématiques et comme Sarrazy (2015) le souligne, « cette question n'est pas seulement scientifique, elle est aussi foncièrement et noblement politique, car elle pose inévitablement celle de savoir quel type d'hommes et de femmes l'École doit former » (p. 14). Nous réitérons donc cette question à la lumière des constats précédents : l'école doit-elle former des femmes et des hommes dans l'incertitude nécessaire et propre à l'apprentissage ou dressés à suivre les indications d'autrui pour entrer (à coup de marteau) dans le « bon chemin » vers la connaissance ?

D'autre part, les didactiques disciplinaires (Brousseau, 1990; Chevallard, 1989; Bronckart, 2007; etc.) ont mis en évidence que les recherches concernant la structuration des environnements d'apprentissage requièrent, dans la définition des leurs objets, la prise en compte de plusieurs variables et de leur interaction. À l'intérieur même d'un domaine scientifique, la spécificité de l'algèbre, par rapport à celle de la géométrie, pose des problèmes d'enseignement complètement différents qui ne peuvent se réduire à l'activation ou pas des aires cérébrales liées aux mathématiques. En particulier, la didactique des mathématiques montre que l'analyse des relations des élèves à l'égard des objets de savoir ne peut ignorer des contrats implicites régulant l'action didactique (Brousseau, 1990). De plus, l'adaptation des méthodes pédagogiques en fonction de l'activité naturelle de nos fonctions cérébrales ne peut ignorer les usages sociaux des savoirs : les mathématiques enseignées font partie d'une pratique sociale plus large que la pratique scolaire.

Considérant que l'étude d'une pratique d'enseignement ne peut se réduire à l'analyse de ses effets sur le cerveau des élèves et adoptant une approche systémique qui considère que connaître les mathématiques ne saurait se réduire à la connaissance de théorèmes ou d'algorithmes, mais à reconnaître leurs conditions d'usage, la didactique des mathématiques se propose d'étudier les conditions de l'installation dans le système didactique de situations d'enseignement qui engagent l'élève à produire des connaissances mathématiques. L'analyse de ces conditions, fondée en partie sur des aspects cognitifs et sur le développement des élèves, ne s'y réduit pas ; elle donne une place fondamentale à la nature du savoir mathématique et aux interactions élève-savoir-enseignant au sein du système didactique (Chevallard, 1985). Dans ce contexte, les propositions venant de la psychologie ou de la neuro-didactique, du type « manipuler des objets », « découper les tâches dans des petites tâches », se traduisent par une analyse spécifique du milieu.

En ce qui concerne les difficultés d'apprentissage, divers auteurs en didactique de mathématiques (Bloch et Salin, 2004; Deblois, 2003; Giroux, 2014; Roiné, 2009; Sarrazy, 2002; etc.) s'éloignent d'une interprétation des difficultés d'apprentissage exclusivement en termes de déficits cognitifs et proposent que les interventions d'enseignement ne portent pas sur les processus cognitifs ou les « spécificités » des élèves, mais sur les situations didactiques favorisant l'établissement de relations entre connaissance et situations. Les fonctions du savoir mathématique jouent un rôle essentiel autant dans l'interprétation des difficultés que dans la construction des environnements d'enseignement/apprentissage.

Enfin, remarquons que l'explicitation n'est pas absente dans les modèles didactiques, mais qu'elle prend de formes différentes : Brousseau (1990) souligne l'importance de l'explication des modèles implicites d'action pour qu'ils perdurent dans le temps et puissent être réinvestis dans des nouvelles situations et élabore des situations spécifiques (les situations de formulation) pour le rendre possible ; l'auteur introduit aussi la notion d'institutionnalisation favorisant le passage des connaissances de leur rôle de moyen de résolution d'un problème à celui de référence pour des utilisations futures. Brousseau (1990) introduit la notion d'obstacle comme :

Un ensemble de difficultés d'un actant (sujet ou institution), liées à "sa" conception d'une notion. Cette conception a été établie par une activité et par une adaptation correctes, mais dans des conditions particulières, qui l'ont déformée ou qui en ont limité la portée. Les difficultés créées par cette conception sont liées par des "raisonnements", mais aussi par les nombreuses circonstances où cette conception intervient. Ainsi la conception résiste au simple apprentissage d'une connaissance plus correcte. Les difficultés semblent disparaître, mais elles réapparaissent de façon inattendue et causent des erreurs par des relations insoupçonnées. L'identification et l'inclusion explicite du rejet d'un obstacle dans la nouvelle connaissance sont généralement des conditions nécessaires à son usage correct. (p.135)

La notion d'obstacle rejoint celle d'erreur récurrente mentionnée par Houdé (2000); cependant, en didactique des mathématiques, le dépassement de certaines difficultés associées à ces obstacles ne met pas l'accent sur une capacité ou un contrôle cognitif et comportemental (Houdé, 2000), mais sur un rejet explicite de l'obstacle dans le contexte de situations mettant en évidence les conditions d'usage des connaissances. Le rejet passe par le contrôle (par des connaissances) des situations didactiques et non pas par le récit (ou un entrainement guidé) de la bonne réponse.

V. UN DISCOURS ESSENTIALISTE QUI TRANSCENDE LE CHAMP DE L'ADAPTATION SCOLAIRE AU QUÉBEC : LE CAS DE L'ABSTRACTION

Dans le cadre de ce texte, nous avons montré, à l'aide d'une analyse de l'évolution du champ de l'adaptation scolaire, que le système d'éducation spécialisée est imprégné de l'analogie au monde de la médecine et que celle-ci implique un regard et un traitement particulier des

« difficultés d'apprentissage » qui évacue toutes questions d'ordre didactique. En effet, la prégnance du discours médical ainsi que la légitimité qui lui est accordée se repère dans les programmes éducatifs du Québec. Dès lors, l'apprentissage et les difficultés d'apprentissage en mathématiques sont traités comme des phénomènes strictement cognitifs; en particulier, l'apprentissage est considéré comme une appropriation individuelle et non comme une démarche collective, ce qui entraîne des recommandations orientées sur l'individualisation de l'enseignement et le traitement des capacités cognitives des élèves (Roiné, 2015).

Dans différents discours de l'adaptation scolaire au Québec, il est fréquemment mentionné que les élèves ont des « difficultés d'abstraction » qui entravent les apprentissages en mathématiques. Toutefois, bien que plusieurs pistes d'interventions soient proposées pour remédier aux « difficultés des élèves », la notion d'abstraction ou de difficultés d'abstraction en mathématiques qui émerge de ces discours reste floue. Afin de mieux comprendre la trame sous-jacente aux injonctions orientant les pratiques d'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire (discours institutionnels et pédagogiques), nous avons cherché, par l'entremise d'une analyse sémantique conceptuelle de contenu (Mucchielli, 2006), à identifier certains de leurs fondements théoriques et idéologiques (Bergeron, 2017).

Nos analyses nous ont permis de constater que l'abstraction est présentée comme étant du ressort de l'élève et en lien étroit à ses capacités cognitives, métacognitives, constituée notamment d'expériences « personnelles ». La nature des expériences, le rôle de l'enseignant et l'apport de la culture ne sont nullement mentionnés. L'abstraction est alors présentée comme un processus qui s'apprend, qui se transmet, qui se programme par le biais de stratégies cognitives et métacognitives, donc de règles à suivre.

Dans un premier temps, l'objectif de la métacognition a été d'amener les élèves à prendre conscience de la succession des opérations mentales qui conduisent à l'abstraction et à la généralisation. (Bath, p. 141)

Quant à elles, les difficultés d'abstraction sont liées à une certaine rigidité cognitive de l'élève ainsi qu'à des troubles de langage :

[...] Difficultés associées : Déficit de la mémoire et/ou autres fonctions exécutives ; Difficultés de perception du temps ; Rigidité/Difficultés de généralisation ; Difficultés d'abstraction. (CS de la Seigneurie-des-milles-îles, p. 19)

Dans la plupart des discours officiels (ministère de l'Éducation, commissions scolaires) et pédagogiques (*Un cerveau pour apprendre les mathématiques*, David A-Sousa, 2010 et *L'apprentissage de l'abstraction*, Britt-Mari Barth, 2013), l'abstraction en mathématiques est majoritairement perçue comme un processus générique qui est appuyé ou même extrait de l'expérience sensorielle : en conséquence, il serait préférable que les situations d'enseignement soient en lien avec le quotidien des élèves, de segmenter les tâches, de passer par le concret pour ensuite abstraire et de miser sur la manipulation d'objets concrets et cela, peu importe la nature des objets mathématiques en question.

De plus, si la spécificité de la mathématique, comme langage et comme outil d'abstraction, exige de traiter de façon abstraite les relations entre les objets ou les éléments de situations, son enseignement au secondaire <u>est plus efficace</u> lorsqu'il prend appui sur des objets concrets ou des éléments de situations tirées de la réalité. (PFEQ, 1^{er} cycle, 2006, p. 232)

Dans un tel contexte, le rôle de l'enseignant est de gérer les processus mentaux des élèves et il devient en premier lieu responsable du bon développement intellectuel de l'élève.

Pour amener l'élève à réussir dans ses activités mathématiques, **l'enseignant doit l'aider à gérer ses processus mentaux** et lui donner fréquemment l'occasion de s'interroger sur ce qu'il apprend et sur la manière dont il apprend (Programme de formation de l'école québécoise, (PFEQ, 2^e cycle, 2006, p.16)

L'évacuation de considérations didactiques s'effectue au profit d'une vision centrée sur la cognition de l'élève où l'enseignant n'est plus porteur du savoir dont il est spécialiste, mais il devient un « motivateur » d'élèves.

Par conséquent, les enseignants de mathématiques devraient chercher à créer des classes où les élèves sont motivés, car les apprenants motivés traitent activement l'information, ont une meilleure compréhension de la matière et ont de meilleures aptitudes en résolution de problèmes. Une telle approche répond aussi au besoin des élèves de participer activement à leur apprentissage *. (A.Sousa, 2010, p. 133, * en référence à A.Sousa, 2002)

Nos conclusions rejoignent en tout point celles de Roiné (2009) : « c'est en effet le cerveau de l'élève qui est mis au centre du système éducatif » (p.96). En cohésion avec l'idéologie mentaliste, les difficultés d'abstraction sont imputables à la cognition et, plus précisément, à des défauts cognitifs de l'élève. Écartant le fait que les objets de savoirs peuvent en eux-mêmes générer des difficultés (Fisher, 2009), les difficultés d'abstraction sont attribuées à des origines fonctionnelles, biologiques ou neurologiques. Dans certains cas, elles sont la résultante d'un manque de motivation et de volonté de l'élève.

Dans ce sens, puisque les élèves ont des «difficultés d'abstraction», des mécanismes de «réduction d'abstraction» basés sur la manipulation matérielle d'objets physiques sont mis en place, sous l'hypothèse que ces manipulations rendraient visibles les propriétés et les relations cherchées, celles-ci étant supposément contenues dans l'objet en question :

Présenter les problèmes par étapes simples; Enseigner les étapes et les gestes; Pratiquer le modelage (montrer à l'élève la démarche à voix haute) [...] Favoriser l'expérimentation concrète et la manipulation [...] Partir du concret vers l'abstrait (et non l'inverse). (CS de Laval, 2013, p. 50)

Les interventions dites efficaces pour traiter les difficultés d'abstraction sont en fait des interventions destinées à éviter et contourner les obstacles; dans ce contexte, elles réfèrent à certains phénomènes didactiques repérés au sein recherches en milieu francophone tels que la prévalence de la règle et le morcèlement des tâches (Bloch et Salin, 2004; Conne, 2003; Conne, Favre et Giroux, 2006; Giroux, 2013). En particulier, la prévalence accordée à la manipulation et au concret semble être le principal point phare à suivre par les enseignants dans l'organisation de

l'enseignement des mathématiques. Les implications de cette concrétisation des savoirs par rapport aux significations construites ont été partiellement identifiées par certains auteurs (Barallobres, 2009; Giroux, 2013; Roiné, 2010).

VI. REMARQUES FINALES

Les discours officiels légitiment les analyses des difficultés d'apprentissage en mathématique centrées sur le fonctionnement cognitif des élèves et proposent, en même temps, un ensemble de procédures et d'orientations guidées par ces analyses. Malgré quelques résistances à la « médicalisation de l'éducation », force est de constater que la figure du médecin et de la médecine (d'une certaine médecine) structure fortement l'imaginaire de ce que devrait être l'agir d'enseignant en adaptation scolaire. Une enquête informelle menée auprès de 33 étudiantes de maîtrise en orthopédagogie (février, 2018) identifie trois éléments essentiels dans le travail orthopédagogue : évaluation, diagnostic, intervention.

Comme Brousseau (1996) l'explicite, les procédés ostensifs sont souvent efficaces et économiques dans la vie courante et fonctionnent assez bien pour faire identifier une personne, une espèce animale ou un type d'objet, à l'aide d'un répertoire de reconnaissance « universel », en même temps qu'ils sont exigés banalement dans les rapports institutionnels élémentaires. Dans l'actuel paradigme éducatif à caractère économique et obsédé par la performance aux évaluations (surtout internationales), l'enseignement explicite resurgit en tant que technique « efficace » pour certaines formes de connaissances à condition qu'elles soient réinvesties immédiatement. En faisant fi de toutes les théories sur le langage (linguistiques, philosophiques, sociologiques), Gauthier et al. (2013) prétendent évacuer la question des rapports complexes entre l'implicite et l'explicite en affirmant que par le dire (rendre explicite pour les élèves les intentions et les objectifs visés dans la leçon et rendre explicites et accessibles les connaissances antérieures dont ils auront besoin), on éviterait les fausses interprétations, les « mal entendus », le non-dit. De plus, la non considération de la spécificité des savoirs (rappelons que les promoteurs de l'enseignement explicite ne sont pas des spécialistes disciplinaires), l'indifférence aux processus d'apprentissage à long terme et aux phénomènes d'enseignement conditionnant les significations des connaissances élaborées et l'adoption du concept banal de « transfert » (Côté et al., 2013) conduit à une extension non fondée de cette méthode à n'importe quel objet de savoir.

D'ailleurs, la fascination que provoquent chez le grand public les découvertes sur le fonctionnement du cerveau, l'illusion de trouver toutes les réponses aux questions que l'humanité se pose depuis des siècles dans des images cérébrales, la recherche d'explications par des mécanismes neuronaux mesurables, à l'occasion visibles, placent les neurosciences comme candidates à fonder « scientifiquement » et « solidement » une science de l'apprentissage. Sous l'hypothèse que les difficultés (d'apprentissage, d'adaptation, etc.) ont leur origine dans le « cerveau », les neurosciences éducatives développent une méthodologie de recherche

extrêmement exigüe, basée sur l'analyse des différences cérébrales entre cerveaux « affectés » et cerveaux « normaux » (remarquons que la définition des critères de « normalité » est elle-même la marque d'une orientation épistémologique forte souvent laissée étouffée). Ces orientations épistémologiques et idéologiques ont évidemment des conséquences éducatives. Supposer, par exemple, que les causes des difficultés d'apprentissage sont à chercher dans le cerveau des élèves implique de faire carrément l'impasse sur la spécificité des savoirs, le rôle de la culture, le contenu sémantique (et non pas seulement syntaxique) de la pensée, la place de l'enseignement, le poids des institutions, etc. Les phénomènes éducatifs sont dès lors interprétés dans un cadre strictement naturaliste.

Analyser et étudier la complexité de la pratique d'enseignement, comme le fait la didactique des mathématiques, d'un point de vue systémique, sans faire appel aux techniques de management appliquées à l'école ou à celles de la recherche médicale, en développant des éléments théoriques pour interpréter ce que l'on observe, adoptant comme mode de production de connaissance la confrontation d'interprétations et de paradigmes va à l'encontre de « la prétention positiviste à l'universalité » (Habermas) et de la vénération de La Science comme la nouvelle religion des temps modernes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- A. SOUSA, D. (2010). Un cerveau pour apprendre les mathématiques. Montréal : Chenelière Éducation.
- ARSAC, G. & MANTE, M. (1988). Le rôle du professeur, Aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique. Grenoble : LSD-IMAG, pp. 79-105.
- ARTIGUE, M. (1989). Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 281-308.
- BARALLOBRES, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. *Petit x*, 80, 55-76.
- BARALLOBRES, G. (2017). Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. *Revista Union.* 51, 27-47.
- BARALLOBRES, G. (2018). Réflexions sur les liens entre neurosciences, mathématiques et éducation. *McGill Journal of Education*. Sous presse.
- BARDINI, C. (2003). Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot-Paris VII.
- BARTH, B. M. (2013). L'apprentissage de l'abstraction (2^e éd.). Montréal : Chenelière Éducation.
- BEILLEROT, J. (2003). L'analyse des pratiques professionnelles: pourquoi cette expression? *Cahiers pédagogiques. Cercle de Recherche et d'Action Pédagogiques, 346*, 12-13. En ligne : http://www.cahiers-pedagogiques.com/L-analyse-des-pratiques-professionnelles-pourquoi-cette-expression
- BERGERON, L. (2017). Difficultés d'abstraction en mathématiques : certains fondements théoriques et idéologiques du discours noosphérien de l'adaptation scolaire. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.
- BISSONNETTE, S., RICHARD, M., GAUTHIER, C. & BOUCHARD, C. (2010). Quelles sont les stratégies d'enseignement efficaces favorisant les apprentissages fondamentaux auprès des élèves en difficulté de niveau élémentaire? Résultats d'une méga-analyse. Revue de recherche appliquée sur l'apprentissage, 3(1), 1-35.
- BLOCH, I. & SALIN, M-H. (2004). *Contrats, milieux, représentations : études des particularités de l'AIS*. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM, Paris : Université de Paris 7.
- BOURDIEU, P. (1980). Le sens pratique. Paris : Éditions de Minuit.
- BRONCKART, J.P. (2007). De l'activité collective à l'action et à la pensée individuelles pour une psychologie fermement vygotskienne. In M. Merri (dir.), *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud* (pp. 121-141). Toulouse : Presses Universitaires du Mirail.
- BROUSSEAU, G. (1996). *Théorie des situations didactiques*, Cours donné à l'Université de Montréal en juin 1997 à l'occasion de la remise du doctorat *honoris causa* à G. Brousseau.

- BROUSSEAU, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 309-336.
- BROUSSEAU G. & CENTENO J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. Recherches en Didactique des Mathématiques (éd.) La Pensée sauvage, 11 (2.3), 167-210.
- BRUN, J. (2008). Pour les débats de RDM. Recherche en didactique des mathématiques, 28(1), 67-69.
- CHEVALLARD, Y. (1985). La transposition didactique Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1989). On Didactic Transposition Theory: Some Introductory Notes. In International Symposium on Research and Development in Mathematics (pp. 51-62). Bratislava, Czechoslavakia.
- CHEVALLARD, Y. (1991). La transposition didactique. Grenoble : La pensée sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (2009, mars). Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée ? Les mathématiques dans la cité. Exposé présenté dans le cadre des conférences de la famille mathématique (IUFM) Académie d'Aix-Marseille.
- COMMISSION SCOLAIRE DE LAVAL. (2013). *Vers des pratiques pédagogiques adaptées : guide d'accompagnement*. Laval : l'auteur. Récupéré de http://www.aqifga.com/spip/IMG/pdf/GUIDE_EBP_Nov2013.pdf
- COMMISSION SCOLAIRE DE LA SEIGNEURIE-DES-MILLES-ÎLES. (s.d). Les difficultés d'apprentissage. Saint-Eustache : CSSMI.
- CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 12*(2), 221-270.
- CONNE, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées, *ACELF*, *31*(2), 82-102.
- CONNE, F., FAVRE, J-M. & GIROUX, J. (2006). Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. In P.A Doudin, L. Lafortune (dir.), *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers : quelle formation à l'enseignement ?* (pp.117-142). Québec : Presses Universitaires du Québec.
- COTE, M.-F., MERCIER, J. & LAPLANTE, L. (2013). L'efficacité d'une intervention orthopédagogique sur le transfert des apprentissages en lecture : étude de trois cas d'élèves en difficulté. *Revue Canadienne de l'Éducation*, 36(3), 72–107. Récupéré de http://www.jstor.org/stable/canajeducrevucan.36.3.72
- COWLEY, P. (2014). Bulletin des écoles secondaire du Québec 2014. Repéré à https://www.fraserinstitute.org/sites/default/files/quebec-secondary-school-rankings-20140.pdf
- DEBLOIS, L. (2003, Juin). Les enjeux d'une formation continue chez des orthopédagogues. 20e Congrès de l'Association Internationale pour la Pédagogie Universitaire (AIPU). Sherbrooke.
- DEHAENE, S. (1997). La bosse des maths. Paris : Odile Jacob.
- DEHAENE, S. (2010). La bosse des maths 15 ans après. Paris : Odile Jacob
- DEHAENE, S. (2011). Apprendre à lire Des sciences cognitives à la salle de classe, Paris : Odile Jacob.
- ELLIS A. & FOUTS J. (1993). Research on educational innovations. Princeton: Eye on Education.
- FAVRE, J-M. (1997). L'échec, le temps, la multiplication : étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication dans une classe spécialisée, par comparaison avec l'enseignement et l'apprentissage de la même opération dans une classe primaire. Mémoire de maîtrise. Université de Genève.
- FAVRE, J-M. (2003, mars). Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé. In Actes du Séminaire national, ARDM (pp.109-126). Paris : Université Paris Diderot.
- FISCHER, J.-P. (2009). Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale. *ANAE Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant*, 21(102), 117-133.
- FRENAY, M. (1994). Apprentissage et transfert dans un contexte universitaire, Thèse de doctorat non publiée. Louvain-la-Neuve : université catholique de Louvain.
- GAUSSEL, M. & REVERDY, C. (2013). Neurosciences et éducation: la bataille des cerveaux. *Dossier de veille de l'IFÉ*, 86, 1-40. Réupéré de https://ife.ens-lyon.fr/vst/DA-Veille/86-septembre-2013.pdf
- GAUTHIER, C., BISSONETTE S. & RICHARD, M. (2013). Enseignement explicite et réussite des élèves. Bruxelles: De boeck. GIROUX, J. (1999). La formation professionnelle à l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire: quel rôle peut jouer la didactique? In A. Jeannel, J.P. Martinez et G. Boutin (dir.). Les recherches enseignées en espaces francophones, Sciences en construction et enseignement universitaire (pp. 159–180). Montréal: Groupe Lire.

- GIROUX, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 303–327. DOI:10.7202/012671ar
- GIROUX, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Education & didactique*, 7(1), 59-86.
- GIROUX, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. In C. Mary et L. Theis (éds), Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques. (pp. 11-44). Presses de l'Université du Québec.
- GIROUX, J. & RENE DE COTRET, S. (2001). Le temps didactique en classe de doubleurs. Actes de l'AFDEC, 7 et 8 juin 1999, Montréal: Université de Montréal.
- GONÇALVES, G. & LESSARD, C. (2013). L'Évolution du champ de l'adaptation scolaire au Québec : politiques, savoir légitimes et enjeux actuels. *Canadian Journal of Education/Revue canadienne de l'éducation*, 36(4), 327-373. Récupéré de http://journals.sfu.ca/cje/index.php/cje-rce/article/view/1352
- GROSSMANN, S. (2009). Les dispositifs groupaux d'analyse des pratiques au service du développement professionnel des enseignants. Quelles analyses? Quelles pratiques? Quel professionnel? *Canadian Journal of Education*, 32(4), 764–796.
- HABERMAS, J. (1979). Connaissance et intérêt. Paris : Gallimard.
- HAMMERSLEY, M. (2002) Educational research, policymaking and practice. London: Paul Chapman/Sage.
- HOUDÉ, O. (2000). La genèse de la cognition. In O. Houdé et C. Meljac (Eds.), *L'esprit piagétien*. (pp. 127-148). Paris: PUF (2ème édition en 2004).
- HOUDE, O. (2011). Imagerie cérébrale, cognition et pédagogie-Imagerie et cognition (6). *Médecine/sciences*, 27(5), 535-539.
- HOUDÉ, O. (2015). Cognitive development during infancy and early childhood across cultures. In J.D. Wright (Ed.), *International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences*, (2nd Ed) (pp. 43-50). Oxford: Elsevier Science.
- LUBIN, A., LANOE, C., PINEAU, A. & ROSSI, S. (2012). Apprendre à inhiber : une pédagogie innovante au service des apprentissages scolaires fondamentaux (mathématiques et orthographe) chez des élèves de 6 à 11 ans. *Neuroéducation, I* (1), 55–84.
- MARTINEZ, G. (1999). Les programmes universitaires en EASS, ASS ou en orthopédagogie : chronique annoncée d'une rupture entre les cycles. In A. Jeannel, J.P. Martinez et G. Boutin (dir.). Les recherches enseignées en espaces francophones, Sciences en construction et enseignement universitaire. (pp. 51-72). Montréal : Groupe Lire.
- MARY, C. (2003). Interventions orthopédagogiques sous l'angle du contrat didactique. Éducation et francophonie, 31(2), 103-124.
- MASSELOT, P. & ROBERT, A. (2007). Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques, *Recherche et Formation* (56), 15-31.
- MASSON, S. (2014). Cerveau, apprentissage et enseignement. Mieux connaître le cerveau peut-il nous aider à mieux enseigner ? Éducation Canada, 54(4), 40-43.
- MASSON, S. (2015). Les apports de la neuroéducation à l'enseignement : des neuromythes aux découvertes actuelles. *A.N.A.E, 134*, 11-22.
- MERCIER, A. (1985). Le temps des systèmes didactiques. En ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01397032/document
- MERCIER, A. & BUTY, C. (2004). Evaluer et comprendre les effets de l'enseignement sur les apprentissages des élèves: problématiques et méthodes en didactique des mathématiques et des sciences. *Revue française de pédagogie, 148*, 47-59.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (1999). Une école adaptée à tous ces élèves : Politique de l'adaptation scolaire. Québec : Les publications du Québec.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (2006a). Classe ordinaire et cheminement particulier de formation temporaire. Analyse du cheminement scolaire des élèves en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage à leur arrivée au secondaire. Québec : Les publications du Québec.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (2006b). Programme de formation de l'école québécoise : Domaine de la mathématique et de la technologie, enseignement secondaire, 1^{er} cycle. Québec : Les publications du Québec. Récupéré de http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire1/pdf/chapitre061v2.pdf

- MINISTERE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (2007). L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage. Québec : Les publications du Québec.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET RECHERCHE. (2016). Voie 2- Établir des cibles de réussite pour chaque commission scolaire et en assurer le suivi. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/dossiers-thematiques/lutte-contre-le-decrochage-et-reussite-scolaire/strategie-daction-visant-la-perseverance-et-la-reussite-scolaires/treize-voies-de-la-reussite/2/">http://www.education.gouv.qc.ca/dossiers-thematiques/lutte-contre-le-decrochage-et-reussite-scolaire/strategie-daction-visant-la-perseverance-et-la-reussite-scolaires/treize-voies-de-la-reussite/2/">http://www.education.gouv.qc.ca/dossiers-thematiques/lutte-contre-le-decrochage-et-reussite-scolaire/strategie-daction-visant-la-perseverance-et-la-reussite-scolaires/treize-voies-de-la-reussite/2/
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION ET DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR. (2017). Document de consultation : Pour la création d'un institut d'excellence en éducation. Québec : Les publications du Québec.
- MUCCHIELLI, R. (2006). L'analyse de contenu des documents et des communications (9e éd.). Issy-les-Moulineaux : Les éditions ESF.
- NORMAND, R. (2006). Les qualités de la recherche ou les enjeux du travail de la preuve en éducation. Éducation et sociétés, 18(2), 73-91.
- NORMAND, R. (2015). « Qu'est-ce qui marche ? » : De la santé à l'éducation, la fabrication d'une politique européenne de la preuve. In Actes du colloque du Congrès National de l'Association Française de Science Politique AFSP (s.p). Aix-en-Provence.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1993). Questions didactiques à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1.2(13), 5–118.
- ROELL, M., VIAROUGE A., HOUDÉ, O. & BORST, G. (2017). Inhibitory control and decimal number comparison in schoolaged children. *PLoS ONE*, *12*(11) https://doi.org/10.1371/journal.pone.0188276
- ROINE, C. (2005). Étude des effets didactiques des idéologies pédagogiques : Contribution à une approche anthropodidactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Mémoire de maîtrise. Université de Bordeaux 2.
- ROINE, C. (2009). Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA: Une contribution à la question des inégalités. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux 2.
- ROINE, C. (2010). Caractérisation des difficultés en mathématiques des élèves de SEGPA. La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, 4, 73-87.
- ROINE, C. (2014). Les paradoxes de l'aide aux «élèves en difficulté » dans l'enseignement des mathématiques. In C. Mary et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques* (pp. 45-62). Presses de l'Université du Québec.
- ROINE, C. (2015). La fabrication de l'élève en difficulté. Postulats et méthodes pour l'analyse d'une catégorisation dans le champ scolaire. Éducation et socialisation, Les cahiers du CERFEE, (37). DOI: 10.4000/edso.1138
- ROSENSHINE, B. & STEVENS, R. (1986). Teaching functions. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rded.) (pp. 376-391). New York: Macmillan.
- SALIN, M.-H. (2007). À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour des élèves en grande difficulté scolaire. In J. Giroux et D. Gauthier (dirs.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (pp. 195–217). Montréal, OC: Bande didactique.
- SARRAZY, B. (1995). Note de synthèse [Le contrat didactique]. Revue française de pédagogie, 112(1), 85-118.
- SARRAZY, B. (1996). La sensibilité au contrat didactique : Rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux II, Bordeaux.
- SARRAZY, B. (1997). Sens et situations : Une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 135-166.
- SARRAZY, B. (2002). Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques : Contribution à l'étude des inégalités scolaires à l'école élémentaire. Habilitation à diriger des thèses. Université Victor Segalen Bordeaux 2.
- SARRAZY, B. & ROINE, C. (2006, mai). Du déficient léger à l'élève en difficulté : Des effets de la différenciation structurelle sur différenciation didactique. *Colloque espace mathématique francophone*. Actes de colloque, Sherbrooke, 27-31 mai 2006. Sherbrooke : EMF.
- SARRAZY, B. (2015). Règles, obéissance et transgression: L'enjeu de leurs rapports pour l'enseignement des mathématiques. *Chroniques*, 1-16. UQAM. Récupéré de http://chroniques.uqam.ca/index.php/2016/02/01/sarrazy2015transgression/
- SAUSSEZ, F. & LESSARD, C. (2009). Entre orthodoxie et pluralisme, les enjeux de l'éducation basée sur la preuve. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, *168*, 111-136. https://doi.org/10.4000/rfp.1804

Toullec-Thery, M. (2006). Aider les élèves « peu performants » en mathématiques à l'école primaire : quelles actions des professeurs? Étude in situ des professeurs des écoles de classes ordinaires et de maîtres spécialisés à dominante pédagogique. Thèse de doctorat. Université de Rennes 2.

CONCEPTION D'UN DISPOSITIF POUR ETUDIER LES DECISIONS DIDACTIQUES D'UN ENSEIGNANT DANS UN EIAH

Nathalie **BRASSET**

Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Université Grenoble Alpes

nathalie.brasset@univ-grenoble-alpes.fr

Mots clés

Décisions didactiques, EIAH, ingénierie didactique, numération, école primaire

Le texte qui suit est composé de trois parties : la première présente l'objet de ma recherche, la deuxième ma méthodologie ou plus précisément la spécificité de mon ingénierie didactique et la dernière partie présente rapidement la forme des résultats obtenus.

Mon travail de recherche porte sur les décisions didactiques de l'enseignant, l'objectif étant de concevoir un modèle de ces décisions, en situation didactique, dans un EIAH. Un tel modèle est utile, par exemple, pour développer un système capable d'accompagner l'enseignant dans sa pratique.

En classe, nous pouvons observer les interactions élèves-enseignants, elles correspondent à une suite d'actions alternant des actions de l'enseignant d'une part et de l'élève d'autre part. Une action de l'enseignant suite à une action de l'élève correspond à une rétroaction : c'est le résultat d'une décision didactique. Afin d'étudier les actions de l'enseignant lors d'une séance d'exercices, nous avons construit un dispositif composé : (1) d'un outil de simulation dont les fondements sont didactiques et (2) d'un outil d'orchestration1. Via notre dispositif nous avons accès aux actions de l'enseignant sachant les informations consultées concernant la production de l'élève et pouvons inférer sur ses décisions didactiques.

Nous précisons dans cette partie quelques éléments de notre méthodologie afin de mieux comprendre l'importance de la conception du dispositif dans notre travail. Dans chacune des quatre phases2 de notre ingénierie didactique nous retrouvons deux niveaux : l'un concernant le savoir (la numération en cycle 2) et l'autre concernant l'objet d'étude (les décisions didactiques des enseignants en classe). La spécificité de cette ingénierie est le travail coopératif chercheurs-enseignants lors des phases d'analyse et de conception. Dans ces deux phases, nous avons choisi d'impliquer les enseignants au niveau du savoir en nous fondant sur leurs pratiques et limiter de cette façon l'interprétation qu'ils pourraient faire d'une situation construite par le chercheur.

Nos analyses préalables sont ainsi de deux types : d'une part, un travail théorique concernant la numération en cycle 2 - nous reprenons dans le cadre du formalisme T4TEL3 une partie du

¹ Orchestration au sens de (Dillenbourg, 2013).

² Analyses préalables ; phase de conception ; expérimentation ; Analyse a posteriori, validation (Artigue, 1988).

³ « T4TEL s'inscrit dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1999) et plus spécifiquement dans l'approche praxéologique (Bosch et Chevallard, 1999) : ce modèle calculable représente une

travail de (Tempier, 2013) sur la numération – et, d'autre part, un travail empirique sur les décisions didactiques et l'enseignement de la numération dans des classes données. Nous avons travaillé avec des enseignants afin de comprendre leurs pratiques et d'établir l'ensemble des rétroactions qu'ils envisageaient par rapport à des productions ou des procédures d'élèves données. Nous avons, ainsi, constitué un cahier des charges pour l'outil de simulation côté élève et l'outil d'orchestration côté enseignant. L'outil de simulation permet de proposer tous les types d'exercices que les enseignants soumettent à leurs élèves avec le matériel tangible ainsi que de nouveaux exercices qui présentent un réel intérêt didactique puisqu'ils permettent de travailler le principe de position et le principe décimal de façon indépendante ou à des niveaux de difficulté plus ou moins élevés. L'outil d'orchestration (Wang, 2016), suffisamment simple d'utilisation pour ne pas perturber nos observations, permet d'informer l'enseignant des productions des élèves au fur et à mesure et d'organiser l'activité des élèves en temps réel. Cet outil ne contraint pas l'enseignant mais lui permet au contraire de nouvelles actions. Ce travail avec les enseignants sur deux années scolaires nous a donc permis de construire un dispositif d'observation des décisions didactiques constitué d'outils familiers pour les élèves et leur enseignant.

Via ce dispositif nous recueillons d'une part les actions des élèves et d'autre part celles de l'enseignant; en étudiant les régularités des couples (actions d'un élève; action de l'enseignant) observés et en complétant par des données externes du point de vue de l'ingénierie (observations de séances ordinaires) nous accédons aux décisions didactiques de l'enseignant et montrons l'importance des connaissances de type épistémique4 mais également de type histoire didactique5 dans ses prises de décisions (Brasset, 2017).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 281-308.

BESSOT, A., CHAACHOUA, H., GEOFFROY, C., GIRAULT, I., HERITIER, C., JOLIVET, S., & WAJEMAN, C. (2013). Décisions didactiques des enseignants de sciences. In *Problèmes du rapport scolaire et social aux mathématiques : identification des causes et propositions de solutions.*

BRASSET, N. (2017). Les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH. Etude de facteurs de type histoire didactique. Université Grenoble Alpes.

CHAACHOUA, H., & BESSOT, A. (2016). La notion de variable dans le modèle praxéologique. In Le paradigme du questionnement du monde dans la recherche et l'enseignement.

DILLENBOURG, P. (2013). Design for classroom orchestration. Computers & Education, 69, 485-492.

TEMPIER, F. (2013). La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Paris-Diderot - Paris VII.

WANG, P. (2016). Chao: Un framework pour le développement de systèmes supportant l'orchestration d'activités sur tablettes en classe. Université Grenoble Alpes.

formalisation et une extension du modèle praxéologique répondant à la double exigence, celle de calculabilité d'une part et celle de production de différents services EIAH d'autre part. »(Chaachoua & Bessot, 2016).

⁴ Rapport personnel de l'enseignant par rapport au savoir et à l'apprentissage (Bessot et al., 2013).

⁵ Histoire partagée entre l'enseignant et les élèves à propos du savoir enjeu d'apprentissage (Bessot et al., 2013)

LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS DANS LE SECONDAIRE EN FRANCE ET AU CAMBODGE

Ratha LOENG

Université Paris Diderot - Paris 7 loengratha@hotmail.com

Résumé

La trigonométrie et les fonctions trigonométriques sont intéressantes mais peu traitées en didactique des mathématiques. Nous nous intéressons à l'apprentissage par les élèves de ces concepts mathématiques dans l'enseignement secondaire.

Pour notre étude, nous choisissons la Théorie Anthropologique du Didactique comme cadre théorique. Nous déterminons les organisations mathématiques locales (ou régionales) correspondant à la trigonométrie du triangle, à la trigonométrie du cercle trigonométrique et enfin aux fonctions trigonométriques à partir de l'étude des programmes français et cambodgiens d'enseignement de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans le secondaire, à quoi nous associons un travail sur une sélection de manuels. Nous élaborons à l'aide des outils de la Double Approche didactique et ergonomique un questionnaire destiné à des élèves de Terminale Scientifique. L'ensemble des résultats nous conduit à concevoir, à l'aide des outils de la Théorie des Situations Didactiques, une situation didactique qui a pour but de faire découvrir les notions de fonctions sinus et cosinus au niveau de la Terminale Scientifique en France et au niveau 11e (1re S en France) au Cambodge.

Mots clés

Trigonométrie, passage du concept, fonctions, secondaire, questionnaire, situation didactique

I. TRIGONOMETRIE – FONCTIONS SINUS ET COSINUS

1. Questionnaire – Exemples de difficultés d'élèves

Situation didactique (Terminale Scientifique)

Nous travaillons sur une organisation mathématique (OM) locale (ou régionale) des manuels de mathématiques français et cambodgiens. Nous faisons le choix de définir trois OM différentes: (1) Trigonométrie du triangle, située dans le domaine « Géométrie » ; (2) Trigonométrie du cercle trigonométrique, située dans le domaine « Géométrie de coordonnées » ; (3) Fonctions sinus et cosinus, situées dans le domaine « Analyse ».

L'analyse des manuels nous conduit à élaborer un questionnaire pour soulever les difficultés, attendues ou non, des élèves en Terminale Scientifique sur les savoirs appris liés à la trigonométrie et aux fonctions trigonométriques. L'étude sur l'OM de la Théorie

Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999), avec les types de tâches clefs repérés, nous aide à affiner le choix des six questions du questionnaire sous forme d'exercices. Nous choisissons la Double Approche didactique et ergonomique (Robert, 2008) qui nous fournit des outils fins pour l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* sur les connaissances en jeu. Dans ce poster, nous montrons, avec quelques exemples, certaines difficultés remarquables revélant une grande confusion chez un certain nombre d'élèves en Terminale Scientifique.

Grâce aux résultats obtenus au questionnaire et à l'étude sur l'OM des manuels, nous posons la question suivante : l'introduction du radian (nouvelle unité de mesure des angles) est-elle génératrice d'une confusion entre les objets **angle**, **longueur** et **nombre réel** avec des changements de cadres non explicités lors du passage « des savoirs à enseigner » à « des savoirs enseignés » puis à « des savoirs appris » ?

Nous élaborons alors une situation didactique, en Terminale Scientifique en France et en $11^{\rm e}$ S en France) au Cambodge, dont les objectifs sont, d'une part, de faire réfléchir les élèves sur le fait que l'on définit ces notions à partir de la longueur d'un arc du cercle trigonométrique, et d'autre part, d'expliciter aussi clairement que possible la périodicité d'une fonction et de faire éviter une confusion possible entre angles (cercle trigonométrique) et nombres réels (courbe représentative) à $2k\pi$ près. La situation didactique débute dans un cercle de rayon R; à partir du cercle trigonométrique vu en $2^{\rm de}$ et en $1^{\rm re}$ Scientifique, les élèves travaillent sur les fonctions a et b définies par les coordonnées d'un point sur le cercle (sans rappeler qu'il s'agit des cosinus et sinus) en complétant un tableau de valeur sur les trois premiers tours (pour faire apparaître la notion de périodicité), un tableau de variation sur les deux premiers tours et un tableau de signe. La suite du travail se poursuit sur un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra) afin de mettre en évidence le lien entre le repérage sur le cercle trigonométrique et les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus avec l'intérêt de restreindre l'étude au cas particulier R=1.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2).

ROBERT, A. (2008). Partie1 - Chapitre 2 – Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants. *OCTARES* 2008. LOENG, R. (2017). Learning sine and cosine in French secondary schools. CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland.